

102-121-7716

MOTC-IOT-101-H2DA002

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性 理論及可預測性研究(4/4)



交通部運輸研究所

中華民國 102 年 6 月

102-121-7716

MOTC-IOT-101-H2DA002

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性 理論及可預測性研究(4/4)

著 者：徐進華

交通部運輸研究所

中華民國 102 年 6 月

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究.
(4/4) / 徐進華著. -- 初版. -- 臺北市：交通部運研所,
民 102.06

面；公分

ISBN 978-986-03-7292-2(平裝)

1.波動 2.數值分析

351.9

102012495

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究(4/4)

著者：徐進華

出版機關：交通部運輸研究所

地址：10458 臺北市敦化北路 240 號

網址：www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電話：(04)26587176

出版年月：中華民國 102 年 6 月

印刷者：

版(刷)次冊數：初版一刷 80 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站

定價：100 元

展售處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 臺北市中山區松江路 209 號 F1•電話：(02)25180207

五南文化廣場：40042 臺中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1010201254

ISBN：978-986-03-7292-2 (平裝)

著作財產權人：中華民國(代表機關：交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部份內容者，須徵求交通部運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究 (4/4)			
國際標準書號（或叢刊號） ISBN978-986-03-7292-2 (平裝)	政府出版品統一編號 1010201254	運輸研究所出版品編號 102-121-7716	計畫編號 101-H2DA002
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計畫主持人：徐進華 聯絡電話：04-26587182 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 101 年 01 月 至 101 年 12 月
關鍵詞：完全非線性波、垂直剪流、波被流阻塞及反射、數值模擬、深海瘋狗浪			
摘要： 本研究將可快速計算二維完全非線性未碎波之 Clamond-Grue method 加以延伸，使能應用於此一波列平行行進在一垂直剪流上情況。在此延伸中我們將波浪場之旋性部份與非旋性部份分開，並建立兩者間關係式以做為獨立解非旋性部份之 closure relationship，故可充分應用 Clamond-Grue method，且可避免 Nwogu (2009)方法中對剪流所做的一些限制，僅需採用其中之平均流在垂直方向分佈近乎線性之假設。應用目前的數值方法我們明確證明完全非線性波可被一垂直剪流阻塞及反射，且此一過程十分穩定，故可普遍發生於自然界，因而極可能與深海瘋狗浪有關。 成果效益： 1. 本研究所發展的數值方法可較準確地模擬非線性波與垂直剪流間各種交互作用現象，故極具應用價值。 2. 本研究因證實波即使為非線性，仍可被一垂直剪流穩定地阻塞及反射，故顯示瘋狗浪確可能主要因波被流阻塞及反射而引發，此點將有助於未來在臺灣建立一瘋狗浪預報系統。 後續應用： 本計畫之研究成果，可應用於臺灣附近以往所發生的海難進行案例分析，以瞭解它們是否大部份與波被流阻塞及反射現象有關，未來即可建立一有效之瘋狗浪預報系統。			
出版日期	頁數	定價	本出版品取得方式
102 年 5 月	56	100	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 （解密條件： ☐ 年 ☐ 月 ☐ 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密） ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: The rotational nonlinear theory and the predictability of the freak waves in deep water near Taiwan (4/4)			
ISBN (ORISSN) ISBN978-986-03-7292-2 (pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1010201254	IOT SERIAL NUMBER 102-121-7716	PROJECT NUMBER 101-H2DA002
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Chiu Yung-fang PRINCIPAL INVESTIGATOR: Shyu Jinn-hwa PHONE: 886-4-26587182 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2012 TO December 2012
KEY WORDS: Fully nonlinear waves, Vertically shear currents, Blockage and reflection of waves by currents, Numerical simulations, Freak waves			
ABSTRACT: The fast computational method derived by Clamond & Grue (2001) for two-dimensional fully nonlinear non-overtaking waves is extended for simulation of these waves propagating on a unidirectional; vertically shear current in the direction parallel to this current. To achieve this purpose, the wave field is decomposed into an irrotational component and a rotational one and a special relation between these two components is subsequently derived, which can serve as a closure equation when the irrotational component is solved independently by using the Clamond-Grue method, after which the rotational component can also be estimated at the free surface. This approach involves fewer assumptions than that developed by Nwogu (2009) so that only the assumption that the current profile in the vertical direction is nearly linear has been made here. By using this numerical scheme, we clearly demonstrate that even nonlinear waves can be blocked and reflected by a vertically shear current, and since this phenomenon is stable, it is not unusual to be seen in the ocean and may therefore be related to freak waves. BENEFITS: 1. The numerical scheme developed here can simulate the wave-current interaction with fewer restrictions as compared with the previous methods and therefore has a wide application. 2. The demonstration of the theory that steep surface gravity waves can stably be blocked and reflected by a vertically sheared current can put more confidence in the idea that freak waves are induced mainly by this process, which can benefit the future development of a freak wave forecasting system. APPLICATIONS: The results given here will in the fourth year of the project be applied in a case study to decide whether or not the boat casualties occurred previously in the regions near Taiwan are mostly due to the blockage and reflection of waves by currents. The development of a reliable freak wave forecasting system will become possible.			
DATE OF PUBLICATION June 2013	NUMBER OF PAGES 56	PRICE 100	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

目 錄

中文摘要表	I
英文摘要表	II
圖目錄	IV
第一章 前言	1
第二章 非線性波行進在剪流上之演化方程式	3
第三章 Nwogu method 之限制	7
第四章 分解波浪場為旋性與非旋性兩部份	9
第五章 新增 Closure relationship	12
第六章 Clamond-Grue method 之 Closure relationship	17
第七章 數值解法	20
第八章 測試電腦程式	24
第九章 波之旋性分量數值解	27
第十章 非線性波被垂直剪流阻塞及反射現象數值解析	29
第十一章 結論與建議	31
參考文獻	32

圖 目 錄

圖1、鋸齒狀不穩定現象化減前後及不同化減法所產生的結果	34
圖2、平均流在水平方向之分佈。數字之單位採m.k.s. 制	35
圖3、離散關係式(曲線) 與運動守恆方程式(直線) 之解	36
圖4、線性波被垂直剪流阻塞及反射現象之數值解。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$	37
圖5、與圖4相同之解, 但表為 η 在固定位置上隨時間變化圖	38
圖6、阻塞點位置隨 U'_0 值變化之解析解 (曲線) 與數值解 (圓圈)。 $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$..	39
圖7、阻塞點位置隨 U''_0 值變化之解析解 (曲線) 與數值解 (圓圈)。 $U'_0 = 1.2 \text{ sec}^{-1}$..	40
圖8、當 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 時, 波之旋性速度分量 $\hat{u}_s$ 之解 (圓圈), 但為與 η/a 解 (曲線) 及在圖12中與其他資料相比, 改用 $0.532\hat{u}_s/aU''_0$ 表示 ($t = 3000 \text{ sec}$)	41
圖9、與圖8之下圖相同之 η 解	42
圖10、與圖8相同, 但將其下圖之 $\hat{u}_s$ 施加一 high-pass filter	43
圖11、當 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 時, 波之旋度 (表為無因次參數 Ω_η/aU''_0) 之解 (圓圈), 曲線表 η/a 之解 ($t = 3000 \text{ sec}$)	44
圖12、圖10之 $0.532\hat{u}_s/aU''_0$ 解 (圓圈) 與圖11之 Ω_η/aU''_0 解 (曲線)	45
圖13、各種振幅情況下之數值解 ($t = 2500 \text{ sec}$)。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$	46
圖14、當 $a = 0.1 \text{ m}$ 及 $a = 0.12 \text{ m}$ 時, 分別使用兩倍波長(曲線) 及三倍波長 (圓圈) 之 λ 所獲結果 ($t = 2500 \text{ sec}$)。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$...	47
圖15、上下圖之曲線分別為圖14之下圖中用兩倍波長及三倍波長之 λ 所獲結果, 圓圈則為其將波譜改為用零延伸為8/2倍長度之結果	48
圖16、上下圖之曲線分別為 $t = 2500 \text{ sec}$ 及 $t = 2000 \text{ sec}$ 時, 將波譜用零延伸 為4/2倍長度之解, 圓圈則為其將波譜改為用零延伸為8/2倍長度之結果。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$	49
圖17、上圖為圖16之下圖中圓圈所代表的解, 下圖則為與其相對應之 水面坡度解	50
圖18、與圖13相同, 但 $U''_0/U'_0 k_0 = 0$	51

第一章 前言

深海瘋狗浪 (freak, rogue, or giant waves) 經常發生在波逆行在一大尺度流上情況, 最著名的例子是在南非東南外海常有大型船隻被瘋狗浪嚴重破壞, 甚至打成兩半, 而經 Mallory (1974) 之分析發現, 在此發生之 11 件海難中, 除 1 件外, 其他皆發生於波逆行在 Agulhas current 上情況 (參見 Smith 1976)。另外, Irvine & Tilley (1988) 將用合成口徑雷達 (synthetic aperture radar) 所獲得的資料加以分析亦證明, 當波逆行在 Agulhas current 上時, 確可引發瘋狗浪 (參見 White & Fornberg 1998)。

臺灣四周因有黑潮、風吹流及由天文潮所引發之潮流, 故波逆行在流上情況普遍發生, 此點或可解釋在臺灣附近海域為何經常發生海難, 甚至發生船隻瞬間沈沒事件。然而為確定這些海難與波逆行在流上有關, 除需對以往發生在臺灣附近的海難詳加分析外, 亦需對波逆行在流上因而引發瘋狗浪之理論加以澄清。

當波逆行在流上, 若流的速度在空間上變化為輻合 (convergent), 亦即波在行進過程中, 其所遭遇的逆向流愈來愈強, 則根據 Longuet-Higgins & Stewart (1960; 1961) 之理論, 其波高將增大, 波長將縮短, 而更嚴重的是, 當波之能量傳遞速度 (亦即群速度) 和流速相平衡時, 根據 Smith (1975) 的理論, 線性波將被流阻塞及反射, 因而在阻塞點附近產生一極高波峰緊隨一極深波谷之現象 (其詳細波形可參閱 Shyu & Tung 1999), 此現象與 Mallory (1974) 所描述之瘋狗浪形狀十分相似 (皆具有一個 'hole in the sea'), 乃為一波長與入射波波長相近之反射波, 在與入射波線性疊加後所產生之結果, 但它與波被一直立壁反射時情況不相同之處在於目前的入射波和反射波具有一個相位差, 且在極靠近阻塞點處, 兩者 (即使在線性理論中) 皆無法用一個正弦函數來代表, 而且入射波和反射波之相位速度乃為同向, 僅因兩者之群速度大小不一, 故入射波能量可逆流而上, 反射波能量則順流而下。另一方面, 在遠離阻塞點之下游處, 入射波與反射波之波長相差愈來愈大, 故形成一系列短波行進在一系列長波上情況。

上述線性波被流阻塞及反射的理論雖十分嚴密, 但瘋狗浪乃為一完全非線性波 (fully nonlinear wave), 故要確定深海瘋狗浪確實主要因波被流阻塞及反射而引發, 必須先瞭解非線性波是否亦可被流阻塞及反射。為澄清此一問題, Smith (1976) 及 Peregrine & Smith (1979) 曾應用解析方法, Wu (2004) 曾應用數值方法, 獲得弱非線性波 (weakly nonlinear waves) 被流阻塞及反射現象之解, 而最近徐 (2011) 則應用 Clamond & Grue (2001) 之可快速計算二維完全非線性未碎波之數值方法, 證明非線性波確可被流阻塞及反射。

上述波被流阻塞及反射的理論皆假設流為非旋性 (故波浪場亦為非旋性), 但因在自然界, 不論是風吹流或近岸潮流, 其在垂直方向皆具有或大或小之剪應變 (shear), 故為

證明當後者存在時，非線性波仍可被流阻塞及反射，我們有必要將徐 (2011) 之數值解延伸至流為剪流情況。此一延伸極為重要，因它可顯示，即使海面上有強風吹襲 (此時海難較常發生)，因而形成剪流，波仍可被流阻塞及反射，故瘋狗浪確可能主要由波被流阻塞及反射過程所引發。另外需強調的是，即使波被流阻塞及反射過程可普遍發生，但只有當入射波偶而在一適當位置，其波形近似於一特殊波形，使其本身已相當大之能量在該位置上幾乎全部被反射，方可形成一波形更特殊之巨浪，因此由波被流阻塞及反射過程所引發之瘋狗浪仍具有偶發之性質。

當波行進在一垂直剪流上時，其速度分佈轉變為旋性，故 Clamond & Grue (2001) 應用複變數理論所建立之數值方法如今無法直接應用。為解決此一問題，Nwogu (2009) 用 the vector form of Green's second identity 取代屬於複變數理論之 Cauchy integral formula，但因 Nwogu (2009) 之公式尚需代入 vorticity equation 之解方能實際應用，而為獲得此解，需將水面及水面以下皆網格化，故其計算極耗費電腦資源，因此 Nwogu (2009) 改用一種近似方法來估計 vorticity equation 之解，但此種近似需對平均流做過多假設，故其最後的結果是否可信將令人懷疑，因此我們目前仍採用 Clamond & Grue (2001) 之方法，但將其延伸為可適用於流在垂直方向之變化雖顯著但近乎線性的情況 (此一近乎線性之假設亦為 Nwogu (2009) 之近似解所需條件之一)。在此一情況下，我們可將波浪運動之旋性部份與非旋性部份明白加以區分，並建立兩者間一特殊關係式，以做為獨立解非旋性部份所需之 closure relationship，因而可再度應用 Clamond & Grue (2001) 之快速準確的方法。應用此一延伸之 Clamond-Grue method，我們可明確證明非線性波確可被一垂直剪流阻塞及反射。另外，為導出目前所需方程式，在尚未將波浪場區分為旋性部份與非旋性部份以前，我們仍將應用 Nwogu (2009) 之導公式過程。

第二章 非線性波行進在剪流上之演化方程式

在本章中我們將循 Nwogu (2009) 之步驟, 在改正其一些小錯誤後, 導出描述非線性波斜行在一個穩定垂直剪流 $U(x, y, z)$ 上, 隨時間演化之方程式。由於這些小錯誤, 即使目前令 $U(x, y, z)$ 在水平方向 (亦即 x 和 y 方向) 之變化不僅緩慢且極緩慢 (但為使波在行進中可被流阻塞, 此一變化仍需存在), 故與 Nwogu (2009) 之平均流在水平方向無變化之假設差異不大, 但目前所導出之演化方程式 (evolution equations) 仍與 Nwogu (2009) 所導出者略為不同。此組方程式不會如 Nwogu (2009) 所為直接被求解, 而將在下一章被改寫為波之非旋性分量之演化方程式, 然後再求解。另外, 波之旋性分量之演化方程式亦將同時獲得並求解。

由於我們目前令平均流 U 在垂直方向可迅速變化, 且不需是線性變化, 故波浪運動可為旋性, 因此其原始控制方程式乃為連續方程式及 Euler equations:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$u_t + (u + U)u_x + (v + V)u_y + wu_z + wU' + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \quad (2.2)$$

$$v_t + (u + U)v_x + (v + V)v_y + wv_z + wV' + \frac{1}{\rho}p_y = 0, \quad (2.3)$$

$$w_t + (u + U)w_x + (v + V)w_y + ww_z + g + \frac{1}{\rho}p_z = 0. \quad (2.4)$$

上式中 $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ 即為由波所引起之不穩定擾動速度, U 和 V 則代表穩定流 U 在 x 和 y 方向之分量 (由於 U_x 和 V_y 極小, 故 U 在垂直方向之分量可忽略), p 代表壓力, g 表重力加速度, ρ 為流體密度, 而 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 則代表三維梯度運算元。

需注意的是, 在 Nwogu (2009) 中, U_x, U_y, V_x 和 V_y 皆假設為零, 目前則令它們不等於零, 但因其量甚小, 故在 (2.2)-(2.4) 中仍被忽略。此一忽略雖使目前的模式無法模擬波因流在水平方向緩變而隨之發生的緩慢變化, 但因波被流阻塞及反射過程並非一種緩慢的變化, 且此一過程之發生與當地流速之大小有關, 而與流在水平方向之變化率無直接的關連, 故目前的模式足以模擬波被流阻塞及反射現象。

除上述控制方程式外, 目前的解仍需滿足自由表面上 (定為 $z = \eta(x, y, t)$) 之運動及動力邊界條件:

$$\eta_t = w_\eta - (u_\eta + U_\eta)\eta_x - (v_\eta + V_\eta)\eta_y, \quad (2.5)$$

$$p(x, y, \eta, t) = 0, \quad (2.6)$$

其中 $u_\eta \equiv u(x, y, \eta, t)$ 和 $U_\eta \equiv U(x, y, \eta)$ 分別代表波和流在自由表面上的速度。另外，由於我們目前僅考慮深水波，故不需另設底床上之邊界條件。

應用上述方程式即可導出當 $U(x, y, z)$ 給定時，完全非線性波之演化方程式，但為方便起見，我們將 (u_η, v_η, w_η) 另用 (u_s, v_s, u_n) 來表示，後者可由前者唯一決定如下：

$$u_s = u_\eta + w_\eta \eta_x, \quad (2.7a)$$

$$v_s = v_\eta + w_\eta \eta_y, \quad (2.7b)$$

$$u_n = w_\eta - u_\eta \eta_x - v_\eta \eta_y. \quad (2.7c)$$

由上面三個方程式我們亦可輕易導出由 (u_s, v_s, u_n) 決定 (u_η, v_η, w_η) 之方程式：

$$u_\eta = u_s - \frac{\eta_x}{1 + \eta_x^2 + \eta_y^2} (u_n + u_s \eta_x + v_s \eta_y), \quad (2.8a)$$

$$v_\eta = v_s - \frac{\eta_y}{1 + \eta_x^2 + \eta_y^2} (u_n + u_s \eta_x + v_s \eta_y), \quad (2.8b)$$

$$w_\eta = \frac{1}{1 + \eta_x^2 + \eta_y^2} (u_n + u_s \eta_x + v_s \eta_y). \quad (2.8c)$$

需注意的是， (u_s, v_s) 與波在自由表面上速度之切線分量成正比，而 u_n 則與其法線分量成正比。應用 (2.7c) 可立即將自由表面上的運動邊界條件 (2.5) 改寫為

$$\eta_t = u_n - U_\eta \eta_x - V_\eta \eta_y. \quad (2.9)$$

上式代表由波浪運動所引起水面位移 η 之演化方程式，接下來我們將應用 Euler equations, 由自由表面動力邊界條件 (2.6) 導出 (u_s, v_s) 之演化方程式。

由 (2.6) 可知 $p_\eta \equiv p(x, y, \eta, t) = 0$ ，故由 chain rule of differentiation 可得

$$\frac{\partial p_\eta}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_j} \Big|_\eta + \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_j} = 0,$$

其中 $(x_1, x_2) = (x, y)$ 。將 (2.2)-(2.4) 代入上式可得

$$\begin{aligned} u_t|_\eta + (u_\eta + U_\eta)u_x|_\eta + (v_\eta + V_\eta)u_y|_\eta + w_\eta u_z|_\eta + w_\eta U'|_\eta \\ + [w_t|_\eta + (u_\eta + U_\eta)w_x|_\eta + (v_\eta + V_\eta)w_y|_\eta + w_\eta w_z|_\eta + g]\eta_x = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} v_t|_\eta + (u_\eta + U_\eta)v_x|_\eta + (v_\eta + V_\eta)v_y|_\eta + w_\eta v_z|_\eta + w_\eta V'|_\eta \\ + [w_t|_\eta + (u_\eta + U_\eta)w_x|_\eta + (v_\eta + V_\eta)w_y|_\eta + w_\eta w_z|_\eta + g]\eta_y = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.10) 和 (2.11) 可分別加以改寫, 因為由 chain rule of differentiation 及 (2.5) 式

$$\begin{aligned}
u_{\eta,t} &= u_t|_{\eta} + u_z|_{\eta}\eta_t = u_t|_{\eta} + u_z|_{\eta}[w_{\eta} - (u_{\eta} + U_{\eta})\eta_x - (v_{\eta} + V_{\eta})\eta_y], \\
u_{\eta,x} &= u_x|_{\eta} + u_z|_{\eta}\eta_x, \\
u_{\eta,y} &= u_y|_{\eta} + u_z|_{\eta}\eta_y, \\
w_{\eta,t} &= w_t|_{\eta} + w_z|_{\eta}\eta_t = w_t|_{\eta} + w_z|_{\eta}[w_{\eta} - (u_{\eta} + U_{\eta})\eta_x - (v_{\eta} + V_{\eta})\eta_y], \\
w_{\eta,x} &= w_x|_{\eta} + w_z|_{\eta}\eta_x, \\
w_{\eta,y} &= w_y|_{\eta} + w_z|_{\eta}\eta_y.
\end{aligned}$$

故 (2.10) 可先改寫為

$$\begin{aligned}
u_{\eta,t} + w_{\eta,t}\eta_x + g\eta_x + (u_{\eta} + U_{\eta})(u_{\eta,x} + w_{\eta,x}\eta_x) \\
+ (v_{\eta} + V_{\eta})(u_{\eta,y} + w_{\eta,y}\eta_y) + w_{\eta}U'|_{\eta} = 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

再由 (2.7a) 及 (2.5)

$$\begin{aligned}
u_{s,t} &= u_{\eta,t} + w_{\eta,t}\eta_x + w_{\eta}\eta_{xt} \\
&= u_{\eta,t} + w_{\eta,t}\eta_x + w_{\eta}[w_{\eta,x} - (u_{\eta} + U_{\eta})\eta_{xx} - u_{\eta,x}\eta_x - U_{\eta,x}\eta_x \\
&\quad - (v_{\eta} + V_{\eta})\eta_{xy} - v_{\eta,x}\eta_y - V_{\eta,x}\eta_y] \\
u_{s,x} &= u_{\eta,x} + w_{\eta,x}\eta_x + w_{\eta}\eta_{xx} \\
u_{s,y} &= u_{\eta,y} + w_{\eta,y}\eta_x + w_{\eta}\eta_{xy}
\end{aligned}$$

因此由 (2.12) 可獲得 u_s 之演化方程式為

$$\begin{aligned}
u_{s,t} + g\eta_x + (u_{\eta} + U_{\eta})u_{s,x} + (v_{\eta} + V_{\eta})u_{s,y} - w_{\eta}w_{\eta,x} \\
+ w_{\eta}[U'|_{\eta} + (u_{\eta,x} + U_{\eta,x})\eta_x + (v_{\eta,x} + V_{\eta,x})\eta_y] = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

上式與 Nwogu (2009) 之 (2.23) 相比, 多出 $w_{\eta}U_{\eta,x}\eta_x$ 和 $w_{\eta}V_{\eta,x}\eta_y$ 兩項, 此兩項即使在 Nwogu (2009) 中令平均流在水平方向無變化, 仍無法忽略, 因根據 chain rule of differentiation,

$$U_{\eta,x} = U_x|_{\eta} + U'|_{\eta}\eta_x = U'|_{\eta}\eta_x, \quad V_{\eta,x} = V_x|_{\eta} + V'|_{\eta}\eta_x = V'|_{\eta}\eta_x.$$

故當流在垂直方向有變化時, 上述兩項不應忽略。

將 (2.13) 中之 u_η 和 v_η 全部表為 u_s 和 v_s , 則 u_s 之演化方程式最後可改寫為

$$\begin{aligned} u_{s,t} + \left[g\eta + \frac{1}{2}(u_s^2 + v_s^2) - \frac{1}{2}w_\eta^2(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2) \right]_x - (v_s - w_\eta\eta_y)(v_{s,x} - u_{s,y}) \\ + w_\eta U'|_\eta(1 + \eta_x^2) + w_\eta V'|_\eta\eta_x\eta_y + U_\eta u_{s,x} + V_\eta u_{s,y} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

而由相同的步驟亦可得 v_s 之演化方程式

$$\begin{aligned} v_{s,t} + \left[g\eta + \frac{1}{2}(u_s^2 + v_s^2) - \frac{1}{2}w_\eta^2(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2) \right]_y + (u_s - w_\eta\eta_x)(v_{s,x} - u_{s,y}) \\ + w_\eta V'|_\eta(1 + \eta_y^2) + w_\eta U'|_\eta\eta_x\eta_y + U_\eta v_{s,x} + V_\eta v_{s,y} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

此兩個演化方程式亦與 Nwogu (2009) 之 (2.24) 和 (2.25) 略為不同, 且其影響在波為非線性時將十分顯著。

應用 (2.9), (2.14) 和 (2.15) 此三個演化方程式, 並採用數值積分法, 即可求出 η , u_s 和 v_s 在各點隨時間變化情形, 但因上述三個演化方程式中亦含 w_η 此一未知函數, 故為達到求 η , u_s 和 v_s 之數值解的目的, Nwogu (2009) 亦應用 the vector form of Green's second identity 導出 w_η 與 η , u_s , v_s 三者間之關係式 (稱為 closure relationship)。此一關係式因內含波行進在一剪流上所引發之旋度 (vorticity) $\Omega(x, y, z, t)$, 故需另外解 vorticity equations 來獲得 Ω 解, 但此一做法必須將水面及水面以下皆網格化, 並同時求各節點上的解, 因此與解 (2.9), (2.14) 和 (2.15) 時僅需將水面網格化相比, 需耗費極大的電腦資源。為解決此一問題, Nwogu (2009) 改用一種近似的方法來估計 Ω 在水面及水面以下的解, 而且同樣為節省電腦資源, Nwogu (2009) (以及目前的研究) 僅針對二維波浪場來求數值解。

第三章 Nwogu method 之限制

當波浪場僅二維，且波之行進方向與平均流流向平行時，流中 vortex-lines 不會因波之運動而發生旋轉或被拉長或縮短的現象，因此由波行進在垂直剪流上所引發旋度變化皆因流中旋度上下不均勻（亦即因 $U'' \neq 0$ ），故由波之垂直速度所導致。因此 $\Omega(x, z, t)$ 將如同平均流之旋度，僅具有 y 方向（在此定義為與平均流流向垂直之水平方向）之分量，而此一分量（以下表為 Ω ）之控制方程式則可簡化為

$$\Omega_t + (u + U)\Omega_x + w\Omega_z = -wU''. \quad (3.1)$$

此一方程式雖不複雜，但僅能求其數值解，且在求數值解時，需將 x, z 平面網格化，故若要針對波浪之長時間演化進行運算，需耗費極大的電腦資源，因此 Nwogu (2009) 假設波之速度 (u, w) 與平均流流速 U 相比甚小，故而將上式近似表為

$$\Omega_t + (u + U)\Omega_x = -wU''. \quad (3.2)$$

由於 U'' 不隨 t 和 x 改變（但可隨 z 改變），故可定義一新參數 $\Lambda \equiv \Omega/U''$ ，再將 (3.2) 改寫為

$$\Lambda_t + (u + U)\Lambda_x = -w. \quad (3.3)$$

另外，由於 Ω 在每一個深度皆為 locally 產生，且其 source term 與 w 和 U'' 之乘積成正比，故 Nwogu (2009) 建議 Λ 在垂直方向之分佈與 w 相似，因此只要 Λ 在自由表面上的值決定後，其自由表面以下的值亦可近似決定。

將 (3.3) 應用於自由表面可表為

$$\Lambda_t|_\eta + (u_\eta + U_\eta)\Lambda_x|_\eta = -w_\eta. \quad (3.4)$$

但因

$$\Lambda_{\eta,t} = \Lambda_t|_\eta + \Lambda_z|_\eta \eta_t$$

$$\Lambda_{\eta,x} = \Lambda_x|_\eta + \Lambda_z|_\eta \eta_x$$

故若我們將 (3.4) 表為 Nwogu (2009) 之 (5.6) 式：

$$\Lambda_{\eta,t} + (u_\eta + U_\eta)\Lambda_{\eta,x} = -w_\eta,$$

則波必須近乎線性。上式代表 Λ_η 之演化方程式，且它與 η 之演化方程式 (2.5) 相比，僅等號右邊的項相差一個符號，因此

$$\Lambda_\eta = -\eta$$

或

$$\Omega_\eta = -\eta U''|_\eta.$$

由此一結果,再考慮 w 在垂直方向之分佈,即可如上述亦決定 Ω 在垂直方向之分佈。

以上即為 Nwogu (2009) 求 $\Omega(x, z, t)$ 之方法與限制,但因我們目前將考慮非線性波由一無流區行進至一平均流十分顯著的區域,故上述 (u, w) 與 U 相比甚小之假設目前不適用。另一方面,若要假設 w 在垂直方向之分佈為已知(如指數衰減),則 w 需主要為非旋性,表可引發其旋性分量之 U'' 需相對較小,此一假設目前亦將採用,但 Nwogu (2009) 之 Λ 在垂直方向分佈與 w 相似之建議亦需 $U(z)$ 在垂直方向的變化不大(參考 (3.3) 式及 Nwogu (2009) 在其 (5.9) 式下方所做的說明),此一假設對目前的研究範圍限制很大,故必須加以避免,因此目前我們有必要導出一新的 closure relationship,使平均流僅需在垂直方向近乎線性分佈,其他別無限制。

第四章 分解波浪場為旋性與非旋性兩部份

當波浪場與平均流場皆為二維，且波浪之行進方向與流向平行時，若波浪場為非旋性，則我們可同時定義其 velocity potential ϕ 及 stream function ψ ，再應用複變數理論建立 ϕ 和 ψ 間關係式。應用此一關係式，並考慮 $\phi_z = -\psi_x$ ，即可獲得 ϕ_x 與 ϕ_z 之間的關係式，或轉換為 u_s 與 u_n (或 w_η) 之關係式，如此即可解決第二章最後所提及之 closure problem。但即使如此，此一方法仍需應用疊代法 (iterative scheme) 解一個積分範圍很廣之積分方程式，故極為耗時，因此 Clamond & Grue (2001) 特將此積分方程式轉換成一特殊形式，使其在用疊代法求解時，其積分範圍可縮小至僅數個波長之長度即可獲得準確積分結果，且此時之疊代運算可迅速收斂，故可節省大量電腦時間。應用此一方法，徐 (2011) 即獲得非線性波被非旋流阻塞及反射現象之數值解。

當平均流改為垂直剪流 (故為旋性) 時，若其垂直分佈為線性變化 (亦即 $U'' = 0$)，則波浪場仍屬非旋性，故 Clamond-Grue method 仍可應用，但目前我們所考慮之平均流在垂直方向的分佈乃近乎線性而非線性，故波浪場之旋性速度雖小，但不等於零，因此若應用在目前情況，Clamond-Grue method 需加以修改及延伸。

目前所謂平均流在垂直方向分佈近乎線性之定義乃為使波浪場之旋性速度小於非旋性速度一個量級，而此兩種速度之相對大小亦可由 (3.1) 略估為 $\hat{w}/w \sim U''/\sigma k$ ，其中 σ 表波之實質頻率 (intrinsic frequency)， $\hat{w}$ 表波之旋性垂直速度分量。故為使 $\hat{w}/w \ll 1$ ，我們令水面附近 $U''/\sigma k \ll 1$ 。此一限制之物理意義並非立即清楚，但若我們令 $U' \sim \sigma$ ，則此一限制又可改寫為 $U''/U'k \ll 1$ ，表 U' 在沿垂直方向之一個波長距離內之變化比率須遠小於 1，因此當 $U' \sim \sigma$ ，目前有關流在垂直方向分佈近乎線性之定義恰與一般波浪緩變理論中所謂 U' 在垂直方向之變化乃為緩變之定義實際相同，而當 $U' \sim \sigma$ 時，根據線性波理論 (參閱徐 (2010))，流中旋度 U' 已可顯著影響波之離散關係式，因而可顯著影響波被流阻塞的位置。另一方面，即使 U' 較小，只要 $U''/U'k \ll 1$ (表 U' 在垂直方向緩慢變化)，仍可確保 $U''/\sigma k \ll 1$ ，亦即確保 $\hat{w}/w \ll 1$ ，但無論如何，目前我們所考慮的 U' 可大至與 σ 量級相同。

當波之旋性速度遠小於非旋性速度時，即有必要將波浪場分解為旋性與非旋性兩部份，而為區分兩者，我們將前者之符號加冠 (如 $\hat{u}, \hat{w}$)，後者則改用 ϕ 或 ψ 來表示，故由 (2.7a) 及 chain rule of differentiation,

$$\begin{aligned} u_s &= u_\eta + w_\eta \eta_x = (\phi_x|_\eta + \hat{u}_\eta) + (\phi_z|_\eta + \hat{w}_\eta) \eta_x \\ &= \phi_{\eta,x} + \hat{u}_s, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中

$$\hat{u}_s \equiv \hat{u}_\eta + \hat{w}_\eta \eta_x. \quad (4.2)$$

同理, 由 (2.7c) 及 chain rule of differentiation,

$$u_n = -\psi_{\eta,x} + \hat{u}_n, \quad (4.3)$$

其中

$$\hat{u}_n \equiv \hat{w}_\eta - \hat{u}_\eta \eta_x. \quad (4.4)$$

需注意的是, 目前的 ϕ_η 和 ψ_η 在 Clamond & Grue (2001) 及徐 (2011) 中是表為 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\psi}$, 但如今爲了要和前兩章之標記方式一致, 故改用下註標‘ η ’來註明所有解在 $z = \eta$ 處之變數。

將 (4.3) 代入 (2.9), 並刪除含 y 方向分量之項, 可得自由表面運動邊界條件

$$\eta_t = (-\psi_{\eta,x} + \hat{u}_n) - U_\eta \eta_x. \quad (4.5)$$

此式與徐 (2011) 之 (2.4) 相比多出了 $\hat{u}_n$ 一項, 但因 $\hat{u}_n$ 與位在自由表面上的旋性速度在垂直自由表面方向上的分量成正比, 故我們可另外決定一非旋性速度場, 使其位在自由表面上且與自由表面垂直之分量大小可將 $\hat{u}_n$ 完全抵消, 此一速度場將存在且爲唯一, 因此將此一非旋性速度場加在原来的旋性速度場 (其和仍爲旋性且仍較小), 並從原来的非旋性速度場減去 (其差仍爲非旋性且較大), 其結果將不會影響以下的討論, 卻使得

$$\hat{u}_n = 0. \quad (4.6)$$

因此 (4.5) 可改寫爲

$$\eta_t = -\psi_{\eta,x} - U_\eta \eta_x. \quad (4.7)$$

表當波浪場爲旋性時, 其自由表面運動邊界條件之形式與波浪場爲非旋性時完全相同。另外, 此一結果亦顯示, 即使波浪場具有旋性, 但在目前情況, 其水面位移 η 可由波浪場之非旋性部份完全決定。

接下來我們將 (4.1) 和 (4.3) 代入自由表面動力邊界條件 (2.14), 並刪除其所有含 y 方向分量之項 (因等於零) 以及所有含旋性速度分量與旋性速度分量之乘積的項 (因較小), 且應用 (4.2) 和 (4.4), 可得

$$\begin{aligned} \phi_{\eta,xt} + \left[g\eta + \frac{1}{2} \frac{\phi_{\eta,x}^2 - \psi_{\eta,x}^2 + 2\eta_x \phi_{\eta,x} \psi_{\eta,x}}{1 + \eta_x^2} \right]_x &+ (-\psi_{\eta,x} + \phi_{\eta,x} \eta_x) U'_\eta|_\eta \\ &+ U_\eta \phi_{\eta,xx} = -R_\eta, \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中

$$R_\eta = \hat{u}_{s,t} + [\phi_{\eta,x}\hat{u}_\eta + \psi_{\eta,x}\hat{w}_\eta]_x + \hat{w}_\eta U'|_\eta(1 + \eta_x^2) + U_\eta \hat{u}_{s,x}. \quad (4.9)$$

將 (4.8) 式與徐 (2011) 之 (2.6) 式相比可發現兩者大致相同, 僅 (4.8) 中多出了等號左邊第3項以及等號右邊之 R_η , 前者因 $U'|_\eta$ 可由已知的平均流分佈及 η 值直接估計, 故僅需將原來的電腦程式略加修改, 即可加以計算, 但在 (4.8) 等號右邊的 R_η 內, 其每一項皆含未知的波之旋性速度分量 (見 (4.9) 式), 故必須應用 vorticity equation 求出 R_η 與非旋性波浪場之間的關係 (但不需要求出 (4.9) 中各個旋性速度分量與非旋性波浪場之間的關係, 也不需要像 Nwogu (2009) 一樣去估計 Ω 在整個空間與時間上的分佈), 方能繼續應用 Clamond-Grue method。此一關係式代表我們將波浪場分解為旋性與非旋性兩部份後額外所需之 closure relationship (在 Clamond-Grue method 中原來即需一個 ϕ 與 ψ 之間的關係式), 故在下一章我們將建立此一關係式。

第五章 新增 closure relationship

爲導出 R_η 與非旋性波浪場之間的關係，需考慮 vorticity equation (3.1)，但不需要求此一二維方程式之完整的數值解，而僅需將 (3.1) 應用在自由表面上，並經由一極複雜過程，即可獲得目前所需之 closure relationship。

首先，因目前假設 $U''/U'k \ll 1$ 且 $U' \sim \sigma$ ，故 $\hat{w}, \hat{u} \ll \phi_z, \phi_x$ ，因此 (3.1) 可近似表爲

$$\Omega_t + (\phi_x + U)\Omega_x + \phi_z\Omega_z + \phi_z U'' = 0, \quad (5.1)$$

其中

$$\Omega = \hat{u}_z - \hat{w}_x. \quad (5.2)$$

接下來，因考慮 (4.7) 及 Cauchy-Riemann relations

$$\phi_x = \psi_z, \quad \phi_z = -\psi_x \quad (-\infty \leq z \leq \eta),$$

且重複應用 chain rule of differentiation, 故獲得

$$\begin{aligned} \Omega_{\eta,t} &= \Omega_t|_\eta + \Omega_z|_\eta \eta_t \\ &= \Omega_t|_\eta + \Omega_z|_\eta (-\psi_{\eta,x} - U_\eta \eta_x) \\ &= \Omega_t|_\eta + \Omega_z|_\eta [-(\psi_x|_\eta + \psi_z|_\eta \eta_x) - U_\eta \eta_x] \\ &= \Omega_t|_\eta + \Omega_z|_\eta [\phi_z|_\eta - \eta_x(\phi_x|_\eta + U_\eta)] \\ \Omega_{\eta,x} &= \Omega_x|_\eta + \Omega_z|_\eta \eta_x \end{aligned}$$

因此 (5.1) 應用於自由表面可改寫爲

$$\Omega_{\eta,t} + (\phi_x|_\eta + U_\eta)\Omega_{\eta,x} + \phi_z|_\eta U''|_\eta = 0. \quad (5.3)$$

爲獲得上式，我們曾應用 (4.7)，但 (4.7) 之成立乃因 $\hat{u}_n = 0$ ，而當 $\hat{u}_n = 0$ 時，由 (4.4)

$$\hat{w}_\eta = \hat{u}_\eta \eta_x. \quad (5.4)$$

故應用 chain rule of differentiation 及連續方程式可得

$$\hat{w}_{\eta,x} = \hat{w}_x|_\eta + \hat{w}_z|_\eta \eta_x = \hat{w}_x|_\eta - \hat{u}_x|_\eta \eta_x.$$

由 (5.4) 我們可另外得到

$$\hat{w}_{\eta,x} = (\hat{u}_\eta \eta_x)_x = (\hat{u}_x|_\eta + \hat{u}_z|_\eta \eta_x) \eta_x + \hat{u}_\eta \eta_{xx}.$$

由於上面兩式之等號右邊必須相等, 因此

$$\hat{w}_x|_\eta = 2\hat{u}_x|_\eta\eta_x + \hat{u}_z|_\eta\eta_x^2 + \hat{u}_\eta\eta_{xx}. \quad (5.5)$$

將上式代入 (5.2) 可得在自由表面上之波浪旋度

$$\Omega_\eta = -2\hat{u}_x|_\eta\eta_x + (1 - \eta_x^2)\hat{u}_z|_\eta - \hat{u}_\eta\eta_{xx}. \quad (5.6)$$

再將上式對 t 微分, 並應用 chain rule of differentiation, 可得

$$\begin{aligned} \Omega_{\eta,t} = & -2\eta_x(\hat{u}_{xt}|_\eta + \hat{u}_{xz}|_\eta\eta_t) - 2\hat{u}_x|_\eta\eta_{xt} + (1 - \eta_x^2)(\hat{u}_{zt}|_\eta + \hat{u}_{zz}|_\eta\eta_t) \\ & - 2\eta_x\eta_{xt}\hat{u}_z|_\eta - \eta_{xx}(\hat{u}_t|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_t) - \hat{u}_\eta\eta_{xxt}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

而由 (4.7), 上式中的 η_t, η_{xt} 及 η_{xxt} 又可分別表為

$$\begin{aligned} \eta_t &= -(\psi_x|_\eta + \psi_z|_\eta\eta_x) - U_\eta\eta_x \\ &= \phi_z|_\eta - \phi_x|_\eta\eta_x - U_\eta\eta_x, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \eta_{xt} &= \phi_{zx}|_\eta + \phi_{zz}|_\eta\eta_x - \phi_{xx}|_\eta\eta_x - \phi_{xz}|_\eta\eta_x^2 - \phi_x|_\eta\eta_{xx} - U'|_\eta\eta_x^2 - U_\eta\eta_{xx} \\ &= \phi_{zx}|_\eta(1 - \eta_x^2) - 2\phi_{xx}|_\eta\eta_x - \phi_x|_\eta\eta_{xx} - U'|_\eta\eta_x^2 - U_\eta\eta_{xx}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \eta_{xxt} &= (\phi_{zxx}|_\eta + \phi_{zzx}|_\eta\eta_x)(1 - \eta_x^2) - 2\eta_x\eta_{xx}\phi_{zx}|_\eta - 2\eta_x(\phi_{xxx}|_\eta + \phi_{xxz}|_\eta\eta_x) \\ &\quad - 2\phi_{xx}|_\eta\eta_{xx} - \eta_{xx}(\phi_{xx}|_\eta + \phi_{xz}|_\eta\eta_x) - \phi_x|_\eta\eta_{xxx} - U''|_\eta\eta_x^3 \\ &\quad - 3U'|_\eta\eta_x\eta_{xx} - U_\eta\eta_{xxx} \\ &= \phi_{xxz}|_\eta - 3\phi_{xxz}|_\eta\eta_x^2 - 3\phi_{xxx}|_\eta\eta_x + \phi_{xxx}|_\eta\eta_x^3 - 3\phi_{xz}|_\eta\eta_x\eta_{xx} \\ &\quad - 3\phi_{xx}|_\eta\eta_{xx} - \phi_x|_\eta\eta_{xxx} - U''|_\eta\eta_x^3 - 3U'|_\eta\eta_x\eta_{xx} - U_\eta\eta_{xxx}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

由於在 (5.3) 中另含 $\Omega_{\eta,x}$, 故我們亦將 (5.6) 對 x 微分, 並應用 chain rule of differentiation, 得到

$$\begin{aligned} \Omega_{\eta,x} = & -2\eta_x(\hat{u}_{xx}|_\eta + \hat{u}_{xz}|_\eta\eta_x) - 2\hat{u}_x|_\eta\eta_{xx} + (1 - \eta_x^2)(\hat{u}_{zx}|_\eta + \hat{u}_{zz}|_\eta\eta_x) \\ & - 2\eta_x\eta_{xx}\hat{u}_z|_\eta - \eta_{xx}(\hat{u}_x|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_x) - \hat{u}_\eta\eta_{xxx}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

應用以上公式即可將 vorticity equation (5.3) 表為波之旋性與非旋性速度間之關係式, 此一關係式需包含由 (4.9) 所定義之 R_η 方可達到本章欲建立 R_η 與非旋性波浪場間關係之目的, 因此我們亦將 (4.9) 之各項展開以方便建立此一關係式。首先, 應用 chain rule of differentiation 及 Cauchy-Riemann relations 得到

$$\begin{aligned} \phi_{\eta,x}\hat{u}_\eta + \psi_{\eta,x}\hat{w}_\eta &= (\phi_x|_\eta + \phi_z|_\eta\eta_x)\hat{u}_\eta + (\psi_x|_\eta + \psi_z|_\eta\eta_x)\hat{w}_\eta \\ &= \phi_x|_\eta\hat{u}_\eta + \phi_z|_\eta\eta_x\hat{u}_\eta - \phi_z|_\eta\hat{w}_\eta + \phi_x|_\eta\eta_x\hat{w}_\eta. \end{aligned}$$

故 (4.9) 之等號右邊第二項

$$\begin{aligned}
[\phi_{\eta,x}\hat{u}_\eta + \psi_{\eta,x}\hat{w}_\eta]_x &= (\phi_{xx}|_\eta + \phi_{xz}|_\eta\eta_x)\hat{u}_\eta + \phi_x|_\eta(\hat{u}_x|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_x) + (\phi_{zx}|_\eta \\
&\quad + \phi_{zz}|_\eta\eta_x)\eta_x\hat{u}_\eta + \phi_z|_\eta\eta_{xx}\hat{u}_\eta + \phi_z|_\eta\eta_x(\hat{u}_x|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_x) \\
&\quad - (\phi_{zx}|_\eta + \phi_{zz}|_\eta\eta_x)\hat{w}_\eta - \phi_z|_\eta(\hat{w}_x|_\eta + \hat{w}_z|_\eta\eta_x) + (\phi_{xx}|_\eta \\
&\quad + \phi_{xz}|_\eta\eta_x)\eta_x\hat{w}_\eta + \phi_x|_\eta\eta_{xx}\hat{w}_\eta + \phi_x|_\eta\eta_x(\hat{w}_x|_\eta + \hat{w}_z|_\eta\eta_x).
\end{aligned}$$

由於 (4.9) 之各項必須對 z 微分方能與 (5.3) 中各項相對應, 故我們先將上式等號右邊各項解在 $z = \eta$ 處之限制忽略, 再將其結果 (用 R_2 表示) 對 z 微分後重新解在 $z = \eta$ 處 (因 (5.3) 之各項亦皆解在 $z = \eta$ 處), 得到

$$\begin{aligned}
(\partial R_2/\partial z)_\eta &= \phi_{xx}|_\eta\hat{u}_z|_\eta + 3\phi_{xz}|_\eta\eta_x\hat{u}_z|_\eta + \hat{u}_\eta\phi_{xxz}|_\eta + \hat{u}_\eta\phi_{xzz}|_\eta\eta_x + 2\phi_{xz}|_\eta\hat{u}_x|_\eta \\
&\quad + \phi_x|_\eta\hat{u}_{xz}|_\eta + \phi_x|_\eta\hat{u}_{zz}|_\eta\eta_x + \eta_x^2\hat{u}_z|_\eta\phi_{zz}|_\eta + \phi_z|_\eta\eta_{xx}\hat{u}_z|_\eta \\
&\quad + 2\phi_z|_\eta\eta_x\hat{u}_{xz}|_\eta + \phi_z|_\eta\eta_x^2\hat{u}_{zz}|_\eta + 2\phi_{zz}|_\eta\hat{u}_x|_\eta\eta_x + \phi_z|_\eta\hat{u}_{xx}|_\eta \\
&\quad + \phi_{xxz}|_\eta\eta_x^2\hat{u}_\eta + \phi_{xzz}|_\eta\eta_x^3\hat{u}_\eta + 2\phi_{xz}|_\eta\eta_{xx}\eta_x\hat{u}_\eta - \phi_x|_\eta\eta_{xx}\hat{u}_x|_\eta \\
&\quad + \phi_{xz}|_\eta\eta_x^3\hat{u}_z|_\eta - \phi_x|_\eta\eta_x\hat{u}_{xx}|_\eta - \phi_x|_\eta\eta_x^2\hat{u}_{xz}|_\eta. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

在導出上式中, 我們曾將 (5.4) 和 (5.5) 代入, 並應用連續方程式 $\hat{u}_x + \hat{w}_z = 0$. 同理, 且應用類似的過程可得

$$(\partial R_3/\partial z)_\eta = -\hat{u}_x|_\eta U'|_\eta(1 + \eta_x^2) + \hat{u}_\eta\eta_x U''|_\eta(1 + \eta_x^2), \tag{5.13}$$

其中 R_3 之下註標 '3' 表此一符號代表 (4.9) 之等號右邊第三項 (餘類推). 另外, 因由 (4.2)

$$\begin{aligned}
U_\eta\hat{u}_{s,x} &= U_\eta(\hat{u}_\eta + \hat{w}_\eta\eta_x)_x \\
&= U_\eta(\hat{u}_x|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_x + \hat{w}_x|_\eta\eta_x + \hat{w}_z|_\eta\eta_x^2 + \hat{w}_\eta\eta_{xx}).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
(\partial R_4/\partial z)_\eta &= U'|_\eta(\hat{u}_x|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_x + \hat{u}_x|_\eta\eta_x^2 + \hat{u}_z|_\eta\eta_x^3 + 2\hat{u}_\eta\eta_{xx}\eta_x) \\
&\quad + U_\eta(\hat{u}_{xz}|_\eta + \hat{u}_{zz}|_\eta\eta_x - \hat{u}_{xx}|_\eta\eta_x - \hat{u}_{xz}|_\eta\eta_x^2 - \hat{u}_x|_\eta\eta_{xx}). \tag{5.14}
\end{aligned}$$

最後, 因由 (4.2), (5.8) 及 (5.9)

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{s,t} &= (\hat{u}_\eta + \hat{w}_\eta\eta_x)_t \\
&= \hat{u}_t|_\eta + \hat{u}_z|_\eta\eta_t + \hat{w}_t|_\eta\eta_x + \hat{w}_z|_\eta\eta_t\eta_x + \hat{w}_\eta\eta_{xt} \\
&= \hat{u}_t|_\eta + \hat{u}_z|_\eta(\phi_z|_\eta - \phi_x|_\eta\eta_x - U_\eta\eta_x) + \hat{w}_t|_\eta\eta_x + \hat{w}_z|_\eta\eta_x(\phi_z|_\eta - \phi_x|_\eta\eta_x \\
&\quad - U_\eta\eta_x) + \hat{w}_\eta(\phi_{xz}|_\eta - \phi_{xz}|_\eta\eta_x^2 - 2\phi_{xx}|_\eta\eta_x - \phi_x|_\eta\eta_{xx} - U'|_\eta\eta_x^2 - U_\eta\eta_{xx})
\end{aligned}$$

故同樣地我們先將上式等號右邊各項解在 $z = \eta$ 處之限制忽略，再將其結果（表為 R_1 ）對 z 微分後重新解在 $z = \eta$ 處，得到

$$\begin{aligned}
(\partial R_1 / \partial z)_\eta = & \hat{u}_{tz}|_\eta + \hat{u}_{zz}|_\eta(\phi_z|_\eta - \phi_x|_\eta \eta_x - U_\eta \eta_x) + \hat{u}_z|_\eta(\phi_{zz}|_\eta - \phi_{xz}|_\eta \eta_x \\
& - U'|_\eta \eta_x) - \hat{u}_{tx}|_\eta \eta_x - \hat{u}_{xz}|_\eta \eta_x(\phi_z|_\eta - \phi_x|_\eta \eta_x - U_\eta \eta_x) \\
& - \hat{u}_x|_\eta \eta_x(\phi_{zz}|_\eta - \phi_{xz}|_\eta \eta_x - U'|_\eta \eta_x) - \hat{u}_x|_\eta(\phi_{xz}|_\eta - \phi_{xz}|_\eta \eta_x^2 \\
& - 2\phi_{xx}|_\eta \eta_x - \phi_x|_\eta \eta_{xx} - U'|_\eta \eta_x^2 - U_\eta \eta_{xx}) + \hat{u}_\eta \eta_x(\phi_{xzz}|_\eta \\
& - \phi_{xzz}|_\eta \eta_x^2 - 2\phi_{xxz}|_\eta \eta_x - \phi_{xz}|_\eta \eta_{xx} - U''|_\eta \eta_x^2 - U'|_\eta \eta_{xx}). \quad (5.15)
\end{aligned}$$

將 (5.12)-(5.15) 相加，並與將 (5.7)-(5.11) 代入 (5.3) 後所得結果相比，顯示 (5.3) 可改寫為

$$\begin{aligned}
[\partial(R + \phi U'') / \partial z]_\eta = & \left\{ \eta_x \hat{u}_t|_\eta + 2(\phi_z|_\eta \hat{u}_\eta)_x - \hat{u}_\eta \eta_x(\phi_x|_\eta)_x - \phi_z|_\eta \hat{u}_x|_\eta \right. \\
& \left. + \phi_x|_\eta \eta_x \hat{u}_x|_\eta + U_\eta \eta_x \hat{u}_x|_\eta - U'|_\eta \hat{u}_\eta \eta_x^2 \right\}_x, \quad (5.16)
\end{aligned}$$

其中 $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ 。

需強調的是，在上式中我們基於平均流在垂直方向變化近乎線性之假設，將漸近展開 (asymptotic expansions) 之高階項如 $\phi_\eta U'''|_\eta, \hat{u}_\eta \eta_x U''|_\eta, \hat{u}_\eta \eta_x^3 U''|_\eta$ 等省略，這些高階項因很容易辨認，再加上我們僅需考慮漸近展開式中之最低階項，故在前面導公式過程中，不需要將各變數正式展開為一漸近級數 (asymptotic series)。

上式之等號右方僅含波之非線性項，故當波為線性波時，由上式可得

$$[\partial(R + \phi U'') / \partial z]_\eta = 0$$

表

$$(R + \phi U'')_\eta = 0, \quad (5.17)$$

否則 $|R + \phi U''|$ 應隨深度迅速遞減，使 $[\partial(R + \phi U'') / \partial z]_\eta$ 無法等於零。因此當波為線性波時，我們可確定

$$R_\eta = -\phi_\eta U''|_\eta. \quad (5.18)$$

當波為非線性波時上式是否仍適用，目前並無法確定，因為即使此時 (5.16) 之等號右邊不等於零，因而使 $[\partial(R + \phi U'') / \partial z]_\eta$ 不等於零，但 $(R + \phi U'')_\eta$ 本身仍可能等於零，但要證明此點，需將二維 vorticity equation 在每一點上的解求出。此一工作極為耗時，故目前尚無法證明。

將 (5.18) 代入 (4.8), 並同時考慮 (4.7) 式, 即可在不知其旋性分量情況下, 完全決定波浪之非旋性場, 包括水面位移之變化, 而且此時我們僅需考慮平均流在自由表面上的速度及其變化率。但如果 (5.18) 在波為非線性時不成立, 則此時因我們需解二維 vorticity equation 至水面以下方能估計 $\hat{u}_\eta$ 和 $\hat{w}_\eta$, 以決定 R_η , 表在此種情況下, 波之非旋性場與較深處之平均流亦有關, 此點與目前之平均流在垂直方向變化近乎線性的假設以及勢位流 (potential flow) 之特性有些不合, 故 (5.18) 有可能亦適用於非線性波。

當波之非旋性場決定後, 應用 (5.3) 可求自由表面上由波浪運動所引發之旋度 Ω_η 。另一方面, 由 (4.9) 和 (5.18) 亦可獲得為求自由表面上波之旋性速度所需之 evolution equation, 其過程如下。

首先將 (5.18) 代入 (4.9) 可得

$$\hat{u}_{s,t} + [\phi_{\eta,x}\hat{u}_\eta + \psi_{\eta,x}\hat{w}_\eta]_x + \hat{w}_\eta U'|_\eta (1 + \eta_x^2) + U_\eta \hat{u}_{s,x} + \phi_\eta U''|_\eta = 0. \quad (5.19)$$

接著由 (5.4) 及 (4.2), 並應用 chain rule of differentiation 及 Cauchy-Riemann relations, 可得

$$\begin{aligned} \phi_{\eta,x}\hat{u}_\eta + \psi_{\eta,x}\hat{w}_\eta &= (\phi_x|_\eta + \phi_z|_\eta \eta_x)\hat{u}_\eta + (-\phi_z|_\eta + \phi_x|_\eta \eta_x)\hat{u}_\eta \eta_x \\ &= \phi_x|_\eta (\hat{u}_\eta + \hat{w}_\eta \eta_x) \\ &= \phi_x|_\eta \hat{u}_s \end{aligned}$$

另一方面, 因由 (4.2), (4.4) 及 (4.6),

$$\hat{w}_\eta (1 + \eta_x^2) = \hat{u}_s \eta_x.$$

故

$$\begin{aligned} (U_\eta \hat{u}_s)_x &= U'|_\eta \eta_x \hat{u}_s + U_\eta \hat{u}_{s,x} \\ &= \hat{w}_\eta U'|_\eta (1 + \eta_x^2) + U_\eta \hat{u}_{s,x} \end{aligned}$$

因此 (5.19) 最後可改寫為

$$\hat{u}_{s,t} + [(\phi_x|_\eta + U_\eta)\hat{u}_s]_x + \phi_\eta U''|_\eta = 0. \quad (5.20)$$

上式即為 $\hat{u}_s$ 之 evolution equation, 而當獲得 $\hat{u}_s$ 解以後, 應用 (4.2) 及 (5.4) 亦可立即獲得 $\hat{w}_\eta$ 解, 如此即可解出所有變數 (包括旋性與非旋性者) 在自由表面上的值, 但要實際且快速地求 (4.7), (4.8), (5.3) 和 (5.20) 此四個 evolution equations 之數值解, 我們仍需應用 Clamond & Grue (2001) 所導出有關 ϕ 與 ψ 間關係之 closure relationship。此一 closure relationship 在徐 (2011) 中已有十分詳細的說明, 但為維持本篇報告之完整性, 在下一章我們仍扼要說明如何導出此一 closure relationship 及其特點。

第六章 Clamond-Grue method 之 closure relationship

應用新增之 evolution equation(5.18) 可形成 (4.7),(4.8),(5.3) 和 (5.20) 四個 evolution equations, 但因其中仍含 $\eta, \phi_\eta, \psi_\eta, \Omega_\eta$ 和 $\hat{u}_s$ 五個未知變數, 故要獲得其唯一解, 尚需另一個 closure equation。另一方面, 如我們前面所說, 將 (5.18) 代入 (4.8) 後, 即可由 (4.7) 和 (4.8) 獨立決定波浪場之非旋性部份, 故目前所需之 closure relationship 可僅為 η, ϕ_η 和 ψ_η 間之關係式, 因此 Clamond & Grue (2001) 原針對非旋性波浪所導出可迅速求解之 closure relationship 目前仍可應用。

Clamond & Grue (2001) 首先參考 Baker, Meiron & Orszag (1982), 由 Cauchy integral formula 導出

$$\phi_\eta = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\phi'_\eta - \eta'_x \psi'_\eta) - \psi'_\eta - \eta'_x \phi'_\eta}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}, \quad (6.1)$$

$$\psi_\eta = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'_\eta - \eta'_x \psi'_\eta + D(\psi'_\eta + \eta'_x \phi'_\eta)}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}. \quad (6.2)$$

其中PV代表 Cauchy principle value, $\phi'_\eta = \phi_\eta(x', t)$, $\phi_\eta = \phi_\eta(x, t)$, etc, $D = (\eta' - \eta)/(x' - x)$ 。

當 η 和 ϕ_η 已知, 由上面兩個積分式中任何一個即可決定 ψ_η , 但皆需應用 iteration 方法 (因在此兩個方程式中, ψ_η 皆出現在其積分符號內), 且需在一個很大的 x 值範圍內進行數值積分, 並進行 N 次 (N 表在 x 軸上節點的數目), 故極為耗時, 因此 Clamond & Grue (2001) 發展一種可大幅降低計算時間的方法, 此一方法應用於 (6.1) 比應用於 (6.2) 穩定, 故 Clamond & Grue (2001) 主要針對 (6.1), 先將其改寫為另一種形式。

由於當 $|x' - x| \rightarrow \infty$ 時, D 將以 $|x' - x|^{-1}$ 之速率衰減, 故應用integration by parts 可知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\arctan(D)] \phi'_{\eta,x} dx' = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'_\eta}{1 + D^2} \left[\frac{\eta'_x}{x' - x} - \frac{D}{x' - x} \right] dx',$$

因此 (6.1) 可改寫為

$$\begin{aligned} \phi_\eta = & -\frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'_\eta}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'_x \phi'_{\eta,x}}{x' - x} dx' - \frac{\eta}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'_{\eta,x}}{x' - x} dx' \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\arctan(D) - D] \phi'_{\eta,x} dx' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta'_x) \psi'_\eta}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

上式中最後兩項乃爲 regular integrals, 前三項則爲 singular integrals, 但具有 Hilbert transform 的形式, 後者定義爲

$$\mathcal{H}\{f\} = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx', \quad \mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}.$$

故 (6.3) 又可改寫爲

$$\begin{aligned} \psi_\eta &= \mathcal{H}\{\phi_\eta\} + \eta\phi_{\eta,x} + \mathcal{H}\{\eta\mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\}\} \\ &\quad - \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\arctan(D) - D] \phi'_{\eta,x} dx' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta'_x) \psi'_\eta}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}\right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

由於在 evolution equations (4.7) 和 (4.8) 中僅含 $\psi_{\eta,x}$, 未含 ψ_η 本身, 故 Clamond & Grue (2001) 再將上式對 x 微分, 並應用 integration by parts, 得到

$$\begin{aligned} \psi_{\eta,x} &= \mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\} + (\eta\phi_{\eta,x})_x + (\mathcal{H}\{\eta\mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\}\})_x \\ &\quad + \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^2(D - \eta_x) \phi'_{\eta,x}}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta_x) \psi'_{\eta,x}}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}\right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

在 (6.5) 中, Hilbert transforms 可應用 fast Fourier transform 獲得 (參見李 1997), 而對 x 微分的項亦可在 Fourier space 內進行, 故其計算極迅速且準確。另一方面, 在 (6.5) 中的兩個 regular integrals, 因其分母包含 $x' - x$, 分子包含 D , 故其被積分函數的大小在遠方將分別以 $|x' - x|^{-3}$ 和 $|x' - x|^{-2}$ 之速率衰減, 因此在 (6.5) 中其兩個積分之積分範圍, 可由 $[-\infty, +\infty]$ 縮小爲 $[x - \lambda, x + \lambda]$, 其中 λ 值可視所需要之準確度加以調整, 但僅需等於二至三個波長即可獲得十分準確之結果, 因此可大幅減少電腦計算時間。

值得注意的是, 上述兩個 regular integrals 皆含 η_x , 而非 η'_x , 由於在波峰和波谷處, $\eta_x = 0$, 故在波峰與波谷處求解時, 此兩個 regular integrals 之被積分函數改以 $|x' - x|^{-4}$ 和 $|x' - x|^{-3}$ 的速率衰減, 表上述將積分範圍縮小之近似方法在波峰和波谷附近將更準確。

應用 (6.5) 式之另一項優點是, 其 regular integrals 代表較高階之非線性項, 再加上

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{D}{1 + D^2} \frac{D - \eta_x}{x' - x} = \frac{1}{2} \frac{\eta_x \eta_{xx}}{1 + \eta_x^2},$$

而在深水波中, η_x 和 η_{xx} 一般為 out of phase, 故它們的乘積將更小, 因此即使因未知函數 $\psi'_{\eta,x}$ 出現在這些積分之積分符號內, 故需應用 iteration 方法求解, 但因這些積分的值較小, 故 iteration 可迅速收斂, 因此應用 Clamond & Grue (2001) 所導出之 (6.5) 式可大幅減少計算時間。

第七章 數值解法

應用 Clamond-Grue method 原有之 closure equation (6.5) 及目前新的 closure equation (5.18), 即可求 (4.7), (4.8), (5.3) 和 (5.20) 此四個 evolution equations 之數值解, 以估計 $\eta, \phi_\eta, \Omega_\eta$ 和 $\hat{u}_s$ 之近似解。由於所有這些未知的變數, 包括 ψ_η , 皆僅為 x 和 t 之函數, 故我們只需在 x 軸上選擇一計算域, 並將其分為 N 段, 然後以每一段之頭尾做為節點, 以計算其上各變數在每一個離散時間點上的值。

在上述數值計算中, 我們尚需指定 $\eta, \phi_\eta, \Omega_\eta$ 和 $\hat{u}_s$ 之起始值, 或在某一空間點 (定為原點) 附近, 自某一時間 (定為零時) 起應用一氣壓造波機 (pneumatic wavemaker) 造波。由於目前採用後一種做法, 故 (4.8) 改寫為

$$\begin{aligned} \phi_{\eta,xt} + \left[g\eta + \frac{1}{2} \frac{\phi_{\eta,x}^2 - \psi_{\eta,x}^2 + 2\eta_x \phi_{\eta,x} \psi_{\eta,x}}{1 + \eta_x^2} \right]_x + (-\psi_{\eta,x} + \phi_{\eta,x} \eta_x) U'|_\eta \\ + U_\eta \phi_{\eta,xx} + \frac{1}{\rho} p_{\eta,x} - \phi_\eta U''|_\eta = 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

其中 p_η 表由氣壓造波機所產生在自由表面上的壓力。在上式中我們也將 closure equation (5.18) 代入以取代 R_η 。

由於上式中含 η_x 而非 η 本身, 故為避免較不穩定之數值微分運算, Clamond & Grue (2001) 特將 (4.7) 式對 x 微分, 並將所有對 x 二次微分項改在 Fourier space 內進行, 因此 (4.7) 及 (7.1) 最後改寫為

$$\partial_t \mathcal{F}\{\eta_x\} = -ik \mathcal{F}\{\psi_{\eta,x}\} - ik \mathcal{F}\{U \eta_x\} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{F}\{\phi_{\eta,x}\} = & - \mathcal{F}\{p_{\eta,x}/\rho\} - g \mathcal{F}\{\eta_x\} - ik \mathcal{F}\left\{ \frac{\phi_{\eta,x}^2 - \psi_{\eta,x}^2 + 2\eta_x \phi_{\eta,x} \psi_{\eta,x}}{2(1 + \eta_x^2)} \right\} \\ & - \mathcal{F}\{U_\eta \phi_{\eta,xx}\} - \mathcal{F}\{(-\psi_{\eta,x} + \phi_{\eta,x} \eta_x) U'|_\eta\} + \mathcal{F}\{\phi_\eta U''|_\eta\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

其中 $\mathcal{F}$ 表富氏轉換。

當應用 FFT 將 (7.2) 和 (7.3) 之等號右邊的值決定後, 即可應用數值積分法 fourth-order Runge-Kutta scheme 求下一個時間點上之 $\mathcal{F}\{\eta_x\}$ 及 $\mathcal{F}\{\phi_{\eta,x}\}$ 值, 再應用逆富氏轉換獲得此時之 η_x 和 $\phi_{\eta,x}$, 然後應用疊代法求 (6.5) 之解 $\psi_{\eta,x}$, 此疊代法之 initial guess 定為

$$\psi_{\eta,x,0} = S - \mathcal{H} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{D(D - \eta_x)}{1 + D^2} (S - D \phi'_{\eta,x}) \frac{dx'}{x' - x} \right\}, \quad (7.4)$$

其中

$$S = \mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\} + (\eta\phi_{\eta,x})_x + \mathcal{H}\{(\eta\mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\})_x\}. \quad (7.5)$$

由於

$$(\mathcal{H}\{\eta\mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\}\})_x = \mathcal{H}\{(\eta\mathcal{H}\{\phi_{\eta,x}\})_x\}$$

故 S 實際代表 $\psi_{\eta,x}$ 之近似 (參考 (6.5) 式), 而且因 (7.5) 之等號右邊未含未知的 $\psi_{\eta,x}$, 故 S 以及 $\psi_{\eta,x,0}$ 可直接估算。當 initial guess $\psi_{\eta,x,0}$ 決定後, 即可應用下面公式進行疊代運算:

$$\psi_{\eta,x,j+1} = S - \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{D(D-\eta_x)}{1+D^2} (\psi'_{\eta,x,j} - D\phi'_{\eta,x}) \frac{dx'}{x'-x}\right\}. \quad (7.6)$$

此一運算將重複至每一個節點上之 $|\psi_{\eta,x,j+1} - \psi_{\eta,x,j}|$ 皆小於 1.0×10^{-10} 為止。

在上述數值計算中, 由於所使用之 Runge-Kutta scheme 為 strongly stable, 故只要其時間間隔足夠小, 其近似解之誤差不會無限增大, 但因在計算中曾對非線性項進行富氏轉換, 故將產生一種 aliasing errors (其原因可參考 Canuto *et al.* (1987)), 使計算結果呈現一種鋸齒狀不穩定現象 (sawtooth instabilities)(見圖 1a), 其最終將使計算結果不可信賴或難以進行。為消去此種不穩定現象, Nwogu (2009) 在每一個時間點皆應用一個 low-pass anti-aliasing filter 來過濾所獲得的數值解, 但此一作法不僅消去代表誤差之小尺度振盪, 且原來之振盪亦將損失能量, 故經過一段長時間模擬後, 波將消失於遠方 (見圖 1b), 因此為模擬波在一靜水區生成後, 被一在水平方向變化極緩慢的流阻塞及反射現象, 我們目前採用 Clamond & Grue (2001) 將波譜用零來延伸 (zeros padding) 的作法。此一作法根據 Canuto *et al.* (1987) 之證明, 若欲消去非線性項中的二次項之 aliasing errors, 波譜需用零延伸為原來的3/2倍, 若欲消去三次項者, 則波譜需延伸為原來的4/2倍, 然因目前之 (7.3) 式含 $(1 + \eta_x^2)^{-1}$, (7.6) 式含 $(1 + D^2)^{-1}$, 故當波為完全非線性波時, 在此兩個方程式中, 其非線性項之最高次數並非有限, 因此不論將波譜延伸多長, 皆無法完全消除 aliasing errors, 僅能依需要的準確度及所需之計算成本, 選擇一適當的長度來達到 partially de-aliased 之目的 (此一做法在計算時間不長且波高不大時, 可使鋸齒狀不穩定現象幾乎難以顯現 (見圖 1c))。目前我們一般是選擇4/2倍的長度, 但在有必要時將選擇8/2倍長度, 以驗證數值解是否滿足一致性 (consistency)。

當用以上方法獲得 η, ϕ_η 及 ψ_η 在各時間點上之數值解後, 將這些解代入 (5.3) 及 (5.20) 亦可分別獲得 Ω_η 和 $\hat{u}_s$ 之數值解, 但要達到此目的, 需將此兩個方程式之 $\phi_x|_\eta$ 和 $\phi_z|_\eta$ 改用

$\phi_{\eta,x}$ 和 $\psi_{\eta,x}$ 表示。因此我們先應用 chain rule of differentiation 及 Cauchy-Riemann relations 得到

$$\begin{aligned}\phi_{\eta,x} &= \phi_x|_{\eta} + \phi_z|_{\eta}\eta_x \\ \psi_{\eta,x} &= \psi_x|_{\eta} + \psi_z|_{\eta}\eta_x = -\phi_z|_{\eta} + \phi_x|_{\eta}\eta_x\end{aligned}$$

再由此兩個方程式解出

$$\begin{aligned}\phi_x|_{\eta} &= \frac{\phi_{\eta,x} + \psi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} \\ \phi_z|_{\eta} &= \frac{-\psi_{\eta,x} + \phi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2}\end{aligned}$$

故將其代入 (5.3) 及 (5.20) 後可得

$$\Omega_{\eta,t} + \left(\frac{\phi_{\eta,x} + \psi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} + U_{\eta} \right) \Omega_{\eta,x} + \frac{-\psi_{\eta,x} + \phi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} U''|_{\eta} = 0 \quad (7.7)$$

$$\hat{u}_{s,t} + \left[\left(\frac{\phi_{\eta,x} + \psi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} + U_{\eta} \right) \hat{u}_s \right]_x + \phi_{\eta} U''|_{\eta} = 0 \quad (7.8)$$

上面兩式之 ϕ_{η}, ψ_{η} 及 η 因已由 (7.2), (7.3) 及 (6.5) 獲得, 故式中之係數皆為已知, 因此可應用 fourth-order Runge-Kutta scheme 求解, 但同樣地為避免較不穩定之數值微分運算, 我們將 (7.7) 對 x 微分, 並將其結果以及 (7.8) 式做富氏轉換, 最後得到

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{F}\{\Omega_{\eta,x}\} &= -ik\mathcal{F}\left\{ \frac{\phi_{\eta,x} + \psi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} \Omega_{\eta,x} \right\} - ik\mathcal{F}\{U_{\eta}\Omega_{\eta,x}\} \\ &\quad - ik\mathcal{F}\left\{ \frac{-\psi_{\eta,x} + \phi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} U''|_{\eta} \right\}\end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{F}\{\hat{u}_s\} &= -ik\mathcal{F}\left\{ \frac{\phi_{\eta,x} + \psi_{\eta,x}\eta_x}{1 + \eta_x^2} \hat{u}_s \right\} - ik\mathcal{F}\{U_{\eta}\hat{u}_s\} \\ &\quad - \mathcal{F}\{\phi_{\eta} U''|_{\eta}\}\end{aligned} \quad (7.10)$$

在 (7.10) 中因含 ϕ_{η} , 故要由 $\phi_{\eta,x}$ 估計 ϕ_{η} , 需應用關係式

$$\mathcal{F}\{\phi_{\eta}\}(k) = -i\frac{1}{k}\mathcal{F}\{\phi_{\eta,x}\}(k). \quad (7.11)$$

此時因 k 出現在分母, 故當 k 很小時, 若 $\mathcal{F}\{\phi_{\eta,x}\}(k)$ 有誤差, 則此一誤差在 $\mathcal{F}\{\phi_{\eta}\}(k)$ 中將被顯著放大, 因此必須在每一個時間點, 將 (7.10) 之解, 連同 (7.2), (7.3) 以及 (7.9)

之解 (因 (7.3) 中亦含 $\mathcal{F}\{\phi_\eta U''|_\eta\}$), 通過一個 high-pass filter, 此一 filter 目前選擇為

$$f(k) = 1 - \exp[-2\pi(k/k_T)^{20}]. \quad (7.12)$$

其作用將使 $k > k_T$ 之分量獲得完整保留, 而 $k < 0.75k_T$ 者則基本上完全被消除, 因此目前我們定 $k_T = k_0/7.5$, 其中 k_0 表波在無流區之 wave-number。應用此一 filter 可使目前數值模擬之進行完全不受誤差放大影響, 且我們曾在 $U'' = 0$ 情況下, 比較用與不用此一 filter 所獲得之結果, 發現即使經過一段很長時間之模擬, 兩者差異不大, 表應用此一 filter 不會使真實能量損失, 因此接下來我們即可將目前的數值解來和已知的解析解比較, 以測試電腦程式。

第八章 測試電腦程式

由於我們目前將波浪場分解為旋性與非旋性兩部份，並證明非旋性部份可獨立求解，且其 evolution equations (7.2) 和 (7.3) 連同 closure equation (6.5)，皆與 Clamond & Grue (2001) 以及徐 (2011) 所使用者相差不大，故為進行目前的數值計算，可將徐 (2011) 所設計之電腦程式加以修改及延伸，使其在 $U' \neq 0$ 及 $U'' \neq 0$ 時仍可運算，且可額外解 (7.9) 和 (7.10)。此一做法使徐 (2011) 所做的電腦程式測試目前依然有效，故由徐 (2011) 可知，當 $U = 0$ 及 wave slope $ak_0 \leq 0.18$ 時，由目前的電腦程式可獲得與 Stokes waves 之第三階近似十分接近之結果，表目前的電腦程式可準確模擬無流情況下之非線性波。另一方面，當 $U \neq 0$ ，且在水平方向緩慢變化（但在垂直方向無變化）時，若令 ak_0 極小，則由目前的電腦程式所獲得波被流阻塞及反射過程的解，亦與 Shyu & Phillips (1990) 之解析解十分吻合。

當流在垂直方向顯著變化但近乎線性分佈時，線性波之離散關係式的解析解亦可獲得（參見徐 (2007, 2010)），故可因而決定線性波被垂直剪流阻塞時，其阻塞點的位置。此一位置可與由目前的電腦程式所決定之阻塞點位置相比，以測試電腦程式。

在目前的測試及以下的計算中，我們皆定 $U_0(x)$ 之分佈如圖 2 所示，其中 $U_0 \equiv U|_{z=0}$ 。圖中之中間直線表 $U_0(x) = -0.001x \text{ m s}^{-1}$ ，而其兩側直線則為使 U_0 在 $x = \pm 4096 \text{ m}$ 處歸於零。此一分佈可使波被一個位在 $x = 0$ 附近之氣壓造波機引發後，當其向左右兩方行進時，即使受流影響，仍可在原點兩邊形成對稱，且因我們定 $k_0 = 0.153125 \text{ rad m}^{-1}$ ，故根據線性波行進在非旋流上理論，線性波將在 $x = \pm 2000 \text{ m}$ 處被阻塞及反射，而當波為非線性波且流為旋性流時，我們仍預期波將在 $|x| < 2256 \text{ m}$ 之範圍內被阻塞及反射，故波和流一樣將局限於 $-4096 \leq x \leq 4096 \text{ m}$ 範圍內，因此在第七章內所有的富氏轉換皆可用有限富氏轉換取代（或將各函數視為一周期等於 8192 m 之周期函數）。

然而為使波在原點兩邊真正對稱，我們尚須令 $U'_0(x) = -U'_0(-x)$ 及 $U''_0(x) = -U''_0(-x)$ （表兩者為奇函數）。另一方面，由於平均流為二維，故在原點兩邊，我們令 U'_0 及 U''_0 自離原點不遠起至無窮遠維持不變，但為避免因 $U'_0(x)$ 和 $U''_0(x)$ 在原點上不連續所產生之 Gibbs' phenomenon，我們令兩者皆自 $x = \pm 100 \text{ m}$ 處往原點直線變化至零，此一變化將無法滿足 vorticity equation，但因其範圍很小，故不會影響波被流阻塞及反射現象，甚至對由位在原點附近之氣壓造波機所產生之波浪，影響亦有限，故我們目前仍採用 Clamond & Grue (2001) 所應用之氣壓造波機，亦即當 $t < 0$ 時， $p_\eta = 0$ ，而當 $t \geq 0$ 時

$$\mathcal{F}\{p_{\eta,x}/\rho\} = ia \frac{g}{\omega} \sqrt{gk_0} \exp\left(\frac{k_0^2 - k^2}{2k_0^2}\right) \left(\frac{k}{k_0}\right)^{3/2} \sin(\sqrt{gk_0}t), \quad (8.1)$$

其中 a 將為其所產生的波在原點附近之振幅, k_0 則如前面所定義,乃為在此一近乎無流區內之 wave-number, 而 $\omega^2 = g|k|$ 。

在上述情況下, 為將線性波被一垂直剪流阻塞時的阻塞點位置之解析解與目前的數值解比較, 我們令 $a = 0.000001$ m, 以確保在數值模擬時, 波即使流被阻塞及反射, 仍屬線性波, 故可滿足徐(2007, 2010) 用解析方法所導出之離散關係式

$$gk = \sigma^2 + \sigma U'_0 - \frac{\sigma}{k} U''_0. \quad (8.2)$$

應用此一關係式及應用 kinematical conservation equation for the density of waves

$$n_0 = \sigma + kU_0 = \text{const}. \quad (8.3)$$

我們可決定阻塞點位置之解析解如圖3所示。圖中的 k_1 和 k_2 乃為 (8.2) 和 (8.3) 此兩個方程式之未知數 k (式中另一個未知數為 σ) 之雙解, 此兩個解分別代表入射波和反射波, 且其大小在不同的位置, 將因 U_0 改變 (亦即圖3中之直線斜率改變) 而改變 (雖其變化十分緩慢), 故在某一點上, 當圖3中的直線旋轉至虛線所代表的位置時, k_1 將等於 k_2 , 且當 $|U_0|$ 更增大時,(8.2) 和 (8.3) 的實數解將不存在, 表波浪無法行進至此, 因此由圖3中的虛線所代表的位置即為阻塞點的位置。此一阻塞點位置將與應用目前的電腦程式計算波形變化所決定之阻塞點位置相比, 來達到測試電腦程式之目的, 但要由波形變化決定阻塞點位置需應用 Shyu & Tung (1999) 的理論。

由 Shyu & Tung (1999) 之 figure 17可知, 當線性波被非旋流阻塞及反射後, 在阻塞點附近波之振幅變化可用 Airy function $\text{Ai}(-r)$ 之絕對值近似描述。此一絕對值之最大值乃出現在 $r = 1$ 處, 而 r 與 x 之間關係, 根據 Shyu & Tung (1999), 在阻塞點附近亦可近似表為

$$r = (-\psi_1)^{1/3}[-(x - x_b)], \quad (8.4)$$

其中 ψ_1 乃為 $(k_2 - k_1)^2/4$ 此一函數對 $x = x_b$ 做泰勒級數展開之第一項係數, 表在阻塞點附近

$$\frac{1}{4}(k_2 - k_1)^2 = \psi_1(x - x_b). \quad (8.5)$$

因此當我們由 η 的數值解找出其振幅最大處之 x 值 (參見圖4和圖5), 再由 (8.2) 和 (8.3) 決定此一位置上之 k_1 和 k_2 值, 即可由 (8.4) 和 (8.5) 求出 x_b 和 ψ_1 此兩個未知數的解, 前者即為由波形變化所決定之阻塞點位置。

需強調的是, 目前的數值模式及電腦程式完全未應用 (8.2) 和 (8.3) 式, 此點可由前面各章中未出現如 (8.2) 和 (8.3) 之公式可知, 故若由目前的電腦程式所獲得的阻塞點位置可與直接用 (8.2) 和 (8.3) 所決定者一致, 即可達到測試電腦程式之目的。

圖4即表應用目前的電腦程式所獲得當 $t = 3000 \text{ sec}$ 時, η 在空間上之分佈。由此一結果我們可看出,因 U'_0 和 U''_0 不等於零,故波尚未行進至 $x = 1700 \text{ m}$ 即已被阻塞(而非如非旋流情況,被阻塞於 $x = 2000 \text{ m}$ 處),但其阻塞點位置,甚至其振幅最大處位置,皆無法由圖4準確決定,因此我們必須觀察可能的阻塞點位置附近各點之水面位移隨時間的變化。圖5即為我們經過一番比較後,選出的5個最可能具有最大振幅之位置上,其水面位移隨時間的變化圖,由這些圖我們即可看出最大振幅乃發生於 $x = 1619 \text{ m}$ 處,再應用(8.2)-(8.5)即可估計阻塞點位置 $x_b = 1626.5 \text{ m}$,此一結果與直接由(8.2)和(8.3)所決定之 $x_b = 1627.4 \text{ m}$ 相差不到1 m。

為顯示上述數值解與解析解十分接近的情況乃普遍發生,我們亦進行更多的比較,並將其結果繪於圖6和圖7。由圖6我們可看出,在各種不同的 U'_0 值情況下,阻塞點位置之數值解和解析解在圖中皆難以區分,但此點亦與阻塞點位置隨 U'_0 值變化幅度很大(超過600 m)有關,表未來若要準確估計阻塞點位置,有必要考慮平均流在水面附近之垂直梯度。另一方面,為顯示目前的數值模式亦可準確模擬阻塞點位置隨 U''_0 值變化情形,在圖7中我們將 U'_0 值固定,僅變化 U''_0 值。此時因 U''_0 值僅能在一個較小範圍內變化(因目前假設平均流在垂直方向變化近乎線性),故圖7中之阻塞點位置變化幅度有限,因此其數值解和解析解之差異在圖7中較顯著,但仍足以顯示目前的數值模式可準確模擬阻塞點位置隨 U''_0 值變化情形。

以上之比較另有一項意義,即顯示 Shyu & Tung (1999) 之針對流為非旋性情況所獲得在阻塞點附近的解,可延伸應用於平均流為垂直剪流情況,後者在徐 (2010) 中亦曾用解析方法加以討論,故目前的數值解可做為其一項佐證。

第九章 波之旋性分量數值解

上一章之比較僅針對線性波，但目前的電腦程式乃針對完全非線性波來設計，並假設 closure equation (5.18) 亦可適用於非線性波，但 (5.18) 僅在波為線性波時，經由解析方法獲得證明，故目前的電腦程式是否能應用於非線性波仍有待證明。

由於 (5.18) 若成立，可做為波之旋性分量 $\hat{u}_s$ 之控制方程式 (因 (5.20) 或 (7.10) 即由 (5.18) 改寫而成)，故在正式討論非線性波被垂直剪流阻塞及反射現象之數值解以前，我們先觀察由目前的電腦程式所獲得 $\hat{u}_s$ 之數值解，以瞭解當波由線性變為非線性時， $\hat{u}_s$ 之數值解是否合理。

圖8即顯示在 $a = 0.000001 \text{ m}$ 及 $a = 0.1 \text{ m}$ 兩種情況下，應用目前的電腦程式所獲得 $\hat{u}_s$ 之數值解。由此圖我們可看出，當 $a = 0.1 \text{ m}$ 時 (此時波應為非線性)， $\hat{u}_s$ 之數值解除具有類似於 $a = 0.000001 \text{ m}$ 時之振盪外，尚具有一明顯波長較長之振盪，此乃因在 $\hat{u}_s$ 之控制方程式 (7.10) 內，其 source term 與 ϕ_η (而非 $\phi_{\eta,x}$) 成正比，故由 (7.11) 可知，由 $\phi_{\eta,x}$ 求 ϕ_η 時，大尺度之富氏分量將被放大 (因 k 較小)，因此當 η (因而 $\phi_{\eta,x}$) 如圖9在阻塞點附近具有一微弱之波長較長振盪時，由這些分量所引發 $\hat{u}_s$ 中波長較長的振盪即十分明顯，而當 $a = 0.000001 \text{ m}$ 時，類似於圖9之振盪完全不存在，因此在圖8中，其上下兩個解之振盪型態看似不同，但若我們將這些波長較長的振盪過濾掉 (亦即應用 (7.12)，並令式中 $k_T = k_0/1.2$)，由圖10可看出，不論波為線性波或非線性波， $\hat{u}_s$ 解之振盪型態實際相同，其中兩者之 $\hat{u}_s$ 解之極大值皆位在水面位移之波谷處，極小值皆位在波峰處，而且因上述大尺度振盪被放大效應，圖10之上下兩個 $\hat{u}_s$ 解皆無法顯現出其波長較短的振盪 (與圖中 η 解相比)。

為顯示目前的 $\hat{u}_s$ 解確十分合理，我們在電腦程式中亦應用 (7.7) 式計算 Ω_η ，並將 Ω_η 解與 $\hat{u}_s$ 解相比。由於 (7.7) 式之 source term 含 $\phi_{\eta,x}$ ，而非 ϕ_η ，故上述波長較長振盪被放大現象如今不存在，因此即使未使用 high-pass filter，非線性波之 Ω_η 解仍與線性波之 Ω_η 解型態相同 (見圖11)，且兩者皆可顯現出波長較短的振盪，故圖11中 Ω_η 之變化與 η 的變化完全同步，僅正負號相反。此一現象可由 vorticity equation 直接獲得瞭解 (即使波為完全非線性波)，因此接下來我們將 $\hat{u}_s$ 解來和 Ω_η 解相比。

由圖12之上下圖我們可看出，若忽略波長較短的振盪，不論波為線性波或非線性波， $\hat{u}_s$ 解之極大值和極小值位置皆與 Ω_η 一致，此一結果若考慮 Ω_η 的定義亦不令人意外。另外我們也觀察圖12之上下圖間的差異，亦即當波為非線性時，在 Ω_η 之空間分佈中的一些較尖銳且深的凹槽處，其 $\hat{u}_s$ 解並非如線性波般亦具有較深之凹槽。此乃因非線性波之水面位移 η 具有波峰較尖波谷較平緩之特性，故在其波峰處 (亦即 Ω_η 空間分佈之凹槽處)，水面之曲率半徑 R 甚小，因此在此處即使 $|\Omega_\eta|$ 很大， $|\hat{u}_s|$ 仍無法太大，以免 $|\hat{u}_s|/R$ 過大 (因在曲

線座標中, Ω_η 包含 $\hat{u}_s/R/\sqrt{1+\eta_x^2}$ 此項), 故圖 12 之上下圖間細微差異亦可獲得解釋, 表當波由線性變為非線性時, 目前的 $\hat{u}_s$ 解仍十分合理。

第十章 非線性波被垂直剪流阻塞及反射現象數值解析

經過以上比較與測試後，我們即應用目前的數值模式，對非線性波被垂直剪流阻塞及反射現象進行一有系統之模擬。首先我們模擬各種不同振幅入射波行進在相同剪流上情況，因而獲得圖 13。由此圖我們可看出，當波之非線性效應顯著時，入射波與反射波並非單純之線性疊加，而會交互作用，且可能發生 Benjamin-Feir instability (Benjamin & Feir 1967)，使 η 之空間分佈變為不規則。為證明此種不規則並非因模式不準確所造成，我們曾採用較密的網格點，但仍獲得相同的結果。另外，我們也曾將 (7.4) 和 (7.6) 中之 λ 值由 2 個波長增為 3 個波長 (此一波長乃為波在無流區之波長)，但亦獲得幾乎相同的結果 (見圖 14 之上圖)。然而，當 $a = 0.12$ m 時，此一增加將使計算結果明顯改變 (見圖 14 之下圖)，而為證明當 λ 值等於 3 個波長時，其結果已十分準確，在圖 15 中我們將圖 14 之下圖中的兩個解，分別與其將波譜用零延伸為 8/2 倍 (原僅延伸為 4/2 倍) 之結果相比，發現當 λ 值等於 2 個波長時，此一增加延伸使結果明顯不一致，但 λ 值等於 3 個波長時，其結果即相當一致，然而當振幅更大時，亦即 $a = 0.15$ m 時，即使令 λ 值等於 3 個波長，在 $t = 2500$ sec 時仍無法獲得一致的結果 (見圖 16 之上圖)。

由於上述不一致現象亦發生在流為非旋流情況，故它與 closure relationship (5.18) 能否應用於非線性波無關。另一方面，有結果顯示，經由較長之 zeros padding 有時可改善此種不一致現象，故推測後者可能和對非線性項做富氏轉換所產生之 aliasing errors 有關。此種 aliasing errors 可能間接使 λ 值需加大，但無論如何，由圖 16 之下圖我們可發現，當 $t = 2000$ sec 時，由於非線性效應較 $t = 2500$ sec 時小，再加上此時誤差之累積尚不嚴重，故即使 λ 等於 3 個波長，仍可獲得十分一致的結果，並顯示波被流阻塞及反射現象此時已發生。

由於不論採用更大的 λ 值，或將波譜延伸更長，皆使計算成本難以負荷，故目前我們所模擬的非線性波被垂直剪流阻塞及反射現象，其振幅最大者乃為 $a = 0.15$ m，但此一數字僅代表造波機附近波之振幅，而在阻塞點附近，波之振幅已放大 3 倍以上，再加上波長變短，故 wave slope 可將近 0.6 (見圖 17)，因此目前的數值解已足以顯示，非線性波確可被一垂直剪流阻塞及反射。

另外需強調的是，由於第二章導公式的過程與徐 (2011) 之過程不相同，故儘管兩者皆忽略平均流在水平方向之變化率 (因而也忽略平均水位的變化)，但由此一忽略所產生的效果兩者並不完全相同 (此點可由徐 (2011) 之 (3.6) 式之最後一項與目前的 (7.3) 式之倒數第二項略為不同看出)，因此在徐 (2011) 中，當波由造波機附近行進至阻塞點附近，再與反射波疊加後，其振幅總共可放大 6 倍以上，而目前僅放大 3 倍以上。由於徐 (2011) 和目前的模式皆無法描述波浪之緩慢變化現象，僅能描述波被流阻塞及反射此一

快速變化現象，故上述兩個數字皆不一定正確。

最後，爲了要獲得未使用 (5.18) 此一適用範圍尚無法確定的方程式之解，我們亦針對平均流在垂直方向變化爲完美線性情況來計算，因而獲得圖 18。將圖 18 與圖 13 相比可發現，兩者在波形特徵及阻塞點位置兩方面皆相差不大（但若與徐 (2011) 針對非旋流所獲得的結果相比，則雖前者亦相差不大，但後者卻明顯改變），此乃因圖 13 所考慮之平均流在垂直方向的變化雖爲非線性，但仍近乎線性，故 $U'''|_n$ 值相對較小，因而其影響僅爲次要，但無論如何，圖 13 之結果仍有其重要性，因由它我們知道，圖 18 的解不會因平均流在垂直方向的分佈略爲改變即發生顯著變化，表圖 18 的解乃爲一穩定解，故波被流阻塞及反射現象應可普遍發生。

第十一章 結論與建議

爲澄清完全非線性波是否可被一垂直剪流阻塞及反射，本研究將 Clamond & Grue(2001) 之快速計算二維完全非線性未碎波之數值方法加以延伸，使能應用於此一波列平行行進在一垂直剪流上情況。而爲使目前的方法可適用於較複雜之剪流，本研究將波浪運動之旋性部份與非旋性部份明白加以區分，並建立兩者間一關係式以做爲獨立解非旋性部份之 closure relationship，因而可充份應用 Clamond & Grue(2001)之快速準確的方法，又可避免 Nwogu(2009)方法中對剪流所做的一些限制，故目前的方法僅需平均流在垂直方向的分佈近乎線性，其他則無限制。

上述 closure relationship 僅在線性波情況經由解析方法獲得證明，但由目前的數學分析及物理觀念，我們仍可期待此一 closure relationship 或可應用於非線性波，而應用它所獲得的非線性波被垂直剪流阻塞及反射現象之數值解，包括其旋性分量的解，亦十分合理。

另外我們也強調，當平均流在垂直方向的分佈近乎線性時，波之旋性速度將小於非旋性速度一個量級，故上述 closure relationship 之影響僅爲次要，因此即使在 closure relationship(5.18)之等號右邊尙具有未經證實之第二階項，其影響亦僅爲第三階，表目前的數值解在 wave slope 相當大時仍十分可信。

最後，爲達到嚴密證明完全非線性波確可被一垂直剪流阻塞及反射之目的，我們亦針對平均流在垂直方向爲完美線性分佈的情況加以計算，此時上述適用範圍尙未確定之 closure relationship 將不影響結果，故當計算結果顯示完全非線性波確可被一垂直剪流阻塞及反射，此一結論乃更可信，且當流在垂直方向之分佈略爲改變爲近乎線性時所獲得的數值解(此解在 wave slope 較小時亦十分可信賴)顯示出相近之結果，我們亦得知此種波被流阻塞及反射現象乃爲一穩定之過程，故可普遍發生於自然界，因此有可能與深海瘋狗浪有關。

綜合以上所述，本研究之成果效益有二：一、本研究所發展的數值方法可較準確地模擬非線性波與垂直剪流間各種交互作用現象，故極具應用價值。二、本研究因證明波即使爲非線性，仍可被一垂直剪流穩定地阻塞及反射，故顯示瘋狗浪確可能主要因波被流阻塞及反射而引發，此點將有助於未來在臺灣建立一瘋狗浪預報系統。

參考文獻

- Baker, G. R., Meiron, D. I. & Orszag, S. A. 1982 Generalized vortex methods for free-surface flow problem. *J. Fluid Mech.* **123**, 477–501.
- Benjamin, T. B. & Feir, J. E. 1967 The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.* **27**, 417–430.
- Canuto, C., Haussaini, M. Y., Quarteroni, A. & Zang, T. A. 1987 *Spectral Method in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer.
- Clamond, D. & Grue, J. 2001 A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *J. Fluid Mech.* **447**, 337–355.
- Irvine, D. E. & Tilley, D. G. 1988 Ocean wave directional spectra and wave-current interaction in the Agulhas from the shuttle imaging radar-B synthetic aperture radar. *J. Geophys. Res.* **93**, 15389–15401.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1960 Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J. Fluid Mech.* **8**, 565–583.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1961 The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.* **10**, 529–549.
- Mallory, J. K. 1974 Abnormal waves on the south east coast of South Africa. *Int. Hydrog. Rev.* **51**, 99–129.
- Nwogu, O. G. 2009 Interaction of finite-amplitude waves with vertically sheared current fields. *J. Fluid Mech.* **627**, 179–213.
- Peregrine, D. H. & Smith, R. 1979 Nonlinear effects upon waves near caustics. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **292**, 341–370.
- Shyu, J. H. & Phillips, O. M. 1990 The blockage of gravity and capillary waves by longer waves and currents. *J. Fluid Mech.* **217**, 115–141.
- Shyu, J. H. & Tung, C. C. 1999 Reflection of oblique waves by currents: analytical solutions and their application to numerical computations. *J. Fluid Mech.* **396**, 143–182.
- Smith, R. 1975 The reflection of short gravity waves on a non-uniform current. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78**, 517–525.

- Smith, R. 1976 Giant waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 417–431.
- White, B. S. & Fornberg, B. 1998 On the chance of freak waves at sea. *J. Fluid Mech.* **355**, 113–138.
- Wu, G. 2004 Direct simulation and deterministic prediction of large-scale non-linear ocean wave-field. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- 李勇榮 1997 波浪調變特性研究, 交通部運輸研究所港灣技術研究中心。
- 徐進華 2007 臺灣東岸港口共振現象改善方案研究 (2/4), 交通部運輸研究所港灣技術研究中心。
- 徐進華 2010 臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究 (1/4), 交通部運輸研究所港灣技術研究中心。
- 徐進華 2011 臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究 (2/4), 交通部運輸研究所港灣技術研究中心。

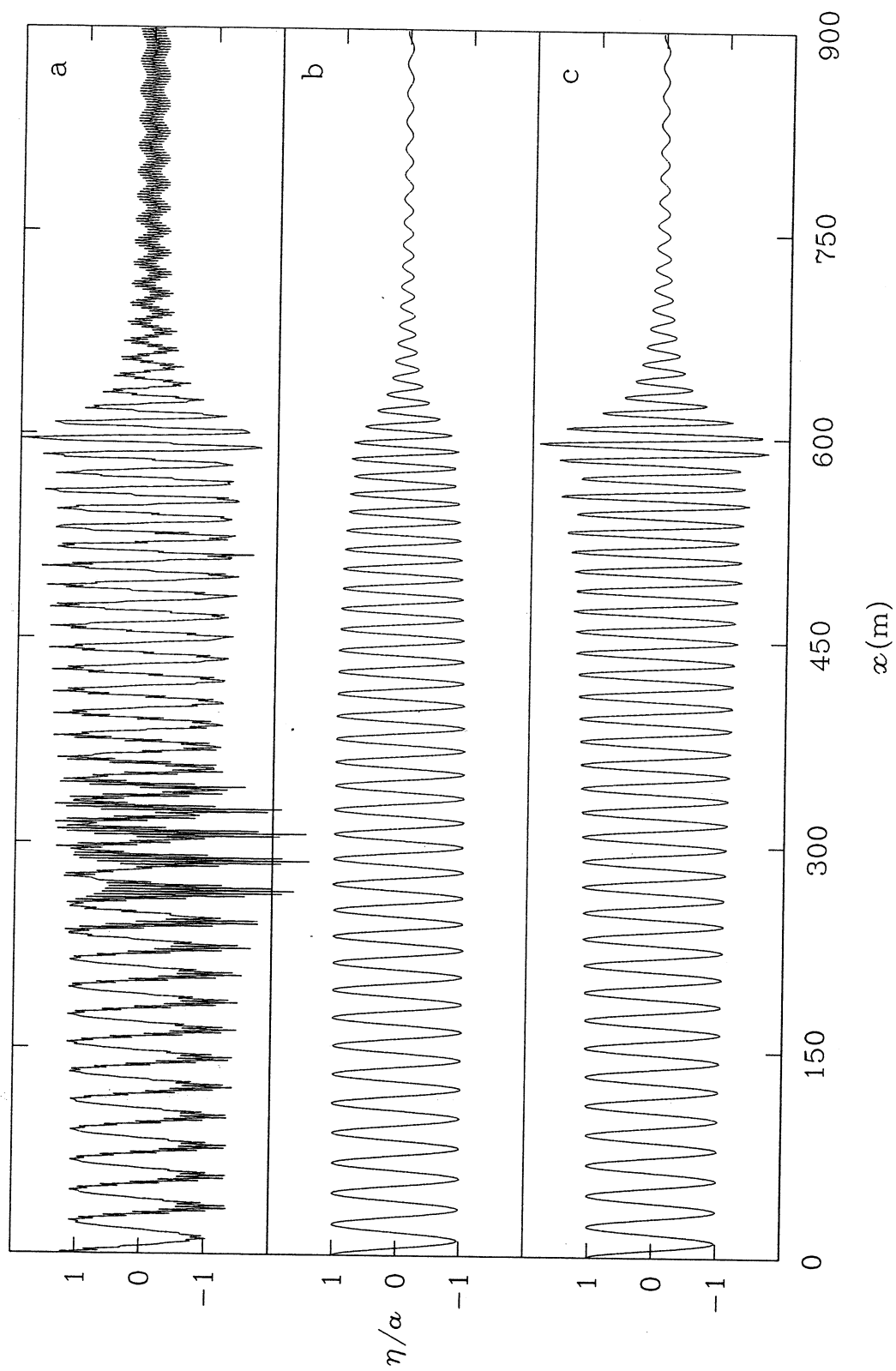


圖1、鋸齒狀不穩定現象化減前後及不同化減法所產生的結果。

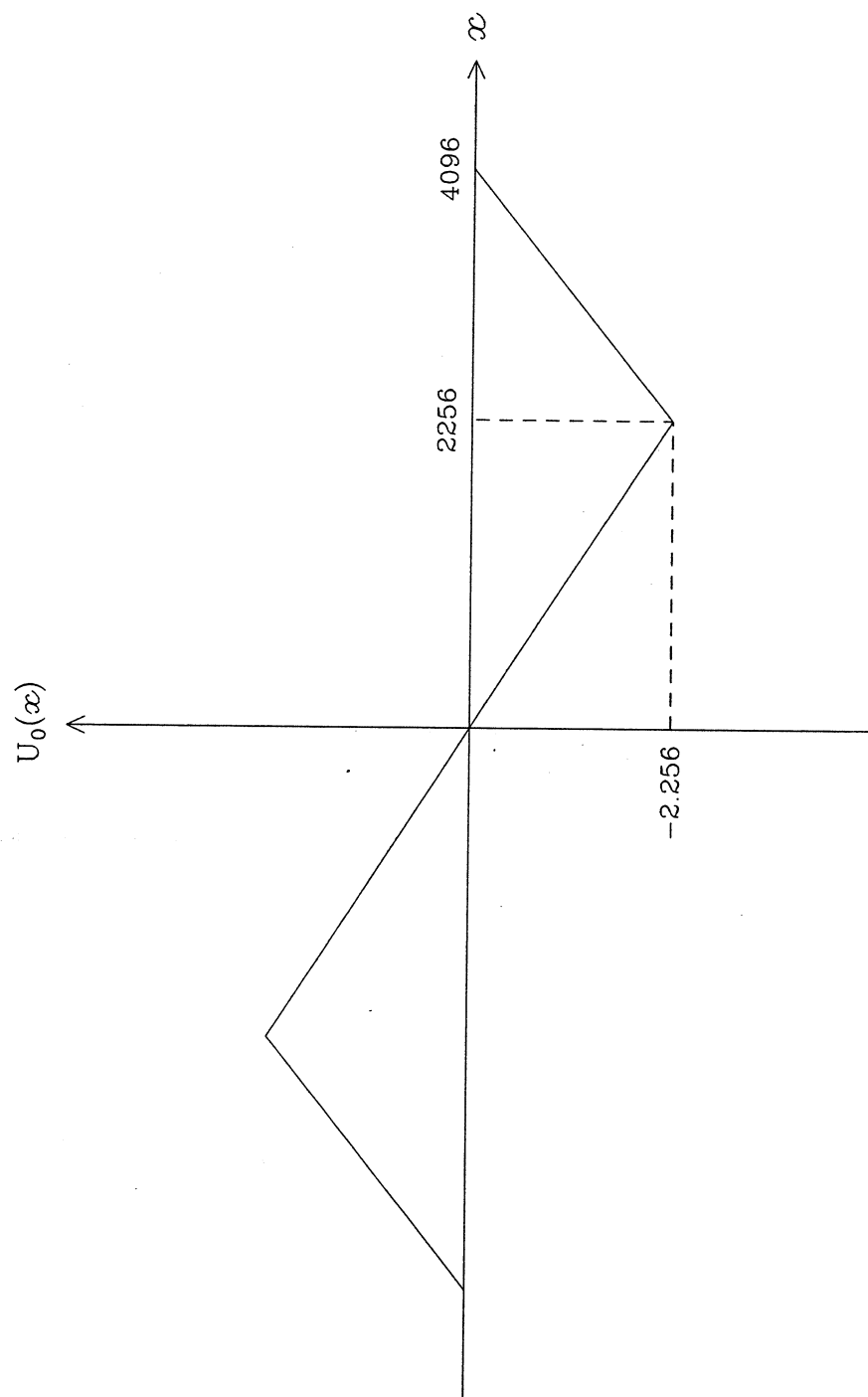


圖2、平均流在水平方向之分佈。數字之單位採m.k.s. 制。

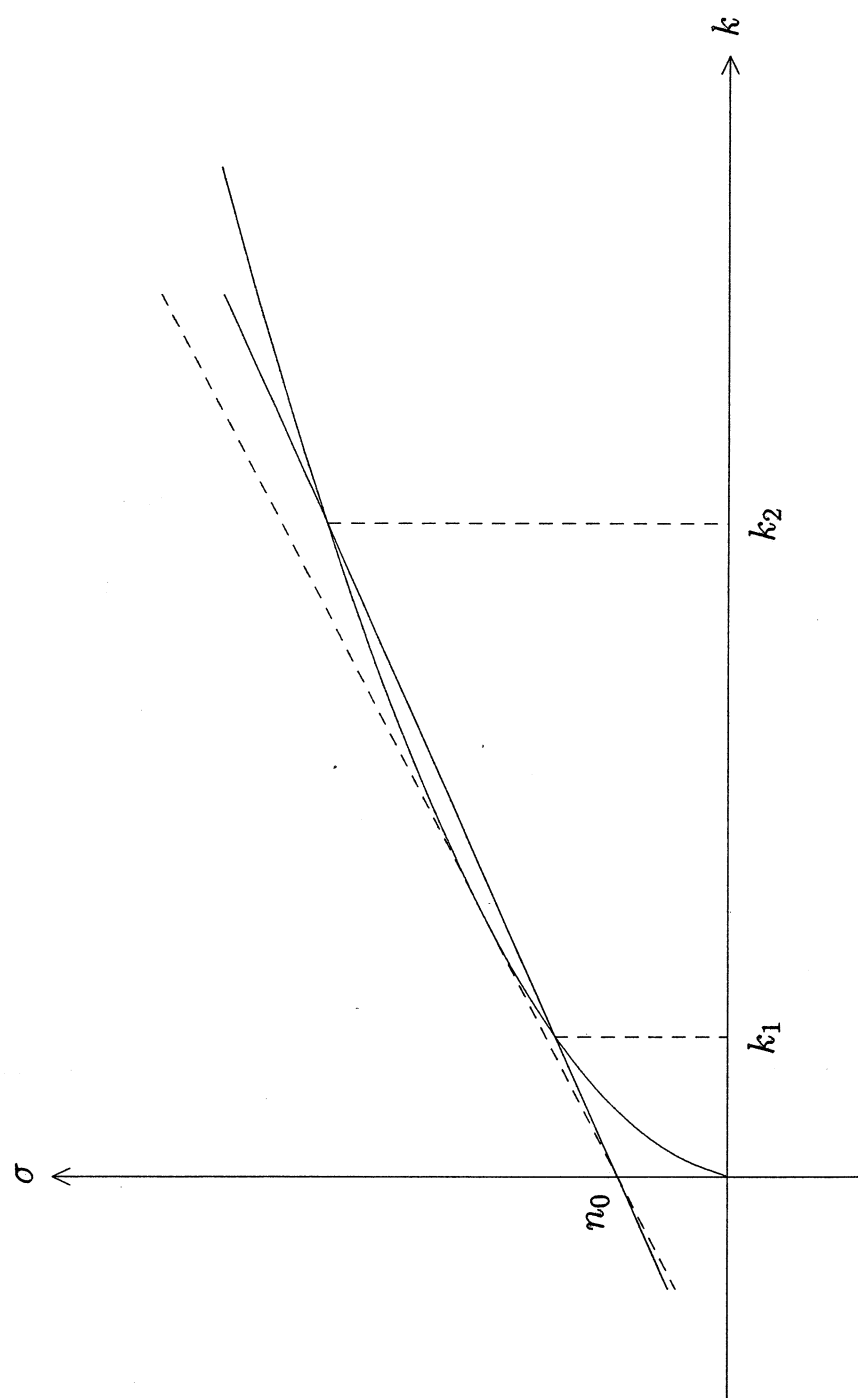


圖3、離散關係式(曲線)與運動守恆方程式(直線)之解。

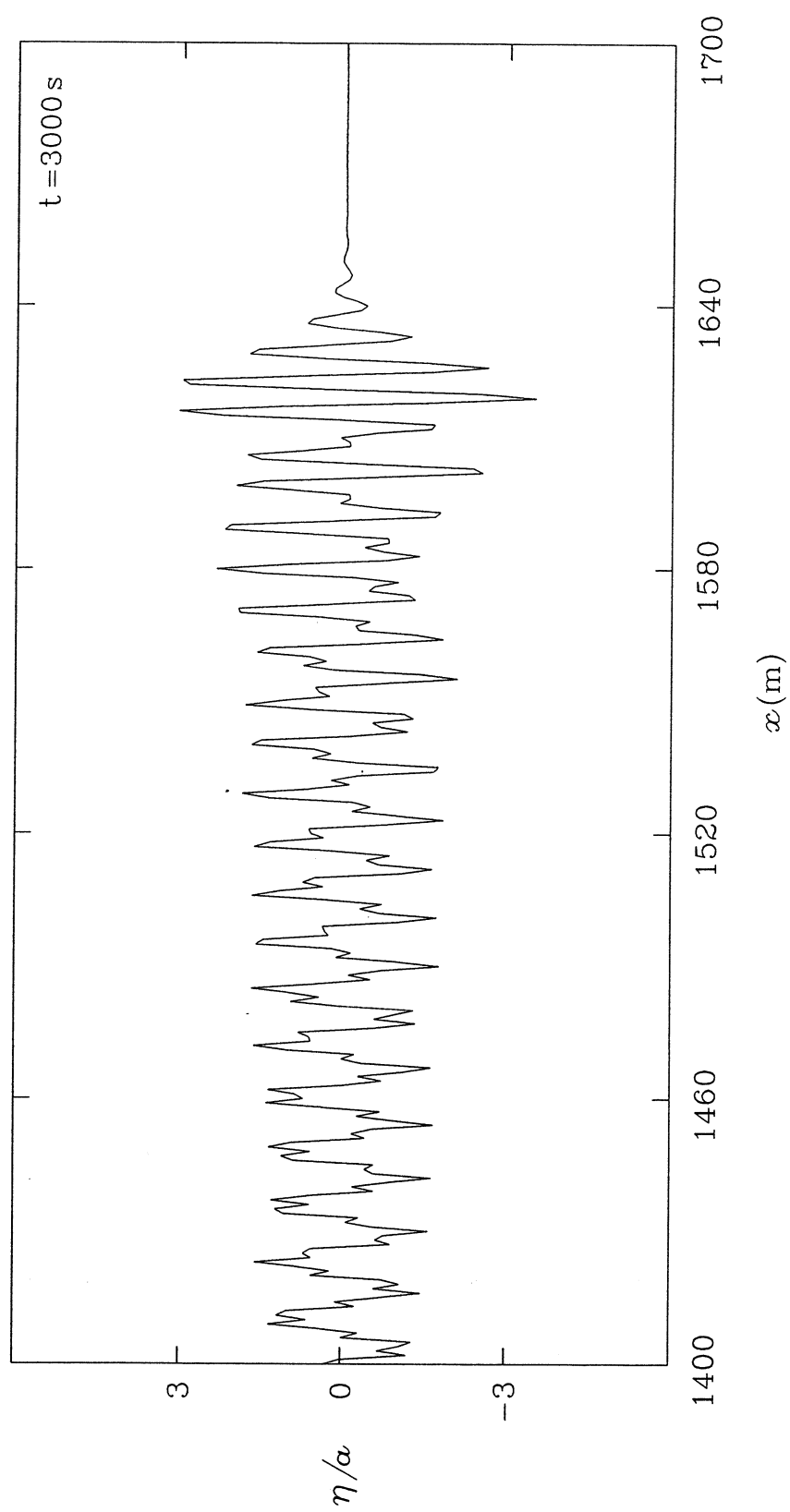


圖4、線性波被垂直剪流阻塞及反射現象之數值解。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 。

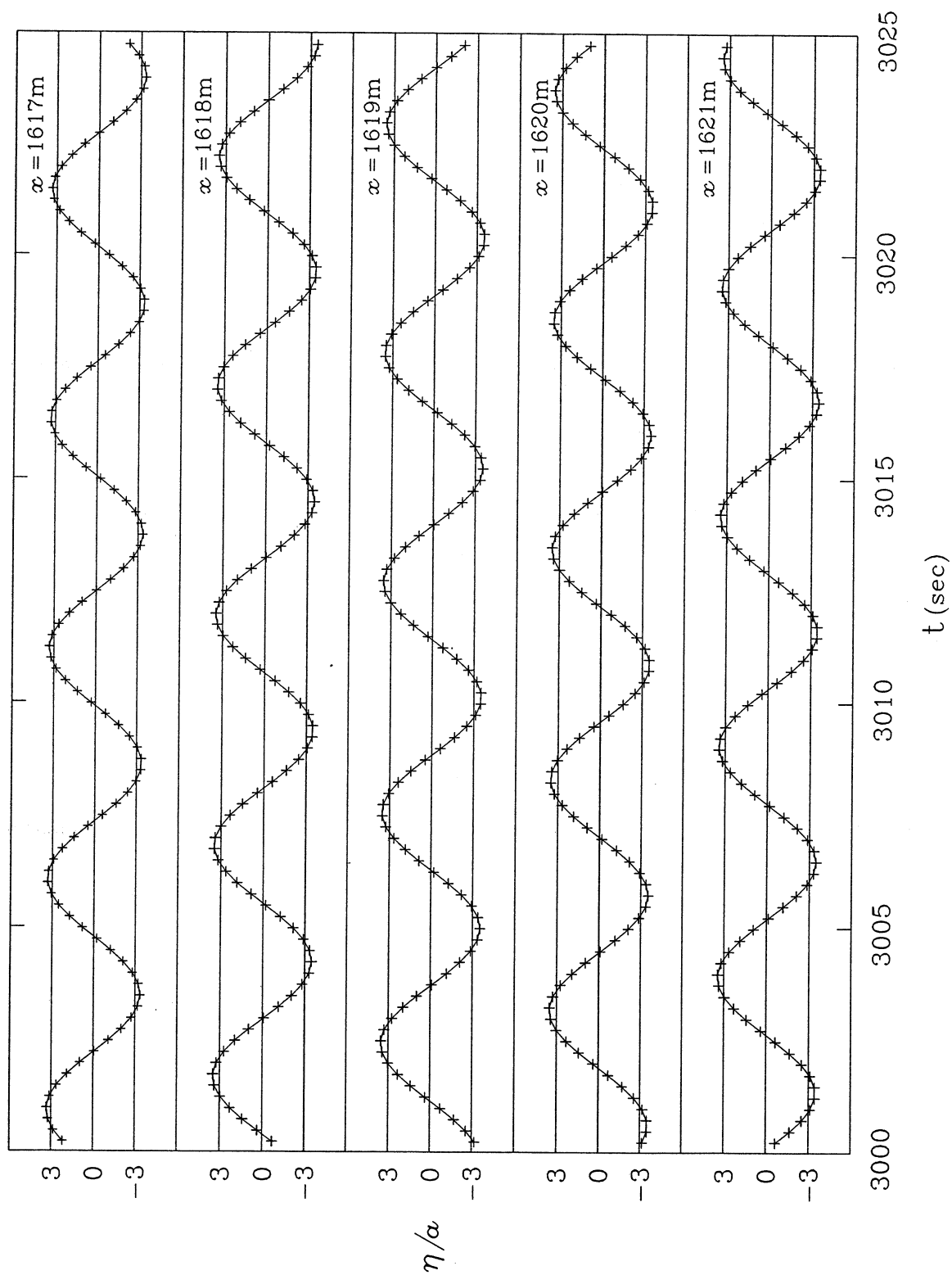


圖5、與圖4相同之解，但表為 η 在固定位置上隨時間變化圖。

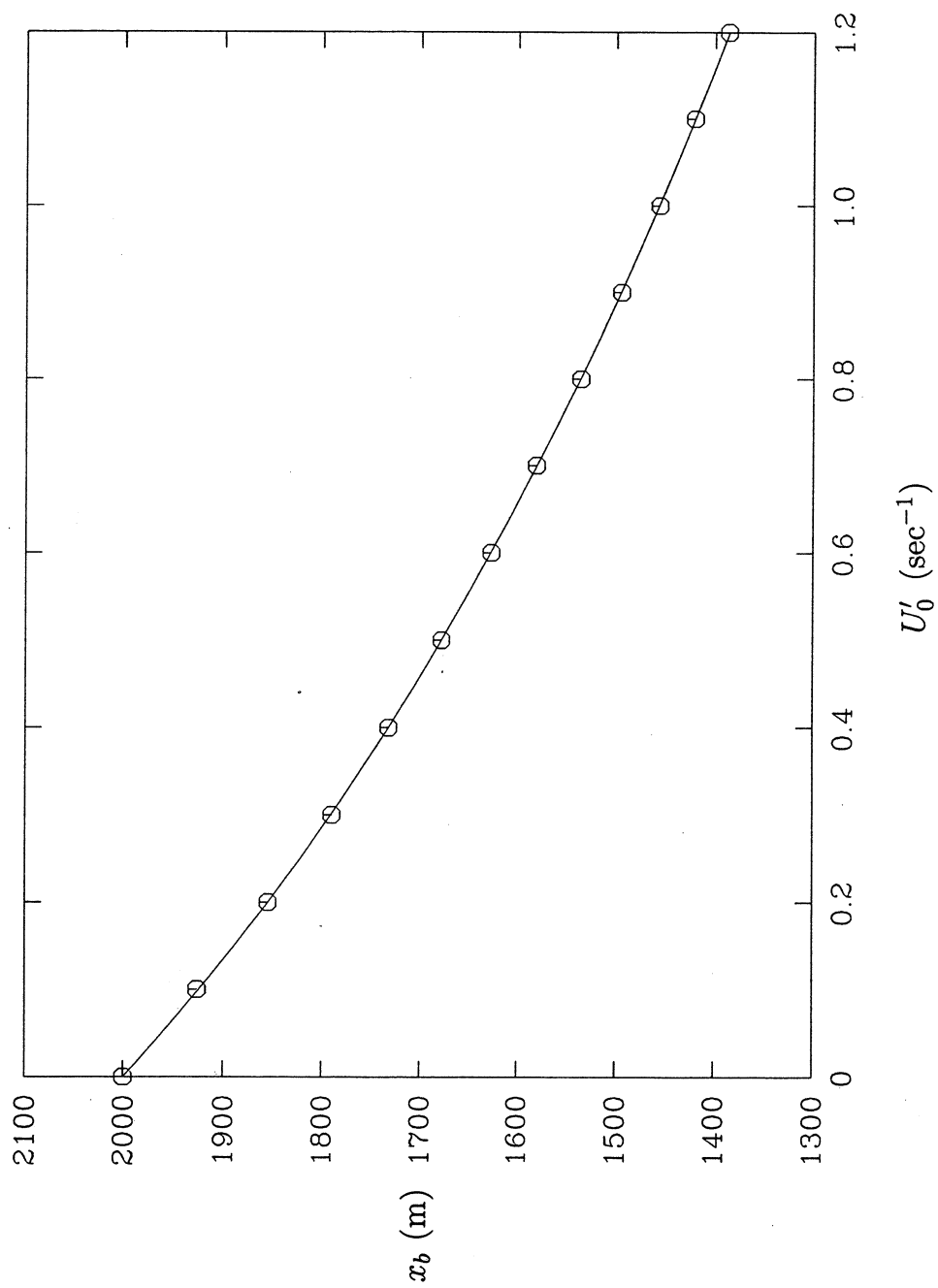


圖6、阻塞點位置隨 U'_0 值變化之解析解 (曲線) 與數值解 (圓圈)。 $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 。

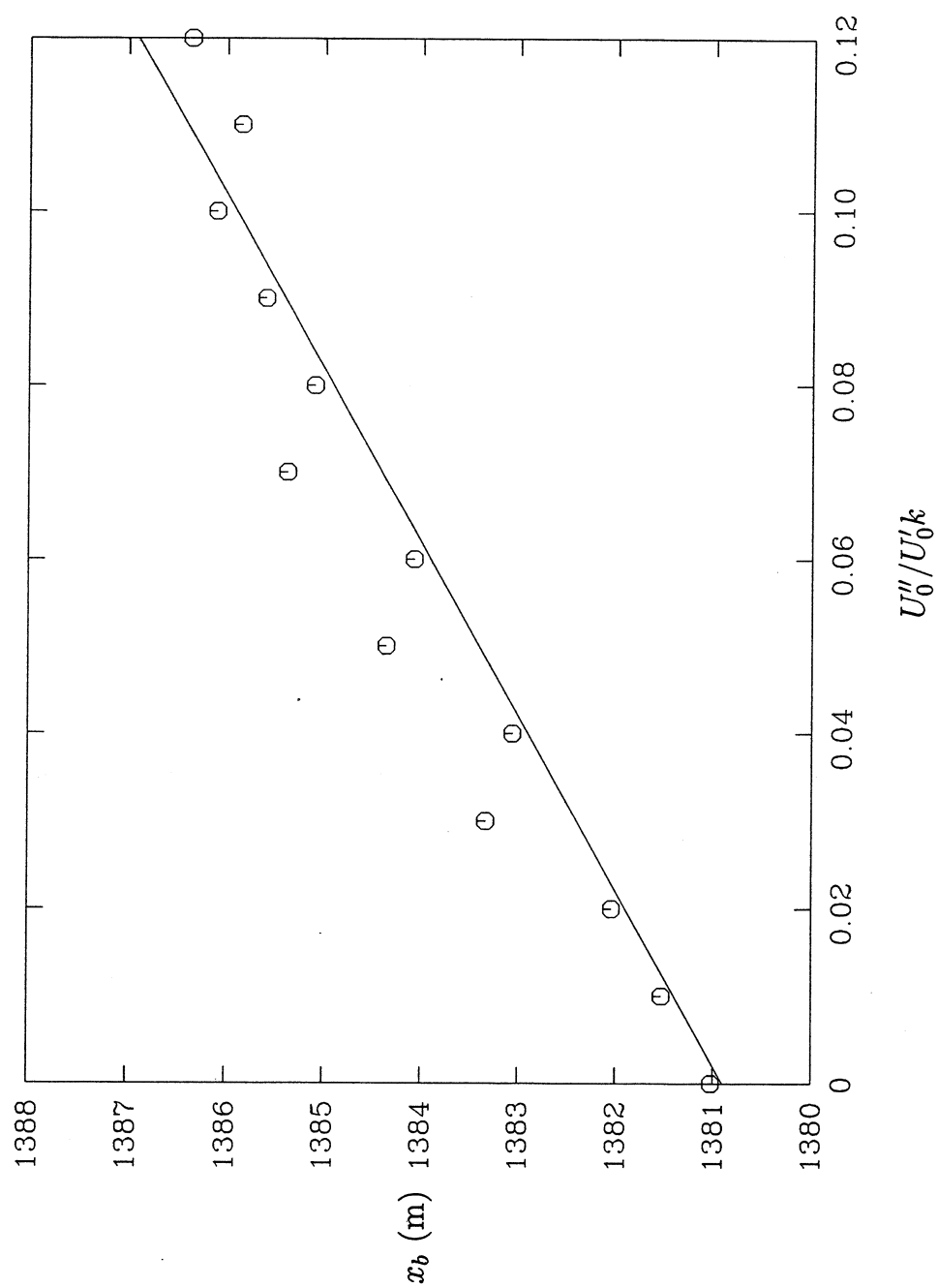


圖7、阻塞點位置隨 U_0'' 值變化之解析解 (曲線) 與數值解 (圓圈)。 $U_0' = 1.2 \text{ sec}^{-1}$ 。

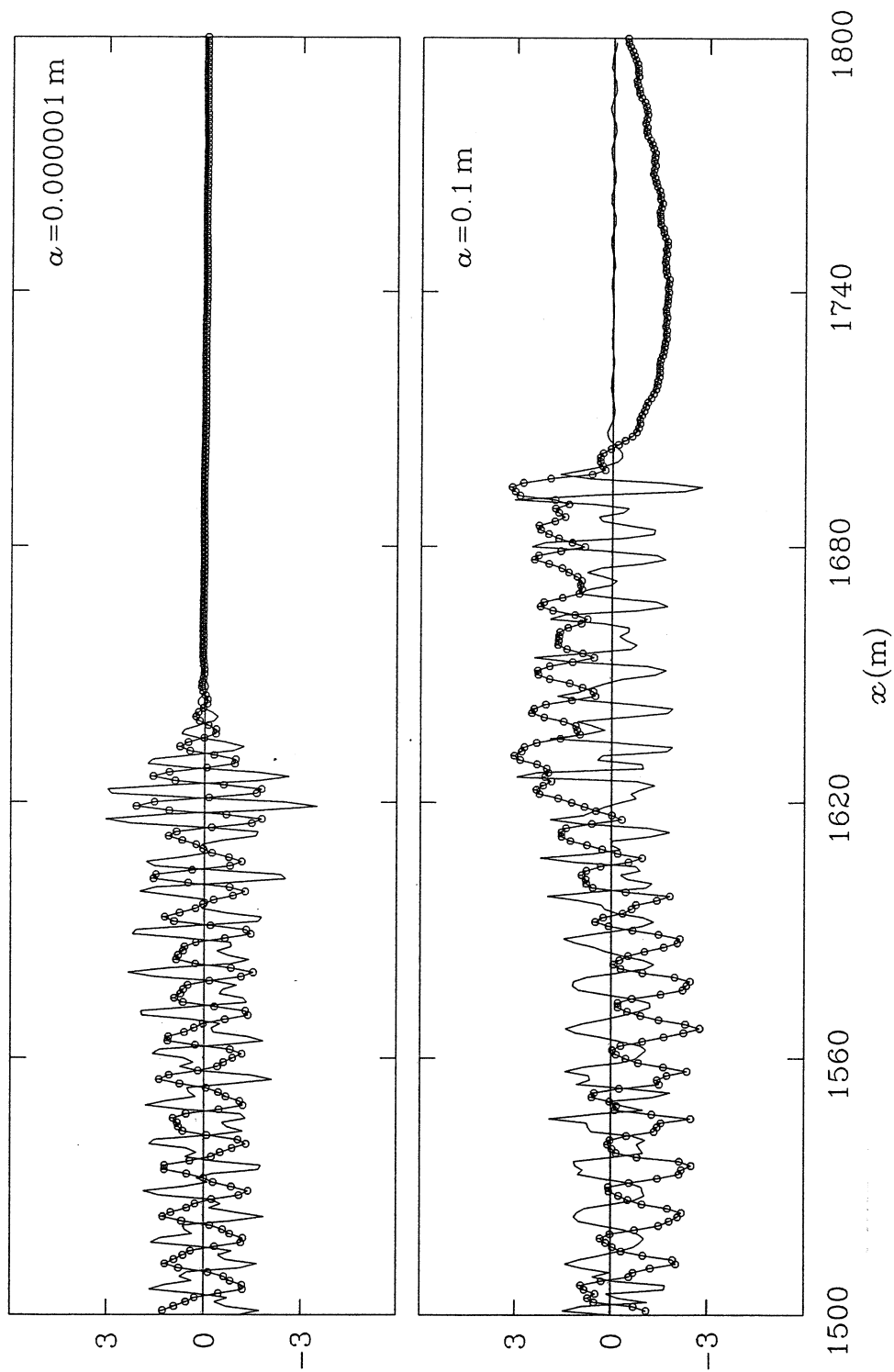


圖8、當 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 時, 波之旋性速度分量 $\hat{u}_s$ 之解 (圓圈), 但為與 η/a 解 (曲線) 及在圖 12 中與其他資料相比, 改用 $0.532 \hat{u}_s / a U''_0$ 表示 ($t = 3000 \text{ sec}$)。

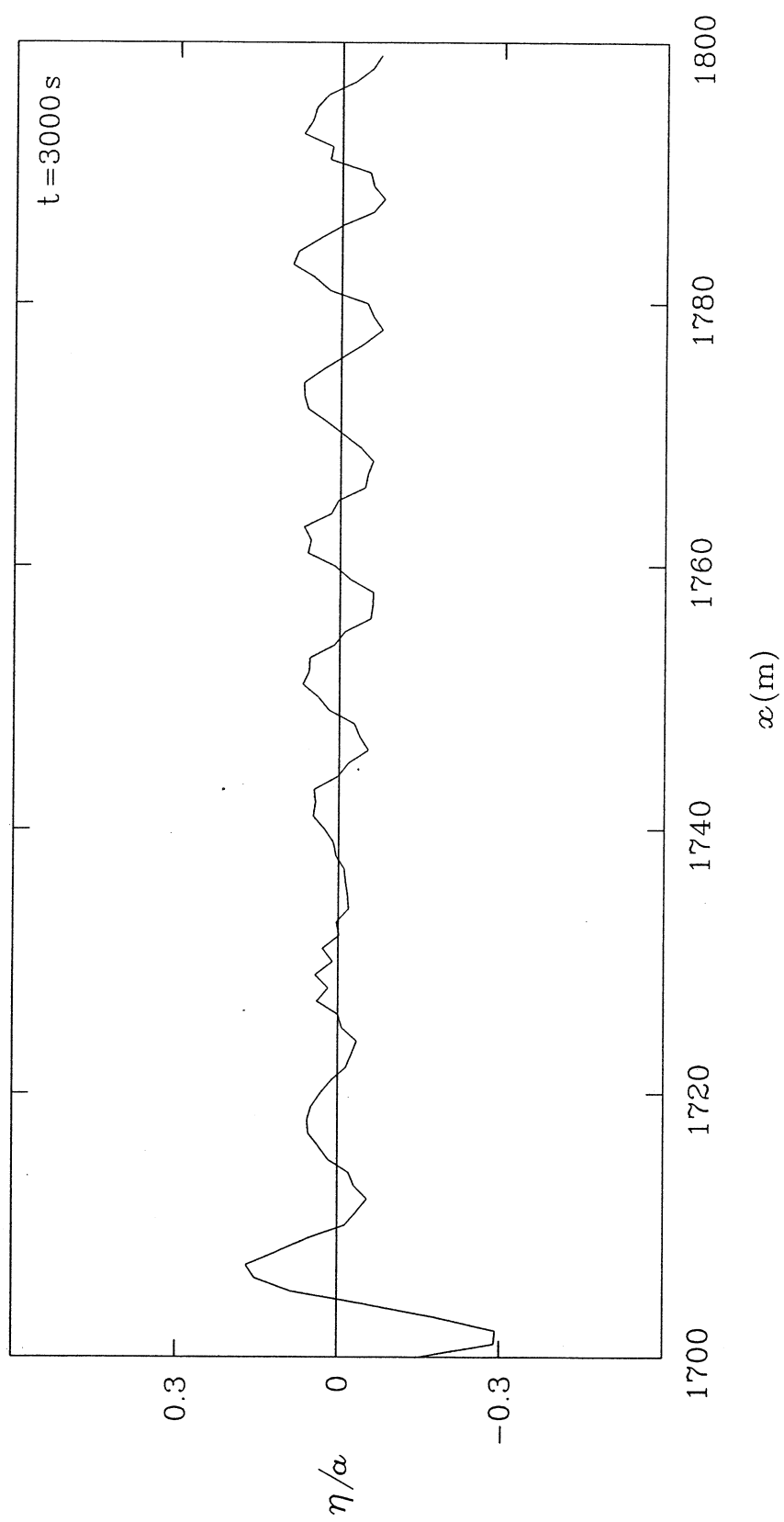


圖9、與圖8之下圖相同之 η 解。

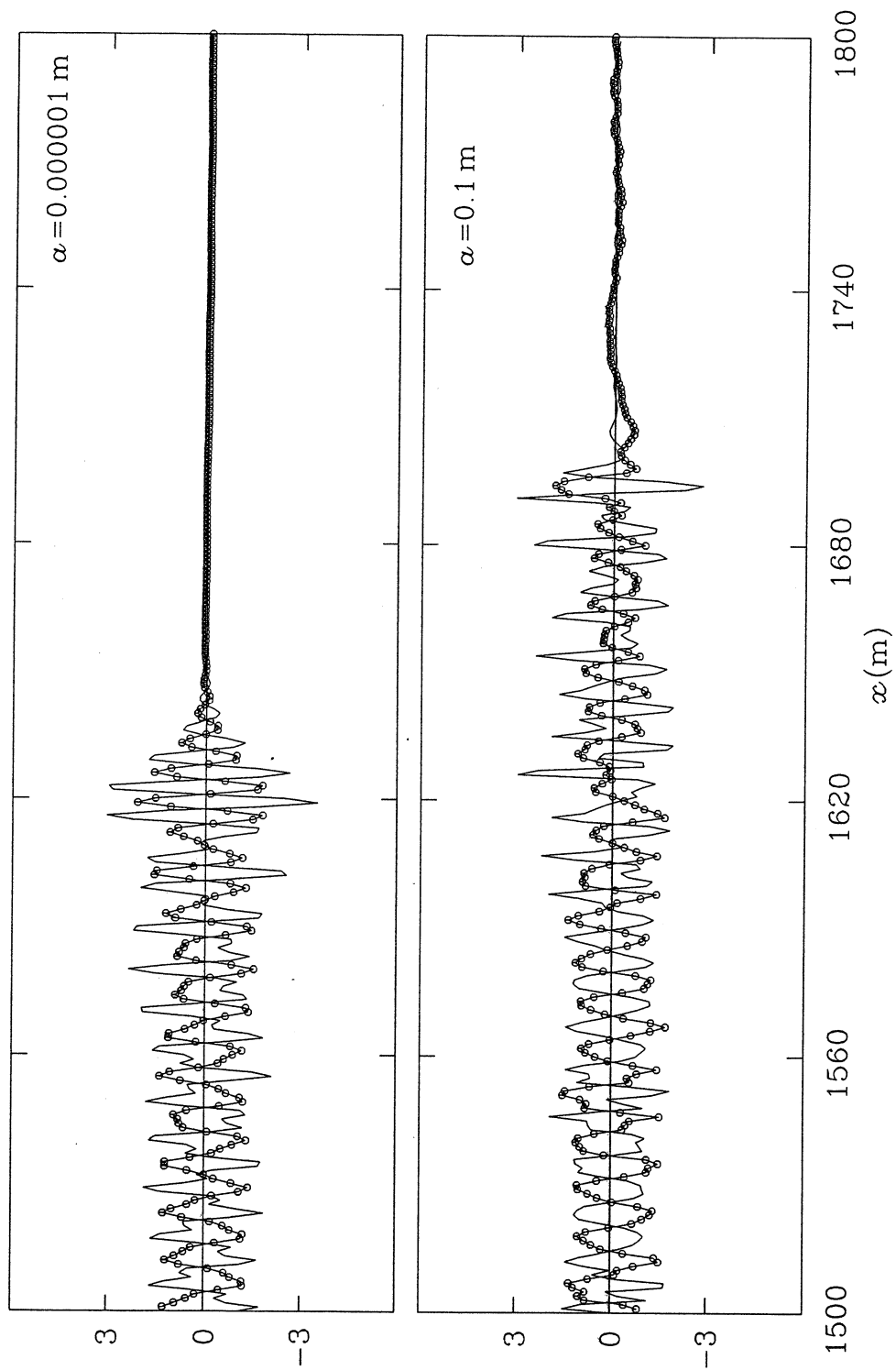


圖10、與圖8相同，但將其下圖之 $\hat{u}_s$ 施加一 high-pass filter。

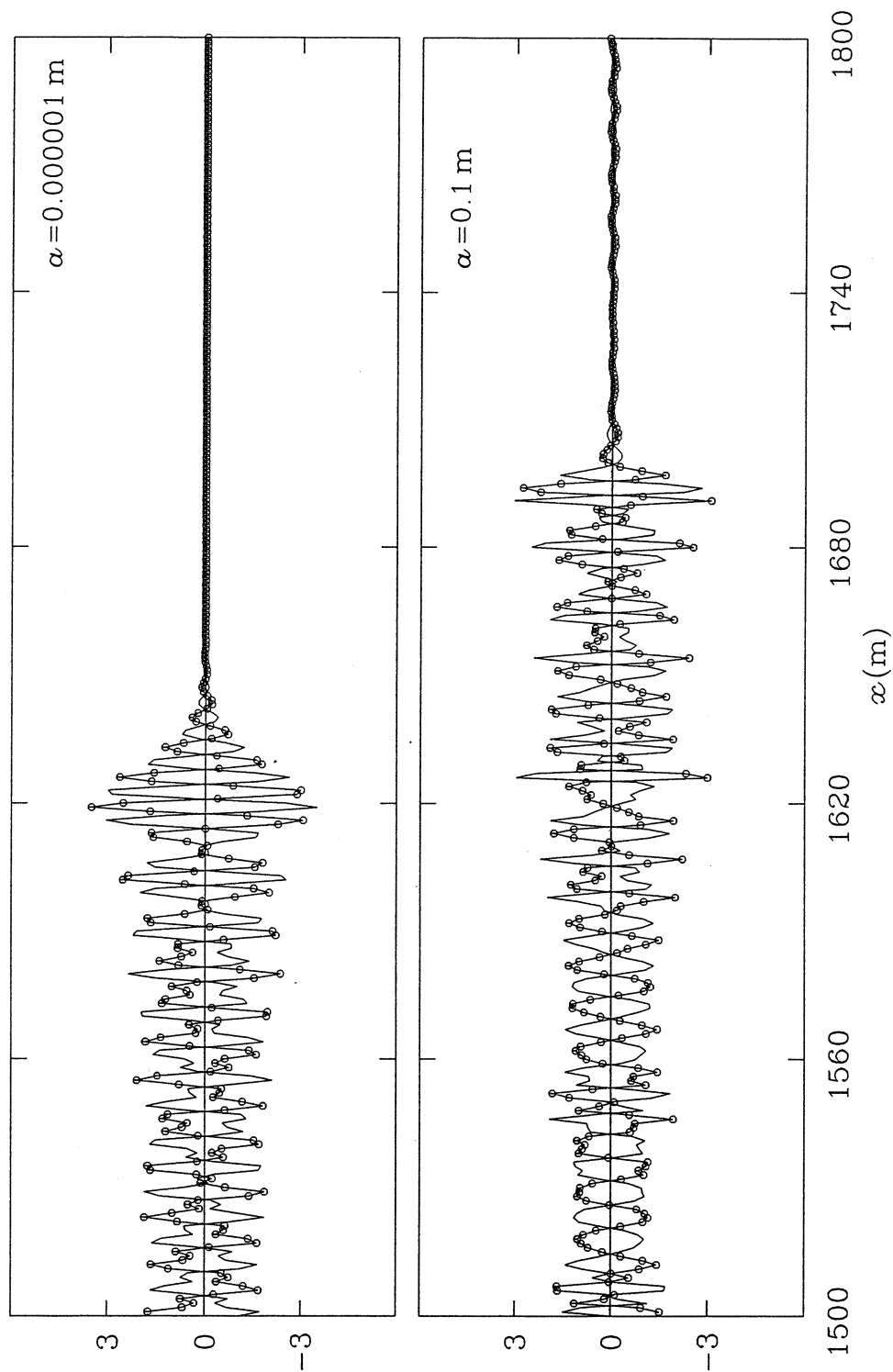


圖11、當 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 時, 波之旋度 (表為無因次參數 Ω_η/aU_0'') 之解 (圓圈), 曲線表 η/a 之解 ($t = 3000 \text{ sec}$)。

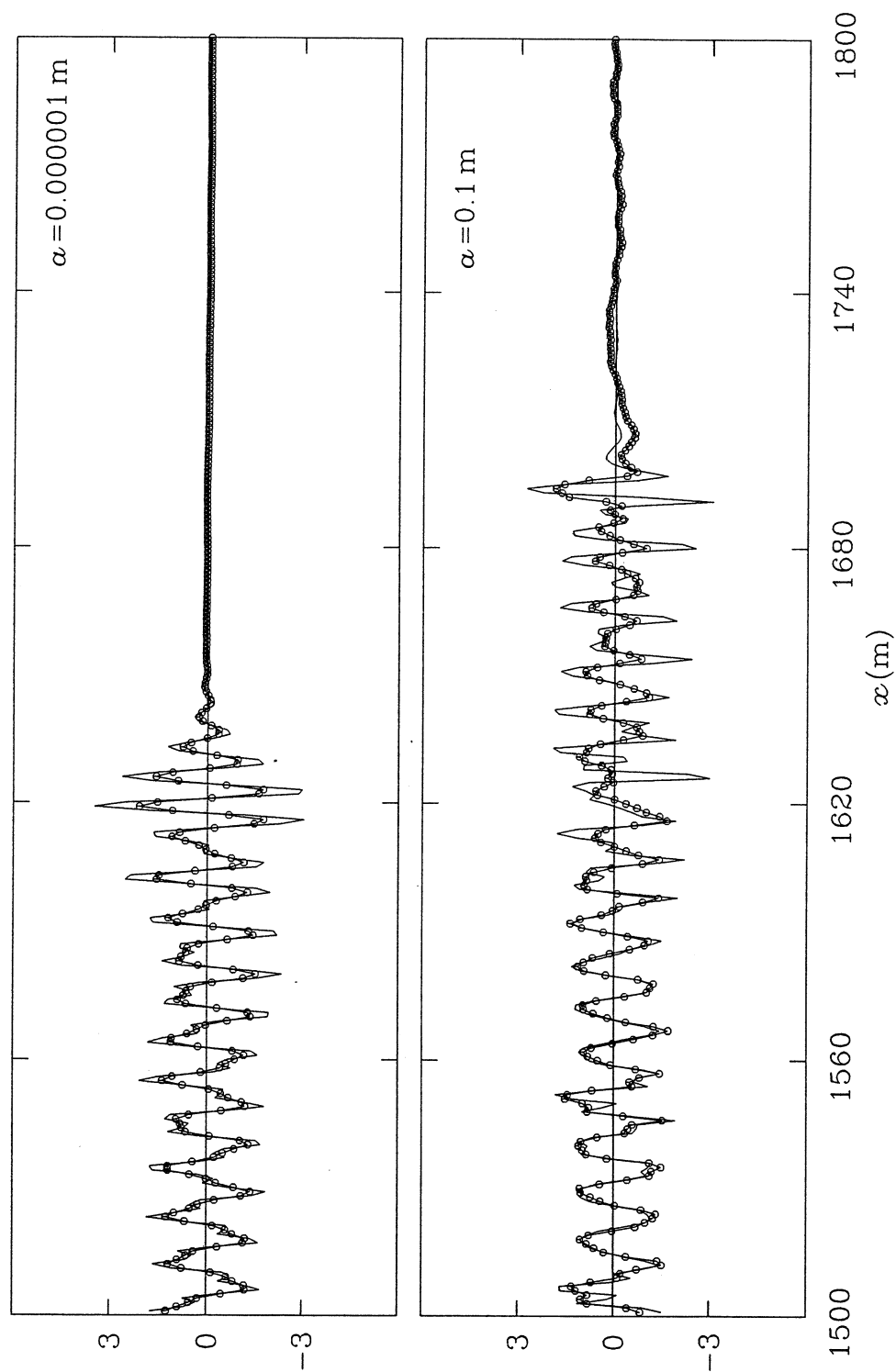


圖12、圖10之 $0.532\hat{u}_s/aU_0''$ 解 (圓圈) 與圖11之 Ω_η/aU_0'' 解 (曲線)。

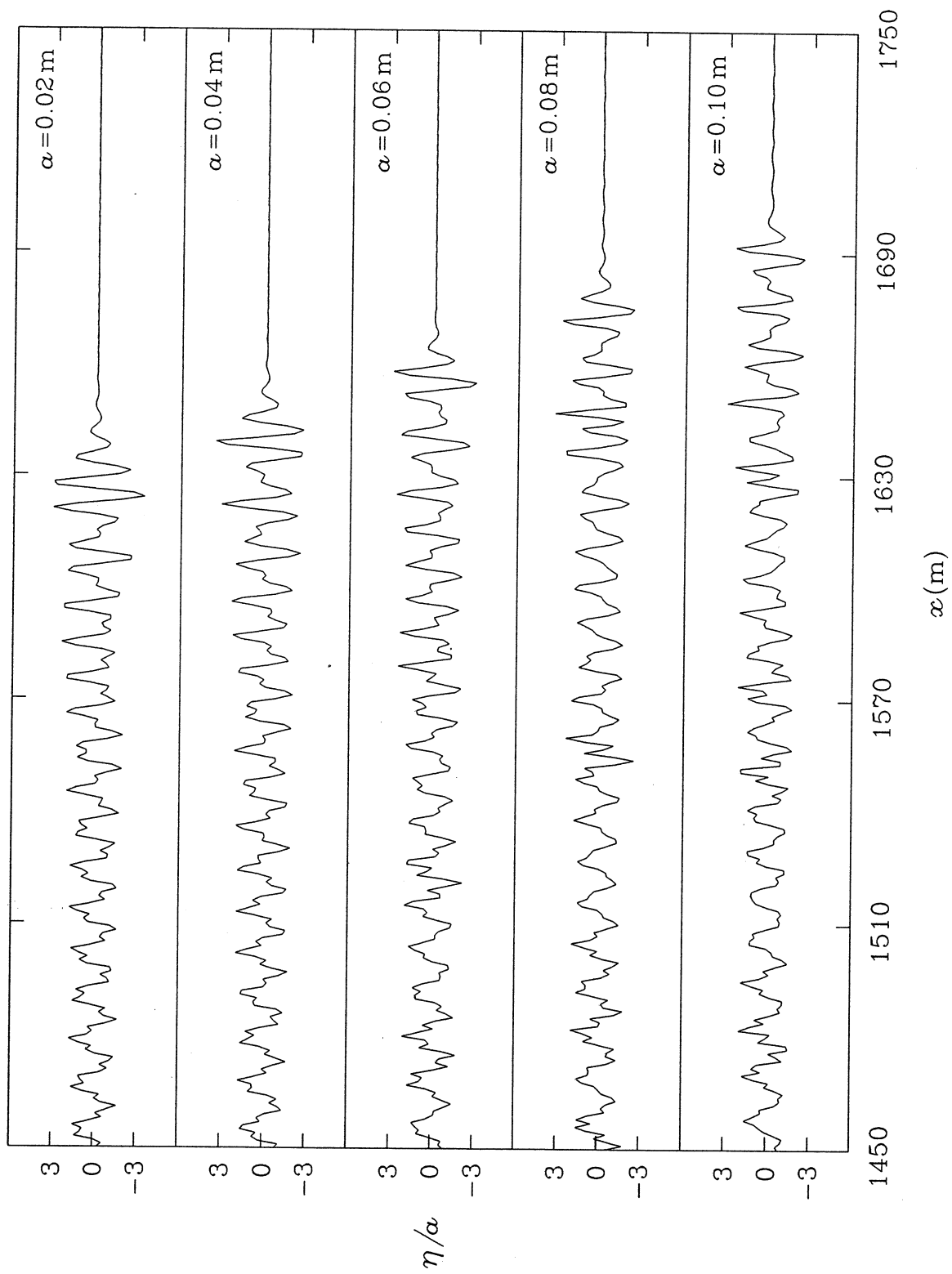


圖13、各種振幅情況下之數值解 ($t = 2500 \text{ sec}$)。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 。

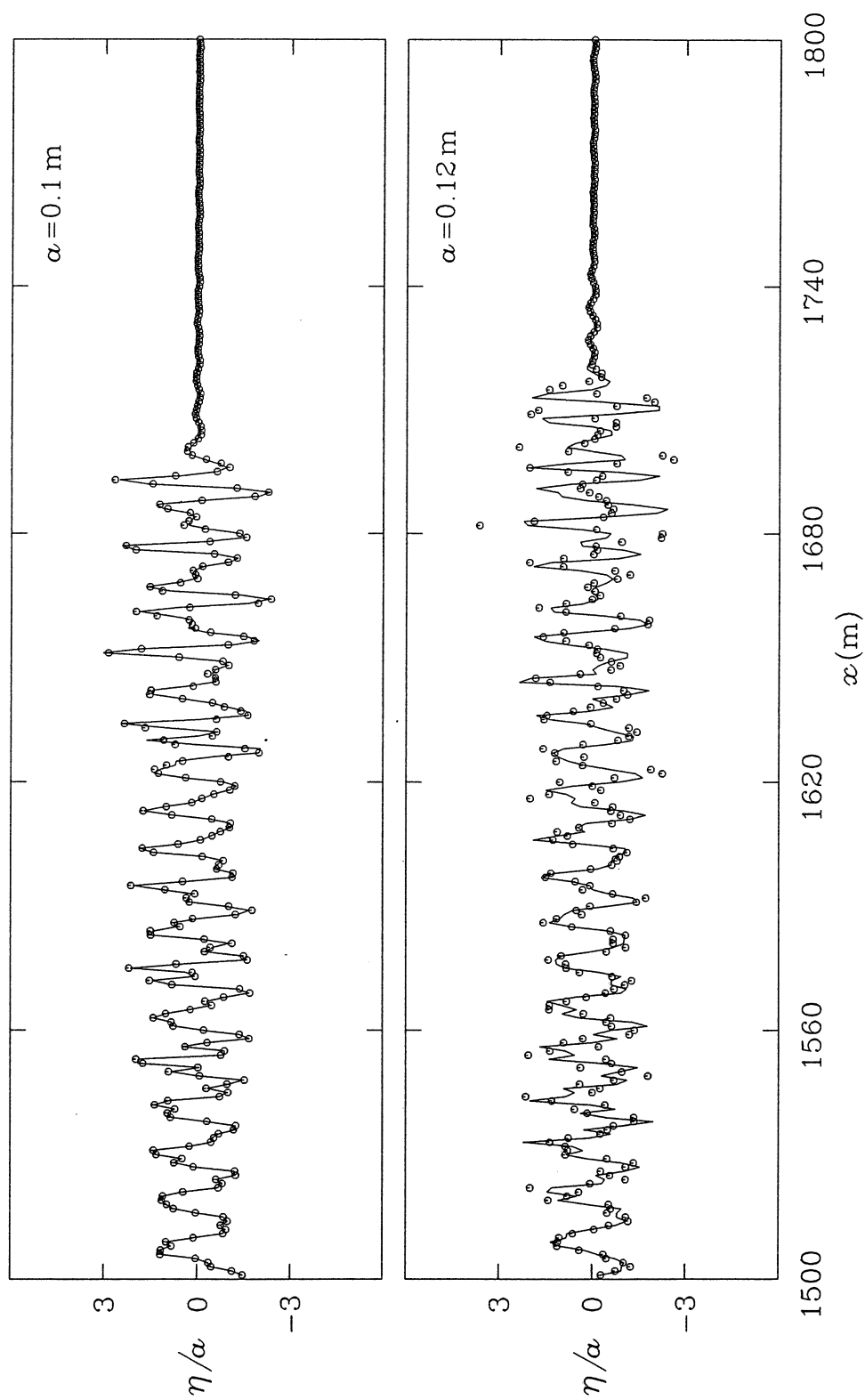


圖14、當 $a = 0.1$ m 及 $a = 0.12$ m 時，分別使用兩倍波長(曲線) 及三倍波長(圓圈)

之 λ 所獲結果 ($t = 2500$ sec)。 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 。

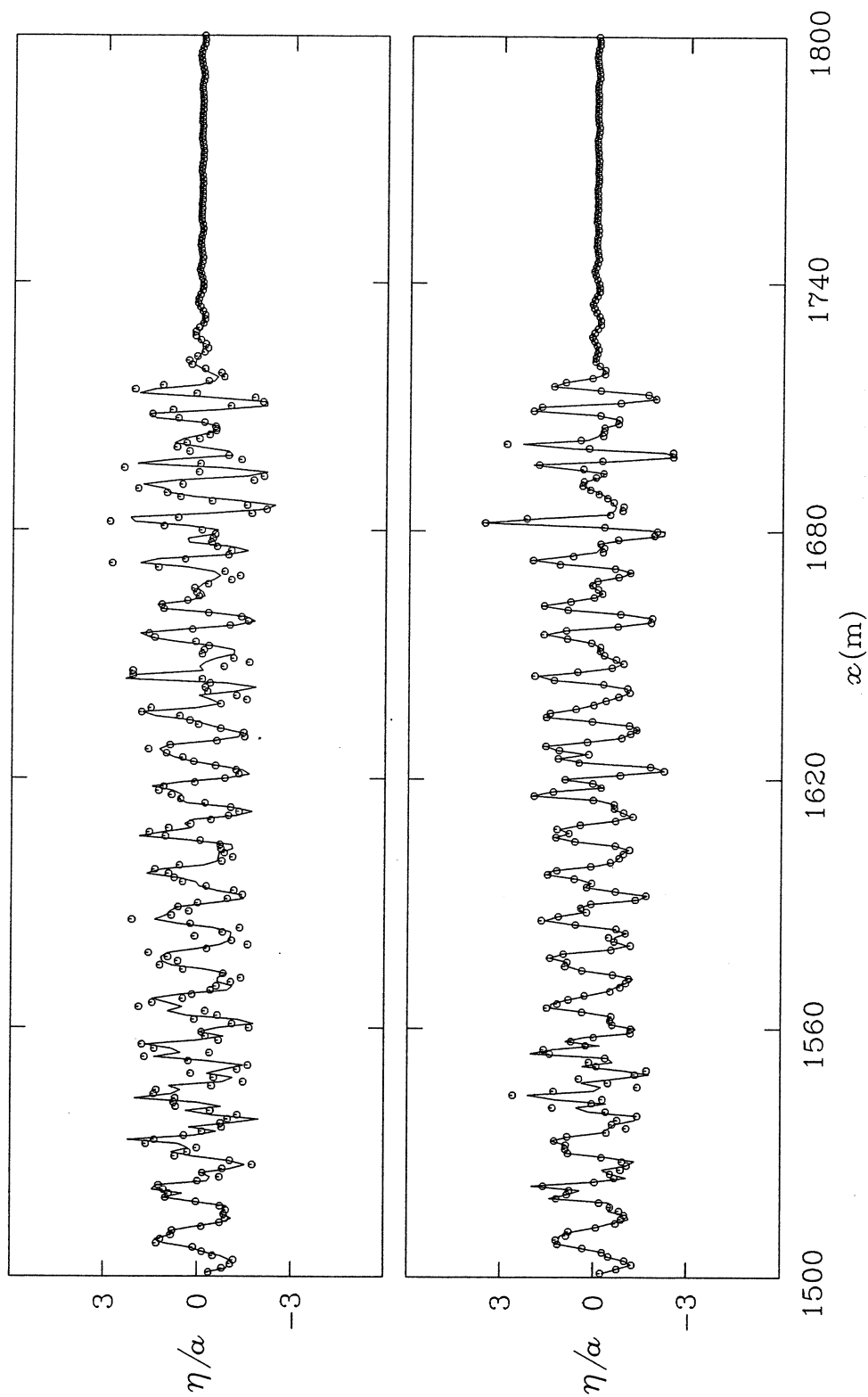


圖15、上下圖之曲線分別為圖14之下圖中用兩倍波長及三倍波長之 λ 所獲結果，

圓圈則為其將波譜改為用零延伸為 $8/2$ 倍長度之結果。

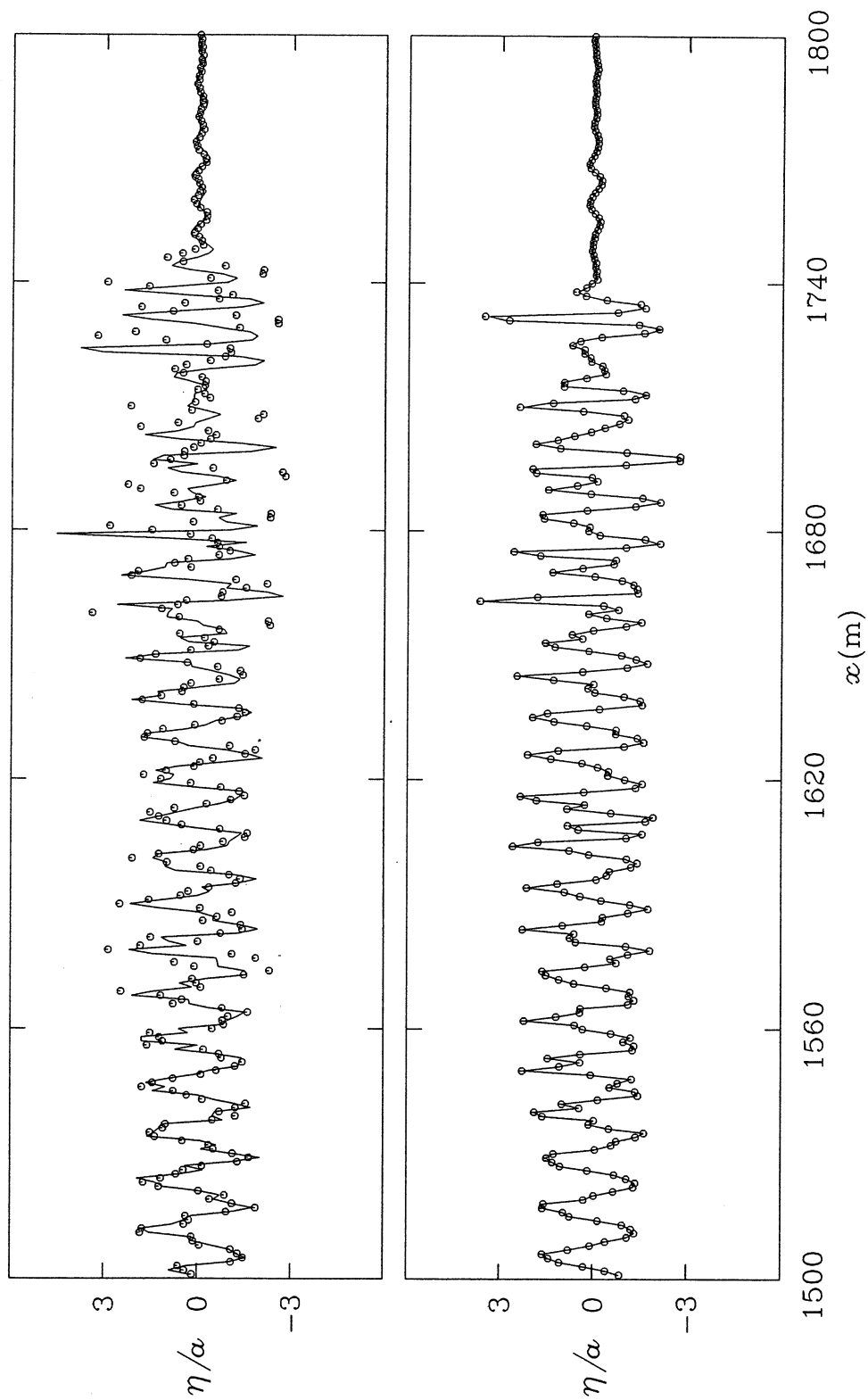


圖16、上下圖之曲線分別為 $t = 2500 \text{ sec}$ 及 $t = 2000 \text{ sec}$ 時，將波譜用零延伸為 $4/2$ 倍長度之解，圓圈則為其將波譜改為用零延伸為 $8/2$ 倍長度之結果。
 $U'_0 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, $U''_0/U'_0 k_0 = 0.1$ 。

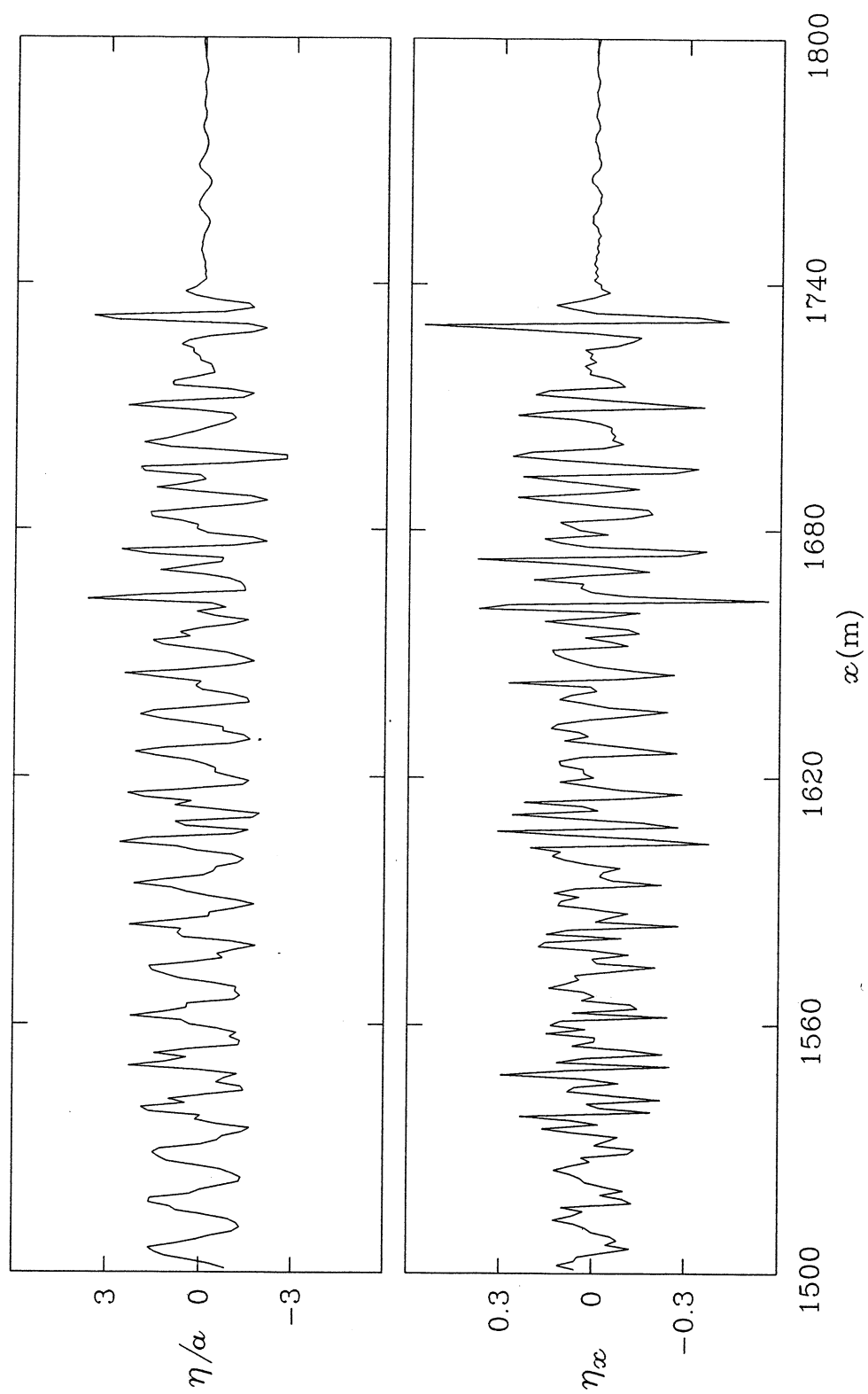


圖17、上圖為圖 16之下圖中圓圈所代表的解，下圖則為與其相對應之水面坡度解。

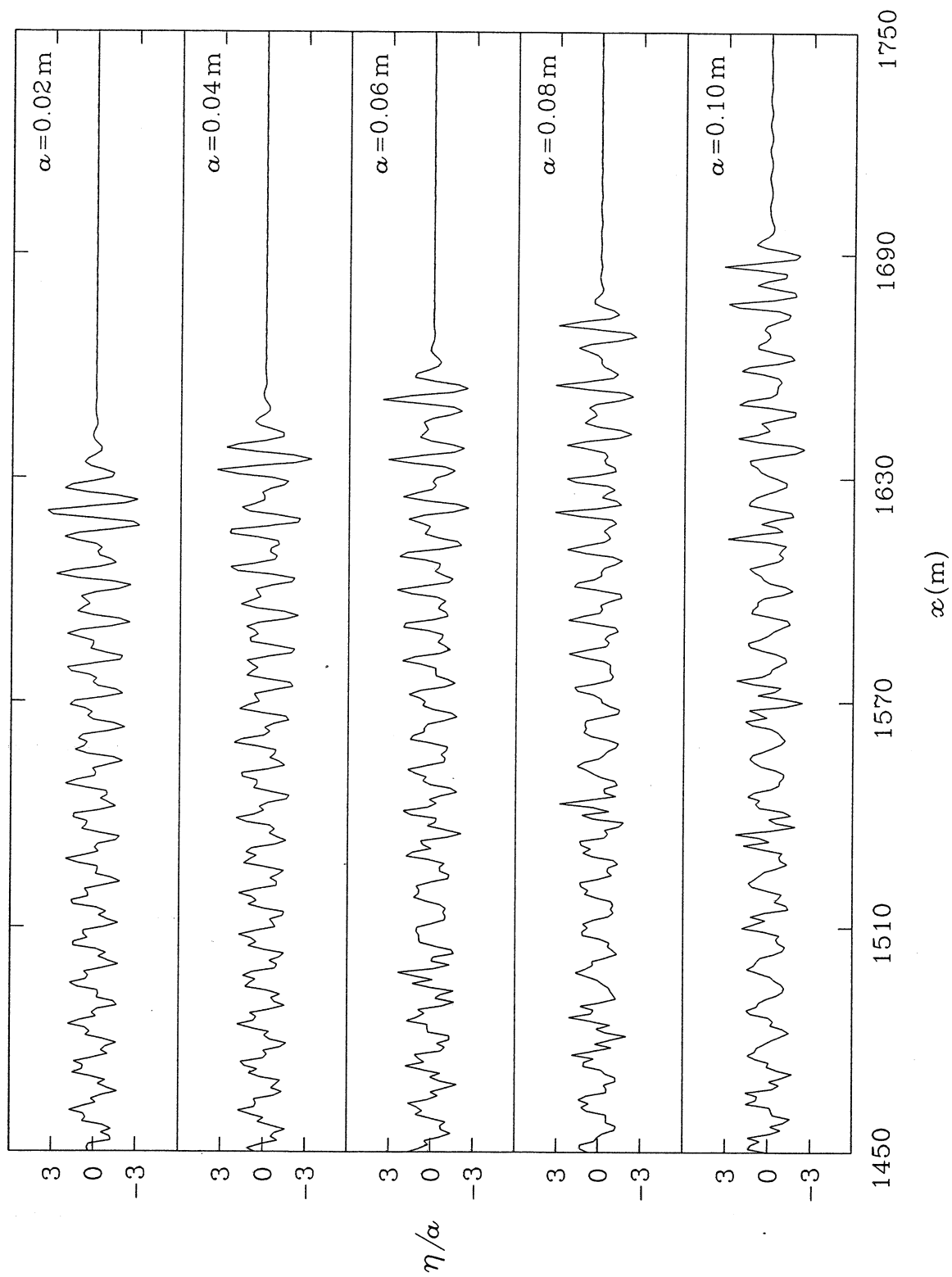


圖18、與圖13相同，但 $U_0''/U_0'k_0 = 0$ 。