

逢甲大學
交通工程與管理學系碩士班
碩士論文



曲線箱型鋼橋格樑系統內力橫向分配之研究

The Study of Lateral Load Distribution for
Box Girder Bridges by Grid Analogy Method

指導教授：徐耀賜

研 究 生：蔡棟華

中 華 民 國 九 十 五 年 六 月

致謝

本文得以順利完成，首先要感謝恩師 徐耀賜博士，在研究所求學期間，提供眾多磨練的機會，並於論文撰寫研究期間，悉心指導與教誨，使得學生於「曲線箱型鋼橋格樑系統內力橫向分配之研究」的知識領域上獲益匪淺，也使得本論文得以順利完成，於此致以由衷的感謝及最高之敬意。恩師學識淵博，治學嚴謹，更能將理論與實際結合教導學生，實事求是的精神實感敬佩，平時教導之情永銘於心。本論文蒙審查委員：聯合大學 王偉哲博士及逢甲大學 劉霈博士於論文審查時，給予諸多指導及建議，使本論文更加完備，在此致上最誠摯的敬意與謝意，求學期間本系各位老師之教導不敢或忘，在此特別致上深深之謝意。

最後，僅以本文獻給我最敬愛的父母親與關心我的家人，全力支持我繼續深造，使我無後顧之憂，能專心求學，完成碩士學位。欲感謝的人還有很多，在此僅以本文獻給任何曾關心我、幫助我的人，謝謝您們!!



摘要

隨著工商業之發達，人口急遽增加，都會區之擴展，公路建設亦隨運輸網路之需求而擴散。一般而言，直線形橋梁之工程費用比曲線形橋梁低；但由於公路幾何線形之限制，立體交叉與交流道系統之形成，在許多地方曲線形橋梁便成唯一之選擇，因此，選定合適之曲線橋型式便成為橋梁設計師第一個所要面對的問題。

本研究之主旨在於利用曲線格梁系統之結構勁度理論來分析曲線薄壁箱型鋼橋之結構行為，探討內橫隔梁之型式、勁度及間距對箱型鋼橋內力橫向分配之影響，同時與傳統之等值彈性基礎梁分析法相比較。研究證明，本研究之方法對箱型鋼橋之內橫隔梁設計見有實質之助益

關鍵字：曲線格梁系統、內橫隔梁、箱型鋼橋

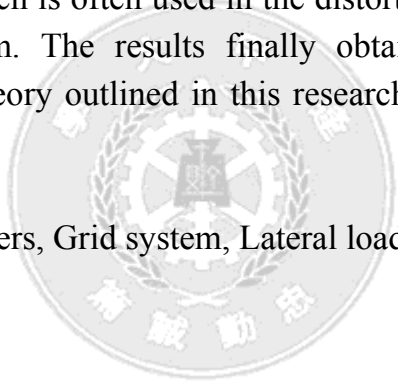


Abstract

Along with the economic growing and the expansion of the metropolitan area, The highway system is becoming more widely demanded. The construction fee for the straight bridge is always cheaper than the curved bridge, however, in some cases, the bridge system shall be designed as curved due the geometric constraints.

The main purpose for this research is to analyze the lateral load distribution behavior. For the thin-walled box steel girder bridges using the structural matrix theory modeled as a curved grid system. By investigating different type of internal bracing system, we Will be able to realize the lateral load distribution pattern within the steel box girder bridge. The results obtained from this research are also compared with those obtained from the theorem of equivalent beam on the elastic foundation which is often used in the distortional analysis for the steel box girder bridge system. The results finally obtained within this research indicate the developed theory outlined in this research can be pretty helpful for the design engineers.

Keywords : Steel box girders, Grid system, Lateral load distrition.



目錄

致謝	i
中文摘要	ii
英文摘要	iii
圖目錄	vi
表目錄	viii
第一章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究目的與流程	2
1.3 研究內容	2
第二章 文獻回顧	4
2.1 前言	4
2.2 可供分析之方法	4
2.2.1 直線梁近似法(Straight Beam Approximation)	4
2.2.2 曲線梁理論(Curved Beam Theory)	5
2.2.3 薄壁彈性梁理論(Thin-Walled Elastic Beam Theory)	5
2.2.4 正交異向性版理論(Orthotropic Plate Theory)	5
2.2.5 正交相異性版與梁綜合法(Orthotropic Plate and Beam Assembly)	6
2.2.6 有限條狀法(Finite Strip Method)	6
2.2.7 摺版理論(Folded Plate Theory)	7
2.2.8 彎矩 / 曲率半徑法(M / R Method)	7
2.2.9 空間剛架法(Space Frame Method)	8
2.2.10 有限差分法(Finite Difference Method)	8
2.2.11 格梁相似法(Grid Analogy)	9
2.2.12 有限元素法(Finite Element Method)	12
2.3 較受歡迎之分析方法	13
第三章 曲線格梁系統之內力分析	15
3.1 前言	15
3.2 曲線格梁之勁度矩陣	16
3.3 曲線格梁勁度矩陣之座標轉換	21
3.4 節點平衡方程組和結構勁度矩陣	25

3.5 支承條件的引入和結構內力的計算	30
3.6 曲線梁單元的等效節點荷載	33
第四章 橫隔梁勁度與間距的探討	41
4.1 前言	41
4.2 橫隔梁系統	41
4.2.1 內橫隔梁之型式	41
4.2.2 外橫隔梁之型式	47
4.3 曲線薄壁箱型之畸變翹曲微分方程式	50
4.4 畸變翹曲正應力 $\sigma_{D\omega}$ 與彎矩正應力 σ_b 比值之近似公式	51
4.5 橫隔梁勁度對畸變翹曲正應力之影響	52
第五章 實例分析	57
5.1 前言	57
5.2 模式正確性驗證	57
5.2.1 分析範例一	57
5.2.2 分析範例二	58
5.3 設計準則之研究	58
5.3.1 曲率半徑與箱型鋼梁斷面畸變之相互關係	58
5.3.2 內橫隔梁數目對箱型鋼梁畸變之影響	59
5.3.3 內橫隔梁勁度對箱型鋼梁畸變之影響	59
5.3.4 端隔梁邊界條件之影響	59
第六章 結論與建議	76
6.1 結論	76
6.2 建議	76
參考文獻	77

圖目錄

圖 1.1 典型之箱型鋼橋斷面	1
圖 1.2 典型之曲線 I 型鋼橋斷面	1
圖 1.3 研究流程圖	3
圖 2.1 箱型鋼橋上部結構之格梁系統模擬	10
圖 2.2 典型每節點具四個自由度之平面曲薄壁梁元素	11
圖 2.3 曲線箱型鋼橋之外橫隔梁佈置示意圖	12
圖 2.4 曲線箱型鋼橋分析之有限元素	13
圖 3.1 橋梁上部結構的網格佈置	15
圖 3.2 多室箱梁結構的網格佈置	16
圖 3.3 三跨連續曲線格梁系統	17
圖 3.4 格梁系統中之曲線單元(走向 1→2)	17
圖 3.5 由節點勁度矩陣 K_{11} 導出曲梁單元其餘勁度矩陣的關係圖	21
圖 3.6 由節點勁度矩陣 K_{22} 導出曲梁單元其餘勁度矩陣的關係圖	21
圖 3.7 曲線梁單元座標轉換	22
圖 3.8 曲線格子梁典型節點 i	32
圖 3.9 曲線懸壁梁在集中荷載 P 作用下的圖示	33
圖 3.10 集中荷載作用下等效節點力計算圖示	36
圖 3.11 曲線懸壁梁在均佈荷載 P 作用下的圖示	38
圖 3.12 兩端固定曲線梁在均佈荷載 P 作用下的計算圖示	39
圖 4.1 典型箱型鋼橋之內橫隔梁佈置(平面圖)	42
圖 4.2 典型箱型鋼橋之內橫隔梁(一)	42
圖 4.2 典型箱型鋼橋之內橫隔梁(二)	43
圖 4.3 典型之橫向剛架式內橫隔梁系統	44
圖 4.4 典型之隔板式內隔梁	44
圖 4.5 用於支承處之固定板式端隔梁(預留人孔、檢測孔)	45
圖 4.6 典型之固定板式端隔梁(封閉式)	45
圖 4.7 內橫隔梁之型式	47
圖 4.8 典型桁架式外橫隔梁	48
圖 4.9 典型熱軋鋼梁式之外橫隔梁	49
圖 4.10 典型之隔梁式或格床式之外橫隔梁	49
圖 4.11 利用外橫隔梁加掛管線	50
圖 4.12 負彎矩區之加深箱型鋼梁	50
圖 4.13 正應力比值 σ_{Dw}/σ_b 和橫隔梁間距 L_d/L 之相對關係	52

圖 4.14 畸變翹曲應力比值 $\frac{\sigma_{D\omega}}{[(\sigma_b)_{kd=\infty}]_{max}}$ 與參數 γ 之關係.....	55
圖 5.2 無限長度彈性基礎梁之垂質變位比較	65
圖 5.3 無限長度彈性基礎梁之彎矩比較	66
圖 5.4 連續箱型鋼梁 BEF 系統之影響示意圖	67
圖 5.5 曲率半徑對縱向彎矩正向應力與畸變翹曲正向應力之影響	68
圖 5.6 畸變橫向彎矩應力因曲率半徑之折減關係圖	69
圖 5.7 內橫隔梁數目對畸變翹曲正向應力之影響	70
圖 5.8 不同內橫隔梁勁度與間距對畸變翹曲正向應力之影響	71
圖 5.9 內橫隔梁勁度與畸變橫向應力之關係	72
圖 5.10 端隔梁邊界條件對橫向彎矩應力與畸變翹曲正向應力之影響	73
圖 5.11 端隔梁邊界條件與不同之內橫隔梁勁度對畸變橫向彎矩應力之折減情形.....	74
圖 5.12 不同端隔梁之邊界條件所造成不同之垂直變位	75



表目錄

表 5.1	連續 BEF 系統之反力影響線.....	61
表 5.2	數值分析之斷面性質簡表	62
表 5.3	端點橫隔梁之邊界條件對不同內橫隔梁勁度之橫向彎矩應力與畸變 翹曲正向應力之影響	63



第一章 緒論

1.1 研究動機

隨著工商業之發達，人口急遽增加，都會區之擴展，公路建設亦隨運輸網路之需求而擴散。一般而言，直線形橋梁之工程費用比曲線形橋梁低；但由於公路幾何線形(Roadway Geometric alignment)之限制，立體交叉與交流道系統之形成，在許多地方曲線形橋梁便成唯一之選擇，因此，選定合適之曲線橋型式便成為橋梁設計師第一個所要面對的問題。

在過去數十年來，曲線形鋼橋已在不同之場合中廣泛使用，通常工程當曲率大(半徑小)時，採用箱型鋼橋(如圖 1.1 所示)，因為箱型鋼橋為封閉式斷面，其有非常大之扭曲勁度(Torsional Stiffness)。而在曲線曲率較平緩之路段則採 I 型鋼橋(見圖 1.2)。

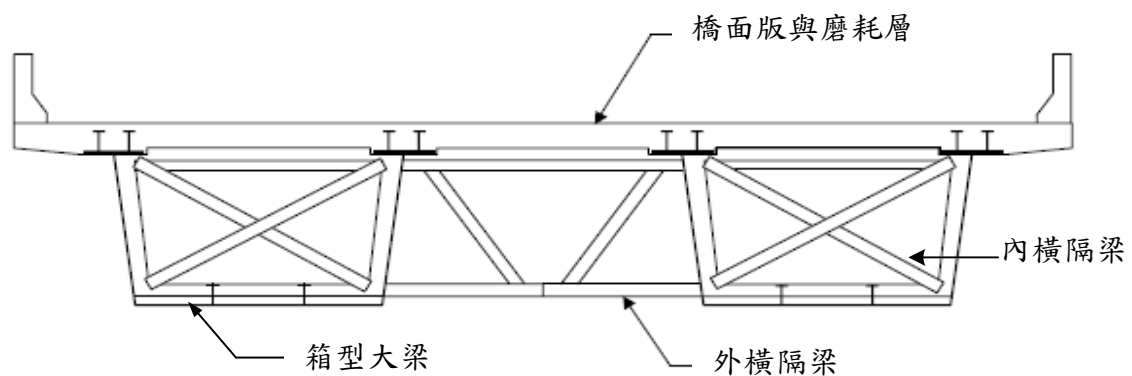


圖 1.1 典型之箱型鋼橋斷面

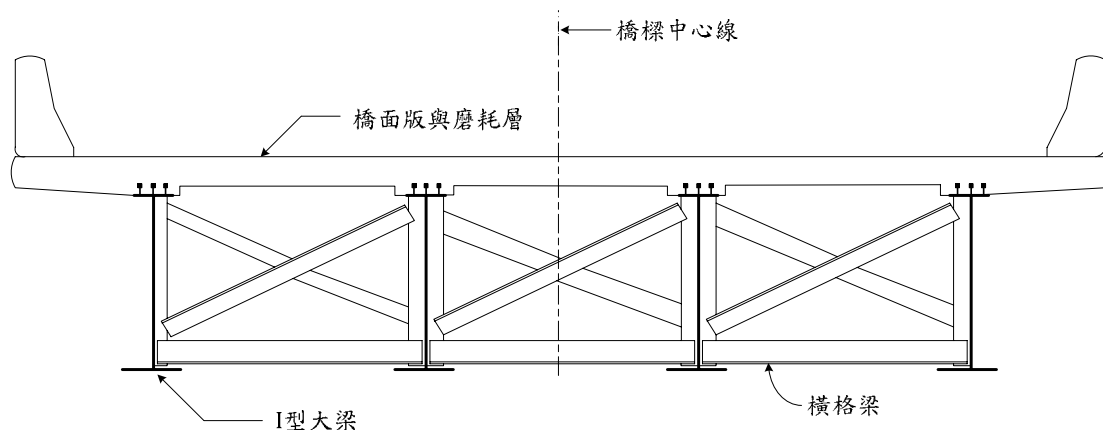


圖 1.2 典型之曲線 I 型鋼橋斷面

台灣地區之鋼橋數目在所有橋梁數目中所佔比例雖不高，但隨著我國鋼

鐵工業之進步與施工技術之精進，鋼橋數目在可見之未來必快速增加。故了解鋼橋之結構行為與設計細節對鋼橋設計者至為重要。

從幾何線形分類，梁式鋼橋(Girder-Type Bridge)可分為直線形鋼橋與曲線形鋼橋，而曲線形鋼橋又可分為 I 型與箱型鋼橋。惟本研究探討之對象僅侷限於曲線形箱型鋼橋。

1.2 研究目的與流程

針對曲線鋼橋而言，直至目前為止，台灣地區並無本土性之設計規範。交通部於民國 90 年頒佈之"公路橋梁設計規範"僅適用於直線型橋梁。因此，台灣現行之曲線箱型鋼橋設計主要是參考美國 AASHTO 規範(Guide Specifications for Horizontally Curved Steel Highway Bridges,2003)，其中雖然有提示曲線箱型鋼橋在設計時必須注意避免施工時之翹曲畸變(Distortion)現象，但在規範中並未明確規定其細則或計算式。

箱型鋼橋之橫隔梁可分為內、外兩系統，如前述圖 1.1 所示內橫隔梁通常與腹版相連接，具有穩定斷面，避免發生畸變現象之功能。內橫隔梁亦具有將內力橫向分配(Lateral Distribution)之功能，惟此橫向分配之影響在 AASHTO 設計規範中亦未提及。因此，本研究之主要目的在於探討各種型式內橫隔梁與間距(Spacing)對箱型鋼橋內力橫向分配之影響。所得之結果亦將與等值彈性基礎梁(Equivalent Beam on Elastic Foundation,EBEF)之分析結果相比較。

圖 1.3 所示為本研究之流程圖，採用之分析方法為利用格梁相似法(Grid Analogy Method)之結構矩陣理論。

1.3 研究內容

本研究主要在分析曲線箱型鋼橋之內力橫向分配，共區分成六個章節。以下為本研究之各章節內容概要：

第一章 旨在闡明本研究之研究動機、研究目的與研究內容。

第二章 對於可資利用於平面曲線箱型鋼橋的十二種分析方法作系統化之回顧，分析各種方法之優缺點。

第三章 本章之主要內容為曲線格梁系統內力分析之理論推導，此理論推導中並未考慮翹曲(Warping)之影響。

第四章 針對箱型鋼橋內橫隔梁勁度與間距對畸變翹曲正向應力(Distortional Warping Normal Stresses)之關係進行數學模式推導。

第五章 藉由實例之分析比較，探討內橫隔梁勁度與間距對於內力橫向分配之

影響。

第六章 為本研究之結論與建議，及未來可繼續之研究方向與目標。

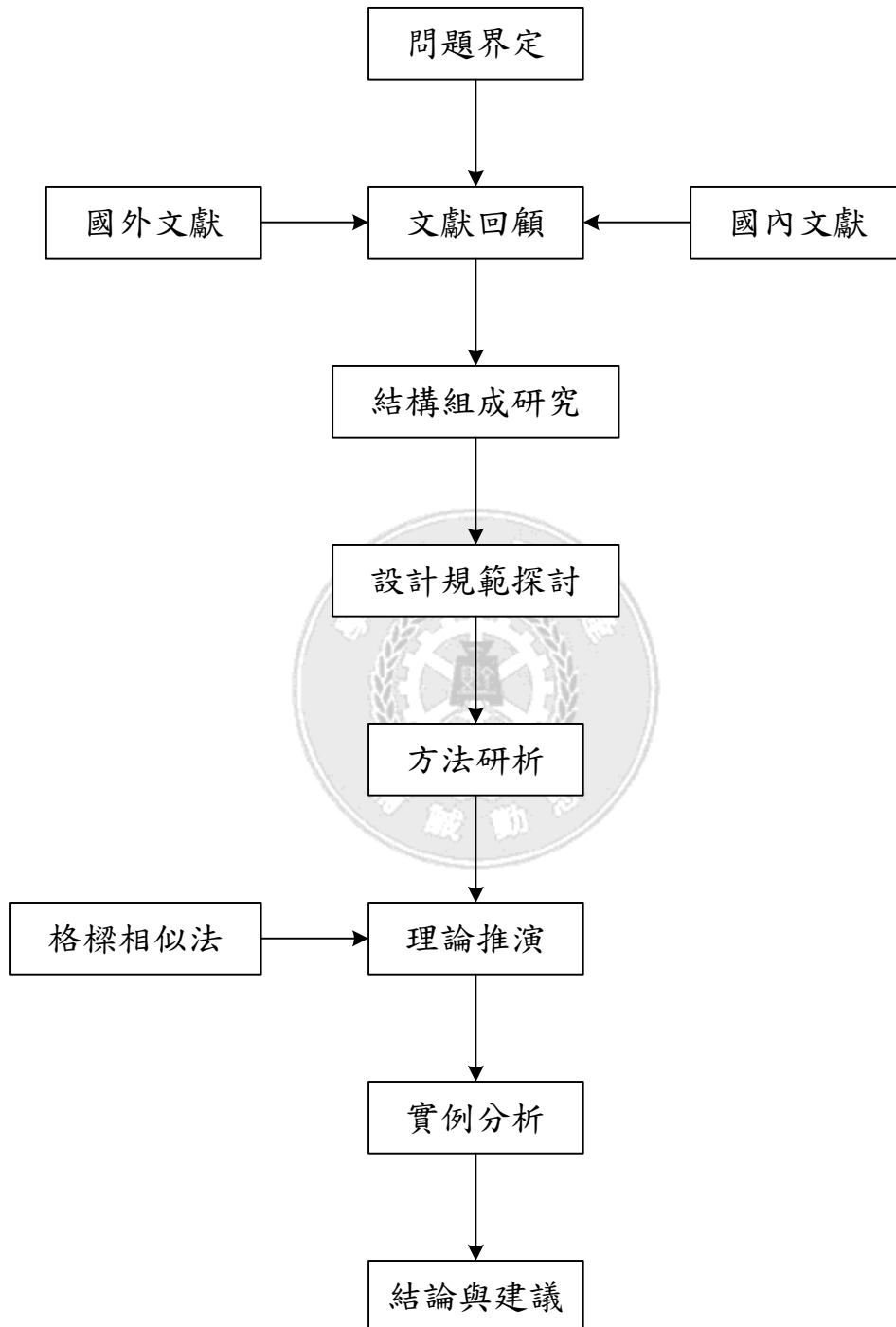


圖 1.3 研究流程圖

第二章 文獻回顧

2.1 前言

平面曲線箱型鋼橋是屬於高度靜不定，且設計難度甚高之結構物，其設計方法亦隨設計者所要求精確度而大異其趣。直至目前為止，共有十二種不同分析方法可供橋梁設計師在初步設計與細部設計中使用，即：

- (1)直線梁近似法(Straight Beam Theory)
- (2)曲線梁原理(Curved Beam Theory)
- (3)薄壁彈性梁理論(Thin-Walled Elastic Beam Theory)
- (4)正交異向性版理論(Orthotropic Plate Theory)
- (5)正交異向性版與梁綜合法(Orthotropic Plate and Beam Assembly)
- (6)有限條狀法(Finite Strip Method)
- (7)褶版理論(Folded Plate Theory)
- (8)彎矩/曲率半徑法(M/R Method)
- (9)空間剛架法(Space Frame Method)
- (10)有限差分法(Finite Difference Method)
- (11)格梁相似法(Grid Analogy)
- (12)有限元素法(Finite Element Method)

針對上述十二種分析方法，分別就每一種方法之來源背景、應用範圍與優缺點分別說明之【1】。

2.2 可供分析之方法

2.2.1 直線梁近似法(Straight Beam Approximation)

此法是曲線箱型鋼梁分析法則中最粗糙的一種數學模式，一根曲線鋼梁用數個長度等於其弧長之直線梁來模擬，完全忽略了曲率所衍生之橋梁結構行為。因此，在分析法則中，橋梁因曲率所產生之勁度 雙彎矩效應(Bimoment Effect)與斷面畸變全部被忽略。Sawko【16】曾比較用直線梁近似法分析曲線梁之誤差程度。其結果顯示，當曲率增大或當彎矩勁度/扭曲勁度之比值增加時，其誤差程度亦隨之增大。因此，只有當曲線箱型鋼橋曲率極小(趨近於

直線)時，直線梁近似法方可用來作規劃與初步設計階段之工具。

2.2.2 曲線梁理論(Curved Beam Theory)

曲線梁理論最早是由 Saint-Venant 於 1843 年提出，其基本之假設有三點，即：

- ①僅適用於小變位(Small Displacement)結構
- ②斷面尺寸與梁長度之比值甚小
- ③斷面在受載重之前後均保持平整(Plane Remains Plane)，亦即無翹曲與畸變之現象

一般而言，此理論雖然考慮了曲率之效應，但仍未能有效地預測到曲線橋梁之真正結構行為與應力變化。主要是因為正向翹曲與畸變之效應完全被忽略。然而，當曲率愈大，則翹曲與畸變之效應亦愈顯著，如同文獻【2，11，17，18】研究所得結果。因此，此理論亦僅限於使用在單純之曲線橋之初步設計。

2.2.3 薄壁彈性梁理論(Thin-Walled Elastic Beam Theory)

第一個對曲線彈性梁理論做有系統之研究首推俄國之 Vlasov【19】。其以一個開口式單室(Open Single Cell)梁作為研究對象。此理論後來由 Karman 與 Christensen【20】擴展應用到任何斷面，並引進區段面積(Sectorial Areas)之觀念來考慮斷面翹曲效應，同時推導了三個原曲線薄壁梁之彎矩與翹曲之微分方程式。這三個微分方程式之基本適用條件為斷面主軸(Principal Axis)之一必須坐落於曲率平面上。根據此立論，Dabrowski【21】與 Komatus【22，23】把 Vlasov【19】之理論修正並擴展到可利用於非對稱性箱型斷面。

基本上，此理論忽略了斷面畸變，而主要之考慮則為正向應力(縱向彎矩應力與翹曲應力之組合)，因此，對於一箱型梁而言，如果內橫隔梁數目夠多(增加了箱型梁之畸變勁度)，則此理論仍能提供橋梁工程師可靠度甚高之設計資料。薄壁彈性梁理論應用最廣之處在於當斷面單純(單室或雙室時)，且斷面尺寸與跨距之比值甚小，亦即箱型斷面應力以縱向彎矩正向應力為主之時。

惟必須注意的是，當箱型橋面較寬時，則此理論所得之結果仍有可觀之誤差。因為薄壁彈性梁理論無法估算到箱型斷面之畸變 剪力延滯(Shear Lag)與活載重在上翼板所造成之局部效應。

2.2.4 正交異向性版理論(Orthotropic Plate Theory)

正交異向性版具有均勻但在兩不同正向卻相異之彈性性質。在橋梁設計上，此性質造成沿斷面主軸方向有不同之彎矩勁度。1956 年 Huffington【24】

首先發展出正交異向性加勁版之剛性理論，此理論後來由 Yonezawa【25】、Coull 與 DAS【26】與 Cheung【27】加以應用到曲線橋之分析。

在此方法中，設計者必須將曲線橋在沿圓弧與半徑方向分成若干元素，而將結構元素勁度堆積(Lump)到此均分之等值正交異向版中。然而，直至目前為止，此法仍有三項主要缺點無法突破，即：

- ①等值正交異向性版之彎矩與扭曲勁度不易確定。
- ②鋼梁本身與橋面版之應力不易正確估計。
- ③支承中心線(Centerline Bearing)與橋梁縱向成一斜角(Skewed Angle)時，橋梁結構分析模式不易建立。

2.2.5 正交相異性版與梁綜合法(Orthotropic Plate and Beam Assembly)

此分析模式最早是由 Heins 與 Bell【28】於 1970 年首先提出來用於分析曲線橋之結構行為。考慮曲線鋼梁與橋面版間完全之交互作用，再利用以傅立葉級數表示之交互作用，再利用以傅立葉級數表示之斜坡撓度(Slope-Deflection)方程式，則沿著橋梁任何斷面之應力與變位均可求得。

1970 年，Tung【29】亦發展出一套與文獻【28】類似之理論，其可用於曲線雙箱型橋梁(Twin Box Girder Bridge)分析。此理論假設環形橋面版(Annular Slab)與雙箱型梁之交互作用，但此說法後來被 Cheung【30】證明為不可靠。因為事實上，箱型鋼梁上翼板與混凝土版或殼元素以合成作用(Composite Action)方式承受外來載重，而非整個箱型鋼梁與橋面版形成合成作用。

2.2.6 有限條狀法(Finite Strip Method)

有限條狀法於 1970 年代初期由 Cheung【30】、William 與 Scordelis【18】成功地發展應用於簡支承固定梁深之曲線箱型梁分析。在此方法中，簡支梁沿橋梁縱向切成若干長條狀，每一條狀元素均可以反應薄壁板之翹曲與斷面之畸變行為。因為在架構條狀元素勁度矩陣時之位移函數間均為相容(Compatible)，有限條狀法通常可以非常準確地估算出箱型梁之結構行為。其基本之四項假設為：

- ①橋梁之上下翼板與腹板均為等向性(Isotropic)材料。
- ②曲線箱型鋼橋為簡支承，而且箱型鋼梁與支承中心線正交成 90 度。
- ③箱型梁中無內橫隔梁。
- ④梁之支承處有剛性內支承，沿橋梁縱向具有柔性(可以有彎矩旋轉角)，但支承斷面處則為剛性(無扭轉旋轉角)。

相對於有限條狀法之優點，此法在實用上亦有三種幾何上之限制，即：

- ①此法不適用於真正之曲線合成箱型梁，因為真正之合成箱型梁中通常有設置內橫隔梁以減少斷面畸變之可能。
- ②此法只限於幾何性質單純之簡支梁，梁深必須固定。
- ③有斜支承角者不適用於有限條狀法。

綜合以上所述，不論是在初步設計與細部設計階段，有限條狀法均不為橋梁工程師所喜愛，況且在實際上簡支曲線箱型鋼橋為數甚少，絕大部分為連續梁型式。

2.2.7 摺版理論(Folded Plate Theory)

當箱型梁斷面固定而在支承處有剛性內在支承而不致造成斷面畸變時，則使用摺版理論來解析曲線箱型鋼梁之問題可謂非常方便。不過，應用此法之前提是箱型鋼梁之斷面性質必須是從頭到尾一致。

曲線箱型鋼梁可以認定是曲線摺版之組合，吾人必須注意的是，此法是唯一視箱型結構為連續殼(Shell)之理論，亦即利用平面應力與橋面版彎矩。摺版理論日後由 Pinjarkar【31】與 Castillo【32】加以應用，利用平面環形版元素(Annular Plate Elements)與垂直圓柱殼元素(Cylindrical Shell Elements)之組合來分析曲線箱型鋼梁結構。

有效混凝土版面寬(Effective Slab Width)之決定於曲線箱型鋼橋分析中佔有很重要之地位，因為此寬度與斷面之力學性質有絕對之關係。而利用摺版理論之最大好處便是混凝土版橫斷面之應力分佈可以精確地估算出。

雖然，摺版理論可以用來分析曲線箱型鋼梁複雜之靜荷重，但其缺點則為此理論只適用於斷面固定之簡支梁，箱型鋼梁內部不能有橫隔梁，而且箱型斷面在支承處具有柔性（無內支撐，可容許斷面畸變）。由於上述與實際橋梁不符之缺點，摺版理論基本上亦不為橋梁設計師所青睞。

2.2.8 彎矩 / 曲率半徑法(M / R Method)

1970 年，Tung 與 Fountain【33】提出一套分析曲線箱型鋼梁之近似方法，稱為彎矩 / 曲率半徑法。此方法基本假設為：

- ①箱型鋼梁橫斷面對通過斷面中心之垂直主軸(Principal Axis)對稱。
- ②鋼板厚度與鋼梁寬度之比值甚小，而且跨距與鋼梁寬度之比值甚大。
- ③支承中心線與鋼梁中心線（沿橋梁長度方向）正交，即 90° 垂直。
- ④圓曲率在同一跨距內可以變化，但不能有反向曲線存在。
- ⑤鋼梁內部必須有足夠之內橫隔梁以抵抗斷面之畸變。
- ⑥忽略斷面翹曲所造成之二次應力(Secondary Stresses，正向應力與剪力)。

在此方法中，彎矩之扭曲效應完全是獨立而不互相關聯(Uncoupled)。縱向彎矩及其相對應之剪力乃是將曲線鋼梁拉直，再利用傳統之方法而求得。扭曲分析則是利用共軛梁原理(Conjugated-Beam Theorem)，在曲線鋼梁拉直後之鋼梁施加與彎矩 / 半徑比值成正比例之均佈垂直載重，而且另在沿鋼梁縱向加上均佈扭曲載重。

彎矩/半徑法不僅可用在曲線簡支梁亦可應用於曲線連續梁，在實際之應用上則可很方便地用於初步設計。為了達到初步設計之精度，此法亦有三項主要之限制，亦即：

- ①平均之彎矩勁度/扭曲勁度比值應小於 2.5。
- ②曲線鋼梁單一跨距之中心角應小於 30 度。
- ③曲線鋼梁沿縱向之總中心角應小於 90 度，而且所有支承均為鉸接。

2.2.9 空間剛架法(Space Frame Method)

1972 年，Brennan 與 Mandel【34，35】首先將曲線箱型鋼梁系統模擬成空間剛架之理論。此方法可應用於曲線鋼梁或直線鋼梁與曲線鋼梁共構之橋梁系統，鋼梁可為開口式或封閉式，橋面版、上側支撐及內外橫隔梁則模擬為桁架構件。

在空間剛架法中，曲線結構元件仍用數個直線構件來模擬，橫隔梁與上側支撐則假設只能承受軸向力。在腹板設有橫向加勁板之處，則假設斷面受扭曲時無畸變。此方法在 CURT 研究計畫之資助下，發展出一套定名為 SU3D【34，35】之電腦程式。

空間剛架法如同有限元素法一樣，需要數量可觀之輸入資料與電腦執行時間，尤其對大型橋梁更是如此。其好處則為不必再重新發展新的電腦程式，只須有基本之剛架與桁架分析程式，經過重新組合整理即可。不過，程式使用者應注意橋梁結構之節點編號系統，使其勁度矩陣寬度(Band Width)能達到最小，才不至於增加電腦程式執行運算之時間。

空間剛架法最大之缺點是當曲率大時，則與曲率有關之結構行為會有誤差，因為在空間剛架法中所有之曲線構件均是用數個直線構件來模擬。如為提高精準度而將直線構件之數目增多，則電腦程式執行運算之時間亦相對增長。

2.2.10 有限差分法(Finite Difference Method)

1971 年，Komatsu 與 Nakanishi 等人【17】利用有限差分法之理論應用到曲線箱型鋼梁之分析。在此方法中，利用純扭曲理論與轉置矩陣來分析橋梁受靜載重之結構行為，對單純箱型鋼梁而言，此法與彎矩/曲率半徑法一樣

可以用來作為規劃與初步設計之工具。

1974 至 1978 年間，Hein、Oleinik 與 Yoo【36，37，38，39，40】等人亦利用有限差分法與 Vlasov 微分方程式結合之方法來解析單箱型鋼梁之結構行為。在此解析步驟中，除了可以估算出彎矩、翹曲扭曲與畸變外，亦可考慮到勁度沿橋梁縱向之變化。

有限差分法最大之優點在於初步設計階段可以很快地求解出箱型鋼梁之結構行為，但由於其理論只能應用於單根箱型橋梁，因此有限差分法不能用於箱型鋼梁數目大於一之曲線箱型鋼橋之細部設計。有限差分法之另一缺點是此法不適用於有剛接支承之曲線鋼橋。

2.2.11 格梁相似法(Grid Analogy)

格梁相似法意指將箱型鋼橋之上部結構以具平面狀之格梁系統模擬之，此格梁系統之縱向大梁即為橋梁上部結構之箱型大梁，橫梁則為箱型梁間之外橫隔梁，縱向梁與橫向梁之接點一般為剛接點，圖 2.1 所示即為典型之例。一般而言，當橋梁之跨距與橋寬比值愈大時，用格梁相似法便可愈精確地求得曲線箱型鋼橋之結構行為。然而，即使將整個曲線箱型鋼橋之上部結構模擬為格梁系統，格梁結構本身仍是一個高度靜不定之結構系統，且箱型鋼梁內部仍有其他副構件(如內橫隔梁)之結構行為必須利用格梁相似法以外之分析方法求得。



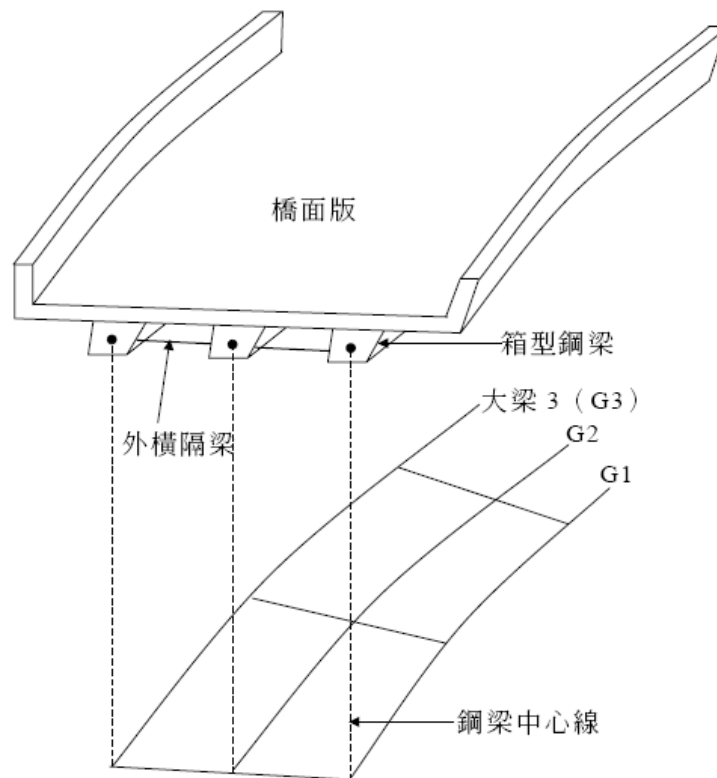


圖 2.1 箱型鋼橋上部結構之格梁系統模擬

1965 年, Lavelle 與 Boick【10】提出格梁之概念, 之後經由 Lavelle【11】等人於 1971 年加以修正。此方法中, 將曲線橋梁之上部結構視為平面之格子梁系統, 而載重則垂直於格梁平面, 翹曲效應則完全忽略不計。在格梁相似法之研發過程初期, 由美國聯邦高速公路總署 (Federal Highway Administration, FHWA) 所主導之 CURT (Consortium of University Research Teams) 研究計畫所贊助, 其所發展之電腦程式定名為 GUGAR1【11】。

1975 年, Lavelle 與 Laska【12】為了考慮曲線梁翹曲之效應, 把 CUGAR1 加以修正而成為日後工程顧問公司首先使用於實際曲線橋梁設計之電腦程式, 此程式定名為 CUGAR2 只適用於開口式之曲線梁斷面, 因此, Lavelle【13】於一年之後將 CUGAR2 繼續更新, 使其亦能分析封閉式曲線梁與桁架型之橫隔梁, 此程式定名為 CUGAR3。在此程式中, 曲線橋梁深需為固定值, 而且箱型梁必須有上側支撐, 以使箱型斷面變為封閉式。CUGAR 系列之電腦程式實際應用上僅能用於靜載重分析, 至於活載重分析則必須靠有經驗之工程師將活載重放置於正確位置方能求得最大之結構反應, 例如最大彎矩、最大扭曲等等。

美國馬里蘭大學(University of Maryland, College Park)土木工程研究所為了改進 CUGAR 系列電腦程式之缺點, 特別發展了另一套以格梁相似法為主

體之曲線鋼橋電腦程式，定名為 DESCUS(Design of Curved Bridge System)

【5, 14, 15】。此程式中，箱型鋼橋之曲線梁元素每一端點均具有四個自由度，亦及縱向彎矩、雙彎矩、垂直剪力與純扭轉(見圖 2.2)。而 DESUCS 程式之最大突破在於具有分析活載重之能力，車道載重與卡車載重可以依設計規範之規定，自動地落在格梁系統之平面上縱向或橫向移動，以求得格梁平面上最大之活載重結構反應。

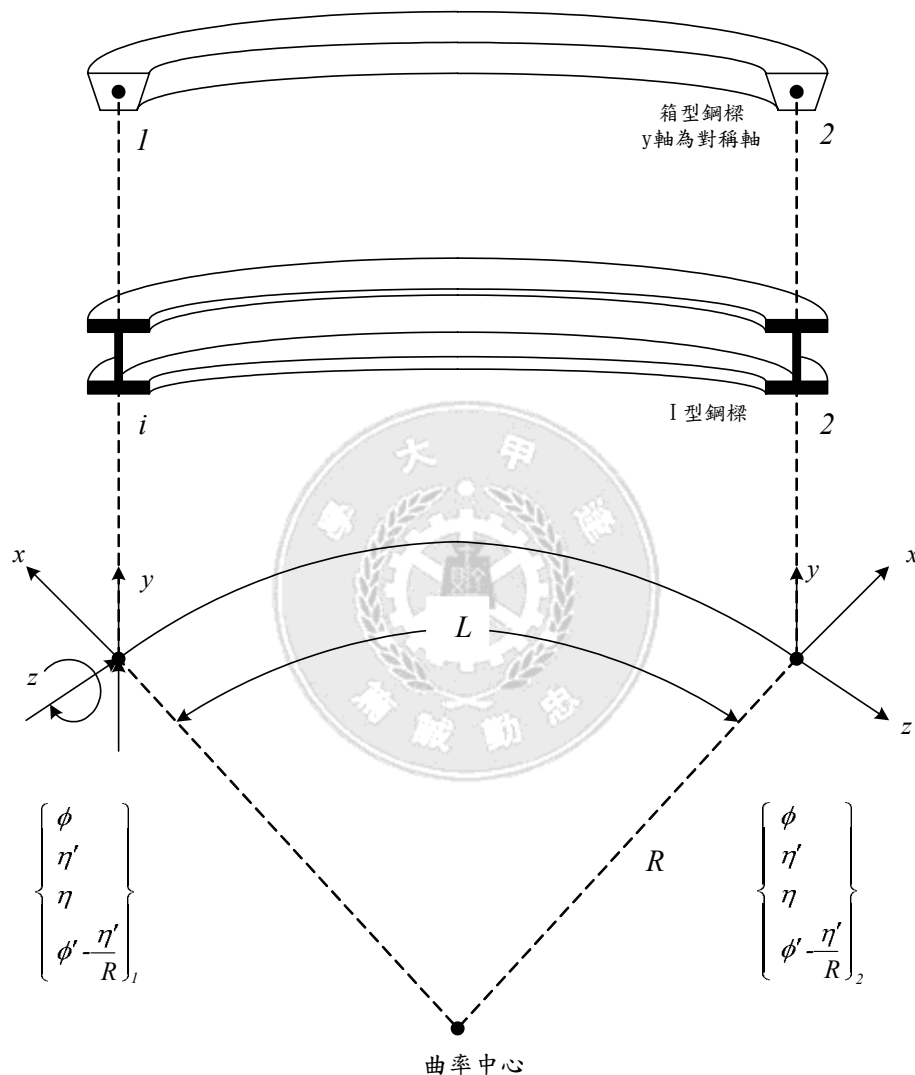


圖 2.2 典型每節點具四個自由度之平面曲薄壁梁元素

箱型鋼橋上部結構中之外橫隔梁屬主要受力構件，其主要目的在於使橋梁上方之荷重能夠均勻橫向傳遞。上部結構之線形(Alignment)如為曲線，除了支承處(例如橋台或橋墩)之外，其餘地方之外橫隔梁絕大部分均以垂直大梁佈置之。典型之外橫隔梁佈置如圖 2.3 所示，外橫隔梁之延長線方向均相交於圓心。內橫隔梁之設計細節頗為繁瑣，直至目前為止，橋梁設計規範(如文獻【2】)中並未有明確之設計準則可資依循，惟大部分之橋梁工程師均遵

循舊有之設計或以彈性基礎梁(Beam on Elastic Foundation)之觀念設計之。

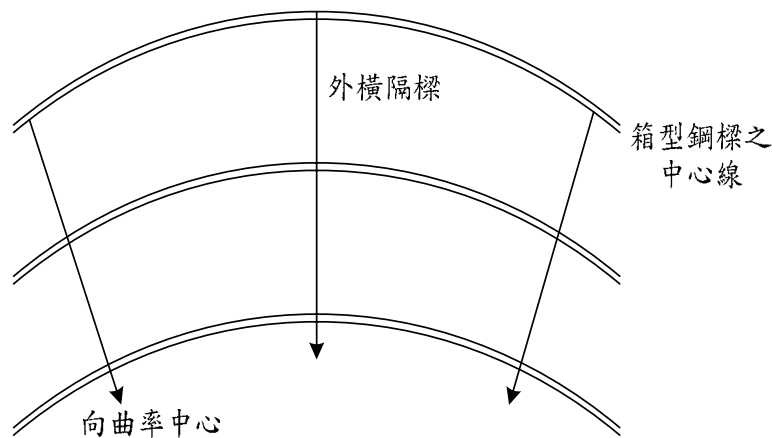


圖 2.3 曲線箱型鋼橋之外橫隔梁佈置示意圖

2.2.12 有限元素法(Finite Element Method)

有限元素法是所有可資利用於箱型鋼橋設計之方法中可達最佳精確度者。然後，以現今電腦科技之發達，從工程之規劃、初步設計至細部設計與變更設計，如完全以有限元素法作為分析曲線橋梁之工具，則時間上之效益往往變成設計者考量之主要因素。

在 1970 年至 1971 年間，美國加州大學柏克萊分校之 Meyer 與 Scordelis【2】將有限元素法應用在曲線箱型橋梁結構系統，其發展出兩種有限元素法來解析曲線混凝土箱型橋之結構行為。同年，Chu 與 Pinjarkar【3】亦發展另一套有限元素法來分析相同類型之曲線混凝土箱型梁。在 1971 年至 1972 年間，美國賓州大學之 Lansberry 與 Shore【4，5】首先應用有限元素法來分析曲線箱型鋼橋，利用勁度方法(Stiffness Approach)將薄壁版模擬成可以承受薄膜(Membrane)與彎矩作用之環狀有限元素(Annular Finite Element)。其所發展出來之有限元素共有六種(見圖 2.4)：

- ①圓柱薄殼元素用來模擬曲線梁之腹板。
- ②環狀元素用來模擬曲線混凝土橋面版與曲線上下翼板。
- ③四邊形板元素用來模擬板緣之實心橫隔梁。
- ④直梁元素用來模擬橫梁與直線形大梁。
- ⑤三角形元素用來模擬支承處有斜角(Skewed Angle)之混凝土橋面版。
- ⑥曲線型梁元素用來模擬縱向曲線 I 型大梁(箱型鋼梁亦可視為兩個 I 型梁之組合)

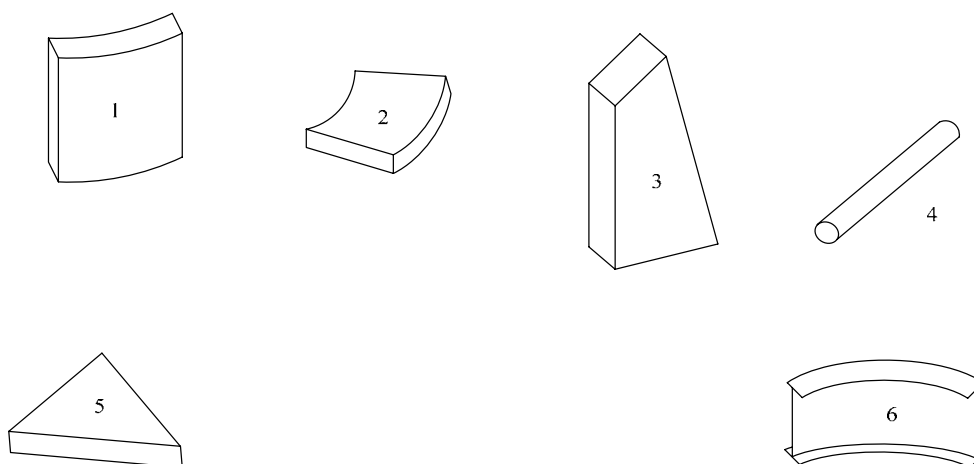


圖 2.4 曲線箱型鋼橋分析之有限元素

此有限元素發展過程接受 CURT(Consortium of University Research Teams)研究計畫之贊助，其電腦程式定名為 STACRB【6】。此電腦程式已被美國曲線橋梁規範【7】所接受，規範中亦描述此程式之基本橋梁結構模擬步驟與原則。

1973 年，Fam【8】發展了一套利用有限元素理論來解析曲線箱型梁之靜載重與自由振動(Free Vibration)行為。在此理論中，箱型梁深度必須固定，箱型梁之線形可為直線、曲線或兩者之組合。箱型梁之上下翼板可以矩形與環狀元素加以模擬，垂直或傾斜之腹板則可以矩形與圓錐形之元素模擬，當曲線形腹板由傾斜變為垂直時，則圓錐元素便可簡化成矩形元素。薄膜與彎矩作用在翼板與腹板元素中均列入考慮，但是因為橫隔梁之彎矩勁度與箱型梁之薄膜勁度比較下甚小，且大部分載重均垂直於橋面版平面，因此，Fam【6】假設橫隔梁效應亦可用薄膜元素來模擬。

1974 年，Bazzant 與 Nimeiri【9】以勁度方法之有限元素理論來解析曲線長跨徑箱型橋，其最大優點乃是長跨徑之曲線箱型橋可以簡化成薄壁箱型梁。此薄壁箱型梁便可進一步簡化成直線梁有限元素，因而在求解過程中收斂與精確度之要求便可輕易地達成。之後 Bazant【9】亦繼續改進其所發展之有限元素分析理論，但箱型橋梁型式變化多端，終其研究，不論精確度如何改進，此方法仍只侷限於單室(Single Cell)箱型橋梁。

2.3 較受歡迎之分析方法

橋梁結構可以用多種不同方法進行模擬分析，惟經過三十多年來橋梁工程師之實際應用，如以細部分析與設計而言，目前只有兩種方法為工程師較常採用，即有限元素法與格梁相似法，此兩種方法亦為目前 AASHTO 平面曲線橋梁規範【7】所認可。

無庸置疑地，有限元素法是所有可資利用方法中可達到最佳精確者。以現今有限元素理論之普及，任何形式之橋梁佈置與載重種類，均可用有限元素法加以模擬，進行精確之理論分析。然而無吾亦必須注意，以有限元素法做曲線箱型鋼橋分析之時間效益。以現今電腦科技之發達，從工程之規劃、初步設計與變更設計，如完全以有限元素法做為分析曲線箱型鋼橋之工具，則時間上之效益往往變成設計者考量之主要因素。而在另一方面，為了正確地將曲線箱型鋼橋以有限元素法進行結構模擬，負責設計之橋梁工程師必須具備非常清晰之有限元素學理觀念。因此，如同參考文獻【41】所指出之建議，有限元素法應由專事研究發展之學術機關或政府機構帶頭，藉有限元素理論分析之精確性，建立具有實用性之參考表格與圖形，或作為橋梁設計完成後之最後檢核工具，以確定橋梁設計之安全性。

與有限元素法比較，格梁相似法則為目前工程顧問公司用來設計曲線鋼橋最常用之方法，其理由則有下列諸項，即：

1. 用格梁相似法模擬求得之橋梁結構行為普遍較易為橋梁工程師所了解，其不若有限元素法深奧。
2. 高度靜不定之曲線鋼橋可用格梁相似法輕易模擬，尤其當橋梁有為數甚多之大梁、支承中心線與橋梁中心線呈大斜角、或橋梁佈置不均勻變化時(例如梁深漸變或大梁間距漸變)，用格梁相似法便可以縮短橋梁設計之時間。
3. 格梁相似法模擬分析曲線箱型鋼橋為 AASHTO 平面曲線橋梁設計規範【7】所認可。
4. 電腦科技發達後，用格梁相似法所發展之電腦程式可輕易地置於其中，如再與電腦輔助設計繪圖系統(Computer Aided Design & Drafting, CADD)結合，則橋梁設計與繪圖可以連貫作業，容易控制設計進度。
5. 利用格梁相似法所設計之曲線鋼橋已有甚多已完工通車，其適用性無庸置疑。

第三章 曲線格梁系統之內力分析

3.1 前言

曲線格梁之分析方法於 1965 年由 Lavelle 和 Boick【10】首先提出，主要應用於曲線 I 型鋼梁橋在垂向荷載作用力下的受力分析。隨後，於 1968 年 Sawko【15】也應用這種方法分析一座由鋼箱型梁與混凝土橋面版組成的曲線格梁橋。他們利用位移法在推導曲線梁單元勁度矩陣時，每個節點考慮三個自由度，即彎矩旋轉角位移 δ ，扭曲旋轉角位移 θ 與豎向線位移 η 。

曲線格梁分析方法的思路，是用一個等效梁格來代表橋梁的上部結構，如圖 3.1 所示的上部結構實際上是由縱梁和橫梁組成，等效梁格可採用與原結構中心線相重合之格梁來近似模擬，即格梁網格的佈置與縱橫梁位置一致。

等效格梁的物理意義就是假定把分散在上部結構每一部分的彎曲與扭轉剛度集中到與其他毗連的鄰近梁格內。換句話說，上部結構的縱向剛度集中到梁格的縱向梁內，而上部結構的橫向剛度則集中到梁格的橫向梁內。圖 3.2 所示為一薄壁多室箱梁結構的網格佈置，其中在支座附近增設虛擬桿，以使應力分佈均勻。

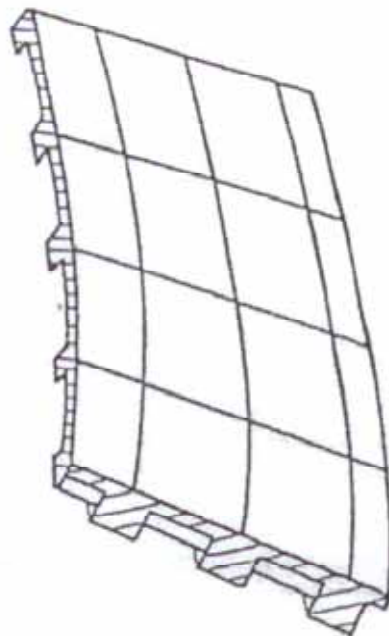


圖 3.1 橋梁上部結構的網格佈置

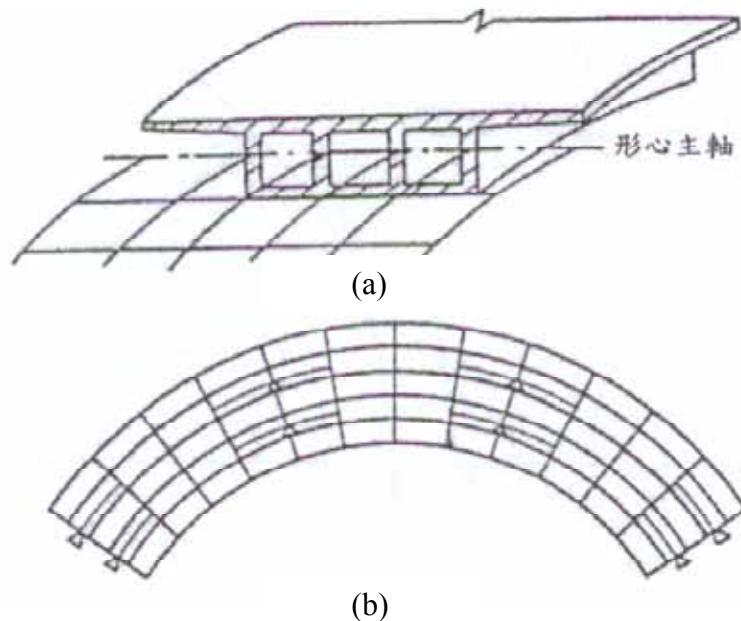


圖 3.2 多室箱梁結構的網格佈置
(a)立面 (b)平面

3.2 曲線格梁之勁度矩陣

曲線格梁在應用剛度法分析時係以節點位移作為未知量。在豎向荷載作用下，如果忽略格梁構件軸向變形的影響，則各節點處將產生三個位移，這就是彎曲角位移 δ ，扭轉角位移 θ 與豎向線位移 η 。在正交格梁系統中，縱向梁的彎曲角位移 δ 實際上就是匯交於該節點橫向梁的扭轉角位移 θ ；反過來也是一樣。

由此可見，曲線格梁未知節點位移的總數應為：

$$n=3j-r \quad (3.1)$$

式中， j 為節點數， r 為節點受約束的位移數。

在圖 3.3 所示的 3 跨連續曲線格梁中，因為 $j=52$ ，同時考慮到支承節點處的豎向線位移為零，因此 $r=8$ 。將此代入式(3.1)，得節點位移總數 $n=148$ 。

圖 3.4 所示為一格梁中曲梁單元 1-2，假設其為等斷面。當一端節點作用彎矩 M_1 ，扭矩 T_1 ，豎向力 V_1 時，曲梁中任一點產生的彎矩、扭矩和豎向力可表示為：

$$M(\varphi) = M_1 \cos \varphi \pm T_1 \sin \varphi + V_1 r \sin \varphi \quad (3.2)$$

$$T(\varphi) = \mp M_1 \sin \varphi + T_1 \cos \varphi \mp V_1 (1 - \cos \varphi) r \quad (3.3)$$

$$V = V_1 \quad (3.4)$$

式中， r 為曲率半徑， φ 為曲梁上任一點距 1 端的弧度，正負號表示曲梁單元的正負曲率。

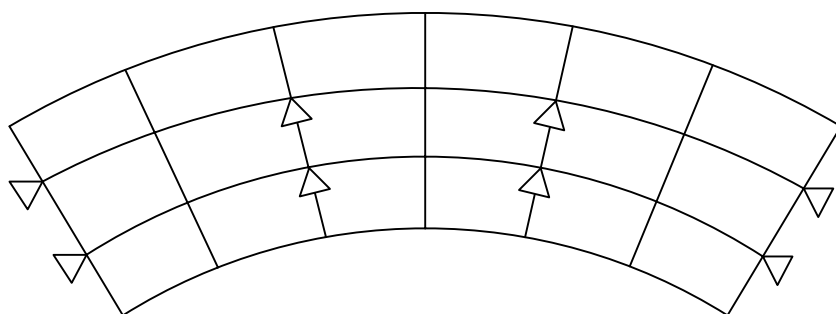


圖 3.3 三跨連續曲線格梁系統

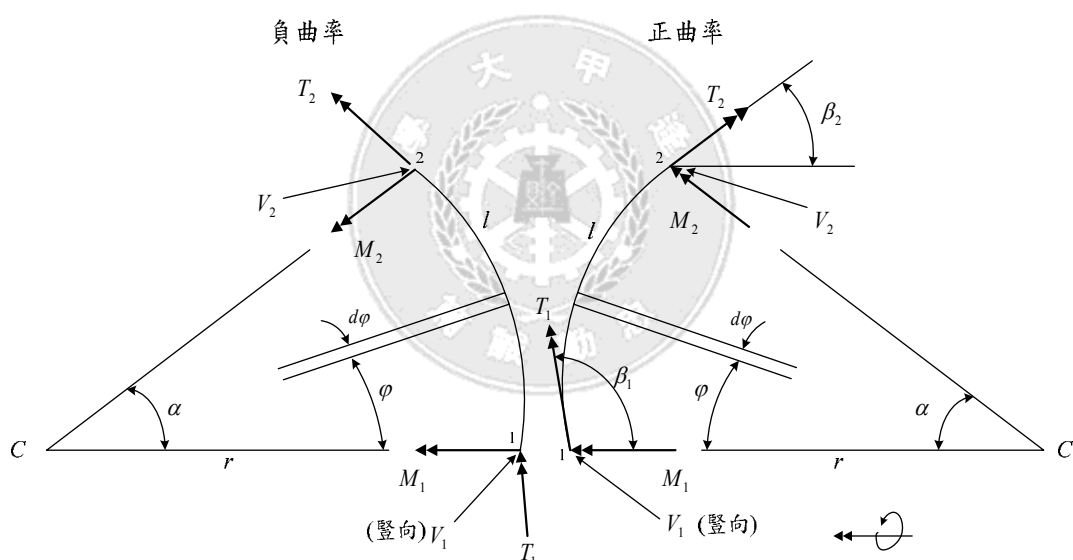


圖 3.4 格梁系統中之曲線單元(走向 1→2)

曲梁單元內彎矩和扭矩產生的應變能為：

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2\psi EI} ds + \int_0^l \frac{T^2}{2GK} ds \quad (3.5)$$

式中 ψ 表示非對稱斷面形狀係數，對具有單對稱軸的斷面， $\psi=1$ 。

現假設曲梁 1-2 兩端節點的力與位移之間的關係為：

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ T_1 \\ V_1 \\ \dots \\ M_2 \\ T_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \eta_1 \\ \dots \\ \delta_2 \\ \theta_2 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

或者寫為：

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_M = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_M \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}_M \quad (3.7)$$

此式可簡化為：

$$F_M = K_M D_M \quad (3.8)$$

上式中 K_M 表示曲梁單元之勁度矩陣， K_{11} 、 K_{22} 表示節點 1 和節點 2 的勁度矩陣， K_{12} 、 K_{21} 表示節點 1 和節點 2 的交叉勁度矩陣、其中節點 1 的勁度矩陣為：

$$K_{11} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = F_{11}^{-1}$$

可藉由 1 端節點的柔度矩陣的逆矩陣來計算。今假設：

$$F_{11} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

其中各柔度係數 f_{ij} 可按卡氏第二定理利用曲梁單元應變能表達式(3.5)導出如下：

$$f_{11} = \left(\frac{\partial U}{\partial M_1} \right)_{M_1=1} = + \frac{r}{EI} \left[\frac{1}{4}(1-x)\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha(1+x) \right] \quad (3.9)$$

$$f_{12} = \left(\frac{\partial U}{\partial M_1} \right)_{T_1=1} = \pm \frac{r^2}{2EI} (1-x)\sin^2 \alpha \quad (3.10)$$

$$f_{13} = \left(\frac{\partial U}{\partial M_1} \right)_{V_1=1} = \frac{r^2}{EI} \left[\frac{1}{2}(1-x)\sin^2 \alpha + x(1-\cos \alpha) \right] \quad (3.11)$$

$$f_{22} = \left(\frac{\partial U}{\partial T_1} \right)_{T_1=1} = + \frac{r}{EI} \left[-\frac{1}{4}(1-x)\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha(1+x) \right] \quad (3.12)$$

$$f_{23} = \left(\frac{\partial U}{\partial T_1} \right)_{V_1=1} = \mp \frac{r^2}{EI} \left[-\frac{1}{4}(1-x)\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha(1+x) - x\sin \alpha \right] \quad (3.13)$$

$$f_{33} = \left(\frac{\partial U}{\partial V_1} \right)_{V_1=1} = + \frac{r^3}{EI} \left[-\frac{1}{4}(1-x)\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha(1+x) - x(2\sin \alpha - \alpha) \right] \quad (3.14)$$

在以上各式中

$$x = \frac{EI}{GK}$$

- f_{11} ：在節點 1 作用 $M_1 = 1$ ，沿 M_1 方向產生的撓角；
- f_{12} ：在節點 1 作用 $T_1 = 1$ ，沿 M_1 方向產生的撓角；
- f_{13} ：在節點 1 作用 $V_1 = 1$ ，沿 M_1 方向產生的撓角；
- f_{22} ：在節點 1 作用 $T_1 = 1$ ，沿 T_1 方向產生的扭轉角；
- f_{23} ：在節點 1 作用 $V_1 = 1$ ，沿 T_1 方向產生的扭轉角；
- f_{33} ：在節點 1 作用 $V_1 = 1$ ，沿 V_1 方向產生的豎向位移。

當曲梁單元一個節點的 3×3 勁度矩陣 K_{11} 求得之後，利用變換矩陣 T ，就可以很容易的求得另一節點的勁度矩陣 K_{22} 以及這兩個節點相互影響的交叉勁度矩陣 K_{12} 、 K_{21} 。

勁度矩陣 K_{11} 定義為節點 1 位移 $D_1 = \{\delta_1 \quad \theta_1 \quad \eta_1\}$ 的各分量均為 1 時在該節點產生的約束力 $F_1 = \{M_1 \quad T_1 \quad V_1\}$

由式(3.7)，可得 F ，如下：

$$F_1 = K_{11}D_1 = K_{11}$$

此時節點 2 的作用力可以利用節點 1 向節點 2 的變換矩陣 T_{21} 算出。

此變換矩陣 T_{21} 可由式(3.2)至式(3.4)依矩陣形式寫出如下：

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \pm \sin \alpha & r \sin \alpha \\ \mp \sin \alpha & \cos \alpha & \mp r(1 - \cos \alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

於是節點 2 當位移 $D_1 = \{\delta_1 \quad \theta_1 \quad \eta_1\}$ 各分量均為 1 時產生的約束力 K_{21} 可以根據靜力平衡條件求出為：

$$K_{21} = -T_{21}K_{11} \quad (3.16)$$

其必與 K_{11} 保持平衡。

由於曲梁單元勁度矩陣的對稱性，交叉勁度矩陣 K_{12} 必須等於 K_{21} 的轉置矩陣。因此，

$$K_{12} = K_{21}^T = -K_{11}T_{21}^T \quad (3.17)$$

K_{12} 表示節點 2 的位移 $\Delta_2 = \{\delta_2 \ \theta_2 \ \eta_2\}$ 各分量均為 1 時在節點 1 產生的約束力。

而節點 2 勁度矩陣 K_{22} 可以利用節點 2 向節點 1 的變換矩陣 T_{12} ，並應用類似式(3.16)的表達式得知：

$$K_{12} = -T_{12}K_{22}$$

由此式可求出：

$$K_{22} = -T_{12}^{-1}K_{12}$$

因為

$$T_{21} = T_{21}^{-1} \quad (3.18)$$

於是得到

$$K_{22} = -T_{21}K_{12} = T_{21}K_{11}T_{21}^T \quad (3.19)$$

K_{22} 表示節點 2 的位移 $D_2 = \{\delta_2 \ \theta_2 \ \eta_2\}$ 各分量均為 1 時在節點 2 產生的約束力。其必與 K_{12} 保持平衡。

綜合以上各式可以看出，在局部座標下只要知道一個節點的勁度矩陣 K_{11} 後，利用式(3.16)~(3.19)就可以求出曲梁單元全部勁度矩陣如下：

$$K_M = \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{11}T_{21}^T \\ -T_{21}K_{11} & T_{21}K_{11}T_{21}^T \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

通常，為了簡化起見，可以略去變換矩陣 T 的下標而將曲梁的勁度矩陣寫成：

$$K_M = \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{11}T^T \\ -TK_{11} & TK_{11}T^T \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

上式曲梁單元中各子勁度矩陣的關係也可以用圖 3.5 來說明。

如果先知道節點 2 的節點勁度矩陣 K_{22} ，則可按類似的方式導出曲梁單元勁度矩陣

$$K_M = \begin{bmatrix} T_{12}K_{22}T_{12}^T & -T_{12}K_{22} \\ -K_{22}T_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

式中 T_{12} 為節點 2 向節點 1 的變換矩陣，可依式(3.18)計算得知。
式(3.22)也可以利用圖 3.6 來說明。

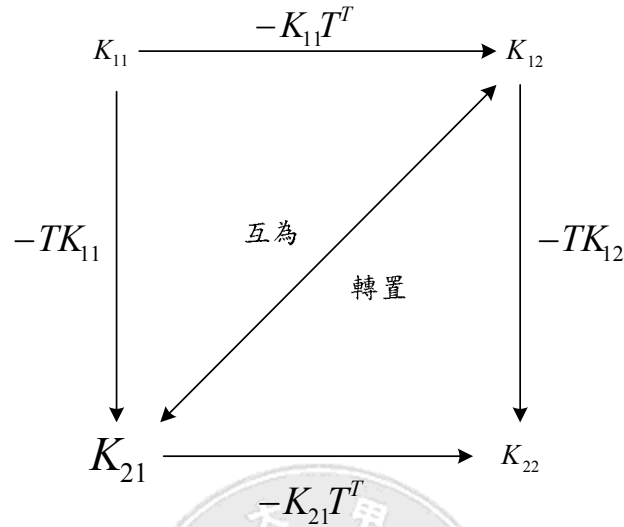


圖 3.5 由節點勁度矩陣 K_{11} 導出曲梁單元其餘勁度矩陣的關係圖

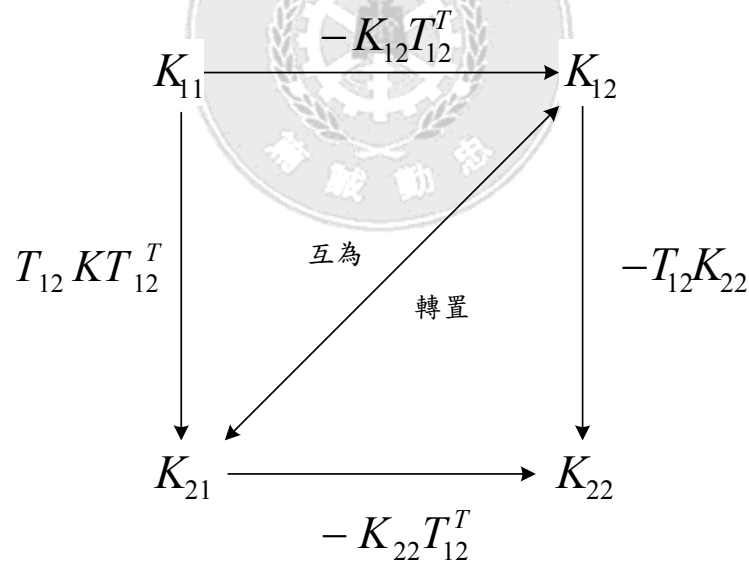


圖 3.6 由節點勁度矩陣 K_{22} 導出曲梁單元其餘勁度矩陣的關係圖

3.3 曲線格梁勁度矩陣之座標轉換

曲線梁單元的座標轉換與直線梁單元不同，因為曲線梁單元兩端節點的轉換角 γ 和 $\gamma + \alpha$ 不一樣，如圖 3.7 所示。

曲線梁座標轉換的目的是將各曲梁單元各不相同的局部座標系轉換為

一個統一的座標系，稱為結構座標系或整體座標系，以建立結構座標系中的曲線梁單元勁度矩陣，在此基礎上面對曲線格梁系統進行結構整體分析。

圖 3.7 中, xiz 為曲線梁單元 i 端節點的局部座標系, XOZ 為結構座標系, 兩種座標系之間的夾角為 γ , 它是以 Z_i 軸沿逆時針方向轉至 z 軸來度量的。

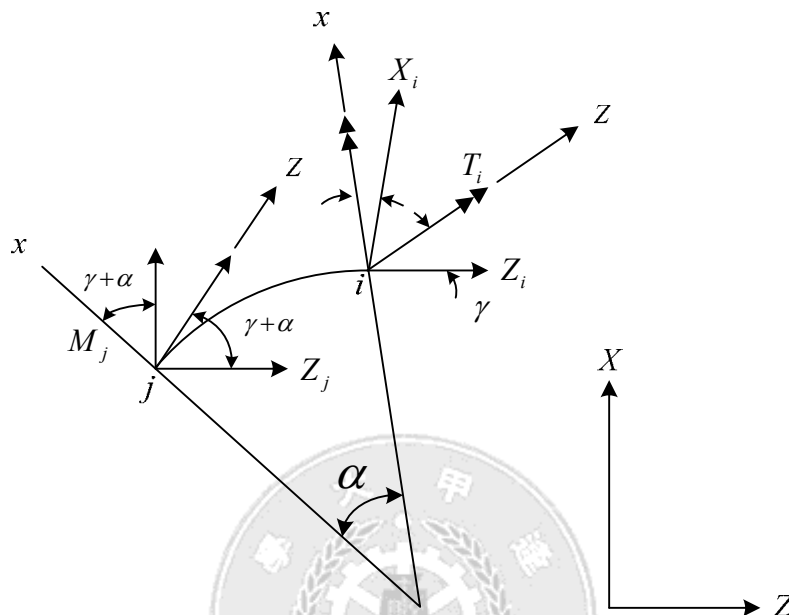


圖 3.7 曲線梁單元座標轉換

在兩種座標系中，節點 i 的豎向力都是垂直於座標平面之向量，故不受平面座標轉換的影響，但彎矩 M_i 和扭矩 T_i 將隨座標轉換而重新組合為沿結構座標系方向 X_i 和 Z_i 的分量。由投影關係可得：

$$M_i = -Z_i \sin \gamma + X_i \cos \gamma$$

$$T_i = Z_i \cos \gamma + X_i \sin \gamma$$

$$\text{又 } V_i = V_i$$

將以上三式寫成矩陣形式，則有：

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ T_i \\ V_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_i \\ X_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

可簡寫為：

$$F_{Mi} = R_i F_{si} \quad (3.24)$$

式中， F_{Mi} 表示在局部座標系中曲梁單元節點 i 的力列向量， F_{si} 表示在結構

座標系中同一節點 i 的力列向量， R_i 表示節點 i 座標轉換矩陣，即：

$$R_i = \begin{bmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

同樣，按照圖 3.7 所示亦可將結構座標系的力列向量用局部座標系的各力分量來表示為：

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ T_i \\ V_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ T_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

或簡寫為：

$$F_{si} = R_i^T F_{Mi} \quad (3.27)$$

式中， R_i^T 為座標轉換矩陣 R_i 的轉置矩陣。從式(3.25)可見，矩陣 R_i 具對稱性，故有：

$$R_i^T = R_i \quad (3.28)$$

比較式(3.24)和式(3.27)，可以看出矩陣 R_i 的轉置矩陣等於其逆矩陣

$$R_i^T = R_i^{-1} \quad (3.29)$$

因此節點 i 座標轉換矩陣 R_i 是一個正交矩陣。

顯然，梁單元節點力向量之間的這種轉換關係，同樣適用於在小變形情況下節點位移向量之間的轉換。因此，對於圖 3.7 中的節點 i 位移可以像方程式(3.24)和方程式(3.27)一樣寫出如下表達式。

$$D_{Mi} = R_i D_{si} \quad (3.30)$$

$$D_{si} = R_i^T D_{Mi} \quad (3.31)$$

式中， D_{Mi} 表示在局部座標系中節點 i 的位移列向量， D_{si} 表示在結構座標系中同一節點 i 的位移列向量。

以上我們討論了曲線梁單元一端節點 i 的座標轉換概念同樣可應用於另一端點 j 轉換角 $(\gamma + \alpha)$ ，於是式(3.25)可改寫為：

$$R_i = \begin{bmatrix} -\sin(\gamma + \alpha) & \cos(\gamma + \alpha) & 0 \\ \cos(\gamma + \alpha) & \sin(\gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

現在我們可以通過曲線梁單元 i - j 兩端節點的座標轉換公式(3.24)和公式(3.30)建立在結構座標系中的曲線梁單元勁度矩陣。

根據曲線梁單元 i - j 兩端節點的力和位移之間的關係

$$\begin{Bmatrix} F_{Mi} \\ F_{Mj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}_M \begin{Bmatrix} D_{Mi} \\ D_{Mj} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

經過座標轉換後，可得：

$$\begin{Bmatrix} R_i F_{si} \\ R_j F_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}_M \begin{Bmatrix} R_i D_{si} \\ R_j D_{sj} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

式中， F_{si} 、 F_{sj} 、 D_{si} 、 D_{sj} ，分別表示在結構座標系中曲線梁單元 i - j 兩端節點 i 或 j 的力向量或位移向量。

式(3.34)可以改寫成如下等同的形式：

$$\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{si} \\ F_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}_M \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{si} \\ D_{sj} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

上式可簡寫為：

$$RF_s = K_M RD_s \quad (3.36)$$

式中 R 表示曲線梁單元 i - j 兩端節點力與位移的座標轉換矩陣，它等於

$$R = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_j \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

F_s 和 D_s 分別表示在結構座標系中曲線梁單元梁端力列向量或梁端位移列向量

$$F_s = \begin{Bmatrix} Z_i \\ X_i \\ V_i \\ \cdots \\ Z_j \\ X_j \\ V_j \end{Bmatrix}, \quad D_s = \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \theta_i \\ \eta_i \\ \cdots \\ \Delta_j \\ \theta_j \\ \eta_j \end{Bmatrix}$$

將式(3.36)兩邊同時乘以矩陣 R 的逆矩陣，則可得：

$$F_s = R^{-1} K_M R D_s \quad (3.38)$$

因為矩陣 R 的子矩陣 R_i (或 R_j) 是一個正交矩陣，故矩陣 R 也是一個正交矩陣。可以利用矩陣 R 乘以其轉置矩陣得到證明，如下式：

$$R^T R = \begin{bmatrix} R_i^T & 0 \\ 0 & R_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^T R_i & 0 \\ 0 & R_j^T R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^{-1} R_i & 0 \\ 0 & R_j^{-1} R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

由此可見矩陣 R 的轉置矩陣等於其逆矩陣：

$$R^T = R^{-1} \quad (3.39)$$

將式(3.39)代入式(3.38)，可得：

$$F_s = R^T K_M R D_s \quad (3.40)$$

或簡寫為：

$$F_s = K_s D_s \quad (3.41)$$

$$\text{式中 } K_s = R^T K_M R \quad (3.42)$$

表示結構座標系中的曲線梁單元勁度矩陣，它即為曲線梁單元勁度矩陣由局部座標系向結構座標系轉換的公式。

3.4 節點平衡方程組和結構勁度矩陣

現在利用各曲線梁單元在結構座標系下的單元勁度矩陣式(3.42)，利用節點位移表示節點力，然後代入節點平衡方程組，就會得到一組以節點位移為未知量的線性方程組。

對曲線梁單元 e 而言，我們有：

$$\begin{Bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix}_s \quad (3.43)$$

其中下標 s 指結構座標系，上標 e 指名單元號碼，下標 i 、 j 是 e 號單元的兩端節點編號。

於是，節點 i 對 e 號曲線梁單元的作用力可表示為

$$F_i^e = K_{ii}^e D_i + K_{ij}^e D_j \quad (3.44)$$

假定圍繞節點 i 的各曲線梁單元如圖 3.8 所示，則作用在節點 i 上的所有外力必組成平衡力系，故必有

$$\sum_e F_i^e = P_i \quad (3.45)$$

或利用節點位移表示節點力

$$\left(\sum_e K_{ii}^e \right) D_i + K_{ij} D_j + K_{im} D_m + K_{ih} D_h + K_{in} D_n = P_i \quad (3.46)$$

上式的物理意義很明顯，它表明：作用在節點*i*上的外力*P_i*由圍繞節點*i*的各單元承受。當節點*i*產生單位位移時，圍繞節點*i*的各單元均承受節點力，其中*e*號單元*i*端承受的作用力即為*K_{ii}^e*，而上式中和號 \sum 即指為繞節點*i*的各桿*i*端承受的作用力之和。當節點*i*的任何一個遠端節點，例如圖 3.8 中的節點*j*產生單位位移時，在圍繞節點*i*的所有單元中，只有*ij*單元的*i*端才承受作用力，即*K_{ij}*。同理，其餘*K_{im}*、*K_{ih}*、*K_{in}*分別表示當節點*m*、*h*、*n*單獨產生單位位移時，各*im*、*ih*、*in*單元在*i*端承受的作用力。

為了便於曲線格梁的結構分析，我們把曲線梁單元的勁度矩陣從形式上予以改造，使式(3.45)、(3.46)所表示的節點平衡方程式具有十分規則的形式，以利於計算機的應用。

考慮一曲線梁單元*e*，在結構座標系下其單元勁度矩陣的形式原來是：

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{matrix} D_i \\ D_j \end{matrix} \quad (3.47)$$

這裡的*K^e*是 6×6 方陣，其中每個子塊是一個 3 階方陣。

假定曲線格梁共有 *NJ* 個節點，我們形式上把原來的單元勁度矩陣予以擴充，膨脹為如下形式：

$$\overline{K}^e = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & NJ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{ii}^e & \cdots & K_{ij}^e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{ji}^e & \cdots & K_{jj}^e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_j \\ \vdots \\ D_{NJ} \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.48)$$

上式中 \overline{K}^e 表示*e*號曲線梁單元膨脹後的單元勁度矩陣，它由 *NJ*×*NJ* 個子塊組成，其中除標明的*K_{ii}^e*、*K_{ij}^e*、*K_{ji}^e*、*K_{jj}^e*四個子塊外，其餘全是零塊。四個

非零子塊的位置由 e 號單元兩端節點號 i 、 j 為一確定，隨著節點排列順序的改變， \overline{K}^e 中各元素的排列也將隨之改變，式(3.48)所示，式節點 $i < j$ 的情況。

引入了 \overline{K}^e 之後，我們就把節點 i 對 e 號單元的作用力 F_i^e 寫成如下很規則的形式：

$$F_i^e = \sum_{k=1}^{NJ} \overline{K}_{ik}^e D_k \quad (3.49)$$

式中，任何一個節點 i 不用桿件連接的節點，節點 i 自然對它無作用力，故為零子塊。

注意到這一點，節點 i 的平衡方程式(3.45)即可寫為：

$$\sum_{e=1}^{NE} F_i^e = P_i \quad (3.50)$$

式中， NE 為單元總數。

將式(3.49)帶入上式後，得：

$$\sum_{e=1}^{NE} \left(\sum_{j=1}^{NJ} \overline{K}_{ij}^e D_j \right) = P_i \quad (3.51)$$

今設定

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{NE} \overline{K}_{ij}^e \quad (3.52)$$

則節點 i 的平衡方程式用節點位移表示可寫成：

$$\sum_{j=1}^{NJ} K_{ij} D_j = P_i \quad (3.53)$$

此式展開就是

$$K_{i1} D_1 + K_{i2} D_2 + \dots + K_{ij} D_j + \dots + K_{i,NJ} D_{NJ} = P_i \quad (3.54)$$

現曲線格梁節點總數為 NJ ，故節點平衡方程組的數學表達式可簡寫為：

$$\sum_{j=1}^{NJ} K_{ij} D_j = P_i (i = 1, 2, \dots, NJ) \quad (3.55)$$

全部節點平衡方程組寫開的形式，即：

$$\begin{aligned}
 K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + \cdots + K_{1j}D_j + \cdots + K_{1,NJ}D_{NJ} &= P_1 \\
 K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + \cdots + K_{2j}D_j + \cdots + K_{2,NJ}D_{NJ} &= P_2 \\
 \vdots & \\
 K_{i1}D_1 + K_{i2}D_2 + \cdots + K_{ij}D_j + \cdots + K_{i,NJ}D_{NJ} &= P_i \\
 \vdots & \\
 K_{NJ,1}D_1 + K_{NJ,2}D_2 + \cdots + K_{NJ,j}D_j + \cdots + K_{NJ,NJ}D_{NJ} &= P_{NJ}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

寫成矩陣形式則為：

$$KD = P \tag{3.57}$$

式中 D 代表曲線格梁節點位移列矢量， P 代表與節點位移列矢量相對應的節點外力列矢量，矩陣 K 稱為結構勁度矩陣，即：

$$D = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_{NJ} \end{Bmatrix}, \quad P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_{NJ} \end{Bmatrix} \tag{3.58}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1,NJ} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2j} & \cdots & K_{2,NJ} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{i,NJ} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{NJ,1} & K_{NJ,2} & \cdots & K_{NJ,j} & \cdots & K_{NJ,NJ} \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

前已指出，通常由曲線格梁理論建立的平面網格程序是基於每個節點具有三個位移自由度，故此節點平衡方程組(3.56)共有 $3 \times NJ$ 個方程式。

通過以上的討論，可以把式(3.56)結構勁度矩陣 K 形成的一些規律總結幾點如下：

1. 結構勁度矩陣 K 係由所有單元膨脹後，在結構座標系下的單元勁度矩陣 \bar{K}^e 疊加而成，即：

$$K = \sum_{e=1}^{NE} \bar{K}^e \tag{3.60}$$

注意到每個單元勁度矩陣的四個非零子塊 K_{ii}^e 、 K_{ij}^e 、 K_{ji}^e 、 K_{jj}^e 在結構勁度矩陣 K 中的位置係由 e 號單元兩端節點號 i 、 j 唯一確定，因此對曲線格梁進行節點編號很重要，這不僅影響結構勁度矩陣 K 中非零子塊帶寬

(Rand Width)的大小，而且有時還會影響計算精度。

2. 結構勁度矩陣 K 中位於主對角線上的子塊 K_{ij} 稱為主子塊。實際上它是由圍繞節點 i 的各相關單元的主子塊疊加而成，這是我們在建立節點 i 平衡方程(3.46)時早已得到的結果。

$$K_{ii} = \sum_{e=1}^{NE} \bar{K}_{ii}^e = \sum_e K_{ii}^e \quad (3.61)$$

3. 結構勁度矩陣 K 中不在主對角線上的子塊 K_{ij} 稱為副子塊。它根本無須疊加，但它是否為零，則取決於 i 、 j 兩個節點之間是否有桿件直接相連：

(1) 若 i 、 j 之間有桿件直接相連，則：

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{NE} \bar{K}_{ij}^e = K_{ij}^e \quad (3.62)$$

即為連接 i 、 j 兩節點的單元的相應副子塊；

(2) 若 i 、 j 之間每有桿件相連，則：

$$K_{ij} = 0 \quad (3.63)$$

即為零子塊。

現再進一步指出式(3.59)結構勁度矩陣 K 的幾個明顯而重要的特性：

1. 結構勁度矩陣 K 是一個 $NJ \times NJ$ 方陣， NJ 為曲線格梁節點總數，其中也包括支座受約束的節點個數。這種沒有考慮支座約束條件的結構原始勁度矩陣是奇異(Singular)，矩陣 K 的行列視為零。
2. 結構矩陣 K 是對稱矩陣，這由反力互等定理(Reciprocal Theorem)不難理解，即：

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (3.64)$$

事實上膨脹後的單元勁度矩陣 $K = \sum_{e=1}^{NE} \bar{K}^e$ 仍為對稱矩陣。

3. 結構勁度矩陣 K 為大型稀疏矩陣。此乃因為，曲線格梁實際的節點總數通常都比匯交於任何一個節點的單元個數大的多，因而結構勁度矩陣 K 的很大一部分子塊為零子塊，非零子塊很少，故結構勁度矩陣 K 呈現出高度稀疏性。
4. 結構勁度矩陣 K 是帶狀矩陣，及非零子塊系分布在主對角線附近。

這只要對節點予以適當的編號，使同一單元兩端節點 i 、 j 的編號差 $|j-i|$ 量保持最小，就能使得結構勁度矩陣的非零子塊都聚集在對角線兩側，呈現為帶狀。

5. 結構勁度矩陣 K 是正定(Positive-Definite)矩陣，這就是說曲線格梁在支承約束，不允許產生剛體位移條件下，與獨立節點位移矢量 D 相應的結構勁度矩陣 K 為一正定矩陣。證明如下：

設曲線格梁的結構勁度方程為：

$$KD = P \quad (3.65)$$

結構彈性應變能 U 在數值上與外力 P 所作的功相等，故有

$$U = \frac{1}{2} D^T P \quad (3.66)$$

將(3.65)帶入上式，得

$$U = \frac{1}{2} D^T KD \quad (3.67)$$

因假定結構不產生剛體位移，故只要 D 不全為零，則結構產生的彈性應變能 U 必是正值，故當 D 為非零列矢量時，有

$$D^T KD > 0 \quad (3.68)$$

而 K 是正定的。

由對稱正定矩陣的基本性質知道， K 的行列式為正，即

$$|K| > 0 \quad (3.69)$$

又 K 的任一主式 $K_i (i=1,2,\dots,NJ)$ 的行列式之值必也為正，即：

$$|K_i| > 0, (i=1,2,\dots,NJ) \quad (3.70)$$

曲線格梁結構勁度矩陣 K 為正定矩陣的重要性在於：理論上，它確保線性方程組 $KD = P$ 必有唯一解；在計算過程上，它 also 具有良好的數值穩定性和較高的計算精度。

3.5 支承條件的引入和結構內力的計算

前面我們根據曲線格梁節點平衡條件建立的結構原始勁度方程為：

$$KD = P \quad (3.17)$$

由於，沒有引入結構的支承約束條件，結構還可以有任意剛體位移，而且原

始勁度矩陣 K 是奇異的, K 的逆矩陣不存在, 故尚不能由上式求節點位移 D 。

為了引入支承條件, 現把節點位移列矢量 D 分成兩部份。一部分是不受支承約束的位移分量, 記為 D_F ; 另一部份是受有支承約束的位移分量, 記為 D_R 。

依相同原理, 把式(3.17)中的結構勁度矩陣 K 和節點荷載列矢量 P 也相應地予以分割, 形式如下:

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & \vdots & K_{FR} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ K_{RF} & \vdots & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_F \\ \cdots \\ D_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_F \\ \cdots \\ P_R \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

上式中 P_R 就是支座反力。

按照矩陣乘法規則, 由式(3.72)得到兩個矩陣方程:

$$\begin{aligned} K_{FF}D_F + K_{FR}D_R &= P_F \\ K_{RF}D_F + K_{RR}D_R &= P_R \end{aligned} \quad (3.73)$$

此聯立方程組的未知量是不受支承約束的節點位移 D_F 與支座反力 P_R

考慮到受支承約束的節點位移分量等於零, 即:

$$D_R = 0 \quad (3.74)$$

將此代入方程組(3.73), 便可得到引入支承條件後的結構勁度方程:

$$K_{FF}D_F = P_F \quad (3.75)$$

$$K_{RF}D_F = P_R \quad (3.76)$$

由方程式(3.75)可直接解出全部未知的節點位移, 及:

$$D_F = K_{FF}^{-1}P_F \quad (3.77)$$

式中 K_{FF}^{-1} 表示矩陣 K_{FF} 的逆矩陣。

節點位移一旦求出, 把它式入方程式(3.76), 即可得支座反力如下:

$$P_R = K_{RF}K_{FF}^{-1}P_F \quad (3.78)$$

計算支座反力的另外一個簡便方法是直接對支座節點用節點平衡方程(3.46)計算。設圖 3.8 中節點 i 是一個支座剛節點, 則節點 i 的位移各分量均為零, 即 $D_i = 0$, 故支座反力 P_R 由式(3.46)得:

$$P_R = K_{ij}D_j + K_{im}D_m + K_{ih}D_h + K_{in}D_n \quad (3.79)$$

這與方程(3.78)的差別在於實際計算時，可以不去組集方程式(3.78)中的矩陣 K_{RF} ，而是在解出節點位移 D_F 後，調用單元勁度矩陣去計算支座反力。這裡應注意支座反力 P_R 的各分量均是依結構座標系座標軸而得知。

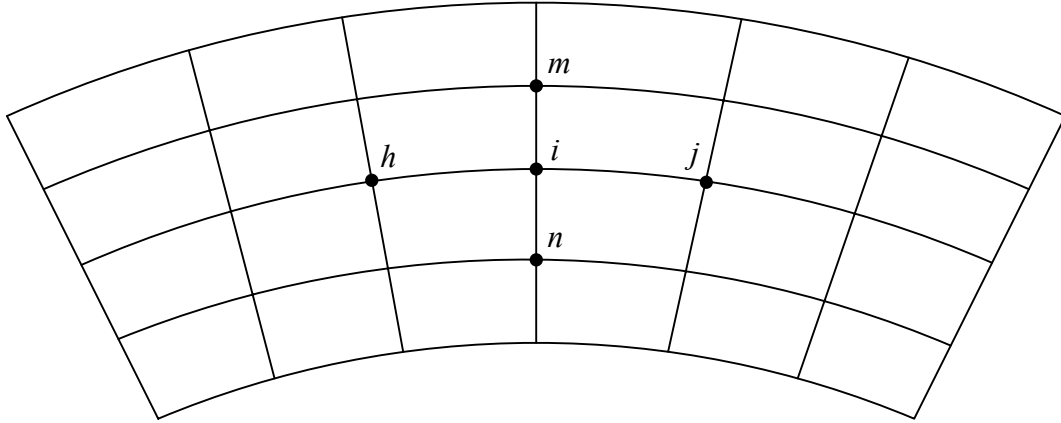


圖 3.8 曲線格子梁典型節點 i

除支座反力 P_R 外，我們還可以利用曲線梁單元在局部座標系下的勁度矩陣 K_M 計算曲線梁單元由於兩端節點位移所引起的單元節點力，即作用在單元兩端斷面上的內力。算法如下：

根據節點處的位移連續條件，曲線梁單元在結構座標系下的兩端節點位移。於是通過式(3.37)座標轉換矩陣 R ，我們即可得到曲線梁單元在局部座標系下的兩端節點位移 D_M

$$D_M = RD_S$$

再由式(3.8)可求得局部座標系下作用在曲線梁單元兩端節面上的內力：

$$F_M = K_M D_M = K_M R D_S \quad (3.80)$$

上式中 F_M 各分量就是曲線梁單元的彎矩、扭矩和剪力。

另外一種算法是按照前述求得的曲線梁單元在結構座標系下的兩端節點位移 D_S 利用在結構座標系下的單元勁度矩陣 K_S ，求得在結構座標系下作用在曲線梁單元兩端節面上的力：

$$F_S = K_S D_S$$

然後通過式(3.37)座標轉換矩陣 R 變換到局部座標系中：

$$F_M = R F_S = R K_S D_S \quad (3.81)$$

這兩種算法均有應用。當計算機以儲存有結構座標系下的單元勁度矩陣 K_S 時，以採用後者算法較節省時間。

3.6 曲線梁單元的等效節點荷載

前面我們所討論的只是外荷載只作用在節點上的情況。事實上荷載並不完全作用在節點上，有時作用在曲線梁單元上。因此，就需要把作用在曲線梁單元上的荷載移置到節點上來。

1. 集中荷載 P 的等效節點荷載(Equivalent Joint Load)

圖 3.9 所示為格梁中的曲線梁單元 $i-j$ ，假設將 i 端約束移去並代之以彎矩 M_0 ，扭矩 T_0 和豎向力 R_0 ，然後計算此曲線懸臂梁在集中荷載 P 作用下懸臂端 i 產生的變形。

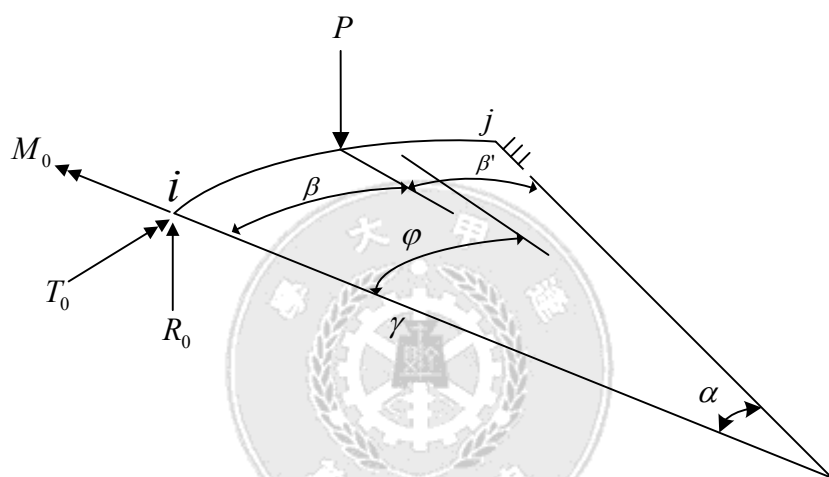


圖 3.9 曲線懸臂梁在集中荷載 P 作用下的圖示

假設集中荷載 P 作用點距 i 端為 β ，距 j 端為 β' ，於是曲線梁任一點距 i 端為 φ 處產生的內力。

$$\begin{aligned} M &= M_0 \cos \varphi + T_0 \sin \varphi + R_0 r \sin \varphi - Pr \sin(\varphi - \beta) \\ T &= -M_0 \sin \varphi + T_0 \cos \varphi - R_0 r(1 - \cos \varphi) + Pr[1 - \cos(\varphi - \beta)] \\ R &= R_0 - P \end{aligned} \quad (3.82)$$

在以上表達式中集中荷載 P 僅對 $\varphi > \beta$ 處產生作用。

根據卡氏第二定理(Castigliano's Second Theorem)通過曲線梁單元內的應變能

$$U = \int_0^\alpha \frac{M^2}{2EI} r d\varphi + \int_0^\alpha \frac{T^2}{2GK} r d\varphi$$

可求得懸臂梁端 i 沿 M_0 方向的彎曲角位移 δ_0 ，沿 T_0 方向的扭轉角位移 θ_0

和沿 R_0 方向的豎向位移 η_0 。設同一曲線梁內彎曲與扭轉剛度 EI 及 GK 為一常數，則：

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha M \frac{\partial M}{\partial M_0} r d\varphi + \frac{1}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial M_0} r d\varphi \\ \theta_0 &= \frac{\partial U}{\partial T_0} = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha M \frac{\partial M}{\partial T_0} r d\varphi + \frac{1}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial T_0} r d\varphi \\ \eta_0 &= \frac{\partial U}{\partial R_0} = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha M \frac{\partial M}{\partial R_0} r d\varphi + \frac{1}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial R_0} r d\varphi\end{aligned}\quad (3.83)$$

將式(3.82)中 M 和 T 的表達式代入式(3.83)的各方程式，經偏微分計算後得

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{r}{EI} \int_0^\alpha [M_0 \cos \varphi + T_0 \sin \varphi + R_0 r \sin \varphi - Pr \sin(\varphi - \beta) \cos \varphi] d\varphi \\ &\quad - \frac{r}{GK} \int_0^\alpha \{-M_0 \sin \varphi + T_0 \cos \varphi - R_0 r(1 - \cos \varphi) + Pr[1 - \cos(\varphi - \beta)]\} \sin \varphi d\varphi \\ \theta_0 &= \frac{r}{EI} \int_0^\alpha [M_0 \cos \varphi + R_0 r \sin \varphi - Pr \sin(\varphi - \beta)] \sin \varphi d\varphi \\ &\quad + \frac{r}{GK} \int_0^\alpha \{-M_0 \sin \varphi + T_0 \cos \varphi - R_0 r(1 - \cos \varphi) + Pr[1 - \cos(\varphi - \beta)]\} \cos \varphi d\varphi \\ \eta_0 &= \frac{r^2}{EI} \int_0^\alpha [M_0 \cos \varphi + T_0 \sin \varphi + R_0 r \sin \varphi - Pr \sin(\varphi - \beta)] \sin \varphi d\varphi \\ &\quad - \frac{r^2}{EI} \int_0^\alpha \{-M_0 \sin \varphi + T_0 \cos \varphi - R_0 r(1 - \cos \varphi) + Pr[1 - \cos(\varphi - \beta)]\} (1 - \cos \varphi) d\varphi\end{aligned}\quad (3.84)$$

在以上各式中 M_0 、 T_0 、 R_0 積分以 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \alpha$ ，但集中荷載 P 積分則是以 $\varphi = \beta$ 到 $\varphi = \alpha$ 。

式(3.84)經過積分運算後，最後可解得：

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{r}{4EI} \{M_0[(1+x)2\alpha + (1-x)2\alpha] + T_0(1-x)(1 - \cos 2\alpha) \\ &\quad + R_0 r[2\alpha(1+x) - (1-x)\sin 2\alpha - 4x\sin \alpha] \\ &\quad - 2Pr[(1+x)\beta' \cos \beta - (1-x)\sin \beta' \cos \alpha - 2x(\sin \alpha - \sin \beta)]\} \\ \eta_0 &= r\theta_0 - \frac{r^2}{GK} [M_0(\cos \alpha - 1) + T_0 \sin \alpha - R_0 r(\alpha - \sin \alpha) + Pr(\beta' - \sin \beta')]\end{aligned}\quad (3.85)$$

式中， $x = EI/GK$

以上求出的曲線懸臂梁在懸臂端的變形公式(3.85)可以用來分析曲線梁在集中荷載作用下的等效節點荷載。

圖 3.10a 所示為一曲線梁 $i-j$ ，圓心角為 2α ，在距曲梁中心點 C 為 β 弧度處作用一集中荷載 $2P$ 。兩端支承條件為彎曲與扭轉受到約束的固定端。

此時結構為三次超靜定體系，沿斷面 C 切開後具有三個多餘未知力，及彎矩 M_0 ，扭矩 T_0 和豎向剪力 R_0 ，如圖 3.10a 所示。

分析時，我們可以將集中荷載 $2P$ 分解為正、反對稱的兩組，將它們分別作用於曲線梁單元上求解，然後將計算結果疊加(如圖 3.10 所示)。

顯然，在對稱荷載作用下(見圖 3.10b)，在對稱軸上的斷面 C 處只有彎矩 M_0 而無扭矩 T_0 和豎向剪力 R_0 ，即 $T_0 = R_0 = 0$ 。同時該斷面上沿彎矩 M_0 作用方向上也不能產生撓角，即彎曲角位移 $\delta_0 = 0$ ，但可有扭轉角 θ_0 和豎向位移 η_0 。

將以上條件代入方程(3.85)中之第一式，得：

$$M_0 [(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha] \\ = 2Pr[(1-x)\sin \alpha \sin \beta' + 2x(\cos \beta - \cos \alpha) - (1+x)\beta' \sin \beta]$$

由此可直接解出一個多餘未知力 M_0 為：

$$M_0 = 2Pr \cdot \frac{(1-x)\sin \alpha \sin \beta' + 2x(\cos \beta - \cos \alpha) - (1+x)\beta' \sin \beta}{(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha} \quad (3.86)$$

在反對稱荷載作用下(圖 3.10c)，在對稱軸的斷面 C 處彎矩 $M_0 = 0$ ，而只有扭矩 T_0 和豎向剪力 R_0 。同時該斷面上不可能產生扭轉角和豎向位移，即 $\theta_0 = \eta_0 = 0$ ，但可有彎曲角位移 δ_0 。

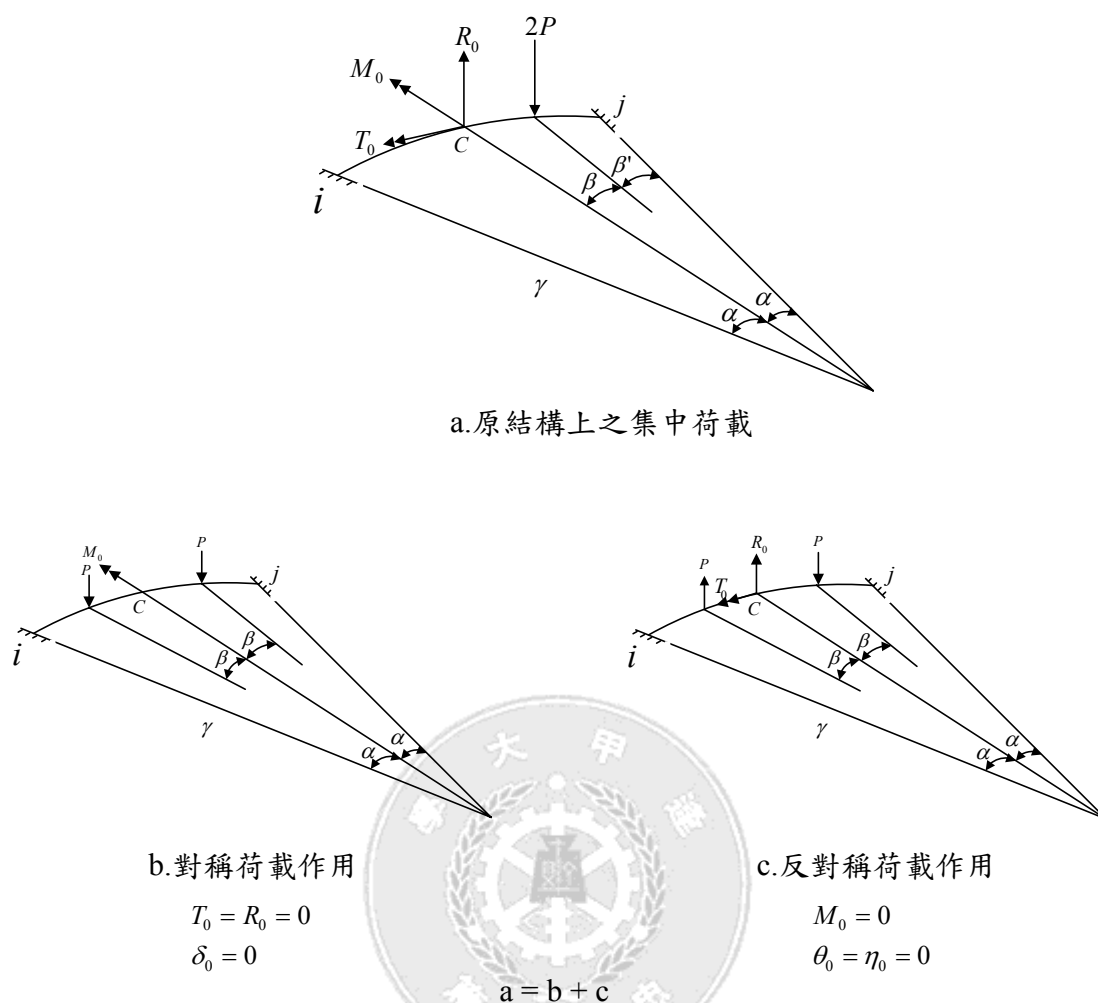


圖 3.10 集中荷載作用下等效節點力計算圖示

因此，通過方程(3.85)中第二、三式，代入上述條件後，我們得到一組聯立方程式用來求解另外兩個多餘未知力如下：

$$T_0 [(1+x)2\alpha - (1-x)\sin 2\alpha] + R_0 r [2\alpha(1+x) - (1-x)\sin 2\alpha - 4x\sin \alpha] - 2Pr[(1+x)\beta' \cos \beta - (1-x)\sin \beta' \cos \alpha - 2x(\sin \alpha - \sin \beta)] = 0 \quad (3.87)$$

$$T_0 \sin \alpha - R_0 r (\alpha - \sin \alpha) + Pr(\beta' - \sin \beta) = 0 \quad (3.88)$$

解得：

$$R_0 = P \left[1 + \frac{2(1+x)(\beta' \cos \beta \sin \alpha - \alpha \sin \beta' - \alpha\beta) + 4x \sin \alpha \sin \beta (1-x)\beta \sin 2\alpha}{(1+x)2\alpha^2 - (1-x)\alpha \sin 2\alpha - 2x(1 - \cos 2\alpha)} \right] \quad (3.89)$$

$$T_0 = -\frac{Pr}{\sin \alpha} [\beta' - \sin \beta' - \frac{R_0}{p}(\alpha - \sin \alpha)] \quad (3.90)$$

多餘未知力求得後，其餘反力、內力的計算便是靜定問題。例如曲線梁

i - j 兩固定端的作用力可以利用方程式(3.82)算出為在對稱荷載作用下：

$$\begin{aligned} M_j &= M_0 \cos \alpha - Pr \sin \beta' = M_i \\ T_j &= -M_0 \sin \alpha + Pr(1 - \cos \beta') = -T_i \\ R_j &= -P = -R_i \end{aligned} \quad (3.91)$$

在反對稱荷載作用下：

$$\begin{aligned} M_j &= T_0 \sin \alpha + R_0 r \sin \alpha - Pr \sin \beta' = -M_i \\ T_j &= T_0 \cos \alpha - R_0 r(1 - \cos \alpha) + Pr(1 - \cos \beta') = T_i \\ R_j &= R_0 - P = R_i \end{aligned} \quad (3.92)$$

疊加以上計算結果，最後得集中荷載 $2P$ 作用下曲梁單元固端力為：

節點 j ：

$$\begin{aligned} M_j &= M_0 \cos \alpha + T_0 \sin \alpha + R_0 r \sin \alpha - 2Pr \sin \beta' \\ T_j &= -M_0 \sin \alpha + T_0 \cos \alpha - R_0 r(1 - \cos \alpha) + 2Pr(1 - \cos \beta') \\ R_j &= R_0 - 2P \end{aligned} \quad (3.93)$$

節點 i ：

$$\begin{aligned} M_i &= M_0 \cos \alpha + T_0 \sin \alpha + R_0 r \sin \alpha \\ T_i &= M_0 \sin \alpha + T_0 \cos \alpha - R_0 r(1 - \cos \alpha) \\ R_i &= R_0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

由節點平衡條件可知：此時節點 j 和節點 i 的等效節點荷載為上述單元固端力，式(3.93)和式(3.94)的反號，即：

(等效節點荷載) = - (單元固端力)

當集中荷載作用在曲線梁單元的跨中時， $\beta = 0$ 、 $\beta' = \alpha$ ，將此代入式(3.86)、(3.89)、(3.90)，得多餘未知力：

$$M_0 = Pr \frac{(1-x)(1-\cos 2\alpha) - 4x(1-\cos \alpha)}{(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha} \quad (3.95)$$

$$T_0 = 0 \quad (3.96)$$

$$R_0 = 0 \quad (3.97)$$

將上述各值代入式(3.93)和式(3.94)，然後變號即為等效節點荷載。

2. 均佈荷載 p 的等效節點荷載

同理，對於圖 3.11 所示的曲線梁單元 $i-j$ ，將當 i 端約束去掉並代之以彎矩 M_0 、扭矩 T_0 和豎向力 R_0 後，在均佈荷載 p 作用下，曲梁中任一點距 i 端為 φ 處產生的內力為：

$$\begin{aligned} M &= M_0 \cos \varphi + T_0 \sin \varphi + R_0 r \sin \varphi - pr^2(1 - \cos \varphi) \\ T &= -M_0 \sin \varphi + T_0 \cos \varphi - R_0 r(1 - \cos \varphi) + pr^2(\varphi - \sin \varphi) \\ R &= R_0 - pr\varphi \end{aligned} \quad (3.98)$$

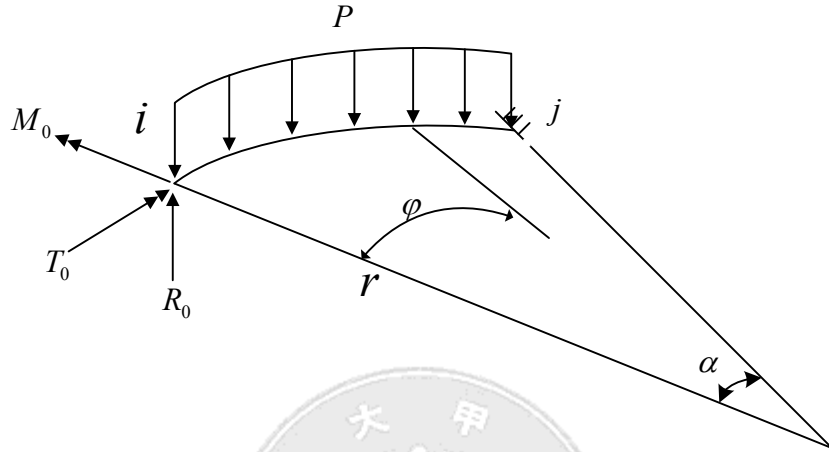


圖 3.11 曲線懸壁梁在均佈荷載 P 作用下的圖示

根據卡氏第二定理， i 端沿 M_0 方向的彎曲角位移 δ_0 為：

$$\delta_0 = \frac{r}{EI} \int_0^\alpha M \frac{\partial M}{\partial M_0} d\varphi + \frac{r}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial M_0} d\varphi$$

將式(3.98)中彎矩 M 和扭矩 T 的表達式代入上式，經對 M_0 微分後得：

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{r}{EI} \int_0^\alpha [M_0 \cos \varphi + T_0 \sin \varphi + R_0 r \sin \varphi - pr^2(1 - \cos \varphi)] \cos \varphi d\varphi \\ &\quad - \frac{r}{GK} \int_0^\alpha [-M_0 \sin \varphi + T_0 \cos \varphi - R_0 r(1 - \cos \varphi) + pr^2(\varphi - \sin \varphi)] \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

經過積分運算後，最後解得：

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{r}{4EI} \{ M_0 [(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha] + T_0 (1-x)(1 - \cos 2\alpha) \\ &\quad + R_0 r [(1-x)(1 - \cos 2\alpha) + 4x(1 - \cos x)] \\ &\quad + pr^2 [(1+x)(2\alpha - 4\sin \alpha) + (1-x)\sin 2\alpha + 4x\alpha \cos \alpha] \} \end{aligned} \quad (3.99)$$

下面我們應用式(3.99)分析兩端固定曲線梁單元 $i-j$ (見圖 3.12)在均佈荷載作用下的等效節點荷載。

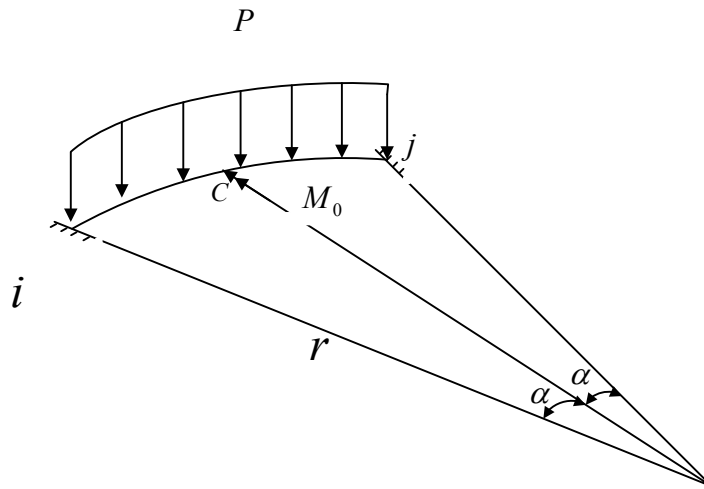


圖 3.12 兩端固定曲線梁在均佈荷載 P 作用下的計算圖示

對於圖 3.12 所示的對稱結構，由於在對稱均佈荷載作用下只產生正對稱的內力和位移，故可知位移對稱軸的跨中斷面 C 處只有彎矩 M_0 而無扭矩 T_0 和豎向剪力 R_0 ，同時該斷面上將不可能產生彎曲角位移 δ_0 但有扭轉角位移 θ_0 和豎向位移 η_0 。

將這些條件帶入式(3.99)同時注意到圖 3.12 所示的曲線梁的圓心角為 2α ，故其上的荷載相當於兩個圖 3.11 所示曲線懸臂梁(圓心角為 α)上的荷載，故有：

$$M_0[(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha] + 2pr^2[(1+x)(2\alpha - 4\sin \alpha) + (1-x)\sin 2\alpha + 4x\cos \alpha] = 0$$

上式經整理，最後解得：

$$\begin{aligned} M_0 &= -2pr^2 \left[1 + \frac{4x\alpha \cos \alpha - 4(1+x)\sin \alpha}{(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha} \right] \\ T_0 &= 0 \\ R_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

多餘未知力 M_0 、 T_0 、 R_0 求出後，曲線梁單元 $i-j$ 兩端節點的固端力即可按靜定問題計算。根據式(3.98)同時考慮到對稱條件，並注意到二個圖 3.11 所示曲線懸臂梁相當於圖 3.12 所示兩端固定的曲線梁(沿跨中 c 點切開)，故得：

$$\begin{aligned} M_j &= M_0 \cos \alpha - 2pr^2(1 - \cos \alpha) \\ &= -2pr^2 \left\{ 1 + \frac{4\cos \alpha [x\alpha \cos \alpha - (1+x)\sin \alpha]}{(1+x)2\alpha + (1-x)\sin 2\alpha} \right\} = M_i \\ T_j &= -M_0 \sin \alpha - 2pr^2(\alpha - \sin \alpha) \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$= 2pr^2 \left\{ \alpha + \frac{4 \sin \alpha [x \alpha \cos \alpha - (1+x) \sin \alpha]}{(1+x)2\alpha + (1-x) \sin 2\alpha} \right\} = T_i$$

$$R_j = -2pr\alpha = R_i$$

等效節點荷載為上式單元固端力的反號。

除了上述作用在各曲線梁單元內部的荷載而產生的等效節點荷載 P_E 外，還有原來直接作用在節點上的荷載 P_J ，則節點荷載總矢量為：

$$P = P_E + P_J \quad (3.102)$$

在 P 中刪去與受有支承約束位移分量相應的分量，便可得式(3.72)中的 P_F 。

應當指出，由於節點平衡方程式是對結構座標系建立的，因此單元 e 的等效節點荷載 P_E^e 也必須採用結構座標系下的表示式。由曲線梁單元的座標轉換矩陣 R 可得結構座標系下 e 號單元等效節點荷載 P_S^e 為：

$$P_S^e = R^T P_E^e$$

現梁單元的最後桿端力將是荷載總矢量下的桿端力與單元固端力之和，即：

$$F_M^e = R K^e \Delta^e + F_F^e$$

式中， F_M^e 表示局部座標系中的桿端力， $K^e \Delta^e$ 表示結構座標系中的桿端力， F_F^e 為曲線梁單元在其局部座標系中的固端力。這些固端力在集中荷載作用下由式(3.93)和式(3.94)得知，在均佈荷載作用下則可由式(3.101)計算得知。

第四章 橫隔梁勁度與間距的探討

4.1 前言

對梁式鋼橋(Girder Type Steel Bridge)而言，為了使整個上部結構具有橫向傳遞荷重之能力，相鄰大梁間必須設置橫隔梁(Diaphragm, Cross Frames, Lateral Bracing)相連繫。對絕大部分之梁式鋼橋而言，我們可利用活載重橫向傳遞之觀念，將複雜之整體上部結構設計簡化成以單根大梁設計之。然而，針對平面曲線型鋼橋之上部結構而言，其活載重之橫向傳遞觀念雖與其他類型之梁式橋無異，但是因為曲線橋梁平面上每根大梁之曲率半徑並不同，其對曲線橋梁因扭曲與偏心載重所造成之影響無法僅以單根大梁估算之。因此，平面曲線鋼橋之上部結構分析與設計必須分別對每根大梁之特性作不同之考量。由此可知，平面曲線鋼橋之分析必須將整個上部結構納入考量，故其橫隔梁系統之重要性比直線箱型鋼橋之橫隔梁重要許多。以下我們將針對橫隔梁系統以及橫隔梁對斷面之畸變翹曲正應力之影響與其勁度與間距作一介紹與探討。

4.2 橫隔梁系統

曲線箱型鋼橋之橫隔梁系統可分為以下兩大部分，即：

- ①內橫隔梁系統，佈設於箱型鋼梁之內部。
- ②外橫隔梁系統，佈設於箱型鋼梁之外，兩相鄰箱型鋼梁之間。

4.2.1 內橫隔梁之型式

內橫隔梁分佈於箱型鋼梁長度方向之內部與支承處，具有穩定箱型鋼梁之作用，其主要功用在於避免箱型鋼梁之斷面畸變(Sectional Distortion)，如果箱型鋼梁之內部有足夠之內橫隔梁，且具足夠之畸變勁度(Distortional Rigidity)與扭曲勁度(Torsional Rigidity)，便可確保箱型鋼梁在某一長度以上時，箱型鋼梁可維持其斷面形狀在承受外力時，具備梁結構之行為(Beam-Structure Behavior)。用於曲線箱型鋼橋之內橫隔梁佈置種類如圖 4.1 與圖 4.2 所示。

圖 4.1 所示為典型箱型鋼梁之內橫隔梁佈置，通常為求分攤外力之均勻，內橫隔梁通常與箱型鋼梁之長度方向垂直佈置。

隨著箱型鋼梁位置之不同，內橫隔梁之型式亦稍有差異，如圖 4.2 所示，支承處由於反力甚大，其內橫隔梁必須以鋼版為之，在負彎矩區亦必須與縱向加勁材共同佈設。

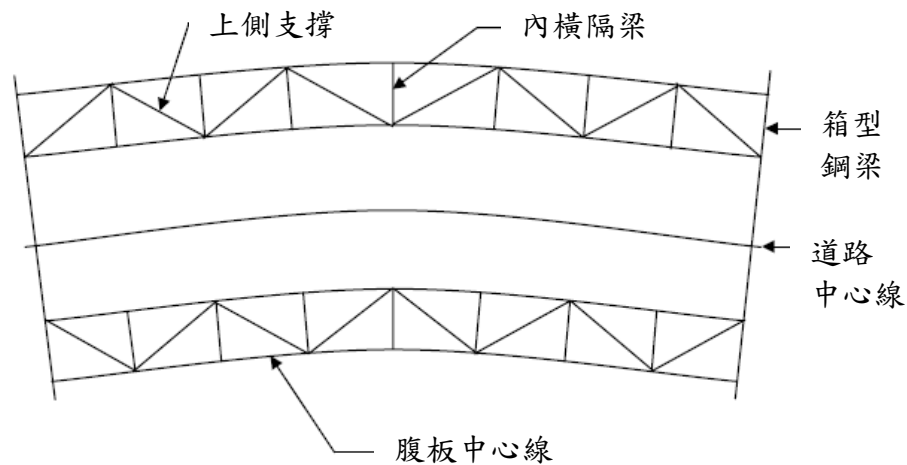
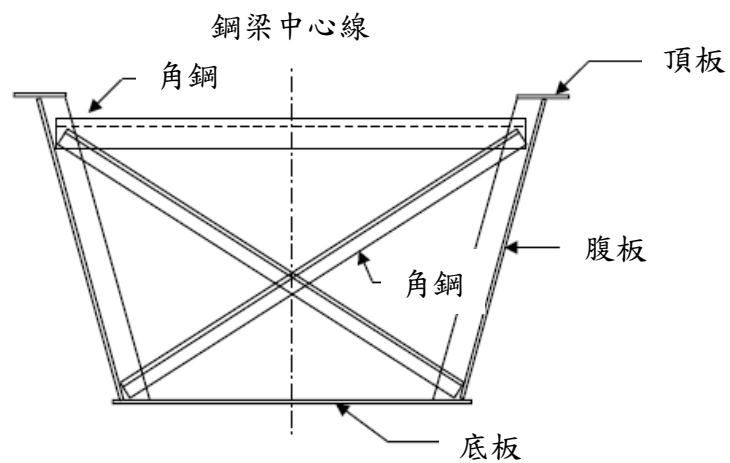
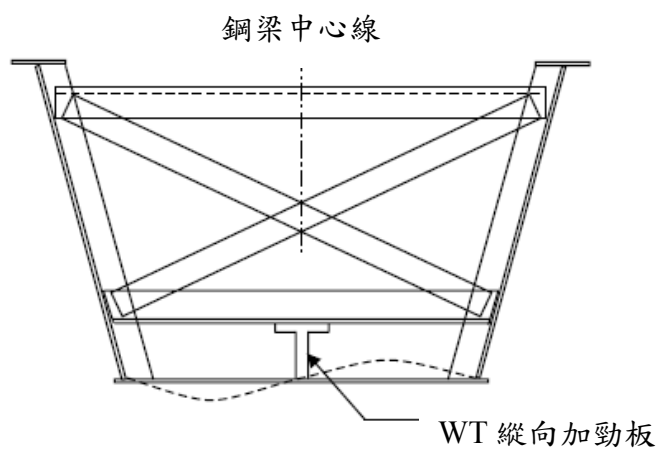


圖 4.1 典型箱型鋼橋之內橫隔梁佈置(平面圖)

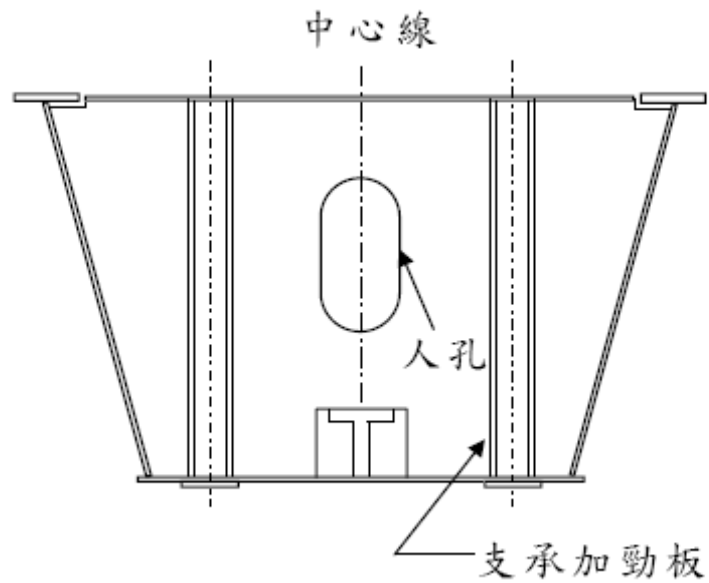


(a)正彎矩區

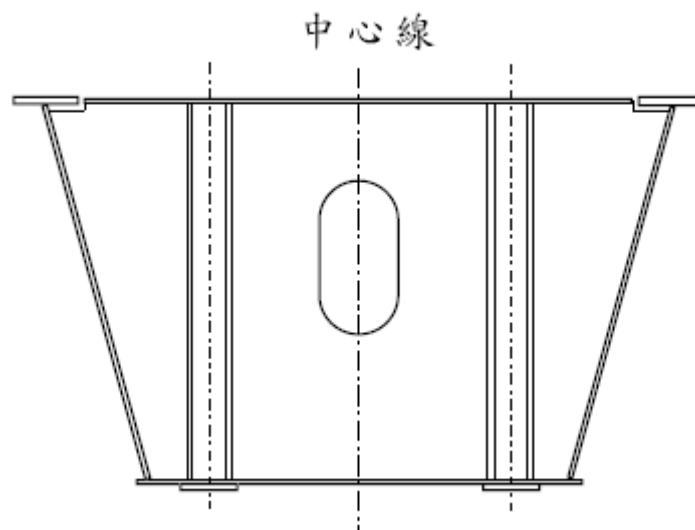


(b)負彎矩區

圖 4.2 典型箱型鋼橋之內橫隔梁(一)



(a) 橋墩處



(b) 橋台處

圖 4.2 典型箱型鋼橋之內橫隔梁(二)

內橫隔梁之型式主要有三大類，即：

①橫向剛架式內橫隔梁(Cross-Frame Type Internal Diaphragms)，如圖 4.3 所示即為典型之例。橫向剛架之型式並無固定規則可循，通常有”X”型與”K”型兩大類。



圖 4.3 典型之橫向剛架式內橫隔梁系統

②隔板式內橫隔梁(Plate Type Internal Diaphragm)，如圖 4.4 與圖 4.5 所示均為典型之橫隔板式內橫隔梁，工程界亦有人以隔板簡稱之。惟我們亦應注意，隔板式之內橫隔梁不可完全封閉，必須預留人孔(Man Hole)或檢測孔(Inspection Hole)以利日後完工後檢測人員仍可進入其內進行檢測與養護工作。



圖 4.4 典型之隔板式內隔梁



圖 4.5 用於支承處之固定板式端隔梁(預留人孔、檢測孔)

③固定板式內橫隔梁(Fixed-Plate Type Internal Diaphragm)，位於箱型鋼梁最端部(通常指橋台支承處)之內橫隔梁亦可稱內端隔梁(Internal End Diaphragm)，其主要目的在於增強其抗剪能力與承受巨大之支承反力，圖 4.6 所示即為典型之例。為了避免固定隔板之剪力挫屈，端隔板必須輔以支承加勁板。

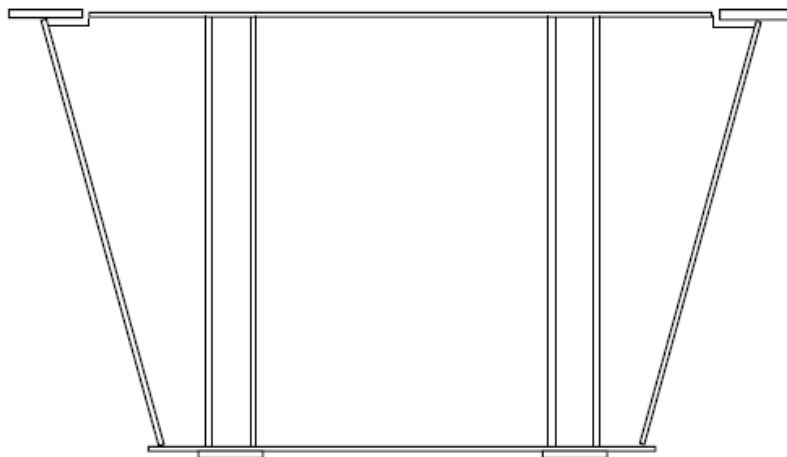


圖 4.6 典型之固定板式端隔梁(封閉式)

以下四種常用於箱型鋼橋之不同形式之內橫隔梁(如圖 4.7 所示)勁度 K_d 可表示成：

(1) 對 x 型桁架(x-Type Truss , Cross Frame)之內橫隔梁

$$K_d = \frac{2EA_b b^2 h^2}{l_b^3} \quad (4.1)$$

(2) 對於 v 型桁架(v-Type Truss)之內橫隔梁

$$K_d = \frac{EA_b b^2 h^2}{2l_b^3} \quad (4.2)$$

(3) 對於版狀(Plate Type)之內橫隔梁

$$K_d = Gt_d b h \quad (4.3)$$

(4) 對於剛架型式(Frame Type)之內橫隔梁

$$K_d = \frac{24EI_\omega}{\alpha_0 h} \quad (4.4)$$

其中 A_b = 為桁架之斷面面積

l_b = 為桁架之長度

t_d = 為版厚

$$\alpha_0 = 1 + \frac{2b/h + 3(I_u + I_l)/I_\omega}{(I_u + I_l)/I_\omega + (6h/b)(I_u I_l / I_\omega^2)} = \text{斷面參數}$$

$$I_u = \frac{t_u^3}{12(1-\nu^2)} = \text{頂鈹之慣性矩}$$

$$I_\omega = \frac{t_\omega^3}{12(1-\nu^2)} = \text{腹鈹之慣性矩}$$

$$I_l = \frac{t_l^3}{12(1-\nu^2)} = \text{底鈹之慣性矩}$$

t_u 、 t_ω 、 t_l 分別為頂鈹、腹鈹、底鈹之厚度

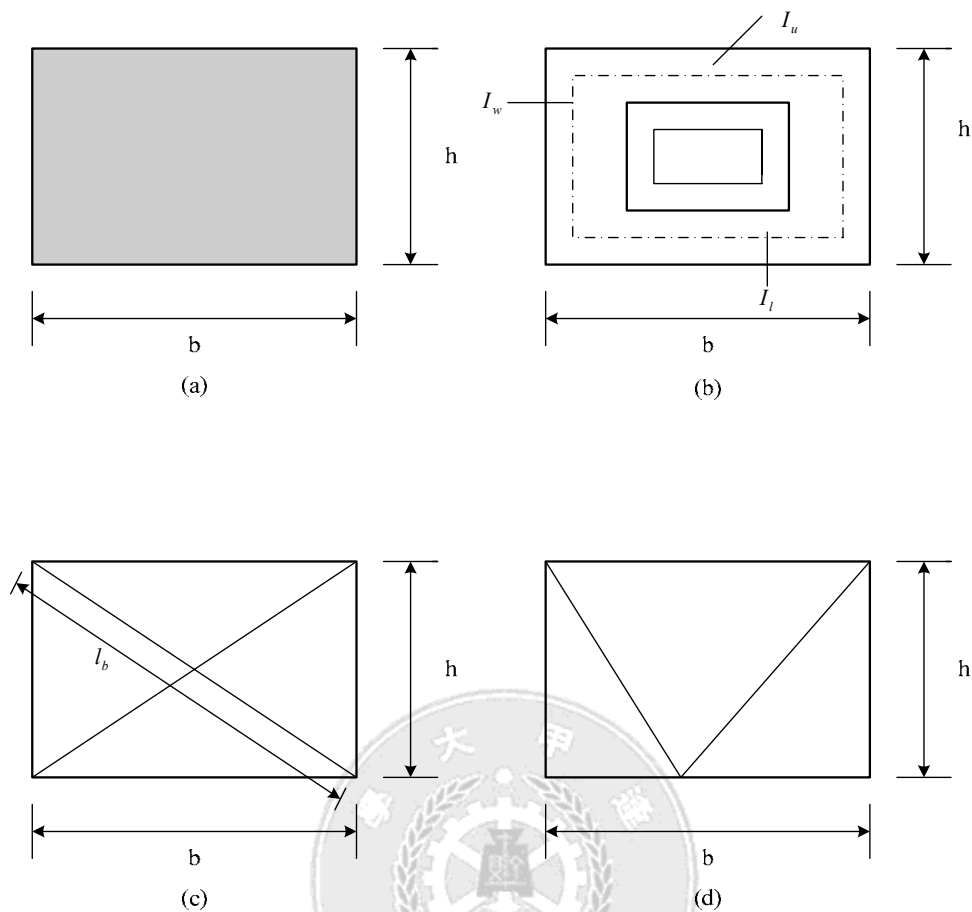


圖 4.7 內橫隔梁之型式：(a)鋼板式 (b)剛架型式 (c)X 型 (d)V 型

4.2.2 外橫隔梁之型式

外橫隔梁裝設於兩個獨立箱型鋼梁之間，使外在荷重能均勻分佈於整個橋梁上部結構。除非橋梁中心線與支承中心線具有斜交角(Skewed Angle)，外橫隔梁一般均與大梁成垂直佈置。外橫隔梁之主要功用在於使橋梁之上部結構能更具整體性，能均勻地橫向傳遞荷重，並使上部結構之靜載重與活荷重能更穩定地傳至支承乃至下部結構之基礎。

外橫隔梁之剛性或勁度通常比大梁小許多，其主要承受之荷重為彎矩造成之垂直剪力，其次才是承載扭曲荷重。

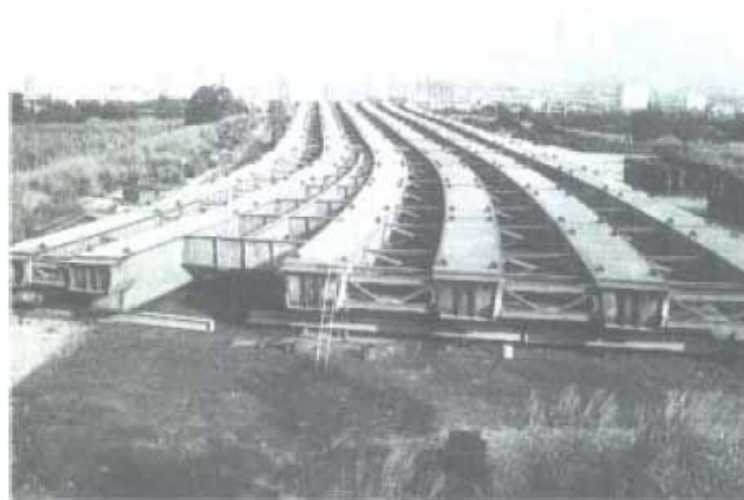
外橫隔梁依其所在位置與結構功能共可分為四種，即：

- ①位於墩台支承上方之外端隔梁(External End Diaphragm)。
- ②位於橋墩上端之外橫隔梁。
- ③為於跨距間，但受到正彎矩作用(上部受壓，下部受拉)。
- ④為於跨距間，但受到負彎矩作用(上部受拉，下部受壓)。

這四類不同位置之外橫隔梁在設計時即需考量其特有之結構行為，以免造成後續之困擾。

外橫隔梁乃是連接相鄰兩大梁之結構，其主要功用在於使作用於橋梁上部結構之荷重能均勻地橫向(垂直於橋梁長度之方向)傳遞。從設計觀點言之，依其所在位置之不同與設計者之偏好，常用於箱型鋼橋之外橫隔梁有下列數種型式，即：

①橫向剛架(Cross-Frame)或橫向支撐(Cross Bracing)，如圖 4.8 所示即為典型之 K 型與 X 型橫向剛架式外橫隔梁(K-Type and X-Type Cross-Frame External Diaphragms)。



(a)K型



(b)X型

圖4.8 典型桁架式外橫隔梁

②熱軋型鋼外橫隔梁(Rolled Cross Beam), 例如 I 型鋼、槽鋼(Channel)...等, 如圖 4.9 所示即為典型之例。



圖4.9典型熱軋鋼梁式之外橫隔梁

在某些情況之下, 箱型鋼橋之外橫隔梁系統亦可以較小尺寸且較密集之型鋼輔以鋼床板為之, 或在外橫隔梁之間再加上小縱梁(Stringer), 例如圖 4.10 所示即為典型之例。同一座箱型鋼橋之外橫隔梁亦可多種不同型式同時採用, 此時我們便可以”混合式外橫隔梁”稱之。



圖4.10 典型之隔梁式或格床式之外橫隔梁

一般而言, 採用何種型式之外橫隔梁並無一定準則可循, 但我們亦必須注意正、負彎矩區外橫隔梁結構行為之差異性, 尤其是外橫隔梁受壓構件之處理更宜謹慎, 宜避免其受到挫屈(Buckling)之破壞。

另一方面，橋梁遇有加掛管線時亦有可能置於外橫隔梁之處，此時外橫隔梁可能必須鑽孔或剪裁，此種做法並非不可接受，然我們必須將鑽孔部份之力學行為影響必須列入考量，圖 4.11 所示即為典型之例。



圖4.11 利用外橫隔梁加掛管線

為了提高箱型鋼梁之美觀性與長跨距鋼橋之經濟性，箱型鋼梁亦可能於負彎矩區加大梁深，例如圖 4.12，此種狀況下之外橫隔梁尺寸將較具變化性，規劃設計時亦較複雜。

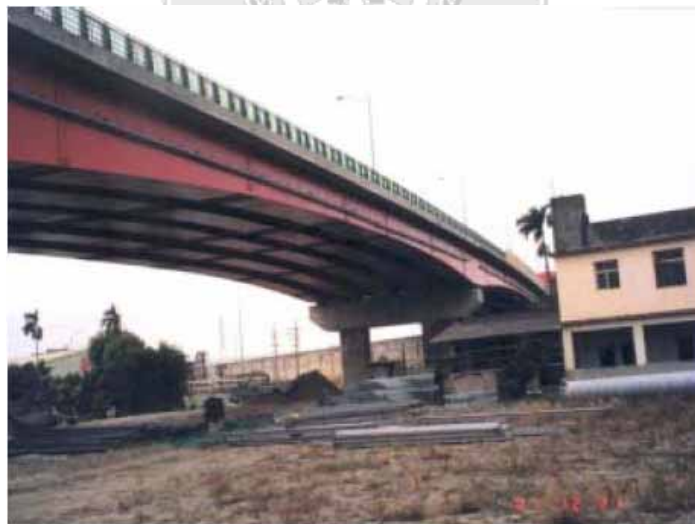


圖4.12 負彎矩區之加深箱型鋼梁

4.3 曲線薄壁箱型之畸變翹曲微分方程式

曲線薄壁箱型梁之畸變翹曲微分方程式可由最小總勢能源里(Principle of Minimum Total Potential Energy)求得，如定義 π 為系統之最小總勢能，則：

$$\pi = U - W \quad (4.5)$$

其中， U 表系統總應變能，包含由畸變正向應變(Distortional Normal Strain)所產生之應變能與畸變翹曲剪應變(Distortional Warping Shear Strain)所產生之應變能；而 W 表外功，乃是由橫向彎矩與扭曲所造成；經由變積分之觀念，即可求得曲線薄壁箱型梁之畸變翹曲微分方程式：

$$\frac{d^2 M_{D\omega}}{dS^2} + K_{D\omega} \theta = \frac{m_t}{2} + \psi \frac{M_x}{R} \quad (4.6)$$

其中 $M_{D\omega}$ 表由畸變引起之雙彎矩(Bimoment)； $K_{D\omega}$ 表箱型斷面抵抗畸變之勁度； θ 表示箱型斷面因剪力而造成之角變形(Angular Distorsion)。

若 M_x 值為已知，則可由(4.6)式求得 $M_{D\omega}$ ，當 $M_{D\omega}$ 求得後，可經由下式求得畸變翹曲正應力：

$$\sigma_{D\omega} = \frac{M_{D\omega}}{I_{D\omega}} \omega_D \quad (4.7)$$

其中 $I_{D\omega}$ 表畸變翹曲常數(Distortional Warping Constant)； ω_D 表示畸變翹曲函數(Distortional Warping Function)。

4.4 畸變翹曲正應力 $\sigma_{D\omega}$ 與彎矩正應力 σ_b 比值之近似公式

當 $K_d = \infty$ 時，由各項參數對畸變翹曲正應力之影響，可得知 $\frac{\sigma_{D\omega}}{\sigma_b}$ 之近似公式：

1. 對均佈荷重而言：

$$\frac{\sigma_{D\omega}}{\sigma_b} = \left(0.8 + 0.32 \frac{L}{B} \right) \left(\frac{L_d}{L} \right)^2 \phi \quad (4.8)$$

2. 對線荷重而言：

$$\frac{\sigma_{D\omega}}{\sigma_b} = \left(0.8 + 0.32 \phi \frac{L}{B} \right) \left(\frac{L_d}{L} \right)^2 \quad (4.9)$$

3. 對集中荷重而言：

$$\frac{\sigma_{D\omega}}{\sigma_b} = \frac{L_d}{L} \quad (4.10)$$

現將針對橫隔梁間距對畸變翹曲正應力之影響作一探討，首先定義符號： K_d 表橫隔梁勁度； L_d 表橫隔梁之間距； L 表梁之跨長，則在假設 $\phi = 0.3$

和 $K_d = \infty$ 之情況下，橫隔梁間距 L_d/L 分別設為 $1/20$ ， $1/10$ ， $1/8$ ， $1/5$ 和 $1/4$ ，其所對應之 $\frac{\sigma_{Dw}}{\sigma_b}$ 的變化如圖 4.13(a)、(b)、(c)所示。圖 4.13 中顯示除了集中荷重所造成的是線性效應外，線荷重與均佈荷重所造成的均為非線性效應。(斷面資料詳見表 4.1)

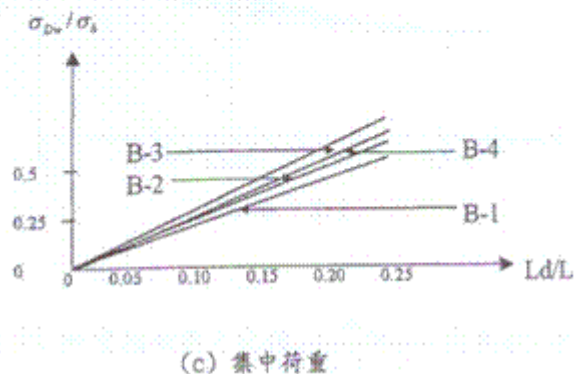
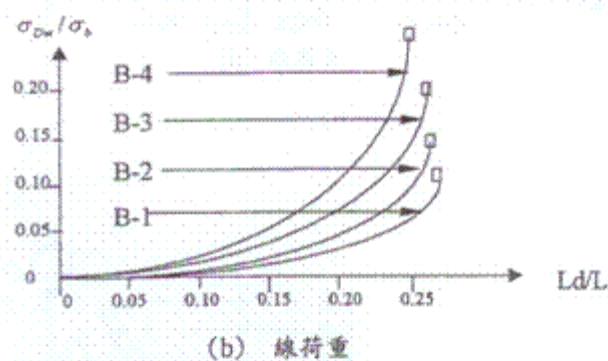
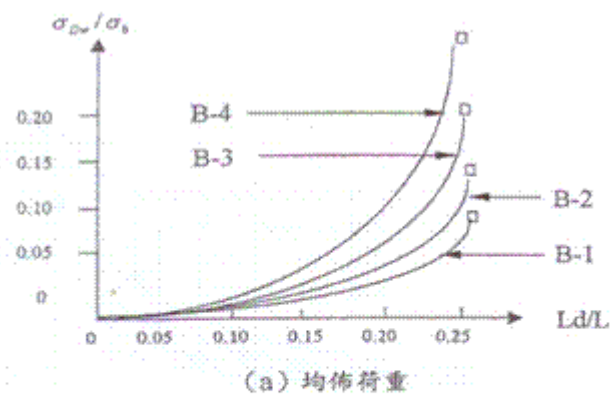


圖4.13 正應力比值 σ_{Dw}/σ_b 和橫隔梁間距 L_d/L 之相對關係

4.5 橫隔梁勁度對畸變翹曲正應力之影響

公式(4.8)、(4.9)、(4.10)乃是假設內橫隔梁之勁度為無限大(即 $K_d = \infty$)但實際上由於內橫隔梁之勁度並未如想像中一般具有完全地剛度(即實際上 K_d 不為無限大),因此在分析畸變翹曲正應力時,公式(4.8)、(4.9)、(4.10)應做適當修正。

首先定義一勁度參數 γ :

$$\gamma = \frac{K_d}{K_{D\omega} L_d} \quad (4.11)$$

而應力比值 $\frac{\sigma_{D\omega}}{(\sigma_{D\omega})_{K_d=\infty}|_{\max}}$ 與 γ 之關係可如圖 4.14 所示,當勁度參數 $\gamma \geq 1500$ 時,由圖 4.14(a)可知,當線荷重沿著橋軸方向作用時,應力比值將趨近於 1.1,而由圖 4.14(b)知,在集中荷重作用時,應力比值則趨近於 1.2,根據圖 4.14 之關係,亦即在考量橫隔梁之勁度下,公式(4.8)、(4.9)、(4.10)可修正為:

1. 對靜載重 W_d 而言:

$$\sigma_{D\omega} = 1.1 \left(0.8 + 0.32 \frac{L}{B} \right) \left(\frac{W_d L_d^2}{8W_l} \right) \phi \quad (4.12)$$

其中 W_l 表箱型梁底板之斷面模數

2. 對均佈活載重 p_L 而言:

$$\sigma_{D\omega} = 1.1 \left(0.8 + 0.32 \phi \frac{L}{B} \right) \left(\frac{p_L b L_d}{16W_l} \right) \quad (4.13)$$

其中 b 表路面淨寬

3. 對集中活載重 P_L 而言:

$$\sigma_{D\omega} = 1.2 \left(\frac{P_L L_d}{4W_l} \right) \quad (4.14)$$

對薄壁箱型梁而言,由於無法完全利用提高內橫隔梁之勁度來大幅減少斷面上之畸變翹曲正應力,因此尚須配合適當的內橫隔梁間距以便控制畸變翹曲正應力在適當的範圍之內。

現考量作用在梁上之荷重為活載重 p_L 與 P_L 之組合,依據文獻【42】可設定 $p_L = 0.35 \text{ ft/m}^2$ 及 $P_L = 0.5 \text{ ft/m}$,且此組合載重將只作用於橋面版之單側,如圖 4.15 所示,再令 $B = 2m$ (箱型梁底板之實際最小寬度)及 $\frac{\sigma_{D\omega}}{\sigma_b} \leq 0.05$ (根據文

獻【42, 43】)之情況下，將(4.13)式及(4.14)式相疊加得：

$$\frac{\sigma_{D\omega}}{\sigma_b} = \frac{0.33L_d^2[1.8 + 0.32\phi(L/B)] + 26.4L_d}{0.3L^2 + 11L} \leq 0.05 \quad (4.15)$$

對直線薄壁箱型結構而言，需將 $\phi = 0$ 代入(4.15)式並求解之，即可得出對應的內橫隔梁間距：

$$\begin{aligned} L_d &< 6^m & \text{for} & & L < 60^m \\ L_d &\leq 0.14L - 2.4^m & \text{for} & & 60^m \leq L < 160^m \\ L_d &= 20^m & \text{for} & & L \geq 160^m \end{aligned}$$

對曲線薄壁箱型梁而言，則須考慮折減因數(Reduction Factor) γ_d ，因此折減係數必須由跨長與曲梁中心角共同決定【42, 44】，經由迴歸分析(Regression Analysis)可得出折減因數之表示式：

$$\begin{aligned} \gamma_d &= 1.0 & \text{for} & & L < 60^m \\ \gamma_d &= 1 - \frac{\sqrt{\phi}(L - 60)}{100\sqrt{2}} & \text{for} & & 60^m \leq L \leq 120^m \end{aligned}$$

而曲線薄壁箱型梁所對應之內橫隔梁間距可由下式表達之：

$$\begin{aligned} L_d &< 6^m & \text{for} & & L \leq 60^m \\ L_d &< (0.14L - 2.4^m) \left[1 - \frac{\sqrt{\phi}(L - 60)}{100\sqrt{2}} \right] & \text{for} & & 60^m < L \leq 160^m \\ L_d &= 20^m \left[1 - \frac{\sqrt{\phi}(L - 60)}{100\sqrt{2}} \right] & \text{for} & & 160^m < L \leq 200^m \\ L_d &= 20^m & \text{for} & & L > 200^m \end{aligned}$$

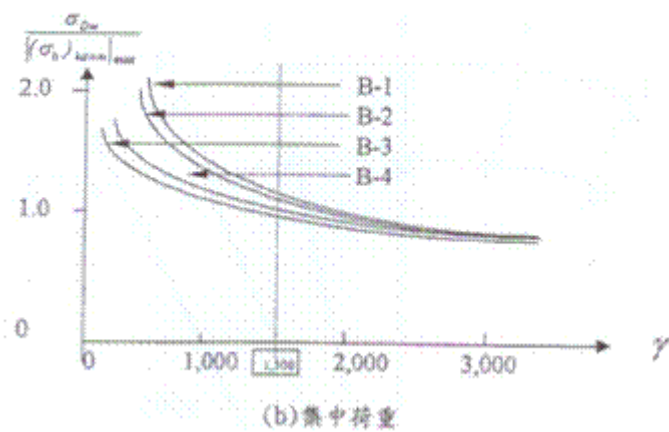
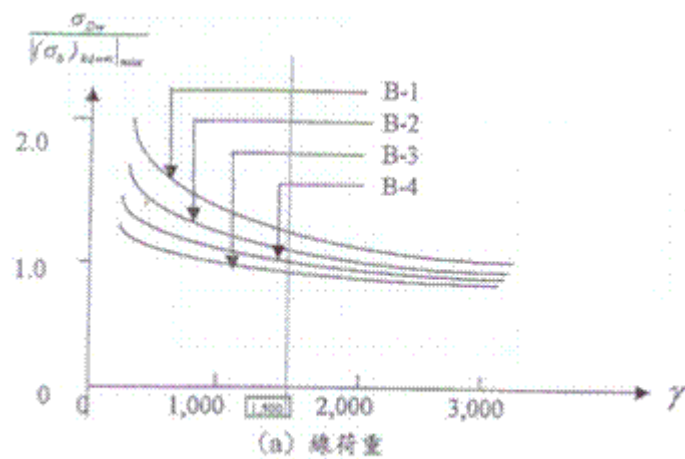


圖 4.14 畸變翹曲應力比值 $\frac{\sigma_{Dw}}{(\sigma_b)_{kd=\infty}|_{max}}$ 與參數 γ 之關係

第五章 實例分析

5.1 前言

為了探討內橫隔梁設計對箱型鋼梁結構內力橫向分配行為之影響，吾人將就下列諸項重點進行研究，即：

- ①曲率半徑與箱型鋼梁斷面畸變之相互關係
- ②內橫隔梁數目對箱型鋼梁內力橫向分配之影響
- ③內橫隔梁勁度對箱型鋼梁內力橫向分配之影響
- ④橫向加勁板對箱型鋼梁斷面畸變之影響
- ⑤端隔梁邊界條件之影響

本章中所用實例之目的乃是用來檢視箱型鋼梁之內力橫向分配行為，同時與等值彈性基礎梁(Equivalent Beam on Elastic Foundation, EBEF)系統所得出之結果相互比較。至於等值彈性基礎梁分析之理論基礎與應用可參考文獻【1,14,47-50】，在此不擬贅述。

5.2 模式正確性驗證

5.2.1 分析範例一

第一個範例取自於Cook與Young【51】所著書籍中之例題，其所考慮的是無限長之Winkler基礎梁。如圖5.1所示，兩個18kN之集中載重，相距2.6公尺，其彈性基礎系統已知之性質為：

$$EI_y = 441 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$k = 0.25 \text{ N/mm}^2 \quad k = \text{彈性基礎梁模數}$$

$$\lambda = 6.136 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1} \quad \lambda = \text{彈性基礎梁之勁度參數}$$

此範例在Cook與Young【51】所著書籍中原用傳統之彈性基礎梁微分方程式(Closed-Form Solution)求解。為了確認傳統基礎梁微分方程式，將忽略剪力效應，因此，假設箱型鋼梁之剪力係數(S_c)為零，且剪力勁度矩陣 $\{K_s\}$ 為零矩陣。

在本範例中，吾人假設彈性基礎梁邊緣與集中載重之距離(ℓ_e)為100公尺，將本研究之分析方法所得之結果與EBEF、Cook與Young【51】之結果相比較。在梁中，吾人用十個EBEF元素來模擬 ℓ_e 部份，而在A點與C點之間則分別用二個、四個、六個與八個EBEF元素。此二法在A點與C點之間所得之撓曲與彎矩曲線分別繪於圖5.2與圖5.3中。由此二圖中，吾人亦可看見三種

不同分析方法之結果非常相近。

5.2.2 分析範例二

第二個範例是分析一個受集中扭曲載重之連續箱型鋼梁，將連續箱型鋼梁模擬成一個三孔連續之彈性基礎梁系統，如圖5.4所示。箱型鋼梁斷面為50in高×40in寬之矩形開口式，兩個上翼板寬為12in，厚度為1in，下翼板寬為40in，厚度為0.5in，腹板高為50in，厚度為0.5in。彎矩之慣性矩 $I_y = 6896.6in^4$ ， k 值為 2.0 kip/in^2 ， λ 值為 $1.0 \times 10^{-2}in^{-1}$ 。

第一個內支承因不同之 $\lambda \ell_d$ 所造成之反力影響係數(Reaction Influence Coefficient)列在表5.1中，表中可以看出本研所得之結果在較短之無側撐長度($\ell_d = 10, 100$ 與 200 英吋)時，與EBEF系統及Wright等人【50】所得之結果非常接近。不過，對於較長之無側撐長度($\ell_d = 400$ 英吋)時，Wright等人【50】所得之結果均低於本研所得之結果，其為Wright等人【50】使用三角函數來解析彈性基礎梁問題之故。當集中扭曲載重移動到 $x/\ell_d = 0.8$ 時，第一個內支承將會發生上抬之現象。

由圖5.4可以清楚看出，當 $\lambda \ell_d$ 值減少時，第一個內支承之反力(作用在箱型鋼梁內側撐之力)會趨近於一固定值，其顯示當相鄰兩內橫隔梁之間距小於某一數值後，作用在箱型鋼梁內橫隔梁之力為一固定值。

5.3 設計準則之研究

表5.2所示為吾人在本節中從事數值分析所採用之箱型鋼梁斷面性質。

5.3.1 曲率半徑與箱型鋼梁斷面畸變之相互關係

曲率是促使曲線箱型鋼橋結構行為變得異常複雜的原因之一，因此，吾人將就曲率半徑對曲線箱型鋼梁畸變翹曲正向應力之影響略作探討。如圖5.5所示，曲線箱型鋼梁之弧長為100英呎，當曲率變大時，則縱向彎矩正向應力與畸變翹曲正向應力皆有減小之趨向，惟畸變翹曲正向應力之折減速度比縱向彎矩正向應力快速許多，此現象與橋梁工程實務界之傳統認知無異，亦即針對曲率半徑愈小之箱型鋼梁而言，吾人對其斷面之畸變現象必須更加注意。吾人在前述章節亦已述及，欲克服曲線箱型鋼梁斷面之畸變現象，則內橫隔梁之設計與佈置須謹慎為之。

畸變橫向彎矩應力對箱型鋼梁之應力分析而言，其重要性比畸變翹曲正向應力大許多。圖5.6所示為箱型鋼梁斷面畸變橫向彎矩應力與曲率半徑之變化關係示意圖。由此圖中，吾人可以清楚看出，與畸變翹曲正向應力相同，當曲率半徑愈小(即曲率愈大)時，則畸變橫向彎矩產生之現象愈明顯。

5.3.2 內橫隔梁數目對箱型鋼梁畸變之影響

在本節中，吾人將就曲線箱型鋼梁中內橫隔梁數目對鋼梁結構行為之影響作一探討。探討之箱型鋼梁長100英尺，在其跨徑中央受到100k-ft之集中扭曲載重。箱型鋼梁中所假設之內橫隔梁數目由0增至8，此意味著彈性基礎梁之數目由1增至9。數值分析之結果如圖5.7所示。由此圖中，吾人可以清楚看出，在具有相同數目之內橫隔梁之前提下，曲率半徑愈小，則畸變現象便愈明顯，此結果與前述相同。當內橫隔梁數目愈多時，則吾人便可明顯看出，畸變翹曲正向應力之折減甚鉅，由此吾人便可證實，內橫隔梁具有減低畸變翹曲正向應力之功用。

內橫隔梁之數目直接影響到箱型鋼梁之未側撐長度(Unbraced Length)，由此吾人亦可確知，未側撐長度與由鋼梁斷面畸變所產生之應力變化有直接關係。綜合前述與圖5.7，吾人亦可確知未側撐長度對縱向彎矩正向應力之影響比畸變翹曲正向應力小許多。亦即增加內橫隔梁並無減小縱向彎矩之作用。

5.3.3 內橫隔梁勁度對箱型鋼梁畸變之影響

由等值彈性基礎梁之原理可知，箱型鋼梁之內橫隔梁相似於等值彈性基礎梁中之支承，支承之勁度不同，則彈性基礎梁受外力後之結構反應(Structural Responses)必不同。因此，在本節中，吾人將探討在內橫隔梁勁度變化之情形下，箱型鋼梁畸變翹曲正向應力之變化情形。由圖5.8所示，吾人可以清楚看出，內橫隔梁之勁度雖然對畸變翹曲正向應力具有影響，然其影響程度未若箱型鋼梁內橫隔梁數目明顯。因此，吾人可以確知，欲減低箱型鋼梁斷面之畸變翹曲正向應力，則增加內橫隔梁之數目比採用數目較少但勁度甚大之內橫隔梁有效許多。

由圖5.9之分析結果，吾人亦可清楚看出，在內橫隔梁數目固定之前提下，則提高內橫隔梁之勁度對減低箱型鋼梁之畸變橫向彎矩應力具有非常明顯之效果。此道理甚為明顯，因為箱型鋼梁之畸變橫向彎矩應力乃是相似於等值彈性基礎梁中之垂直變位，而內橫隔梁則相似於等值彈性基礎梁中之支承，內橫隔梁之勁度趨近於無限大時，意謂等值彈性基礎梁之支承為鉸接(Hinge)或滾輪(Roller)支承。在此情況之下，垂直變位比具彈性支承之梁小些乃是自然之道理。

5.3.4 端隔梁邊界條件之影響

不同型式之內橫隔梁在BEF相似法中，其所代表之物理意義為不同之支承條件。本節中將探討端隔梁邊界條件對畸變橫向彎曲應力與畸變翹曲正向應力之影響。BEF系統之結構基本資料中，除了BEF系統之兩端為固定外，其餘皆與前述分析範例相同。其意指在箱型鋼梁之兩端所採用之橫隔梁具有

非常大之剪力勁度，且不允許翹曲變形之產生。畸變橫向彎矩應力指數(η_d)與畸變翹曲正向應力指數(m_w)之分析結果分別列於表5.3與圖5.10。

由圖5.10吾人可知，箱型鋼梁若採用剛性或加勁式之端隔梁，則有降低畸變橫向彎矩之作用，尤其是使用較柔性之內橫隔梁時。然而，剛性之端隔梁在減低箱型鋼梁之橫向翹曲正向應力方面並不明顯。

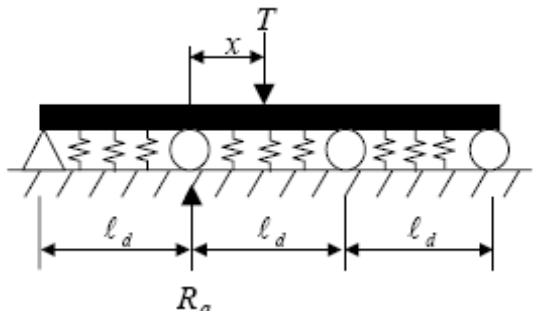
圖5.11所示為BEF系統之端點支承對其畸變橫向彎矩應力之折減情形。由圖5.11吾人可知，當內橫隔梁勁度增加時，則具高勁度之端隔梁減低橫向彎矩應力之能力便明顯減小。

沿著箱型鋼橋之跨距方向，若斷面變形太大有可能造成混凝土橋面版產生裂縫。圖5.12所示為端隔梁勁度對畸變橫向彎矩應力之影響。一般而言，使用柔性愈高之端隔梁，則其沿箱型鋼梁跨距方向之畸變橫向彎矩應力亦愈高。因此，為了避免混凝土橋面版之裂縫產生，吾人可使用具高勁度之端隔梁。



表 5.1 連續 BEF 系統之反力影響線

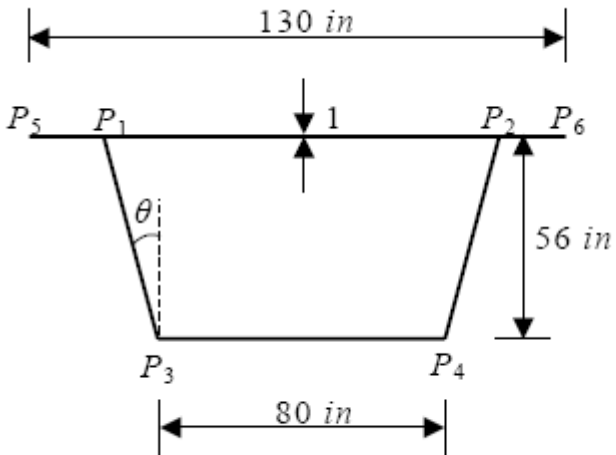
ℓ_d (英吋)	$\lambda \ell_d$	$\frac{x}{\ell_d} = 0.2$			$\frac{x}{\ell_d} = 0.4$			$\frac{x}{\ell_d} = 0.6$			$\frac{x}{\ell_d} = 0.8$		
		$\frac{R_a}{T}$			$\frac{R_a}{T}$			$\frac{R_a}{T}$			$\frac{R_a}{T}$		
		Wright et al [1968]	EBEF	本研究	Wright et al [1968]	EBEF	本研究	Wright et al [1968]	EBEF	本研究	Wright et al [1968]	EBEF	本研究
400	4	0.71	0.78	0.75	0.37	0.43	0.41	0.09	0.17	0.15	0.03	0.04	0.03
200	2	0.85	0.88	0.87	0.65	0.67	0.65	0.40	0.41	0.40	0.18	0.18	0.18
100	1	0.89	0.89	0.88	0.69	0.69	0.68	0.44	0.44	0.43	0.20	0.20	0.20
10	0.1	0.89	0.89	0.88	0.69	0.69	0.68	0.44	0.44	0.43	0.20	0.20	0.20



$I_y = 6896.6 \text{ in}^4$
 $k = 2.0 \text{ k/in}^2$
 $\lambda = 1.0 \times 10^{-2} \text{ in}^{-1}$



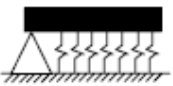
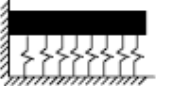
表 5.2 數值分析之斷面性質簡表

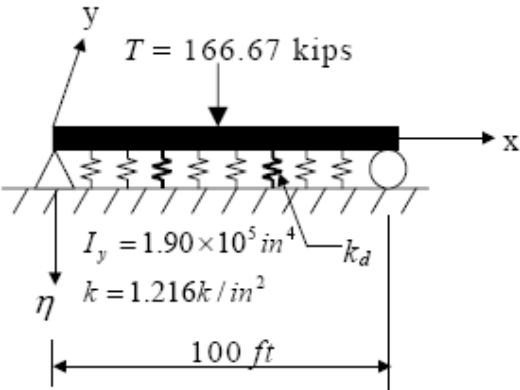
變數	斷面性質	數值
I_y	二次慣性矩	138000 in^4
K_t	純扭曲常數	196000 in^4
I_w	翹曲常數	6626200 in^6
K	彈性基礎模數	15 k / ft^2
λ	BEF 參數	$2.0 \times 10^{-3} / \text{in}$
S_t	頂板斷面模數	649 in^3
S_b	底板斷面模數	3887 in^4
I_c	中央慣性矩(Central Moment of Inertia)	222000 in^4



$\theta = 0.18 \text{ radian}$

表 5.3 端點橫隔梁之邊界條件對不同內橫隔梁勁度之橫向彎矩應力與畸變翹曲正向應力之影響

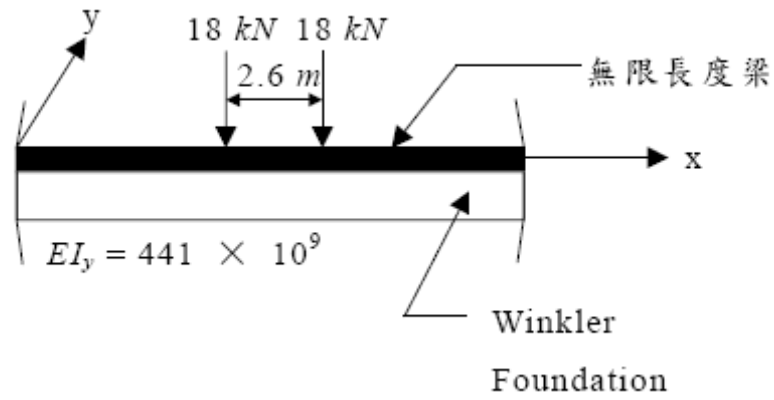
內橫隔梁勁度 K_d (k / ft)	畸變橫向彎矩應力指數, η_d		畸變翹曲正向應力指數, m_w	
				
0	3.0258	2.1764	1.5045	1.5341
10	3.0219	2.1748	1.5038	1.5338
10^2	2.9876	2.1606	1.4979	1.5297
10^3	2.6869	2.0285	1.4471	1.4924
10^4	1.4325	1.3096	1.2347	1.2896
10^5	0.4955	0.4905	1.0761	1.0584
10^6	0.3375	0.3146	1.0494	1.0087
10^7	0.3206	0.2950	1.0465	1.0032
10^8	0.3189	0.2929	1.0462	1.0026
∞	0.3187	0.2928	1.0462	1.0026



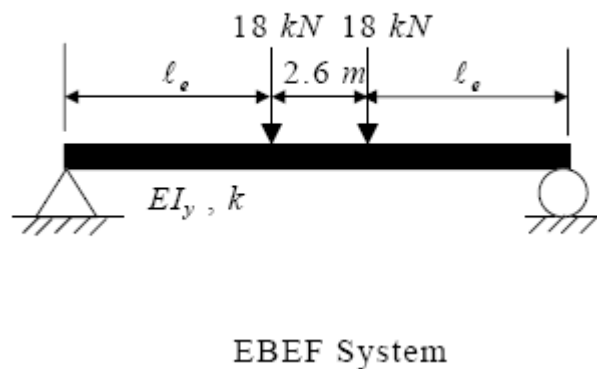
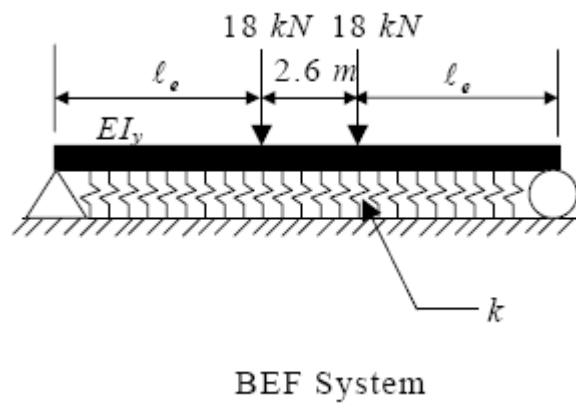
$$\lambda = 3.84 \times 10^{-3} \text{ in}^{-1}$$

$$\eta_d = \frac{8EI_y \lambda^3}{T} \cdot \eta$$

$$m_w = \frac{4\lambda}{T} \cdot M_y$$

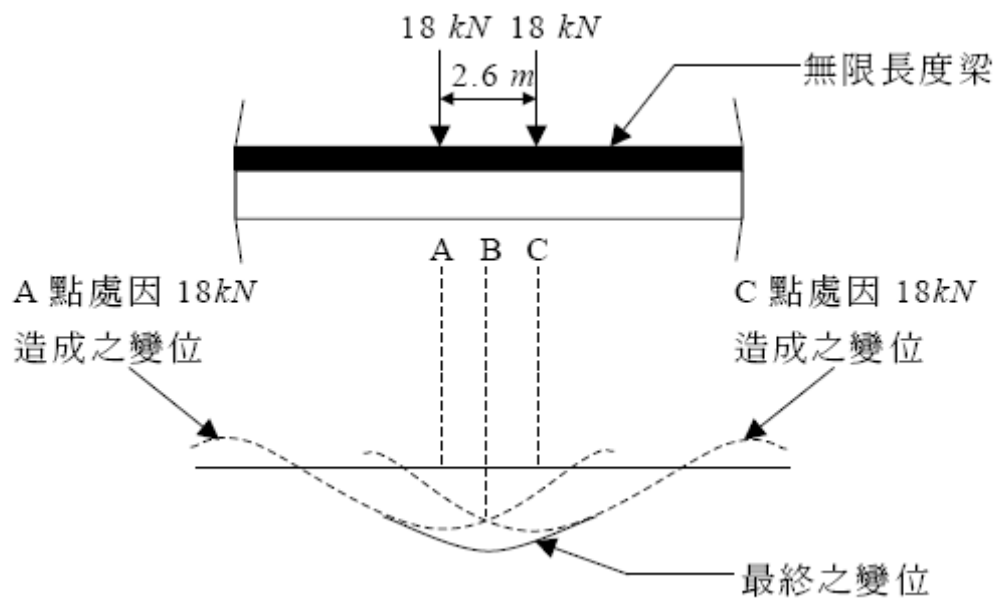


(a)無限長之 Winkler 基礎梁



(b)等值彈性基礎梁之模型

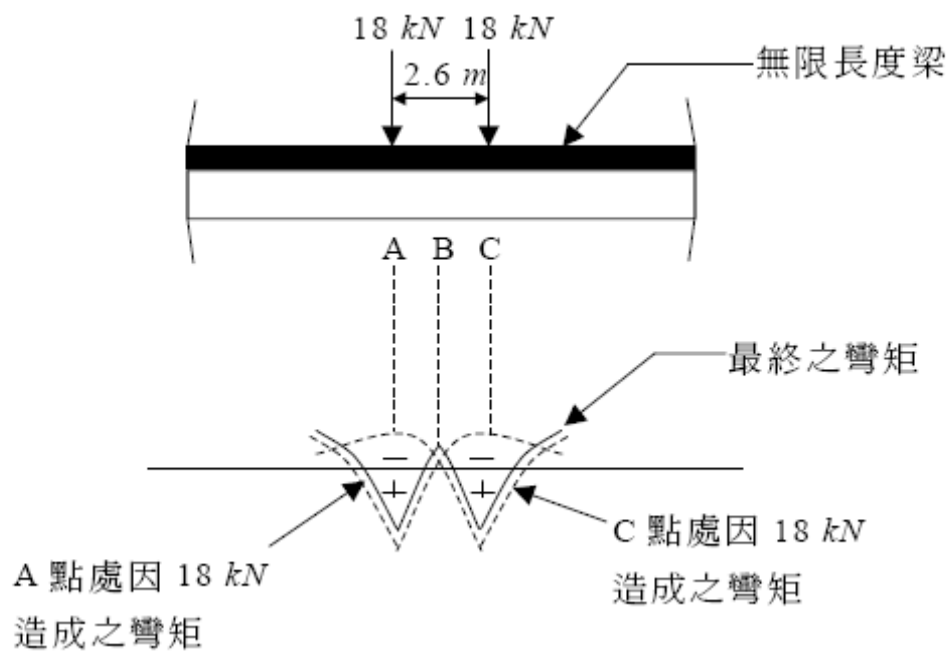
圖 5.1 無限長之彈性基礎梁模擬為等值彈性基礎梁系統



$\eta_A = \eta_C = 26.5mm$; $\eta_B = 28.1mm$ (Cook 與 Young [51] 之微分方程式解)

A 點與 C 點之間等值 彈性基礎梁元素之數量	η_A , η_C		η_B	
	EBEF	本研究	EBEF	本研究
2	25.97	25.63	27.86	27.04
4	26.00	25.57	27.89	27.01
6	26.00	25.58	27.90	27.01
8	26.00	25.58	27.90	27.02

圖5.2 無限長度彈性基礎梁之垂質變位比較



$$M_A = M_C = 5.81 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{Cook與Young [51] 之微分方程式解})$$

A 點與 C 點之間等值 彈性基礎梁元素之數量	M_A, M_C	
	EBEF	本研究
2	5.89	5.80
4	5.89	5.80
6	5.90	5.81
8	5.90	5.81

圖5.3 無限長度彈性基礎梁之彎矩比較

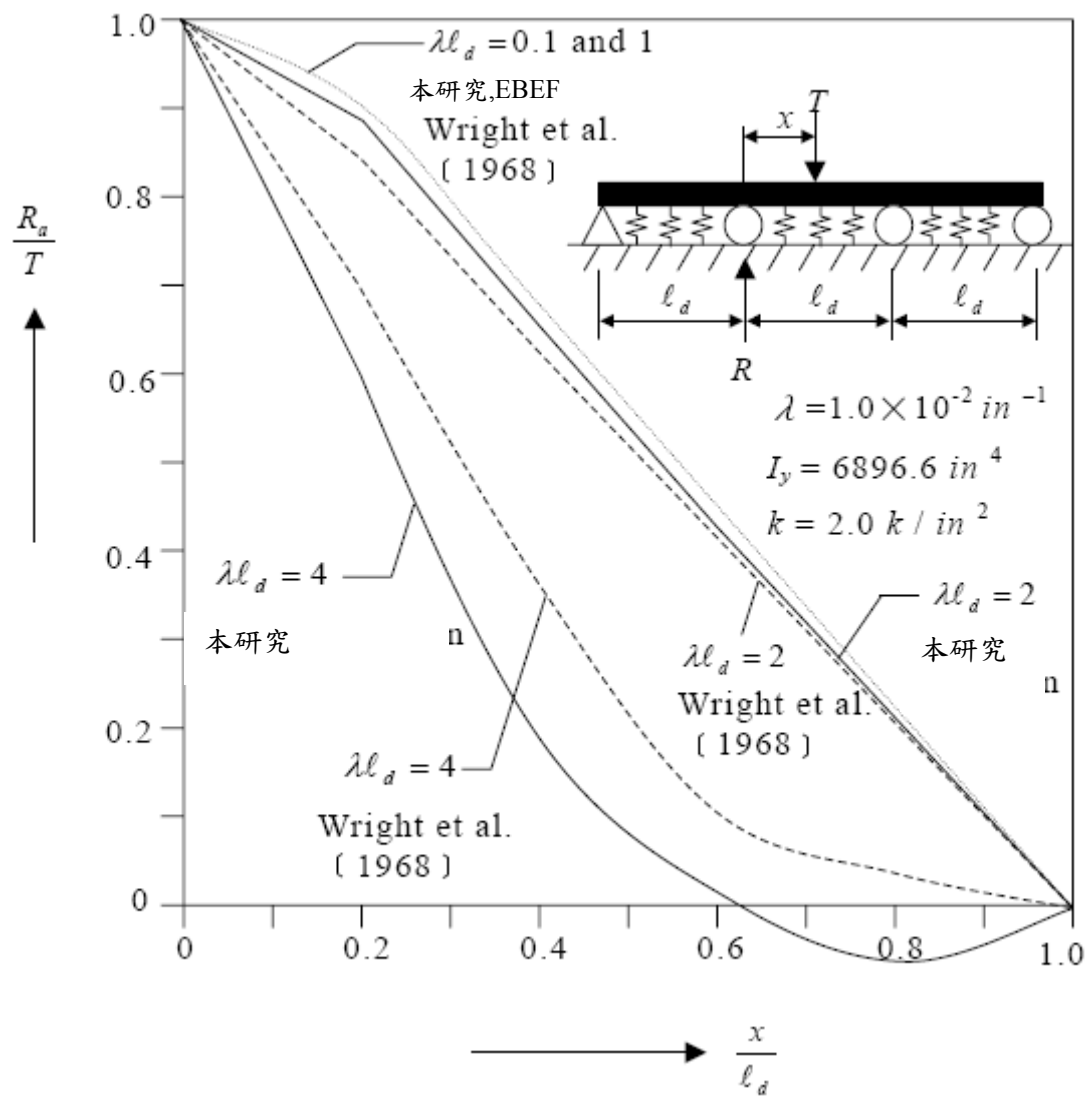


圖5.4 連續箱型鋼梁BEF系統之影響示意圖

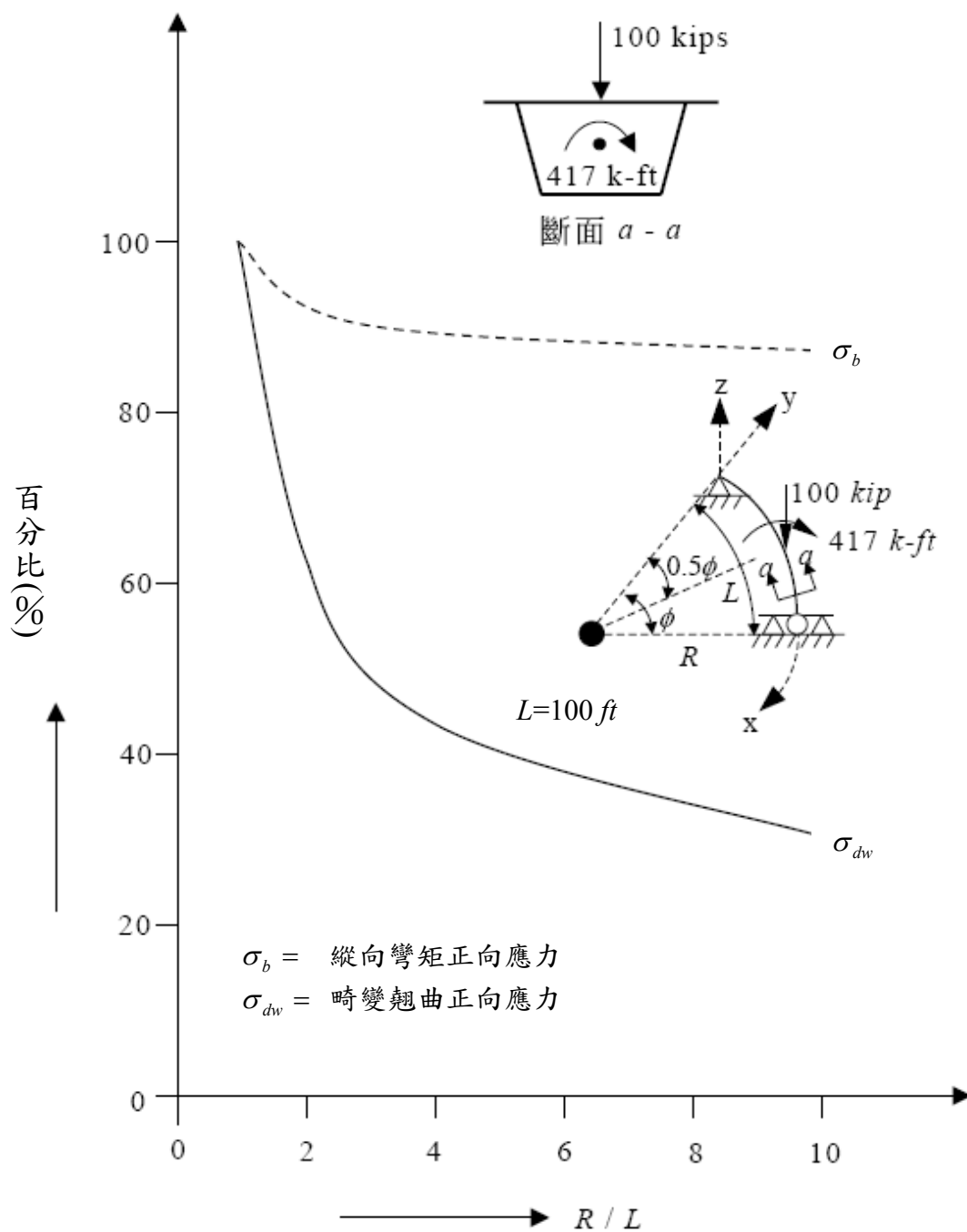


圖5.5 曲率半徑對縱向彎矩正向應力與畸變翹曲正向應力之影響

(說明：垂直座標之百分比意指以 $R / L = 1$ 為基準之應力比值，例如 $R / L = 2$ 時之彎矩正向應力與 $R / L = 1$ 時之彎矩正向應力之比值為 91.5%)

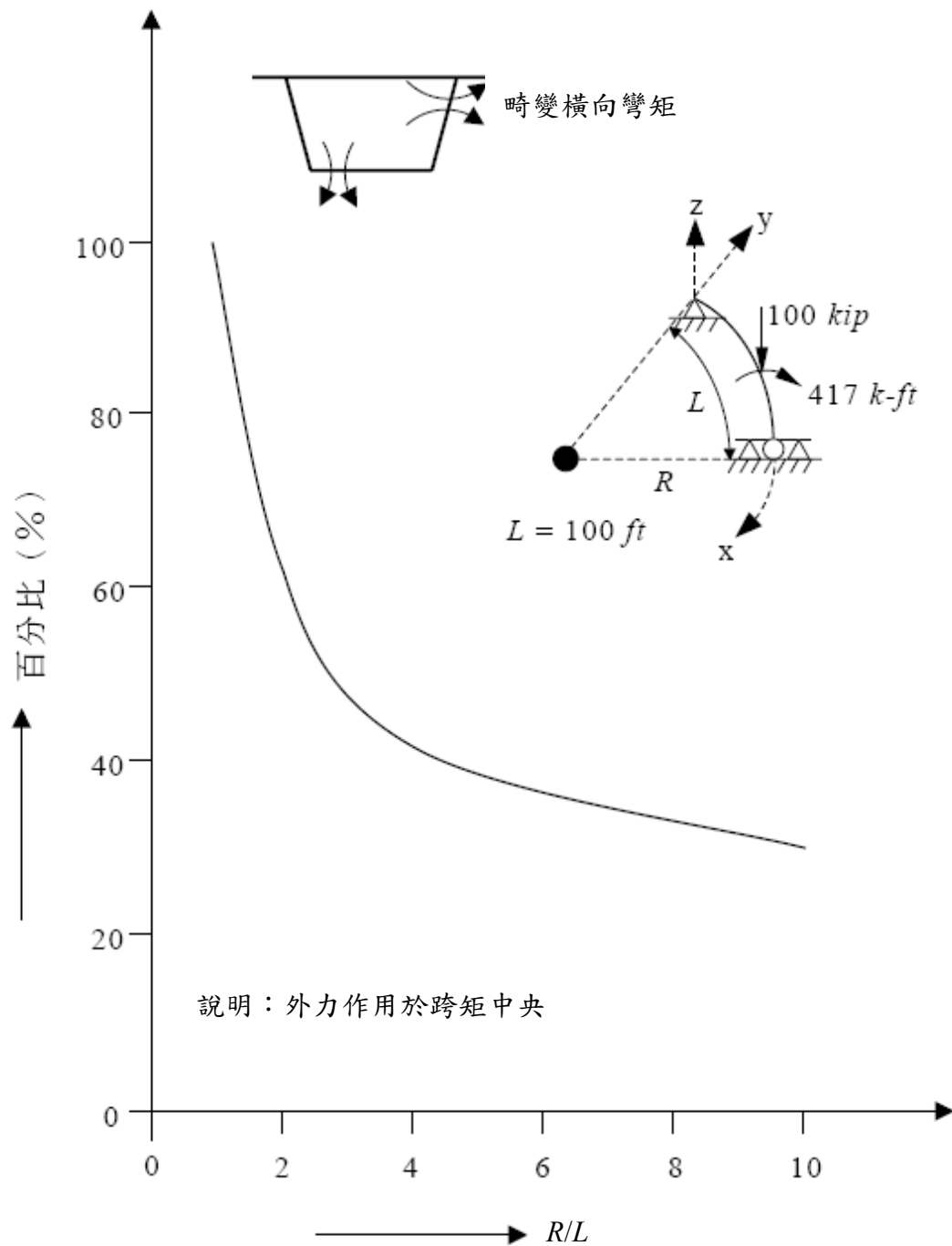


圖5.6 畸變橫向彎矩應力因曲率半徑之折減關係圖

(說明：垂直座標之百分比意指以 $R/L = 1$ 為基準之應力比值，例如 $R/L = 2$ 時之畸變橫向彎矩應力與 $R/L = 1$ 時之畸變橫向彎矩應力之比值為 64%)

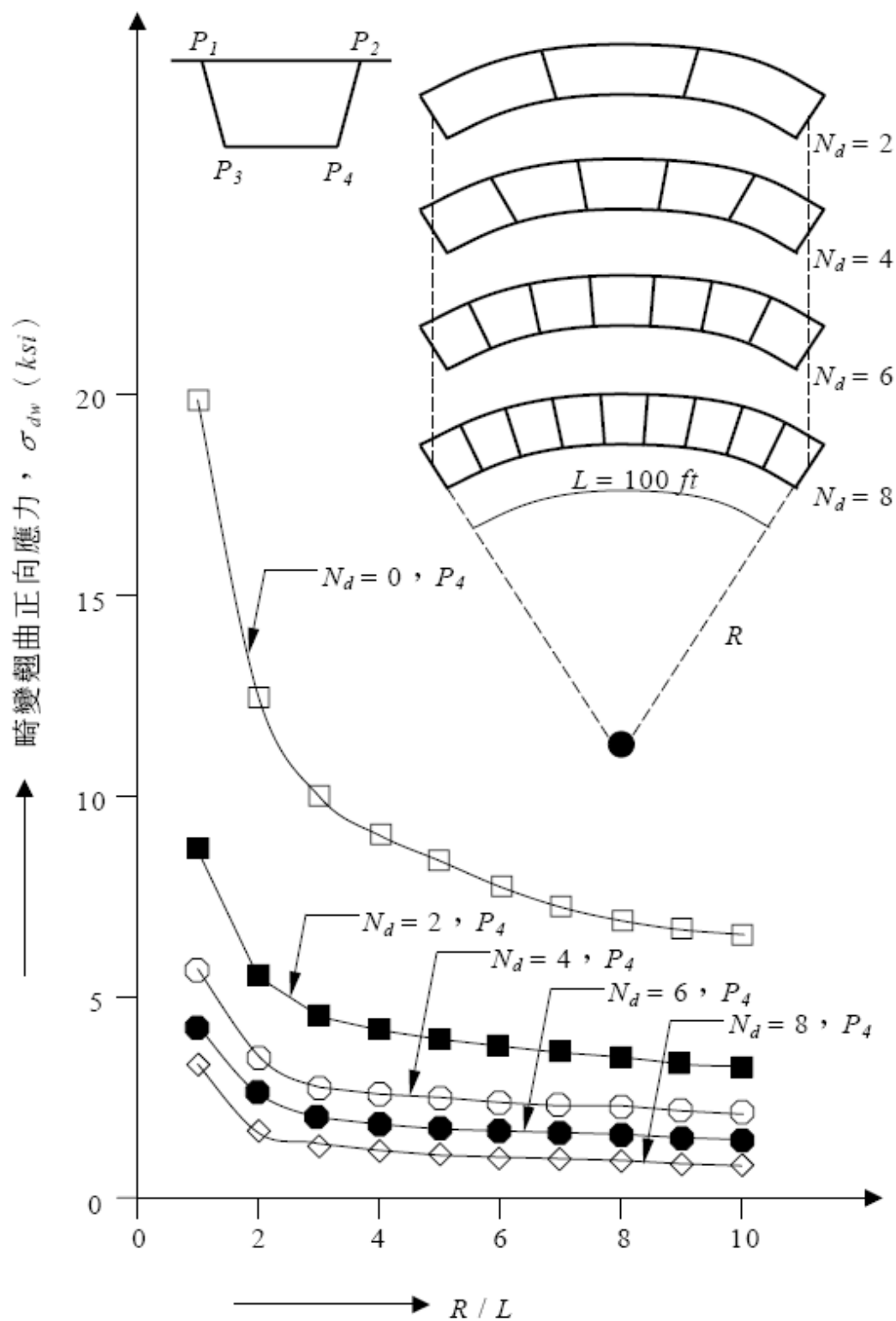


圖5.7 內橫隔梁數目對畸變翹曲正向應力之影響

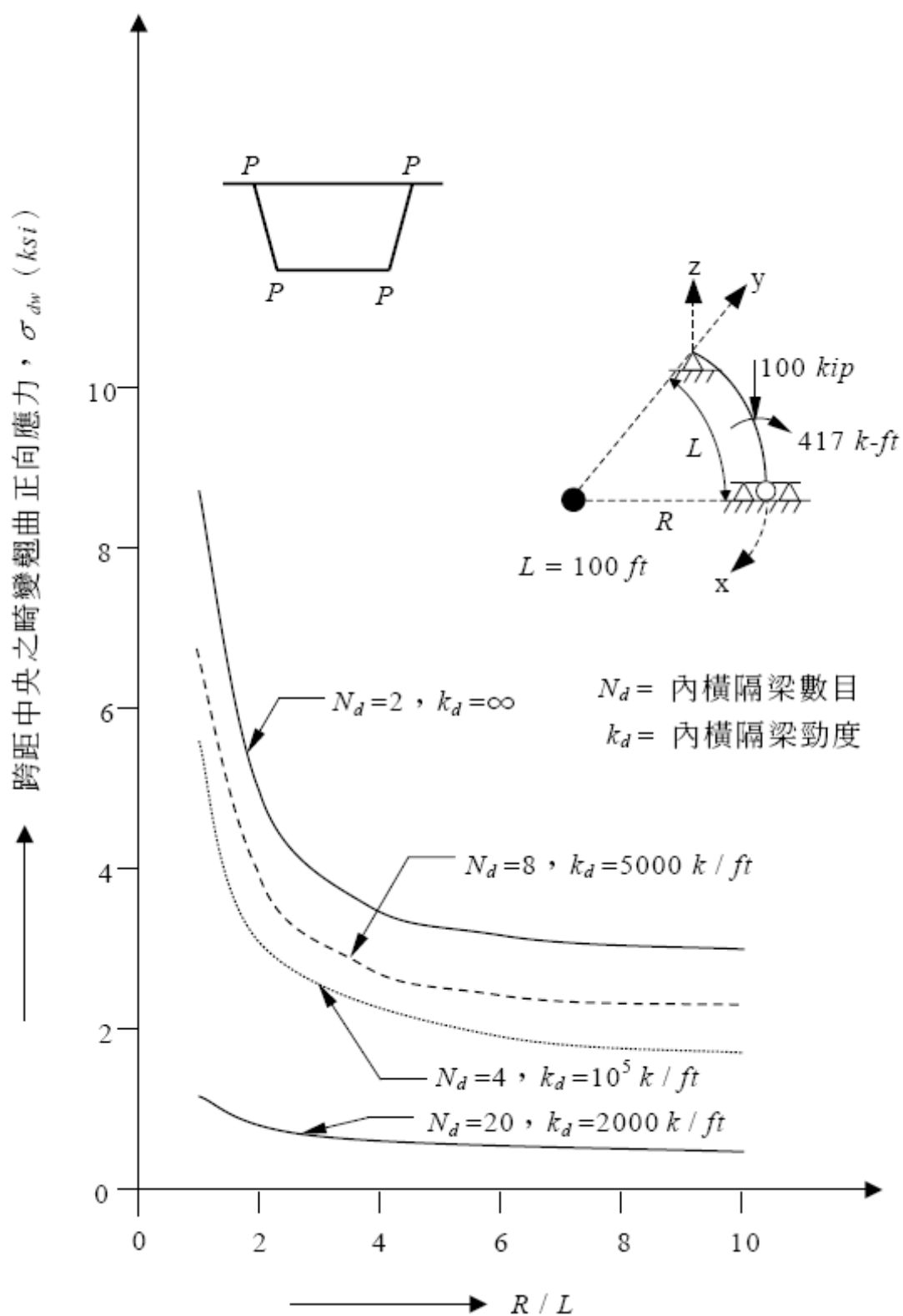


圖5.8 不同內橫隔梁勁度與間距對畸變翹曲正向應力之影響

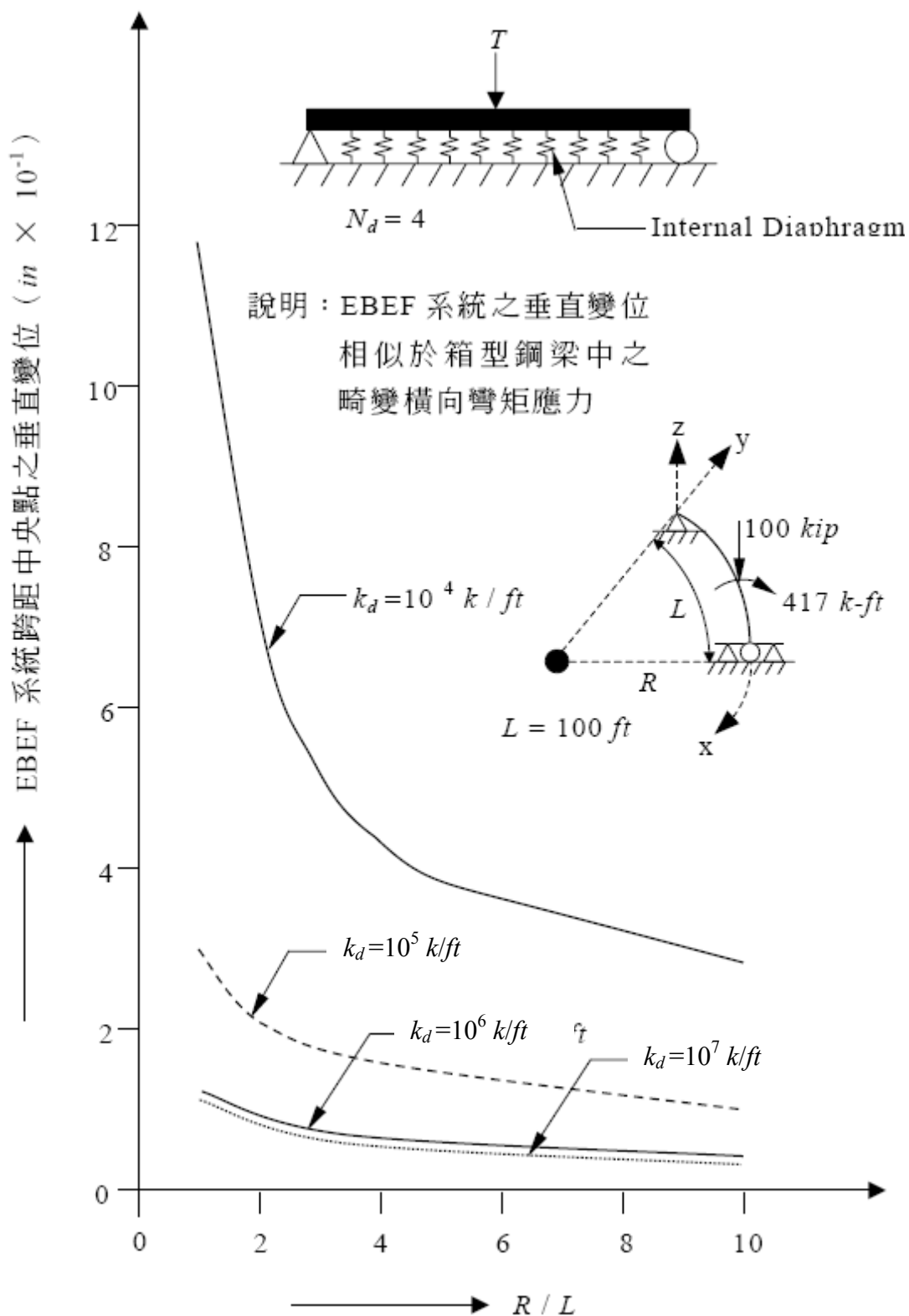


圖5.9 內橫隔梁勁度與畸變橫向應力之關係

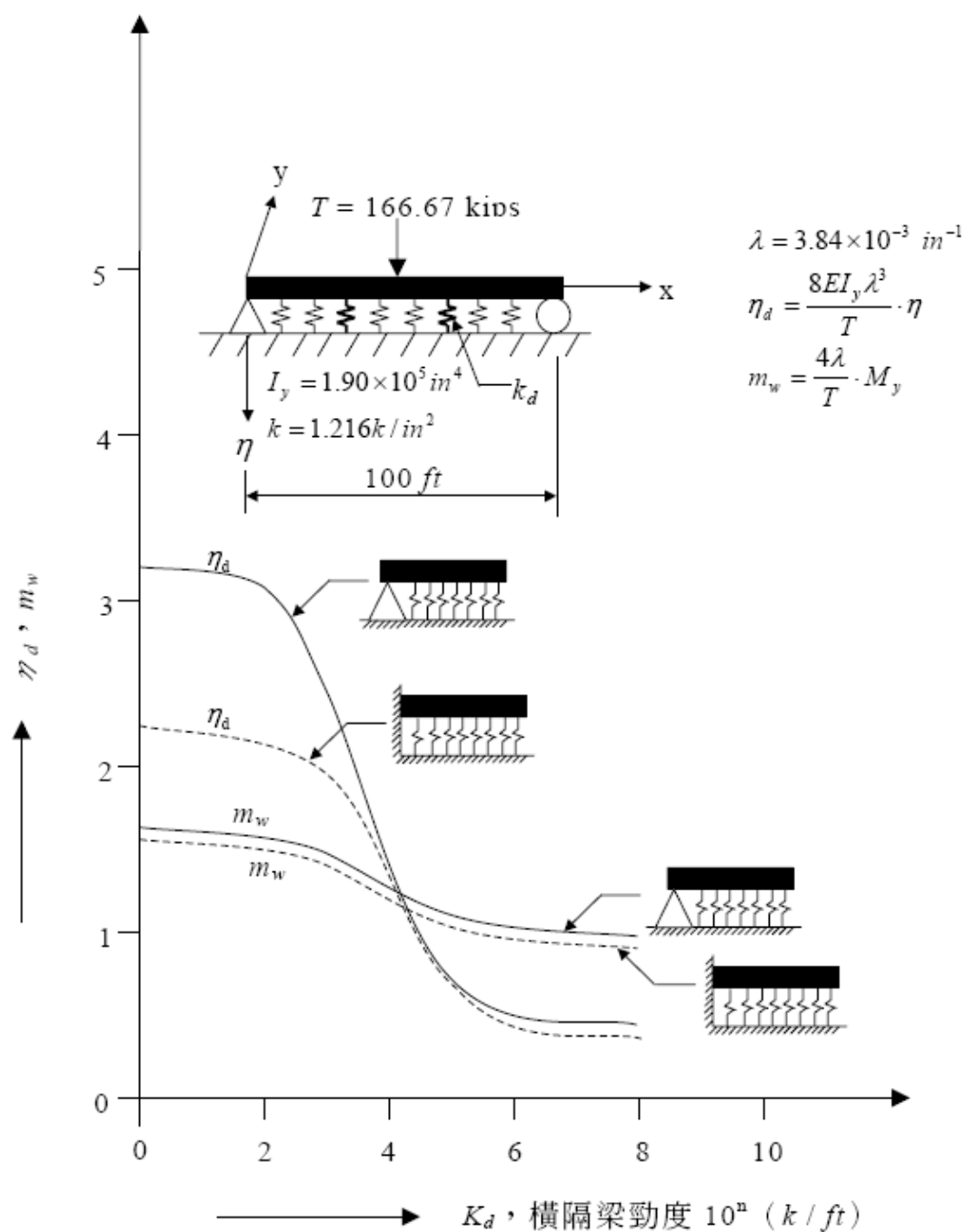


圖5.10 端隔梁邊界條件對橫向彎矩應力與畸變翹曲正向應力之影響

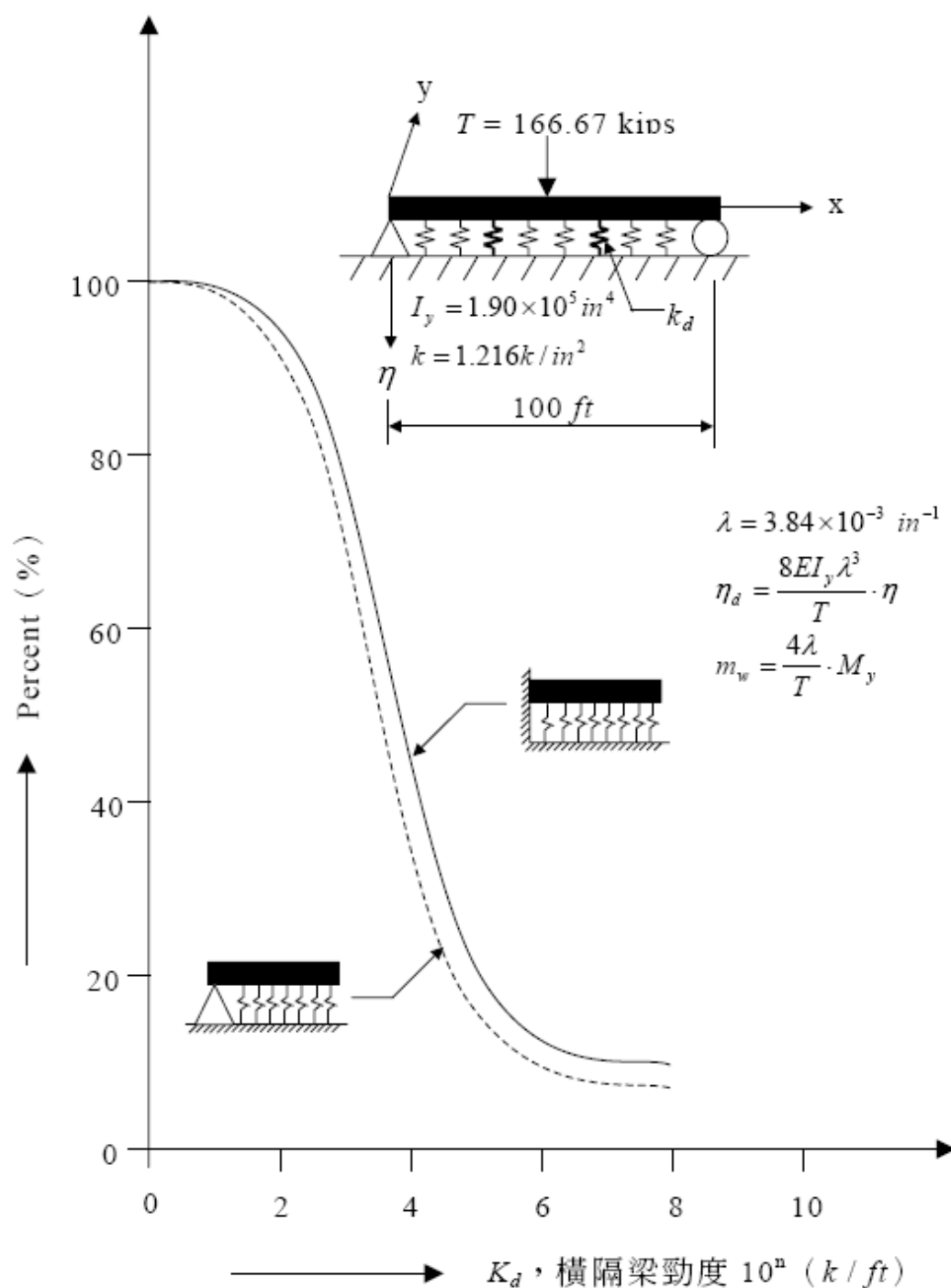


圖5.11 端隔梁邊界條件與不同之內橫隔梁勁度對畸變橫向彎矩應力之折減情形

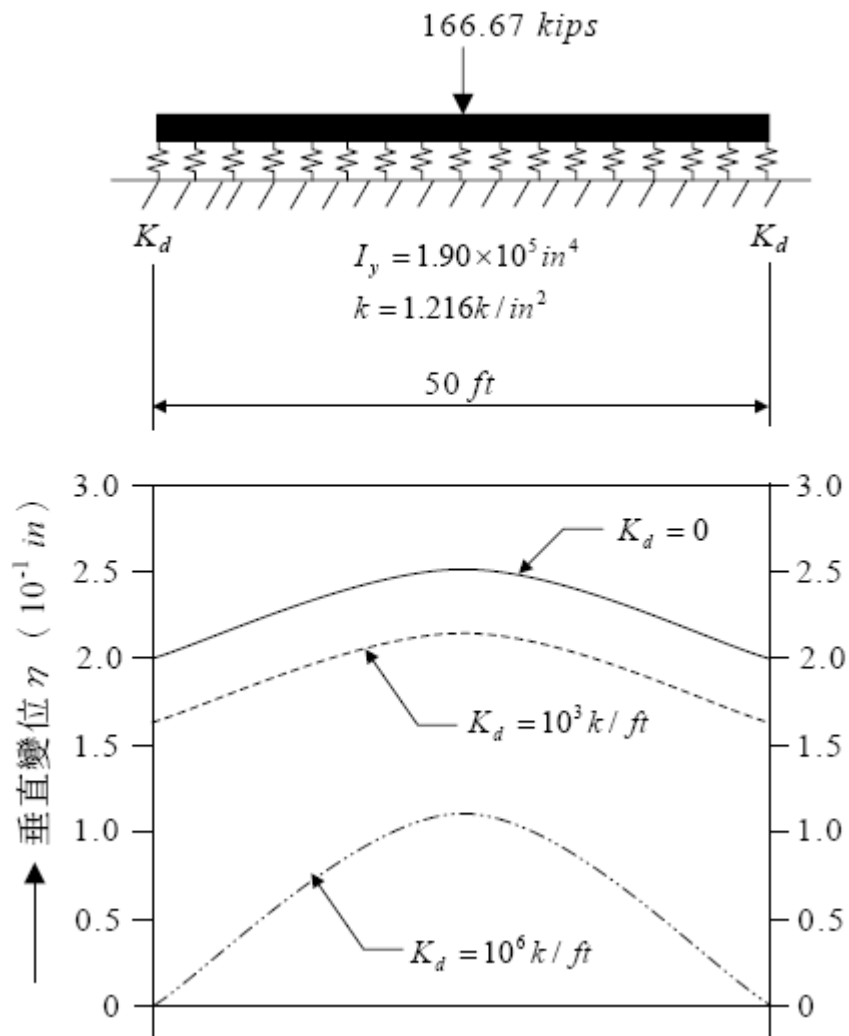


圖5.12 不同端隔梁之邊界條件所造成不同之垂直變位

第六章 結論與建議

6.1 結論

本研究之主旨在於利用曲線格梁系統之結構勁度理論來分析曲線薄壁箱型鋼橋之結構行為，並探討內橫隔梁之型式及間距對箱型鋼橋內力橫向分配之影響。由前述之實例分析中，其分析結果可歸納如下：

1. 箱型鋼梁中之內橫隔梁系統可減低箱型梁之畸變橫向彎矩應力與畸變翹曲正向應力。不過，如果箱型梁中有裝置內橫隔梁，畸變橫向彎矩應力折減之速率比畸變翹曲正向應力快許多。亦即內橫隔梁對阻止箱型鋼梁之橫向變形具有正面之功用。
2. 箱型鋼梁之未側撐長度(Unbraced Length，兩相鄰內橫隔梁之間距)為影響箱型鋼梁畸變行為最重要之因素。因此，當橫隔梁之數目愈多時，畸變橫向彎矩應力折減之速率比畸變翹曲正向應力為快。
3. 內橫隔梁之勁度會影響箱型鋼梁之畸變行為。當使用較具剛性之內橫隔梁(例如鋼板式)時，則畸變橫向彎矩應力與翹曲正向應力便明顯減低。不過，畸變橫向彎矩應力折減之速率比畸變正向應力為快。故再一次驗證，內橫隔梁之主要功用是抑制斷面之畸變而非翹曲。
4. EBEF 系統中之反力即是作用在內橫隔梁上之力量。當內橫隔梁之勁度增加時，則作用在內橫隔梁之力量亦增加。作用在內橫隔梁上之力量可用來決定應使用之內橫隔梁種類、型式與大小。
5. 端隔梁之邊界條件會直接影響箱型鋼梁之畸變行為。當採用較具剛性之端隔梁，例如鋼板式，則箱型鋼梁之畸變橫向彎矩應力將可大為減低。

6.2 建議

為了簡化分析起見，本研究探討之格梁系統僅侷限於單箱單室之箱型鋼梁，未來將可朝多箱多室且加入內、外橫隔梁之方向來進行更深入之研究，方能朝真正可實際應用之境界。另一方面，本研究第三章中所推導之理論雖可應用在內橫隔梁之受力分析，惟卻無法正確計算箱型鋼梁斷面之翹曲行為，故後續仍有努力空間。

參考文獻

1. 魏志霖，曲線箱型鋼橋內橫隔梁設計準則之研究，逢甲大學交通工程與管理學研究所碩士論文，台中市，民國九十一年六月。
2. Meyer, C., and Scordelis, A. C., "Analysis of Curved Folded Plate Structures", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST10, Paper 8434, Oct. 1971, pp. 2459-2480.
3. Chu, K. H., Pinjarkar, S. G., "Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges", Proc., Str. Div. Paper 843, ASCE, Oct. 1971, pp. 2481-2501.
4. Lansberry, C. R., "A Fully Compatible Annular Segment Finite Element", Ph. D Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Pennsylvania, 1971.
5. Shore, S., and Lansberry, C. R., "A Fully Compatible Annular Segment Finite Element", Consortium of University Research Teams Report No. TO272, Towne School of Civil and Mechanical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA., June., 1973.
6. Shore, S., and Wilson, J. L., "Users Manual for the Static Analysis of Curved Bridges (STACRB)", Consortium of University Research Teams Report No. TO173, Towne School of Civil and Mechanical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA., 1973.
7. AASHTO, "Guide Specifications for Horizontally Curved Highway Bridges", American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington D. C., 2003.
8. Fam, A. T. M., "Static and Free Vibration Analysis of Curved Box Bridges", Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Montreal, Canada, 1973.
9. Bazant, Z. P., and Nimeiri, M. E., "Stiffness Method for Curved Box Girders at Initial Stress", Journal of the Str. Div., ASCE, Vol. 100, ST10, Paper 10877, Oct., 1974, pp. 2071-2090.
10. Lavelle, F. H., and Boick, J. S., "Program to Analyze Curved Girder Bridges", Engineering Bulletin No. 8, University of Rhode Island, Kingston RI, 1965.
11. Lavelle, F. H., Grieg, R. A., and Wemmer, H. T., "CUGAR1, Curved Girder Analysis Revision 1", Engineering Bulletin No. 14, University of Rhode Island, R. I., Sept., 1971.
12. Lavelle, F. H., and Laska, R. J., "CUGAR2, Volume 1 Users Manual", University of Rhode Island, Kingston, RI, May., 1975.

13. Lavelle, F. H., "The CUGAR3 Algorithm: Consortium of University Research Teams, Report No. 56, University of Rhode Island, Kingston, R. I., Jan., 1976.
14. Hsu, Yao T., "The Development and Behavior of Vlasov Element on the Modeling of Horizontally Curved Composite Box Girder Bridges" Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Maryland, College Park, 1989.
15. Hsu, Y. T., Fu, C. C., and Schelling, D. R., "An Improved Horizontally Curved Beam Element", Computer and Structures, Vol. 34, No. 2, Pergamon Press, 1990.
16. Sawko, F., "Recent Development in the Analysis of Steel Bridge Using Electronic Computers", Paper 4, Proceedings of the Conference on Steel Bridges, Institution of Civil Engineers, London, June, 1968.
17. Komatsu, S., Nakai, H., and Nakanishi, H., "Static Analysis of Horizontally Curved Skew Box Girder Bridges", Translation of Japanese Society of Civil engineers, Vol. 3, Part 2, 1971. pp. 134-135.
18. William, K. J., Scordelis, A. C., "Analysis of Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffeners", Structural Engineering and Structural Mechanics Report No. 70-2, University of California, Berkeley, 1970.
19. Vlasov, V. Z., "Thin-Walled Elastic Bars", (in Russian), 2nd Ed. Fizmatgiz, Moscow, U.S.S.R., 1959; also (in English), Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
20. Karman, V., and Christensen, "Methods of analysis for Torsion with Variable Twist", Journal of Aeronaut Science, Vol. 11, No. 2, 1944.
21. Dabrowski, R., "Curved Thin Walled Girders", Cement and Concrete Association, London, England, 1968.
22. Konishi, I., Komatsu, S., "Fundamental Theory of Thin-Walled Curved Girders", Japanes Soc. Of Civil Eng., Translations, No. 87, Nov., 1962, pp. 35-47.
23. Konisi, I. and Konatsu, S., "Three Dimensional Analysis of Curved Girders with Thin-Walled Cross Section", Publication, International Association of Bridge and Structural Engineering (IABSE), Vol. 25, 1965, pp. 143-203.
24. Huffington, N. J., "Theoretical Determination of Rigidity Properties of Orthogonally Stiffened Plates", Journal of Appl. Mech., Vol. 23, 1956, pp.56.
25. Yonezawa, H., "Moment and Force Vibrations in Curved Girder Bridges",

- Proceeding, ASCE, Vol. 88, No. EMI, Feb. 1962, pp. 1-21.
26. Coul, A., Das., P. C., "Analysis of Curved Bridge Decks", Proc. Inst. Of Civil Engrs., Vol. 37, 1967, pp. 75-84.
 27. Cheung, Y. K., "the Analysis of Cylindrical Orthotropic Curbed Bridge Deck", IABSE Publications, Vol. 29-II, 1967, pp. 41-52.
 28. Bell, L. C., Heins, C. P., "Analysis of Curved Girder Bridges", Proc., Str. Div., Paper 7462, ASCE, Aug. 1970, pp. 1657-1673.
 29. Tung, D. H. H., "Analysis of Curved Twin box girder Bridges", ASCE National Meeting On Structural Engineering, May 8-12, Seattle, Washington, 1970.
 30. Cheung, M. S., Cheung, Y. K., "Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method", IABSE Publications, Vol. 31-1, 1971. pp. 1-20.
 31. Pinjarkar, S. G., "Analysis of curved Box Girder Bridges", Ph. D Thesis, Illinois Institute of Technique, Chicago, Illinois, June, 1969.
 32. Castillo, M., "Stresses and Deformations in Horizontally Curved Girder Structures", Ph. D. Thesis, Purdue University, June, 1970.
 33. Tung, d. H. H., and Fountain, R. S., "Approximate Torsional Analysis of Curved Box Girders by M/R Method", Engineering Journal, AISC, July, 1970.
 34. Brennan, P. J., and Mandel, J. A., "Preliminary Users Manual: Program for Three-Dimensional Analysis of Horizontally Curved Bridges", Research Report, Department of Civil Engineering, Syracuse University, Syracuse, N. Y., Apr., 1972.
 35. Brennan, P. J., and Mandel, J. A., "Users Manual: Program for Three-Dimensional Analysis of Horizontal Curved Bridges", Research Report, Department of Civil Engineering, Syracuse University, Syracuse, N. Y., Dec., 1974 (Submitted to the Federal Highway Administration and to the participating states of the Consortium of University Research Teams Program).
 36. Heins, C. P. and Oleinik, J. C., "Curved box beam Bridge Analysis", Journal of Computers and Structures, Perganon Press, London, England, Vol. 6, June, 1976, pp.65-73.
 37. Heins, C. P. and Sheu, F. H., "Design / Analysis of Curved box Girder Bridges", Journal of Computers and Structures, Pergamon Press, ondon, England, vol. 15, 1978, pp. 241-258.
 38. Oleinik, J. C., "Design Criteria for Distortional Analysis of Curved Steel

- Box Beams”, Thesis presented to the University of Maryland at College Park, MD, in 1974., in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.
39. Oleinik, J. C., and Heins, C. P., “Diaphragms for Curved Box Beam Bridges”, ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 101, No. ST10, October, 1975, pp. 2161-2178.
 40. Yoo, C. H., et al., “An Analysis of a Continuous Curved Box Girder Bridges”, Highway Research Record, No. 579, Highway Research Board, Washington, D. C., Jan., 1975.
 41. ASCE-AASHTO Task Committee on Flexural Members of the Committee on Metals of the Structural Division, “Steel Box-Girder Bridge Ultimate Strength Considerations”, Journal of the Str. Div., ASCE, Vol. 97, No. ST12, Paper11104, December 1974, pp. 2433-2448.
 42. Nakai, H., C. H. Yoo, 1988, “Analysis and Design of Curved Steel Bridges”, New York, U.S.A.
 43. 邱國維，曲線薄壁箱型結構扭轉翹曲正應力與畸變翹曲正應力近似公式之理論推演，中華大學土木工程研究所碩士論文，新竹市，民國八十六年六月。
 44. American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), “Standard Specifications for Highway Bridges”, 17th Ed., Washington, D.C., 2002.
 45. 張羅溪，曲線斜交格子箱梁橋的翹曲扭轉分析與應用，蘭州鐵道學院碩士論文，1985。
 46. 黃劍源，“薄壁結構的扭轉分析-曲線梁與斜支箱型梁”，中國鐵道出版社，1997。
 47. Heins, C. P. and Sheu, F. H., “Design / Analysis of Curved box Girder Bridges”, Journal of Computers and Structures, Pergamon Press, London, England, vol. 15, 1978, pp. 241-258.
 48. Hsu, Yao T., “The Development and Behavior of Vlasov Element on the Modeling of Horizontally Curved Composite Box Girder Bridges” Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Maryland, College Park, 1989.
 49. Kristek, V., “Theory of Box Girder”, John Wiley and Sons, Inc., New York, N. Y., 1979.
 50. Wright, Richard N., Abdel-Samad, Sana N., and Robinson, Arthur R., “BEF Analogy for Analysis of Box Girders”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST7, July, 1968.

51. Cook, R. D. and Young, W. C., “Advanced Mechanics of Materials ”, Macmillan Publishing Company, Inc., 1985.



