

逢甲大學  
交通工程與管理學系碩士班  
碩士論文



曲線 I 型鋼橋橫隔樑佈設準則之研究

A Study of the Design Criteria for  
Internal Diaphragms of the Curved Steel  
I-Girder Bridges

指導教授：徐耀賜

研 究 生：葉俊宏

中 華 民 國 九 十 四 年 七 月

## 誌 謝

經過了兩年的時間，取得了碩士學位，在這兩年之間所遭遇的人、事、物，讓我成長了許多，也學習到了許多並非從書本中才能學習到的事情，因此這兩年研究生的生活，是我求學過程中最為充實的兩年。

在研究與撰寫此論文中，由衷感謝指導教授 徐耀賜博士的教導，使學生不僅求得學識，更學習到做人處世的道理，實在是獲益良多，讓這本論文能夠順利的完成；而對於學生的論文內審指導老師中興大學 呂東苗博士和逢甲大學交管系 林大傑博士及論文口試指導老師中興大學 呂東苗博士、中華大學 苟昌煥博士對於學生論文不吝指教與肯定與從中協助著實感謝。

另外，還要感謝同窗好友文銘與學弟妹堂展、姿雁於生活中的相互扶持和其他同學光鎧、怡如、曜彰、怡芳、冠樺、秋評、品宏、品翰、文隆、德政、彥斐、宇軒、炯男、自強、雲慶、偉強、孟宗、宗憲及裕雯學姊給予的鼓勵讓我能夠順利完成論文，一切皆盡在不言中。

最後，僅以本文獻給我最敬愛的父母親與關心我的家人，全力支持我繼續深造，使我無後顧之憂，能專心求學，完成碩士學位。欲感謝的人還有很多，在此僅以本文獻給任何曾關心我、幫助我的人，謝謝你們!!

謹誌

2005 年盛夏 于台中逢甲

## 摘 要

近年來國內由於經濟蓬勃發展，國民所得不斷提高，汽車數量也跟著大幅成長。為解決日益惡化之交通，乃有逐漸興建高架橋樑之趨勢；又因受到地形、地物條件之限制，高架橋樑常須設計成曲線形式，因此有關曲線橋樑各種理論之發展便有其重要性。

由於道路線形之限制，在某些路段必須採用曲線橋樑，基於曲線橋樑之受力特性，在分析過程中亦須考慮彎曲、旋轉、剪力及翹曲等四種應變能。除了探討橫隔樑之佈設準則之外，本研究亦將深入探討翹曲(Warping)效應對曲線 I 型鋼橋之影響。

本文以薄壁曲線 I 型鋼樑的翹曲理論為基礎，結合有限元素法推導一種考慮翹曲作用之薄壁曲線樑元素勁度矩陣作為曲線 I 型鋼橋結構分析之主體。

關鍵詞：橫隔樑、I 型鋼樑、曲線橋樑，翹曲



## Abstract

Recently economy grows vigorously, the personal income is also raising constantly. On the other hand, quantity of automobile also increases. In order to solve the traffic worsened day by day, building the elevated highway becomes the only one choice. Because the restrictions of the topography, the bridge must often be designed into a curved form. Therefore, it is really important to develop the different kinds of theories of curved bridge.

Due to the roadway alignment, we must adopt the curved bridge in some highway sections. For special characteristics of the curved bridge, four kinds of degree of freedom must be considered namely-longitudinal bending, vertical shear, longitudinal torsion and warping. Besides probing into horizontally through the criterion of laying of the diaphragm, will also probe into the influence on the curved Model I steel bridge of the effect of warping deeply in this research.

This reseach is based on warping theory of the thin-walled curved steel I-girder according to the finite element method. After that, element stiffness matrix will be derived which is the main body of the structural analysis.

Keywords : Diaphragms, Steel I-girder, Curved Steel Bridges, Warping.

## 目 錄

|  |     |
|--|-----|
| 誌謝 .....                                       | i   |
| 中文摘要 .....                                     | ii  |
| 英文摘要 .....                                     | iii |
| 圖目錄 .....                                      | vii |
| 表目錄 .....                                      | x   |
| <br>   |     |
| 第一章 緒 論 .....                                  | 1   |
| 1.1 研究緣起 .....                                 | 1   |
| 1.2 研究目的 .....                                 | 4   |
| 1.3 研究方法與流程 .....                              | 4   |
| 1.4 預期成果 .....                                 | 5   |
| <br>   |     |
| 第二章 文獻回顧 .....                                 | 7   |
| 2.1 前言 .....                                   | 7   |
| 2.2 有限元素法 (Finite Element Method) .....        | 7   |
| 2.3 格樑相似法 (Grid Analogy) .....                 | 11  |
| 2.4 直線樑近似法 (Straight Beam Approximation) ..... | 12  |
| 2.5 三度空間剛架分析法 .....                            | 12  |
| 2.6 V-Load Method .....                        | 14  |
| <br>   |     |
| 第三章 曲線薄壁鋼樑之力學行為 .....                          | 28  |
| 3.1 前言 .....                                   | 28  |
| 3.2 伏拉索夫之薄壁曲線樑理論 .....                         | 28  |
| 3.3 薄壁樑之動自由度系統(Kinematic System) .....         | 29  |
| 3.4 薄壁鋼樑之彈性原理 .....                            | 36  |
| 3.5 正向應力 .....                                 | 37  |
| 3.6 剪應力 .....                                  | 41  |
| 3.7 曲線樑元素之力與變位之關係 .....                        | 45  |
| 3.8 曲線薄壁樑元素之力平衡關係 .....                        | 49  |
| 3.9 變位方程式 .....                                | 53  |
| 3.10 伏拉索夫元素之勁度矩陣 .....                         | 55  |
| 3.10.1 變位向量 .....                              | 56  |
| 3.10.2 元素勁度矩陣 .....                            | 59  |
| <br>   |     |
| 第四章 樑式鋼橋設計方法 .....                             | 61  |

|            |                           |            |
|------------|---------------------------|------------|
| 4.1        | 前言                        | 61         |
| 4.2        | ASD 之理論背景                 | 63         |
| 4.3        | LFD 理論背景                  | 66         |
| 4.3.1      | 基本觀念                      | 66         |
| 4.3.2      | LFD 之設計載重分類               | 68         |
| 4.3.3      | LFD 之基本假設                 | 71         |
| 4.4        | LFD 樑之斷面分類                | 71         |
| 4.4.1      | 結實斷面                      | 71         |
| 4.4.2      | 具側向支撐之非結實斷面               | 75         |
| 4.4.3      | 介於上述兩者間之漸變斷面(Transitions) | 76         |
| 4.4.4      | 部份側向支撐構件                  | 76         |
| 4.5        | 加勁材                       | 79         |
| 4.5.1      | 豎向加勁大樑                    | 80         |
| 4.5.2      | 縱向加勁大樑                    | 82         |
| 4.6        | LFD 樑構件之剪力強度容量            | 83         |
| 4.7        | 結語                        | 85         |
| <b>第五章</b> | <b>格樑系統</b>               | <b>104</b> |
| 5.1        | 前言                        | 104        |
| 5.2        | 格樑相似法之早期應用                | 104        |
| 5.3        | 改良式格樑相似法                  | 105        |
| 5.4        | 橫隔樑之種類與型式                 | 107        |
| 5.5        | 部份翹曲束制橫隔樑元素               | 114        |
| 5.5.1      | 理論推導                      | 114        |
| 5.5.2      | 元素矩陣                      | 117        |
| 5.5.3      | 數值分析                      | 118        |
| <b>第六章</b> | <b>實例分析</b>               | <b>120</b> |
| 6.1        | 前言                        | 120        |
| 6.2        | 曲線橋斷面與尺寸                  | 120        |
| 6.3        | 曲線橋之平面佈設                  | 121        |
| 6.4        | 結構分析軟體                    | 121        |
| 6.5        | 斷面性質計算                    | 123        |
| 6.6        | 分析比較                      | 129        |
| <b>第七章</b> | <b>結論與建議</b>              | <b>143</b> |

|                    |            |
|--------------------|------------|
| 7.1 前言 .....       | 143        |
| 7.2 結論 .....       | 143        |
| 7.3 建議 .....       | 144        |
| <b>參考文獻 .....</b>  | <b>145</b> |
| <b>附錄 I .....</b>  | <b>152</b> |
| <b>附錄 II .....</b> | <b>156</b> |



## 圖目錄

|        |  |    |
|--------|--|----|
| 圖 1.1  | 典型之 I 型鋼樑 .....                        | 2  |
| 圖 1.2  | 典型之合成式 I 型鋼橋 .....                     | 3  |
| 圖 1.3  | 研究流程圖 .....                            | 6  |
| 圖 2.1  | 有限元素分析曲線 I 型鋼橋有採用之典型鋼板元素 .....         | 9  |
| 圖 2.2  | 有限元素分析曲線 I 型鋼橋之典型曲線樑元素與桿元素 .....       | 10 |
| 圖 2.3  | 作用於曲線 I 型鋼樑之縱向彎矩由兩個作用於翼板之等值軸向力模擬 ..... | 15 |
| 圖 2.4  | 作用於頂板與底板之力構成三力平衡狀態 .....               | 15 |
| 圖 2.5  | 作用於頂板之均佈荷重以平衡兩端之等值軸向力 .....            | 16 |
| 圖 2.6  | 古典力學中之 Hoop Tension Analogy .....      | 17 |
| 圖 2.7  | 橫隔樑與大樑之互制(橫斷面圖) .....                  | 18 |
| 圖 2.8  | 大樑翼板與橫隔樑之互制(平面圖) .....                 | 18 |
| 圖 2.9  | 具多樑系統之 I 型鋼橋 .....                     | 23 |
| 圖 2.10 | MSC/NASTRAN 之有限元素分析模式 .....            | 24 |
| 圖 3.1  | 伏拉索夫理論第二個假設 .....                      | 29 |
| 圖 3.2  | 薄壁鋼樑元素中任一點之變位分量( $u, v, n$ ) .....     | 30 |
| 圖 3.3  | 薄壁鋼樑斷面之廣義變位分量 .....                    | 31 |
| 圖 3.4  | 薄壁鋼樑之某一段 .....                         | 32 |
| 圖 3.5  | 翹曲函數之物理意義 .....                        | 35 |
| 圖 3.6  | 典型箱型鋼樑斷面之法化單位翹曲函數 .....                | 39 |
| 圖 3.7  | 正雙彎矩之符號定義 .....                        | 40 |
| 圖 3.8  | 典型開放式薄壁樑於縱向之剪力平衡 .....                 | 41 |
| 圖 3.9  | 典型薄壁鋼樑之翹曲靜慣性矩圖 .....                   | 43 |
| 圖 3.10 | 曲線樑元素之曲率符號定義 .....                     | 47 |
| 圖 3.11 | 典型曲線薄壁樑元素受到之外力圖 .....                  | 49 |
| 圖 3.12 | 曲線薄壁鋼樑元素之力平衡 .....                     | 50 |
| 圖 3.13 | 平面曲線薄壁鋼樑元素 .....                       | 57 |



|        |                                    |     |
|--------|------------------------------------|-----|
| 圖 4.1  | 樑式鋼橋之分類 .....                      | 89  |
| 圖 4.2  | I 型鋼鈹樑受彎矩時之翼鈹與腹鈹受力示意圖 .....        | 90  |
| 圖 4.3  | 典型 I 型鋼鈹樑之設計細部 .....               | 91  |
| 圖 4.4  | 加勁肢材與非加勁肢材之分野 .....                | 92  |
| 圖 4.5  | 極限彎矩容量示意圖 .....                    | 93  |
| 圖 4.6  | 翼鈹因受壓而發生局部挫屈 .....                 | 94  |
| 圖 4.7  | 腹鈹受力之各種可能型式 .....                  | 95  |
| 圖 4.8  | 典型鋼樑之點式側向支撐 .....                  | 96  |
| 圖 4.9  | 典型鋼樑之連續式側向支撐 .....                 | 96  |
| 圖 4.10 | 典型 I 型鋼樑之受力挫屈模式 .....              | 97  |
| 圖 4.11 | 鋼樑在跨距處無側向支撐，因受力而造成之側向扭轉挫屈<br>..... | 97  |
| 圖 4.12 | 連續樑之彎矩重新分配 .....                   | 98  |
| 圖 4.13 | LFD 設計中，不同鋼樑斷面之彎矩正向應力分佈 .....      | 98  |
| 圖 4.14 | I 型鋼鈹樑之加勁材 .....                   | 99  |
| 圖 4.15 | 拉力場之觀念 .....                       | 100 |
| 圖 4.16 | 豎向加勁鈹與翼鈹之接合 .....                  | 100 |
| 圖 4.17 | 豎向加勁材佈設不良可能造成之局部挫屈示意圖 .....        | 101 |
| 圖 4.18 | 豎向加勁材佈設不良可能造成之局部挫屈示意圖 .....        | 102 |
| 圖 4.19 | 縱向加勁材 .....                        | 102 |
| 圖 4.20 | 等效柱之觀念 .....                       | 103 |
| 圖 4.21 | 腹鈹剪應力狀態 .....                      | 103 |
| 圖 4.22 | LFD I 型鋼鈹樑之彎-剪互制 .....             | 103 |
| 圖 5.1  | 格樑相似法之典型格樑系統與節點編碼系統 .....          | 108 |
| 圖 5.2  | 典型平面曲線鋼橋之架構平面圖 .....               | 109 |
| 圖 5.3  | 輻射狀之平面架構 .....                     | 110 |
| 圖 5.4  | 輻射狀之隔樑與斜交式之端隔樑 .....               | 110 |
| 圖 5.5  | 斜交式佈置之橫隔樑系統 .....                  | 111 |
| 圖 5.6  | 交錯式佈置之橫隔樑系統 .....                  | 111 |
| 圖 5.7  | 典型之 K 型橫隔樑(一) .....                | 112 |
| 圖 5.8  | 典型之 K 型橫隔樑(二) .....                | 112 |

|        |                                    |     |
|--------|------------------------------------|-----|
| 圖 5.9  | 典型之 X 型橫隔樑 .....                   | 113 |
| 圖 5.10 | I 型鋼構成橫隔樑之典型範例 .....               | 113 |
| 圖 5.11 | 翹曲邊界條件與有效扭曲常數之關係 .....             | 117 |
| 圖 5.12 | 翹曲束制邊界條件對扭曲旋轉角之影響 .....            | 118 |
| 圖 5.13 | 扭曲旋轉角與翹曲邊界條件之變化關係 .....            | 119 |
| 圖 6.1  | 實例分析曲線 I 型鋼橋 .....                 | 120 |
| 圖 6.2  | 曲線 I 型大樑斷面尺寸 .....                 | 121 |
| 圖 6.3  | 曲線 I 型鋼橋之平面佈設 .....                | 122 |
| 圖 6.4  | 典型之單軸對稱 I 型鋼樑斷面 .....              | 124 |
| 圖 6.5  | I 型鋼樑合成斷面與理想斷面之轉換 .....            | 126 |
| 圖 6.6  | 連續樑結構正負彎矩區之定義 .....                | 128 |
| 圖 6.7  | 平面佈設 1 之靜載重彎矩比較圖 .....             | 130 |
| 圖 6.8  | MSC/NASTRAN 之分析模式 .....            | 131 |
| 圖 6.9  | V-Load Method 中作用於翼板之等值橫向荷載 .....  | 132 |
| 圖 6.10 | 平面佈設 1 曲率造成之靜載重彎矩差異值 .....         | 133 |
| 圖 6.11 | 平面佈設 2 之靜載重彎矩值比較圖 .....            | 134 |
| 圖 6.12 | 平面佈設 3 之靜載重彎矩值比較圖 .....            | 135 |
| 圖 6.13 | 平面佈設 1-合成式(MSC/NASTRAN) .....      | 139 |
| 圖 6.14 | MSC/NASTRAN 電腦程式之活載重模擬 .....       | 139 |
| 圖 6.15 | MSC/NASTRAN 程式將橋面版以側向支撐桿元素模擬 ..... | 142 |

## 表目錄

|  |     |
|--|-----|
| 表 2.1 可用於曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素 .....                             | 25  |
| 表 2.1 可用於曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素(續) .....                          | 26  |
| 表 2.1 可用於曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素(續) .....                          | 27  |
| 表 3.1 曲線薄壁樑之邊界條件 .....                                     | 56  |
| 表 4.1 AASHTO 規範之樑式鋼橋適用性 .....                              | 87  |
| 表 4.2 容許應力設計法之載重群組 .....                                   | 87  |
| 表 4.3 強度設計法之基本理念 .....                                     | 88  |
| 表 4.4 強度設計法之載重群組 .....                                     | 88  |
| 表 6.1 平面佈設 1 之二次慣性矩(in.4) .....                            | 127 |
| 表 6.2 平面佈設 2 之二次慣性矩(in.4) .....                            | 127 |
| 表 6.3 平面佈設 3 之二次慣性矩(in.4) .....                            | 127 |
| 表 6.4 直線樑近似法之大樑縱向彎矩 .....                                  | 129 |
| 表 6.5 各分析模式靜載重彎矩值比較-平面佈設 1.....                            | 136 |
| 表 6.6 各分析模式靜載重彎矩值比較-平面佈設 2.....                            | 137 |
| 表 6.7 各分析模式靜載重彎矩值比較-平面佈設 3.....                            | 138 |
| 表 6.8 DESCUS 1 與 MSC/NASTRAN 程式附加靜載重彎矩值比較-<br>平面佈設 1 ..... | 140 |
| 表 6.9 DESCUS 1 與 MSC/NASTRAN 程式活載重彎矩值比較 ..                 | 141 |

# 第一章 緒 論

## 1.1 研究緣起

隨著時代之變遷，社會之進步，都會區之形成與擴張，公路建設亦隨運輸網路之需求而擴散。新建之公路，特別是高、快速公路，可能因路線多經過山區或因減少區域阻隔與降低對環境衝擊等因素，橋樑數量急遽增加。然而，公路在構築時常會到幾何線形之限制，尤其是交流道、高架橋與立體交叉處；因此，在某些情況下，曲線橋樑之採用便成為唯一之選擇。

鋼橋之種類繁多，惟以樑式橋之橫斷面形式而言，鋼橋可分為兩大類，即 I 型與箱型鋼橋。曲線型鋼橋常使用於公路交流道與曲線立體交叉處，或是在預力後拉混凝土橋無法構築之曲線路段。通常，當曲率大時，可採用箱型鋼橋，因為箱型鋼橋有非常大的扭曲勁度(Torsional Stiffness)。而在曲線曲率較平緩之路段則採用 I 型鋼橋。

I 型鋼橋之基本組成乃是由三片鋼板[即最上方之頂板(Top Flange)、中間部位之腹板(Web)與最下方之底板(Bottom Flange)]相互銲接(Welded)、栓接(Bolted)或鉚接(Riveted)而成。惟現今鋼板橋樑皆已銲接為之，如圖 1.1 所示。

橫隔樑乃是連接相鄰兩大樑之結構，其主要功用在於使作用於橋樑上部結構之荷重能均勻的橫向(垂直於橋樑長度方向)傳遞。典型之合成(Composite)I 型鋼橋橫斷面如圖 1.2 所示。

一般而言，橫隔樑之佈設型態變化多端，型式之選定無一定之準則，現今 AASHTO 橋樑設計規範【1】中除了建議最大可容許間距(Diaphragm Spacing)之外，亦無強制規定型式之佈設。

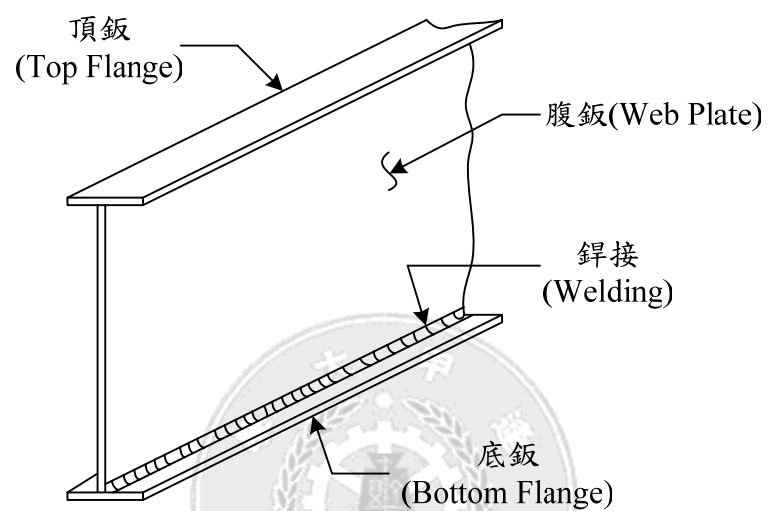


圖 1.1 典型之 I 型鋼樑

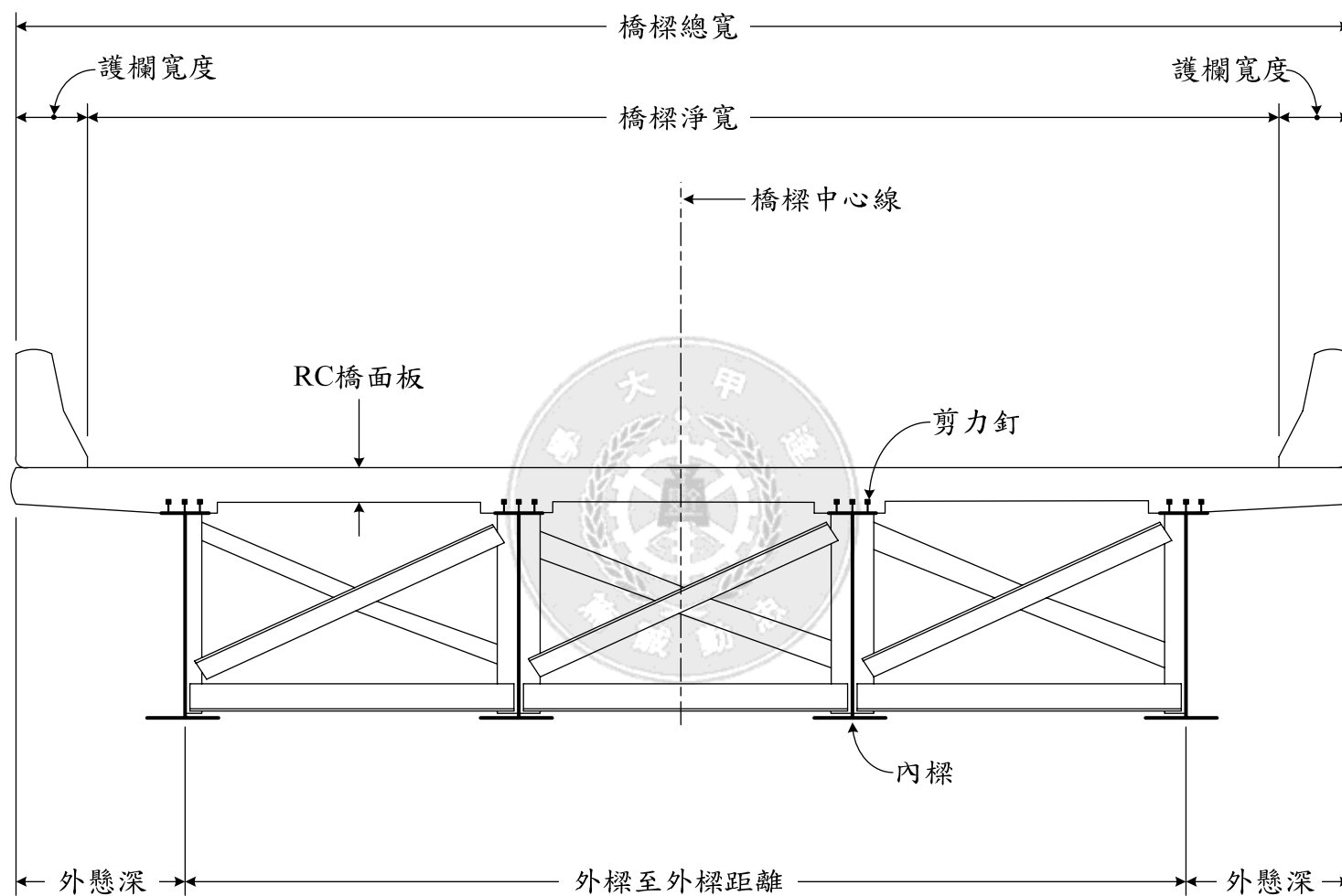


圖 1.2 典型之合成式 I 型鋼橋

## 1.2 研究目的

由於曲線橋樑無論在力學行為、施工技術或外觀上，均不同於直線橋樑，所以過去有關曲線橋樑之分析，在初步設計階段皆採用以數段直樑近似的方法，並未能確實掌握曲樑在力學行為上之扭轉(Torsion)、翹曲(Warping)與彎、扭相互耦合(Coupling)的效應。因此欲得到較精確之分析結果，本文將提出一種較為精確與實用之解析方法。

## 1.3 研究方法與流程

一般而言，曲線 I 型鋼橋之分析方法主要有以下四大類，即：

- ①直線樑近似法(Straight Beam Approximation)
- ②V-Load Method
- ③格樑相似法(Grid Analogy Method)
- ④有限元素法

橋樑結構可以用多種不同方法進行模擬分析，唯經過三十多年來橋樑工程師之實際應用，如以細部分析與設計而言，目前只有兩種方法為工程師較常採用，即格樑相似法與有限元素法，此兩種方法亦為目前AASHTO平面曲線規範【1】所認可。

無庸置疑地，有限元素法是所有可資利用方法中可達最佳精確度者。以現今有限元素理論之普及，任何型式之橋樑佈置與載重種類，均可用有限元素法加以模擬，進行精確地分析。以現今電腦科技之發達，從工程之規劃、初步設計至細部設計與變更設計，如完全以有限元素法作為分析曲線橋樑之工具，則時間上之效益往往變成設計者考量之主要因素。另一方面，為了正確地將曲線鋼橋以有限元素法進行結構模擬，負責設計之橋樑工程師必須具備非常清晰之有限元素學理觀念。

與有限元素法比較，格樑相似法則為目前工程顧問公司用來設計曲線鋼橋最常用之方法，其理由則有下列諸項：

- ①用格樑相似法模擬求得之橋樑結構行為普遍較易為橋樑工程師所了解不若有限元素法深奧。
- ②高度靜不定之曲線橋樑可用格樑相似法輕易模擬，尤其當橋樑有為數甚多之大樑、支承中心線與橋樑中心線呈大斜角、或橋樑

佈置不均勻變化時(例如樑深漸變或大樑間距漸變)，用格樑相似法便可以縮短橋樑設計之時間，間接地工程師亦較易掌握工程設計進度。

③格樑相似法模擬分析曲線複合箱型橋為 AASHTO 平面曲線型橋樑設計規範【1】所認可。

④個人電腦(Personal Computers)發達後，用格樑相似法所發展之電腦程式(通常不若有限元素電腦程式龐大)可以輕易地置於其中，如再與電腦輔助設計繪圖系統(Computer Aided Design & Drafting, CADD)結合，則橋樑設計與繪圖可以連貫作業，容易控制設計進度。

圖 1.3 所示為本研究之流程，由此圖可看出，其流程甚為冗長繁複。

## 1.4 預期成果

本研究以探討曲線 I 型鋼橋內橫隔樑之佈設準則為主，預期成果可歸納為下列數點，即：

- ①橫隔樑佈設位置之準則建立
- ②橫隔樑種類之選擇
- ③橫隔樑之受力最佳化
- ④薄壁樑部分翹曲效應對 I 型鋼樑結構行為之影響。



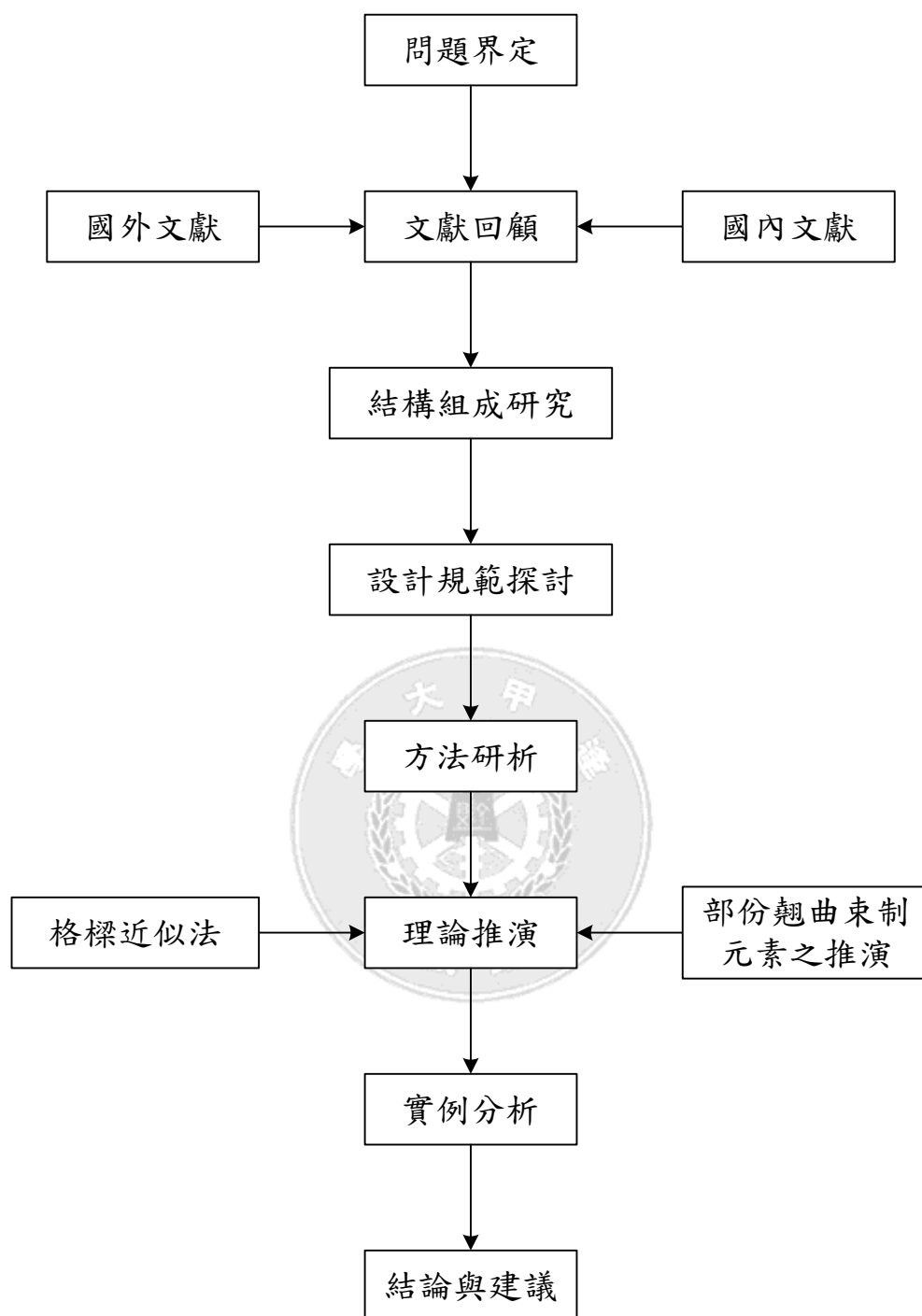


圖 1.3 研究流程圖

## 第二章 文獻回顧

### 2.1 前言

曲線 I 型鋼橋是屬於一種設計難度甚高之結構物，其設計方法亦隨設計者所要求精確度而大異其趣。直至目前為止，共有十二種不同分析方法可供橋樑設計師在初步設計與細部設計中使用。惟其中分別以有限元素法 (Finite Element Method)、格樑相似法 (Grid Analogy)、直線樑近似法 (Straight Beam Approximation)、三度空間剛架分析法與 V-Load Method 較常見，為節省篇幅，故本章之文獻回顧亦僅侷限於上述各方法。

### 2.2 有限元素法 (Finite Element Method)

有限元素法是所有可資利用於 I 型鋼橋設計之方法中可達最佳精確度者。然而，以現今電腦科技之發達，從工程之規劃、初步設計至細部設計與變更設計，如完全以有限元素法作為分析曲線橋樑之工具，則時間上之效益往往變成設計者考量之主要因素。而在另一方面，為了正確地將曲線鋼橋以有限元素法進行結構模擬，負責設計之橋樑工程師必須具備非常清晰之有限元素學理觀念。因此，如同參考文獻【66】所指出之建議，有限元素法應由專事研究發展之學術機關或政府機關帶頭，藉有限元素理論分析之精確性，建立具實用性之參考表格與圖形，或作為橋樑設計完成後之最後檢核工具，以確定橋樑設計之安全性。

有限元素法應用於曲線箱型樑遠早於曲線 I 型樑。在 1970 年至 1971 年間，美國加州大學柏克萊分校之 Meyer 與 Scordelis【2】將有限元素法應用在曲線混凝土箱型橋樑結構系統，其發展出兩種有限元素法來解析曲線混凝土箱型橋之結構行為。同年，Chu 與 Pinjarkar【3】亦發展另一套有限元素法來分析相同類型之曲線混凝土箱型樑。1971 年至 1972 年間，美國賓州大學之 Lansberry 與 Shore【4，5】首先應用有限元素法來分析曲線箱型鋼橋，利用勁度方法 (Stiffness Approach) 將薄壁板模擬成可以受薄膜 (Membrane) 與彎矩作用之環狀有限元素 (Annular Finite Element)。其所發展出來之有限元素共有六種：

- ①圓柱薄殼元素用來模擬曲線樑之腹板。
- ②環狀元素用來模擬曲線混凝土橋面版與曲線上下翼板。
- ③四邊形版元素用來模擬版緣之實心橫隔樑。

- ④直樑元素用來模擬橫樑與直線形大樑。
- ⑤三角形元素用來模擬支承處有斜角 (Skewed Angle) 之混凝土橋面版。
- ⑥曲線 I 型樑元素用來模擬縱向曲線 I 型大樑 (箱型鋼樑亦可視為兩個 I 型樑之組合)。

此有限元素發展過程接受 CURT(Consortium of University Research Teams)研究計畫之贊助，其電腦程式定名為 STACRB【6】。此電腦程式已被美國曲線橋樑規範【1】接受，規範中亦描述此程式之基本橋樑結構模擬步驟與原則。

1973 年，Fam【7】發展了一套利用有限元素理論來解析曲線箱型樑之靜載重與自由振動(Free Vibration)行為。在此理論中，箱型樑深度必須固定，箱型樑之線形(Alignment)可為直線、曲線或兩者之組合。箱型樑之上下翼板可以矩形與環狀元素加以模擬，垂直或傾斜之腹板則可以矩形與圓錐狀之元素模擬，當曲線形腹板由傾斜變為垂直時，則圓錐元素便可簡化成矩形元素。薄膜與彎矩作用在翼板與腹板元素中均列入考慮，但是因為橫隔樑之彎矩勁度與箱型樑之薄膜勁度比較下甚小，且大部份載重均垂直於橋面版平面，因此，Fam【7】假設橫隔樑效應亦可用薄膜元素來模擬。

1974 年，Bazant 與 Nimeiri【8】以勁度方法之有限元素理論來解析曲線長跨勁箱型橋，其最大之優點乃是長跨勁之曲線箱型橋可以簡化成薄壁箱型樑。此薄壁箱型樑便可進一步簡化成直線樑有限元素，因而在求解過程中收斂與精確度之要求便可輕易地達成。之後 Bazant 亦繼續改進其所發展之有限元素分析理論，但箱型橋樑型式變化多端，終其研究，不論精確如何改進，此方法仍只侷限於單室(Single Cell)箱型橋樑。

直至目前為止，將有限元素法應用在曲線 I 型鋼橋之分析理論已經非常完備，惟可惜的是大都僅侷限於單一 I 型鋼樑之分析，仍未有人將整座 I 型鋼橋用有限元素法之理論而得到具體之設計準則。其主要原因乃是將整座平面曲線 I 型鋼橋用高深之有限元素理論分析不但費時費力，而且所需經費著實驚人，在時間上、財力上而言，不是一般之業主獲主管機關在編列預算時所願意負擔。圖 2.1 與圖 2.2 所示為從事曲線 I 型鋼橋常採用之典型有限元素，由圖中可以看出，欲將偌大之曲線 I 型鋼橋上部結構切成細小之有限元素，其所需之節點與元素數目著實可觀，另一方面，如考慮鋼橋之複合作用(Composite Action)，則所花費之工夫與金錢將更形

驚人。

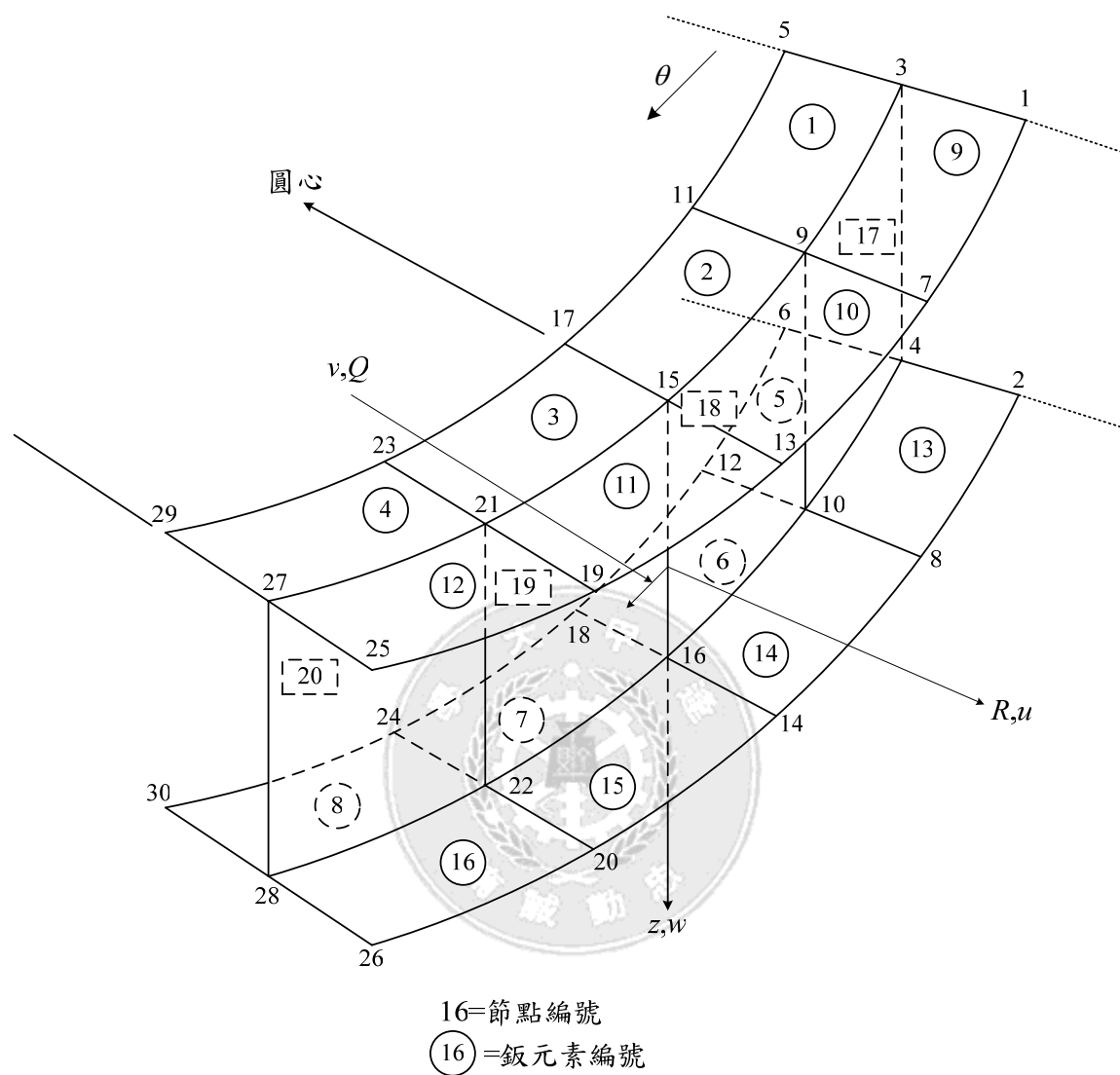


圖 2.1 有限元素分析曲線 I 型鋼橋有採用之典型鋼板元素

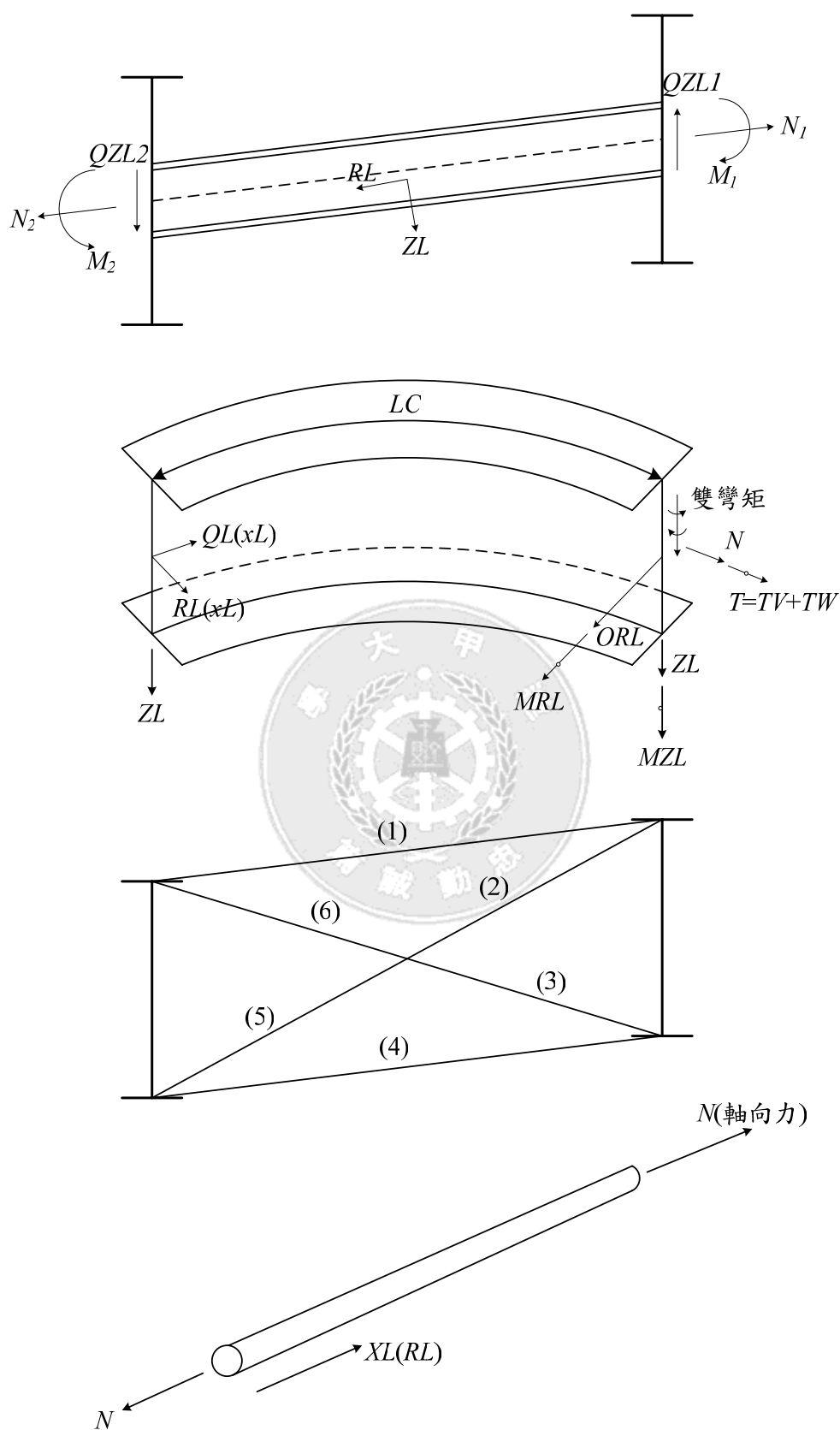


圖 2.2 有限元素分析曲線 I 型鋼橋之典型曲線樑元素與桿元素

## 2.3 格樑相似法 (Grid Analogy)

格樑相似法意指將橋樑之上部結構以具平面狀之格樑系統模擬之，此格樑系統之縱向樑即為橋樑上部結構之大樑，橫向樑則為橋樑間之橫隔樑，縱向樑與橫向樑之接點一般為剛接點(Rigid Joint)。一般而言，當橋樑之跨距與橋寬比值愈大時，用格樑相似法便可愈精確地求得曲線 I 型鋼橋之結構行為。然而必須注意的，即使將整個曲線 I 型鋼橋之上部結構模擬為格樑系統，格樑結構本身仍是一個高度靜不定之結構系統，且 I 型鋼樑內部仍有其他副構件（如內橫隔樑）之結構行為必須利用格樑相似法以外之分析方法求得。

1965 年，Lavelle 與 Boick【9】提出格樑相似法之概念，之後經由 Lavelle【10】等人於 1971 年加以修正。此方法中，將曲線橋樑之上部結構視為平面之格樑系統，而載重則垂直於格樑平面，翹曲效應則完全忽略不計。在格樑相似法之研發過程初期，由美國聯邦高速公路總署（Federal Highway Administration，FHWA）所主導之 CURT（Consortium of University Research Teams）研究計畫所贊助，其所發展之電腦程式定名為 CUGAR 1【10】。1975 年，Lavelle 與 Laska【11】為了考慮曲線樑翹曲之效應，把 CUGAR 1 加以修正而成為日後工程顧問公司首先使用於實際曲線橋樑設計之電腦程式，此程式定名為 CUGAR 2。由於 CUGAR 2 只適用於開口式(Open Section，例如 I 型樑)之曲線樑斷面，因此，Lavelle【12】於一年之後將 CUGAR 2 繼續更新，使其亦能分析封閉式(Closed Section，例如箱型樑)曲線樑與桁架型式之橫隔樑，此程式定名為 CUGAR 3。在此程式中，曲線橋樑深需為一定值，而且箱型樑必須有上側支撐(Top Lateral Bracing)，以使箱型斷面變為封閉式。CUGAR 系列之電腦程式實際應用上僅能用於靜載重分析，至於活載重分析則必須靠有經驗之工程師將活載重放置於正確位置方能求得最大之結構反應，例如最大彎矩、最大扭曲等等。

美國馬里蘭大學（University of Maryland, College Park）土木工程研究所為了改進 CUGAR 系列電腦程式之缺點，特別發展了另一套以格樑相似法為主體之曲線鋼橋電腦程式，定名為 DESCUS（Design of Curved Bridge System）【13，14，5】。此程式中，曲線 I 型鋼橋之曲線樑元素每一節點均具有四個自由度，亦即縱向彎矩、雙彎矩、垂直剪力與純扭曲。而 DESCUS 程式之最大突破在於其具有分析活載重之能力，車道載重與卡車載

重可以依設計規範之規定，自動地在格樑系統之平面上縱向或橫向移動，以求得格樑平面上最大之活載重結構反應。格樑相似法之優點有下列諸項：

- ①高度靜不定之曲線鋼橋可用格樑相似法輕易模擬，尤其當橋樑有為數甚多之大樑、支承中心線與橋樑中心線呈大斜角、或橋樑佈置呈不均勻變化時，用格樑相似法便可以縮短橋樑設計之時間。
- ②電腦科技發達後，用格樑相似法所發展之電腦程式可輕易地置於其中。

表 2.1 所示為可以用於平面曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素之演進過程，由此表中可以清楚看出，較進步之曲線格樑元素均能將曲線薄壁鋼樑特有之翹曲現象列入考量。由此表亦可看出，用於曲線樑分析之格樑元素有下列數種，即：

- ①利用數學解析方程式
- ②利用力平衡微分方程式
- ③利用有限差分法
- ④利用曲線薄壁樑元素(不含翹曲效應)
- ⑤利用直線薄壁樑元素(含翹曲效應)
- ⑥利用曲線薄壁樑元素(含翹曲效應)

## 2.4 直線樑近似法 (Straight Beam Approximation)

曲率半徑乃是促使曲線 I 型鋼橋分析變得複雜之首要原因，而直線樑近似法可說是曲線 I 型鋼橋分析法中最粗糙的數學模式。將一根曲線 I 型鋼樑切割成數個直線型鋼樑來模擬，完全忽略了曲率所衍生之橋樑結構行為。因此，在此分析法則中，橋樑因曲率所產生之勁度、雙彎矩效應 (Bimoment Effect) 與斷面畸變全部被忽略。Sawko【15】曾深入研究，用直線樑近似法分析曲線樑之誤差程度。其結果顯示，當曲率增大或當彎矩勁度／扭曲勁度之比值增加時，其誤差程度亦隨之增大。因此，除非曲線鋼橋之曲率甚小（趨近於直線）時，直線樑近似法方可用來作規劃與初步設計階段之工具。

## 2.5 三度空間剛架分析法

基本上，構成平面曲線 I 型鋼橋之大樑(Girder)與橫隔樑(Cross Frames)均屬薄壁結構(Thin-Walled Structures)，因為其大樑與橫隔樑均由厚度甚薄之鋼板組成，長度與寬度之比值甚大。

首先嘗試將薄壁曲線樑理論作整理者可以追溯到 1932 年之 Gottfeld【16】，他用有兩端支承之雙向格樑(Lattice Girder)做為分析對象，此雙向格樑形狀如兩個同心圓，荷重則垂直於格樑平面，兩格樑之間用橫樑加以相接。Gottfeld【16】之理論分析對日後之曲線橋樑分析理論並無實質之助益，但他的分析觀念卻對曲線橋樑簡化處理有正面之貢獻。

1948 年，Umanskii【17】對一個具雙軸對稱(Biaxial Symmetrical)斷面之簡支曲線 I 型樑完成理論分析。首先他把 I 型鋼樑雙彎矩現象利用起始參數(Initial Parameters)方法做了完整之敘述，並且嘗試將其理論擴展至曲線連續 I 型樑。Umanskii 之理論後來被 Dabrowski【18】證明為正確性有誤差。因為 Umanskii 用通過剪力中心之曲線軸所造成之扭曲角等於彎矩旋轉角之一次微分只能適用於直線樑，雖然對靜定樑而言仍能正確地表現其雙彎矩現象，但對斷面變形之分量而言則有可觀之誤差。

對單軸對稱(已通過斷面中心之直立軸對稱)之曲線 I 型鋼樑，線性且彈性之數學關係是於 1950 年由俄國之 Federhofer【19】正式推導出。其後於 1961 年，Vlasov【20】教授在其出版之第二版書籍”Thin-Walled Elastic Beams”中，對受到縱向彎矩與非均勻扭曲載重之對稱開放型斷面(Open Sections)之微分方程式有了更清楚之交代。但是其所發展之理論仍有一些基本之限制，斷面兩個主軸(Principal Axes)之一必須座落在曲率半徑之平面上。1972 年，Dabrowski【18】指出，對曲線薄壁樑受到垂直於曲率半徑之載重面，Vlasov 所推導出之微分方程式可以正確求得其合力與大部分變形分力，但對於斷面之變形估計卻有誤差。

McManus，Nasir 與 Culver【21】亦把平面曲線 I 型鋼橋之發展歷史，從 1843 年至 1968 年間之所有文獻做了系統性的歸納。根據文獻【21】之研究，發現首先將平面曲線樑作完整之線性分析者為 Saint-Venant【22】。從此之後，各方學者所推導之平面曲線良分析方法則有如雨後春筍般，但全都侷限於單一曲線樑線性結構。

近三十年來對平面曲線鋼橋理論整理較有貢獻為以下五個學者，即 Vlasov【20】、Dabrowski【18】、Heins【23】、Nakai and Yoo【24】。以上這些學者之研究幾乎是所有欲研讀曲線鋼橋者必備之資料。另外，文獻【25】則是關於曲線樑非線性結構行為最具代表性之創作。



直至目前為止，對於平面曲線橋樑之最大研究計畫首推由美國聯邦公路總署(Federal Highway Administration, FHWA)所資助之 CURT(Consortium of University Research Team)計畫，此計畫由 1969 年進行至 1976 年，參加計劃者有馬里蘭大學、賓州大學、羅德島大學與西若克斯大學(Syracuse University)，另外亦有數家著名之工程顧問公司。CURT 研究計畫除了將所有平面曲線橋樑作了完整文獻回顧之外，亦進行一連串之理論分析與實驗驗證。事實上，現今之 AASHTO(American Association of State Highway and Transportation Officials)平面曲線橋樑設計規範【1】有甚多之條文規範均源自 CURT 研究計畫【26, 27, 28】。如吾人所知，目前 AASHTO 與 NCHRP(National Cooperative Highway Research Program)仍繼續致力於對其曲線橋樑規範之改良。

## 2.6 V-Load Method

1963 年，美國鋼鐵公司(US Steel)出版了一套可以簡化開放式曲線 I 型鋼橋(Open Framing Curved I-Girder Bridge)分析之著名報告，此法即為工程實務界在初步規劃設計階段時常採用之 V-Load Method【29, 30】之最早起源。此處所謂開放式鋼橋意指相鄰鋼樑之間由橫隔(例如 Diaphragm, K-Bracing 與 X-Bracing)相接，但在鋼樑底鈹之處並無水平式之輔助支撐(例如風拉桿，Wind Bracing)。如果橫向水平支撐存在，此分析方法雖仍可用，但普遍被工程界人士認為過於繁瑣費時。因此，數年之後(1996 年)便有一經過修正之版本出現【31】。此法至此方為大眾所接受，並且因為將作用於橋樑上部結構之扭曲荷重由垂直剪力荷重(V)來模擬而被正式定名為 V-Load Method。

V-Load Method 之計算過程包括以下數個步驟，即：

- ①計算外部荷重造成之主要彎矩
- ②計算橫向彎矩
- ③計算作用於橫隔樑端之垂直剪力
- ④計算由上述垂直剪力所造成在頂鈹與底鈹之次要彎矩
- ⑤總合計算由主要彎矩、次要彎矩與橫向彎矩構成之正向應力
- ⑥由上述步驟②與③所求得之水平與垂直力求得作用在橫隔樑之應力。

以下吾人將分別說明之

步驟①：計算因外部荷重造成之主要彎矩

把曲線 I 型鋼樑是為直線形鋼樑，期長度與曲線 I 型鋼樑之弧長相同，然後計算其主要彎矩(Primary Bending，即縱向彎矩)。一般而言，除非橋樑曲率半徑甚小，吾人如將曲線鋼橋以直線型橋樑模擬之，其縱向彎矩之誤差應不至於太大。

如圖 2.3 所示，作用於曲線 I 型鋼樑某元素上之縱向彎矩可以用等值之軸向力偶簡化之。以此圖為例，該曲線兩元素兩端受到負彎矩(即頂鈑受拉，底鈑受壓)之作用。

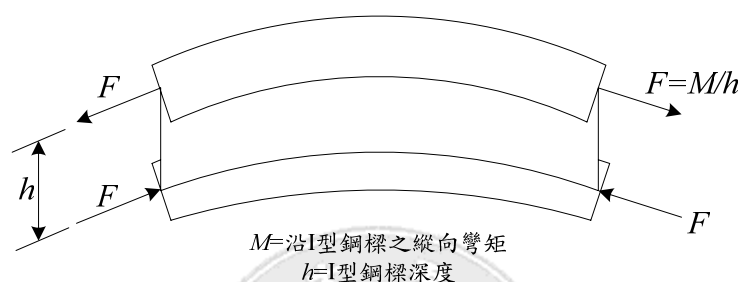


圖 2.3 作用於曲線 I 型鋼樑之縱向彎矩由兩個作用於翼鈑之等值軸向力模擬

步驟②：計算橫向彎矩

將頂鈑與底鈑個別視之，如圖 2.4 與圖 2.5 所示。由圖 2.4 所示，吾人可以清楚看出，由於翼鈑曲率之關係欲使翼鈑處於淨利平衡之狀態，則翼鈑必受到額外之力，此力吾人以徑向力(Radial Force)稱之，其延伸方向應與曲率中心重疊。此徑向力一般源自橫隔樑或橫向鋼架。如果頂鈑與橋面板整體作用，則曲線頂鈑之力平衡狀態便如圖 2.5 所示，由圖中吾人可以清楚看出，徑向力乃是均佈荷重之形式。吾人必須注意，如此模擬主要功用在於簡化分析步驟。

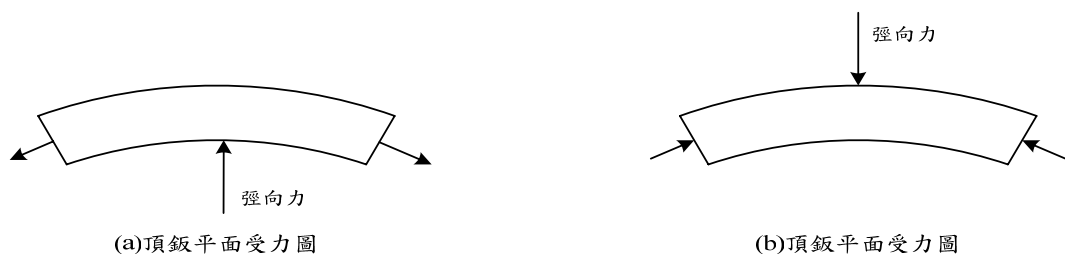


圖 2.4 作用於頂鈑與底鈑之利構成三力平衡狀態

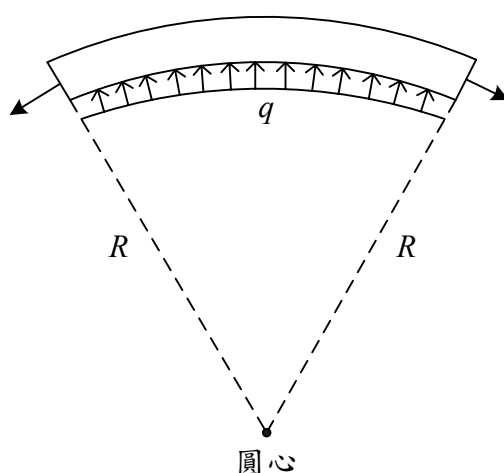


圖 2.5 作用於頂鈹之均佈荷重以平衡兩端之等值軸向力

為了解上述模式之內涵，吾人再以傳統之古典力學 Hoop Tension Analogy 說明之，如圖 2.6 所示。由此圖吾人可以清楚看出，如果圓箍之兩端各受到  $T$  之拉力（此處之拉力  $T$  類似圖 2.5 中之軸向力  $F$ ），從力平衡之觀點，圓箍內部受到之均佈荷重  $q$  便可依下列步驟得知，即：

$$T = qR \dots\dots\dots (2-1)$$

$$T = F = M/h \text{ (見圖 2.3)} \dots\dots\dots (2-2)$$

$$\therefore qR = M/h \dots\dots\dots (2-3)$$

$$\text{或 } q = M/Rh \dots\dots\dots (2-4)$$

上式中之  $M$  = 縱向彎矩， $R$  = 曲率半徑。綜觀圖 2.3 與圖 2.5，至此吾人可清楚看出，I 型鋼樑之頂鈹與底鈹受到之正向應力之來源有二，即：

- ① 由縱向彎矩造成之正向應力(見圖 2.3)
- ② 由翼鈹平面之徑向力而造成在翼鈹之正向應力，此正向應力意即吾人通稱之橫向彎矩正向應力(見圖 2.4)。

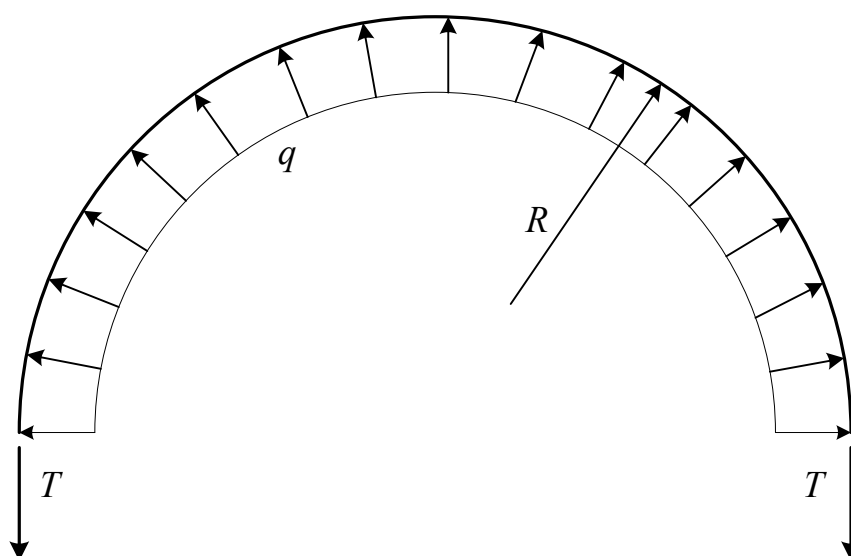


圖 2.6 古典力學中之 Hoop Tension Analogy

步驟③：計算作用於橫隔樑端之垂直剪力

由圖 2.4 吾人可以清楚看出，作用於翼板之徑向力必有反例作用於橫隔樑上，如圖 2.7 中之  $H_1$  與  $H_2$ 。緊接著，吾人必須計算作用於橫隔樑端點與大樑接觸部位之垂直剪力， $V$ ，如圖 2.7 所示。如果吾人假設：

$h$  = 大樑深度

$H_1$  = 作用於第 1 根大樑之徑向力

$H_2$  = 作用於第 2 根大樑之徑向力

$d$  = 橫隔樑之間距

$M_1$  = 第 1 根大樑之縱向彎矩

$M_2$  = 第 2 根大樑之縱向彎矩

$R$  = 第 1 根與第 2 根大樑之曲率半徑平均值

$V$  = 橫隔樑端點與大樑接觸部位之垂直剪力

$D$  = 大樑間距

然後參考圖 2.7(橫隔樑與大樑之互制)與圖 2.8(橫隔樑與翼板之互制)示意圖，則吾人可看出：

$$H_1 = q_1 d = \frac{M_1 d}{hR} \dots\dots\dots (2-5)$$

$$H_2 = q_2 d = \frac{M_2 d}{hR} \dots\dots\dots (2-6)$$

另一方面，由自由體(Free Body)之平衡，垂直剪力， $V$ ，可以下式表之：

$$V = \frac{(H_1 + H_2)h}{D} = \frac{M_1 + M_2}{RD/d} = \frac{M_1 + M_2}{K} \dots\dots\dots (2-7)$$

此處之垂直剪力， $V$ ，即是吾人所謂“V-Load Meathod”之“V”。式中之  $K$  值為鋼橋之幾何常數，其與外在荷重無關，

$$K = RD/d \dots\dots\dots (2-8)$$

吾人如以圖 2.7 為例，則吾人可以看出，由橫隔樑端作用於第 1 根大樑之垂直剪力有增大原縱向彎矩(即由外在荷重造成者)之傾向，因為垂直剪力之作用方向與外力一致。反之，第 2 根大樑之縱向彎矩去減小稍許，因為橫隔樑作用於大樑之剪力與外在荷重反向。

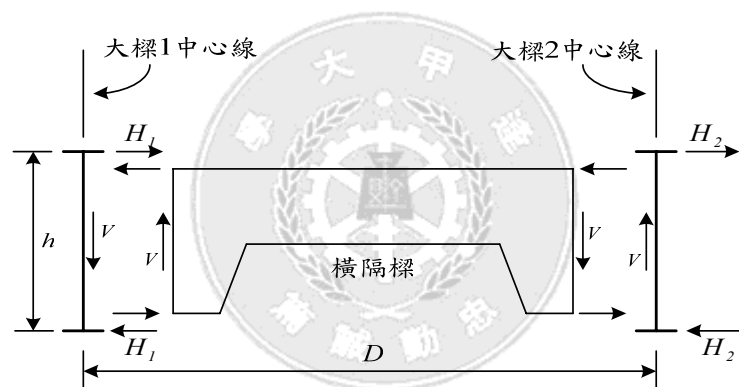


圖 2.7 橫隔樑與大樑之互制(橫斷面圖)

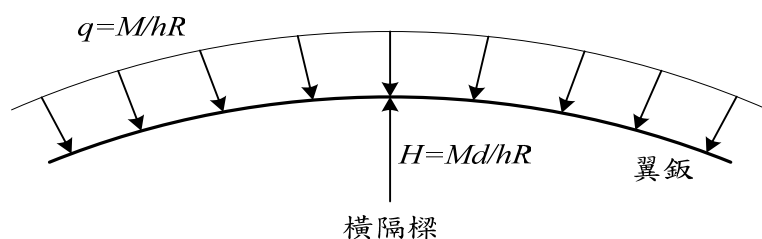


圖 2.8 大樑翼板與橫隔樑之互制(平面圖)

步驟④：計算由上述垂直剪力所造成在頂板與底板之次要彎矩 (Secondary Bending)。

作用於大樑斷面上縱向彎矩之來源有二，即：

- 由外部荷重造成之主要彎矩
- 由橫隔樑端之垂直剪力造成，作用於大樑斷面上之次要彎矩

參考圖 2.7，吾人如假設  $M_{lp}$  與  $M_{2p}$  分別為上部結構第 1 根與第 2 根大樑某斷面上之主要彎矩， $M_{v1}$  與  $M_{v2}$  為垂直剪力造成之次要彎矩，則大樑斷面上之縱向彎矩  $M_1$  與  $M_2$  便可表示如下：

$$M_1 = M_{lp} + M_{v1} \dots\dots\dots (2-9)$$

$$M_2 = M_{2p} + M_{v2} \dots\dots\dots (2-10)$$

然而由於：

$$M_{v2} = M_{v1} \times L_2 / L_1 \dots\dots\dots (2-11)$$

式中之負號代表  $M_{v1}$  與  $M_{v2}$  反向， $L_1$  與  $L_2$  則分別代表第 1 根與第 2 根大樑之跨距長度。綜合以上三式，吾人可得：

$$M_1 + M_2 = M_{lp} + M_{2p} + M_{v1}(1 - L_2/L_1) \dots\dots\dots (2-12)$$

因為  $M_{v1}(1 - L_2/L_1)$  之值通常甚小，吾人可以略之，因此，式(2-12)可以改寫為：

$$M_1 + M_2 = M_{lp} + M_{2p} \dots\dots\dots (2-13)$$

由式(2-7)、式(2-8)與式(2-13)，吾人便可得到下式，即：

$$V = \frac{M_{lp} + M_{2p}}{K} \dots\dots\dots (2-14)$$

由此式吾人可以清楚看出，橫隔樑端作用於大樑之垂直剪力可由大樑斷面上之縱向彎矩直接求出。

步驟⑤：總和計算由主要彎矩、次要彎矩與橫向彎矩造成之正向應力。

直至目前為止，吾人所探討之對象均侷限於大樑與橫隔樑之互制。對於此種互制行為，有另一種情況吾人亦必須列入考量，即大樑翼板本身與橫隔樑之互制，如圖 2.8 所示。由圖中吾人可以清楚看出，翼板在此種互制行為中所扮演之角色有如連續樑，此樑之支撐點有如橫隔樑。由傳統結構力學分析吾人可知，如果做用於此連續樑之荷重強度為  $q$ ，則在此連續樑可能發生之最大側向彎矩為：

$$M_{Lat} = \frac{qd^2}{10} \dots\dots\dots (2-15)$$

由前述式(2-4)，吾人已知：

$$q = \frac{M}{Rh} \dots\dots\dots (2-16)$$

因此，式(2-15)可以改寫為：

$$M_{Lat} = \frac{Md^2}{10Rh} \dots\dots\dots (2-17)$$

式中  $M$ =作用於大樑某斷面上之總縱向彎矩，及主要彎矩與次要彎矩之總和。

步驟⑥：由上述步驟②與③所求得之水平與垂直力求得作用在橫隔樑之應力。

V-Load Method 之最大特色在於將原為非常繁複之結構分析具體地簡化，由上述諸步驟之內容，吾人可以看出，曲線 I 型鋼橋上部結構之主要結構反應均可藉由此簡易分析方法得之。

直至目前為止，吾人在本章中所討論之 I 型鋼橋上部結構系統只有 2 根大樑，然事實上，吾人必須注意，曲線 I 型鋼橋上部結構鮮少只有 2 根大樑者。因此，前述之理論必須擴展至多樑系統（三根或以上），如圖 2.9 所示。一般而言，為有效分析多樑系統，吾人可將其結構行為分為兩部份，即：

- 格樑效應（Grid Effect），與
- 曲率效應（Curvature Effect）

所謂格樑效應意指吾人將整個橋樑上部結構模擬為格樑系統，其縱向(即橋樑長度方向)由大樑組成，橫向(與橋樑長度方向垂直)則由橫隔樑構成，不論橋樑為直線形或曲線形，此格樑系統均為橋樑承受外力之主要構件，然後其主要結構反應便可依傳統之結構分析(每次僅考慮單樑)與橫向傳遞因數之觀念綜合而得之。

曲率效應與橋樑上部結構之幾何特性有密切關係，其基本假設有下列兩項，亦即：

- 以上部結構中心線為準，外樑(曲率半徑較大者)承受之荷重比實際外在荷重大一些，此乃因為曲率之故(參考圖 2.9)

- 以上部結構中心線為準，其內樑(曲率半徑較小者)承受之荷重比實際外

在荷重稍小，此乃因為曲率之關係，使橫隔樑端作用於大樑之垂直剪力與外在荷重反向(參考圖 2.9)

由圖 2.9 中吾人亦可清楚看出， $V_1$ 、 $V_2$ 與 $V_3$ 分別是作用於橫隔樑之剪力，其中作用於最外側大樑之剪力為  $V$ ，其值等於  $V_1$ ，然後以橋樑中心線為準，依距離之比例，則作用於內樑之剪力便為  $V/3$ 。其詳細之推導過程亦可參考圖 2.9。

如前述，V-Load Method 之最大特色在於將原為非常繁複之結構分析具體地簡化，在較進步之格樑相似法與有限元素法電腦程式未在曲線鋼橋工程界普遍使用之前，V-Load Method 常被用在曲線 I 型鋼橋之初步設計，只要曲率半徑不是太小，則 V-Load Method 大致仍可符合工程實務上之基本需求。但吾人必須注意，V-Load Method 在其發展之初期便有其基本之使用限制與缺失，今簡述如下：

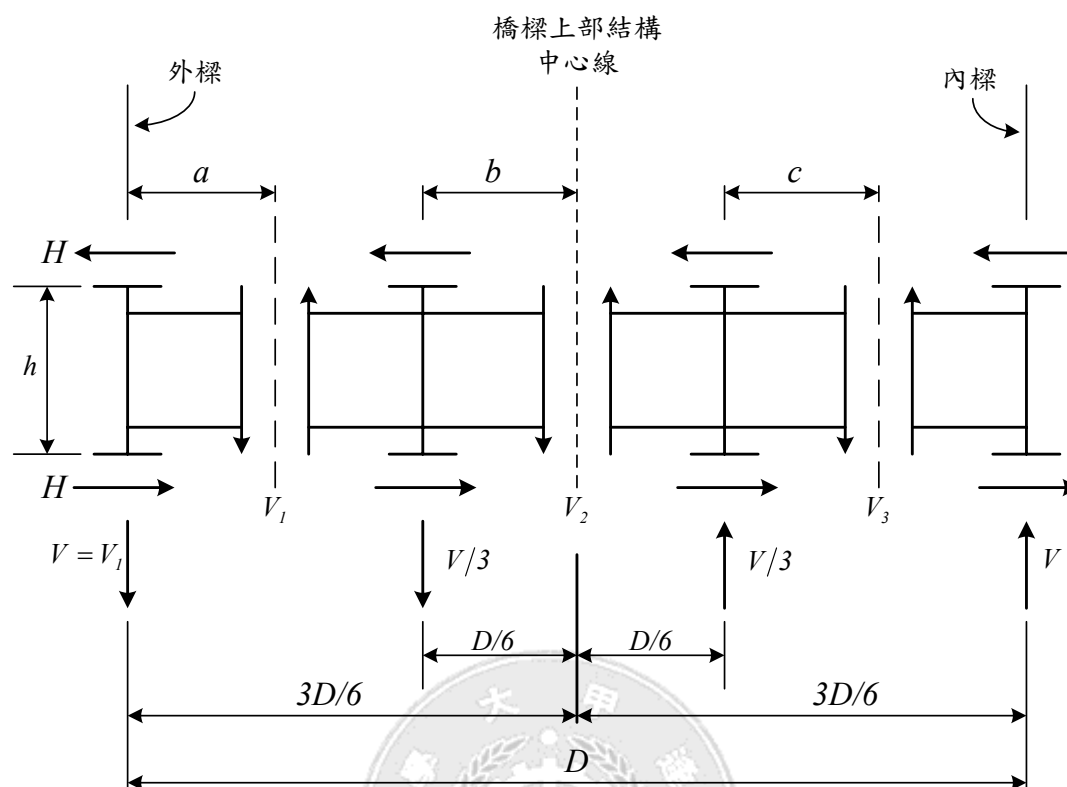
- ① V-Load Method 只能接受與橋樑平面垂直之荷重，對於其他方向之荷重(例如風力與地震力)，則必須經過另一次完整之分析，然後將其應力總結。
- ② 對橋樑某一橫斷面而言，在 V-Load Method 中均假設作用在大樑(在一個橫斷面有數根大樑)之剪力分布為線性。但是事實上，對於一個曲線 I 型鋼橋橫斷面而言，如果不同大樑之垂直勁度有異(例如在負彎矩區通常大樑之勁度較正彎矩區為大)時，則其橫斷面之剪力分佈必呈非線性。例如，對於一座曲線 I 型鋼橋承受非對稱之垂直荷重時便有上述情況存在，文獻【30】即指出在此情況之下，V-Load Method 所得之結果與由 MSC/NASTRAN【32】比較之下有極大之差異。圖 2.10 所示及為利用 MSC/NASTRAN【30，32】有限元素分析平面曲線 I 型鋼橋時之典型模擬形式。
- ③ V-Load Method 無法應用在封閉式之曲線 I 型鋼橋系統。此處所謂封閉式系統係指兩個相鄰 I 型鋼樑之間具有位於腹板上端之上弦桿(Top Chord)與腹板下端之下弦桿(Bottom Chord)之橫隔樑，因此，鋼橋斷面類似封閉形式。橫隔樑系統佈置對上部結構之結構穩定性行為具有非常重要之地位。眾所周知，橫隔樑與大樑均是橋樑上部結構之主要受力構件，其佈置形式，勁度與間距均會造成橋樑上部結構整體結構行為之差異；例如設計良好之橫隔樑系統便可以將橋樑上部結構之外力荷重均勻地(縱



向與橫向)分佈出去，間接達到上部結構設計時所強調之載重橫向傳遞(Lateral Distribution)之要求。

V-Load 雖然有上述之缺點，但時至今日，縱然幾經有為數不少之曲線 I 型鋼橋分析方法研發成功，然只要在使用條件內，其精確度亦受大眾肯定。因此，從時間效益與方便性而言，目前仍有為數不少之工程顧問公司在規劃與初步設計階段皆採用 V-Load Method。然而吾人在此必須強調，從橋樑工程設計之精確性與對專業負責之態度而言，V-Load Method 雖可用在初步設計階段，但在細部設計與最後檢核之階段，橋樑工程師應棄 V-Load Method 而改用其他方法(例如格樑相似法或有限元素法)，以求得更精確之結果。





$$Hh = V_1 a = M_1 (d/R)$$

$$V_1 [(D/3) - a] + V_2 b = M_2 (d/R)$$

$$V_2 [(D/3) - b] + V_3 c = M_3 (d/R)$$

$$V_3 [(D/3) - c] = M_4 (d/R)$$

三式相加：

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}{RD/3d}$$

代入  $V = V_1 = V_3$ ， $V_2 - V_1 = V/3$ ：

$$\frac{10}{3} V = \frac{\sum M}{RD/3d} \text{ 或 } V = \frac{\sum M}{(10/9)(RD/d)}$$

對雙樑系統而言，以  $K = \frac{RD}{d}$  代入

$$\therefore V = \frac{\sum M}{(10/9)K}$$

圖 2.9 具多樑系統之 I 型鋼橋

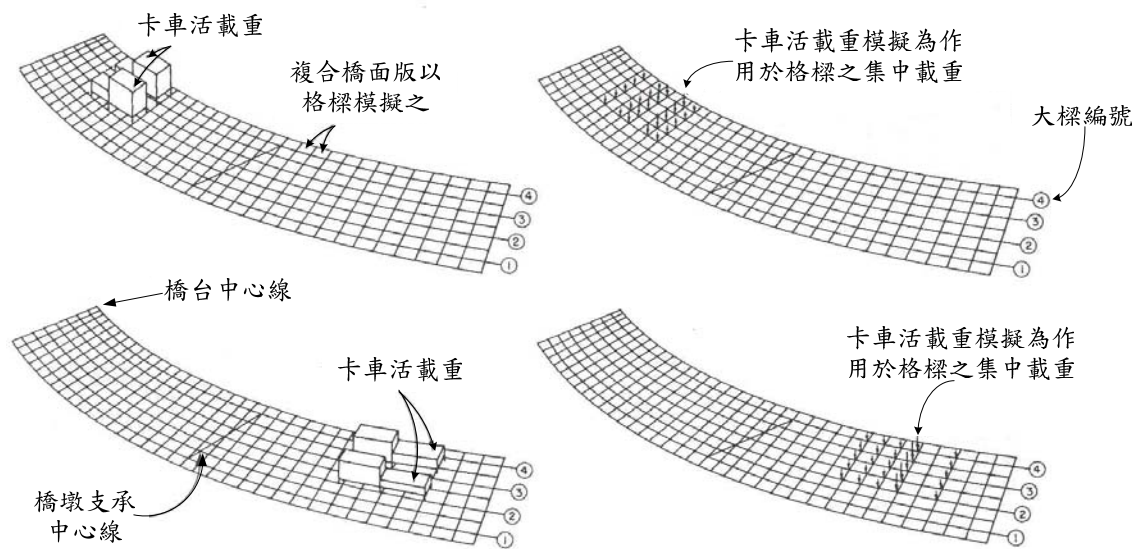


圖 2.10 MSC/NASTRAN 之有限元素分析模式



表 2.1 可用於曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素

| 型 式                    | 來 源                                 |      | 翹 曲 效 應 |       | 結 構 矩 陣 |     | 適 用 性           |                 |
|------------------------|-------------------------------------|------|---------|-------|---------|-----|-----------------|-----------------|
|                        | 作 者                                 | 年 代  | 包 括     | 不 包 括 | 勁 度     | 柔 度 | 開 放<br>式 斷<br>面 | 封 閉<br>式 斷<br>面 |
| 數 學<br>解 析<br>方 程<br>式 | Vlasov                              | 1961 | ✓       |       |         |     | ✓               |                 |
|                        | Konishi<br>Komatsu                  | 1965 | ✓       |       |         |     | ✓               | ✓               |
|                        | Brookhart                           | 1967 | ✓       |       |         |     | ✓               |                 |
| 微 分<br>方 程<br>式        | Dabrowski                           | 1968 | ✓       |       |         |     | ✓               | ✓               |
|                        | Li                                  | 1987 | ✓       |       |         |     | ✓               | ✓               |
| 有 限<br>差 分<br>法        | Komatsu ,<br>Nakai and<br>Nakanishi | 1971 |         | ✓     |         |     |                 | ✓               |
|                        | Heins<br>Spates                     | 1970 | ✓       |       |         |     | ✓               |                 |
|                        | Oleinik<br>Heins                    | 1975 | ✓       |       |         |     |                 | ✓               |

表 2.1 可用於曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素(續)

| 型式             | 來源                         |      | 翹曲效應 |     | 結構矩陣 |    | 適用性   |       |
|----------------|----------------------------|------|------|-----|------|----|-------|-------|
|                | 作者                         | 年代   | 包括   | 不包括 | 勁度   | 柔度 | 開放式斷面 | 封閉性斷面 |
| 曲線薄壁樑元素，不含翹曲效應 | Baron                      | 1961 |      | ✓   |      |    |       |       |
|                | Sawko                      | 1968 |      | ✓   |      | ✓  | ✓     | ✓     |
|                | Morris                     | 1968 |      | ✓   | ✓    |    | ✓     |       |
|                | Young                      | 1969 |      | ✓   |      | ✓  | ✓     |       |
|                | Tung ,<br>Fountain         | 1970 |      | ✓   |      |    |       | ✓     |
|                | Lavelle,<br>etal.<br>Cugar | 1971 |      | ✓   | ✓    |    | ✓     |       |
| 直線薄壁樑元素，含翹曲效應  | Ho                         | 1972 |      | ✓   | ✓    |    |       |       |
|                | Reilly                     | 1972 | ✓    |     | ✓    |    | ✓     | ✓     |
|                | Mondkar<br>Poweel          | 1974 | ✓    |     | ✓    |    | ✓     |       |
|                | Chandhary                  | 1984 | ✓    |     | ✓    |    | ✓     |       |
|                | Chen, Hu                   | 1988 | ✓    |     |      |    | ✓     |       |

表 2.1 可用於曲線 I 型鋼橋分析之格樑元素(續)

| 型 式  | 來 源                        |      | 翹 曲 效 應 |       | 結 構 矩 陣 |     | 適 應 性           |                 |
|--|----------------------------|------|---------|-------|---------|-----|-----------------|-----------------|
|  | 作 者                        | 年 代  | 包 括     | 不 包 括 | 勁 度     | 柔 度 | 開 放<br>性 斷<br>面 | 封 閉<br>性 斷<br>面 |
| 曲 線<br>薄 壁<br>樑 元<br>素，<br>含 翹<br>曲 效<br>應 | Lavelle<br>Cugar2          | 1975 | √       |       | √       |     | √               |                 |
|  | Lavelle<br>Cugar3          | 1976 | √       |       | √       |     | √               | √               |
|  | EI-Amin<br>Brotton         | 1976 | √       |       | √       |     | √               |                 |
|  | Thorntan<br>Master         | 1977 | √       |       | √       |     | √               |                 |
|  | Hong                       | 1979 | √       |       | √       |     | √               |                 |
|  | Chang,Heins,<br>Li and Shi | 1984 | √       |       | √       |     | √               | √               |
|  | Waldron                    | 1986 | √       |       |         | √   | √               | √               |
|  | Hsu                        | 1989 | √       |       | √       |     | √               | √               |

## 第三章 曲線薄壁鋼樑之力學行為

### 3.1 前言

以格樑相似法(Grid Analogy Method)解析曲線 I 型鋼橋之結構行為乃是目前橋樑工程界中最常採用者。在格樑相似法中，I 型鋼樑必須以薄壁鋼樑(直線形或曲線形)模擬，而其橫隔樑系統亦必須以直線形之薄壁鋼樑處理之，因此，薄壁鋼樑可謂格樑相似法之基本組成元件或元素(Element)。

為進行本研究，首先以著名之伏拉索夫(Vlasov)曲線樑原理【33】為基礎，循序漸進，由淺入深，將曲線薄壁鋼樑之力學行為作系統化之探討。

### 3.2 伏拉索夫之薄壁曲線樑理論

伏拉索夫曲線樑原理【33】有兩個基本假設，即：

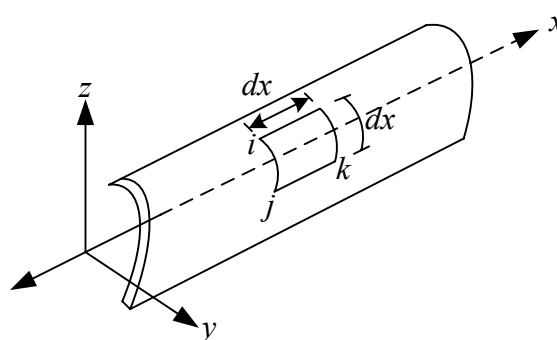
- ① 薄壁鋼樑橫斷面之形狀在外力作用之下均保持不變；亦即橫斷面無畸變現象，但可能有縱向(鋼樑長度方向，即  $x$  軸向)翹曲變形。
- ② 薄壁鋼樑橫斷面之剪力變形可以完全忽略，此乃因為剪力變形造成之應變能(Strain Energy)與彎矩應變能比較之下極其微小。

如由圖 3.1(a)之薄壁鋼樑觀之，伏拉索夫曲線樑原理【33】之第二個假設可以下式表之，即：

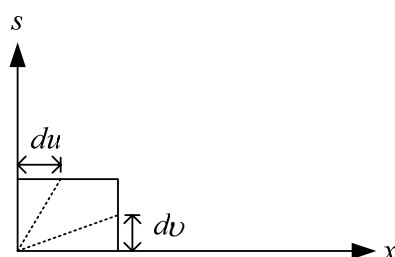
$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} + \frac{\partial v(x,s)}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3-1)$$

式中  $\gamma_{xs}$  = 沿橫斷面薄壁中心面(Middle Surface)造成之剪應變  
 $u$  = 正向變形(Normal Deformation)，沿  $x$  軸方向，與橫斷面垂直  
 $v$  = 沿  $s$  座標之剪力變形，見圖 3.1(b)  
 $s$  = 伏拉索夫曲線樑原理【33】中沿薄壁厚度中心面所定義之座標系統，在此以壁厚中線座標稱之，見圖 3.1(a)

伏拉索夫理論【33】之第二個假設無法應用於具有典率之 I 型鋼樑。



(a) 典型之薄壁鋼樑元素



(b) 剪力變形

圖 3.1 伏拉索夫理論第二個假設

針對伏拉索夫理論【33】，達伯文斯基(Dabrowski)【34】進行了一系列之研究，其證明在忽略彎矩與翹曲扭曲造成之剪力變形之前提下，薄壁封閉型斷面受到扭曲荷重時之剪應變可以下式表之，即：

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} + \frac{\partial v(x,s)}{\partial x} = \frac{q_s}{Gt} \dots\dots\dots (3-2)$$

式中  $q_s$  = 薄壁上之剪力流 (Shear Flow)，其為某一定值 (Constant)

$G$  = 彈性剪力模數 (Shear Modulus of Elasticity)

$t$  = 箱型鋼樑之薄壁厚度

### 3.3 薄壁樑之動自由度系統 (Kinematic System)

為了決定薄壁斷面上任一點變形位置之變化，首先必須建立其動自由度系統。一般而言，為了能具體描述斷面上任一點之變形位置，可以採用三個變位分量來表示(如圖 3.2 所示)，即：

- ① 縱向變位分量， $u$ ，即沿  $x$  軸向，與  $y$ - $z$  平面垂直。
- ② 沿壁厚中線座標( $s$ )切線方向之變位分量， $v$ ，以切線變位分量



稱之。

③與壁厚中線座標垂直之變位分量， $n$ ，以法線變位分量稱之。

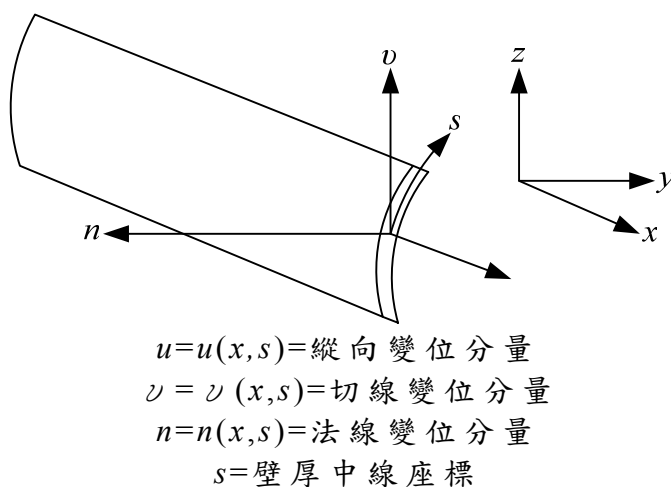


圖 3.2 薄壁鋼樑元素中任一點之變位分量( $u, v, n$ )

此三個變位分量( $u, v, n$ )構成一個右手定則之移動式垂直座標，且其為兩個獨立變數(即圖 3.2 中之  $x$  與  $s$ )之函數，然吾人必須注意，惟推導每個變位分量均含有兩個獨立變數之變位微分方程式甚為繁複，而且可能造成欲研發包含翹曲效應之薄壁樑元素之困擾，因此，應構思另外一種較為簡潔之座標來描述橫斷面上任一點之變形狀態。

對任一薄壁斷面而言，其形心位置不見得與剪力中心之位置相同，然而，吾人亦可確信，橫斷面任一點之變形位置應同時與形心、剪力中心具有某種程度之關係。有鑑於此，在此構思以四個變位分量(如圖 3.3 所示之  $\zeta, \xi, \eta$  與  $\phi$ )來描述橫斷面上任一點之變形狀態，而且此四個變位分量僅是縱向座標  $x$  之函數。如圖 3.3 所示，此四個變位分量中，

$\zeta(x) = \text{形心之縱向變位}(x \text{ 軸分向})$

$\xi(x) = \text{剪力中心之側向變位}(y \text{ 軸分向})$

$\eta(x) = \text{剪力中心之垂直變位}(z \text{ 軸方向})$

$\phi(x) = \text{剪力中心之旋轉角}$

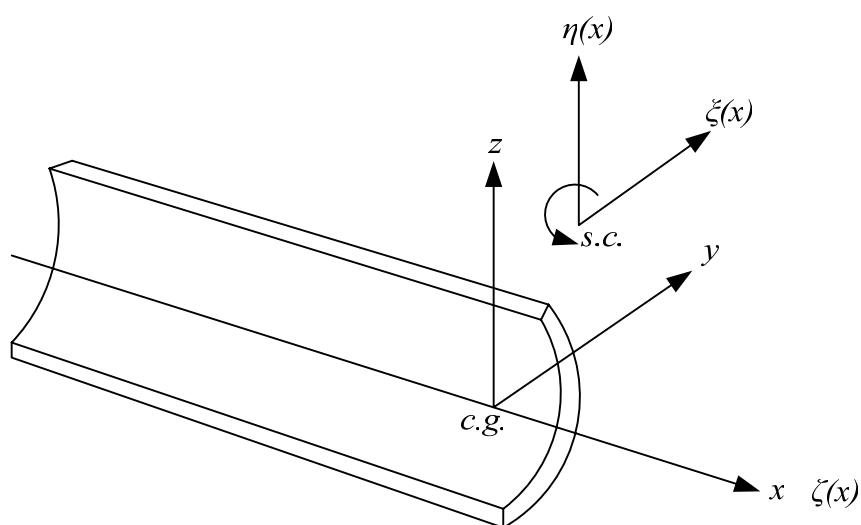


圖 3.3 薄壁鋼樑斷面之廣義變位分量

由伏拉索夫曲線樑原理【33】之第一個假設，對薄壁斷面上任一點而言，其側向變位可由圖 3.2 中之  $v$  與  $n$  變位向量描述之，且其應與斷面之剪力中心變位及斷面旋轉角有關。基於此，如仔細審視圖 3.4，則可清楚看出， $v$  與  $n$  可以下式表之，即：

$$v(x,s) = \xi(x) \cos \alpha(s) + \eta(x) \sin \alpha(s) + \phi(x)p(s) \dots\dots (3-3)$$

$$n(x,s) = -\xi(x) \sin \alpha(s) + \eta(x) \cos \alpha(s) + \phi(x)q(s) \dots\dots (3-4)$$

式中  $y, z$  = 以斷面形心為基點之主軸 (Centroidal Principal Axes)

$x$  = 經過斷面形心之縱軸

$s$  = 壁厚中線座標

$\alpha(s)$  = 壁厚中線座標上某一點之切線與  $y$  軸之夾角，如圖 3.4 所示

$p(s), q(s)$  = 以壁厚中線座標上某一點為基準之斷面剪力中心位置，如圖 3.4 所示。

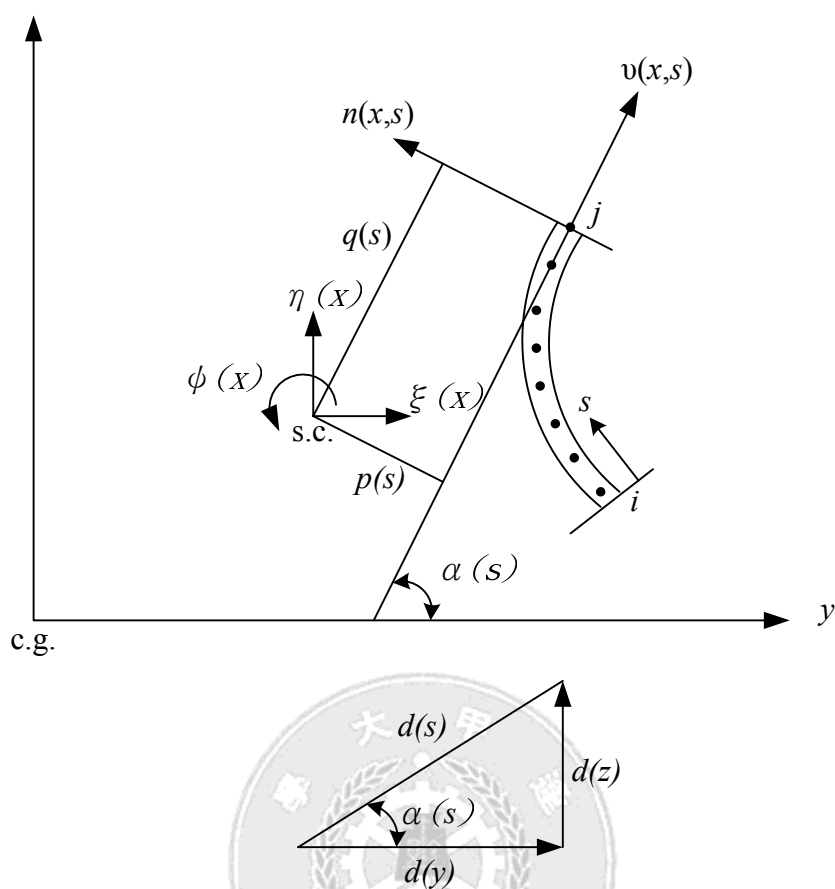


圖 3.4 薄壁鋼樑之某一段

如再仔細參閱圖 3.4，亦可清楚看出，式(3-3)與式(3-4)中之最後一項事實上是在表示整個斷面以剪力中心為轉軸而旋轉所造成之變位。

對一個單室(Single Cell)箱型樑而言，其受到純扭曲荷重造成在薄壁上之剪力流可以下式表之，即：

$$q_s = \frac{M_x}{2A_0} \dots\dots\dots (3-5)$$

式中  $A_0$  = 薄壁中線所包圍而成之面積

另一方面，對單室箱型鋼樑而言，由布萊德薄管原理(Bredt's thin-tube theory)，其純扭曲常數， $K_t$ ，可以表示成：

$$K_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots (3-6)$$

其純扭曲， $M_{sv}$ ，可以下式表之，即：

$$M_{sv} = GK_t \phi'(x) \dots\dots\dots (3-7)$$

如將式(3-6)代入式(3-7)，可得知：

$$M_{sv} = G \left( \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} \right) \phi'(x) \dots\dots\dots (3-8)$$

綜合式(3-5)，式(3-6)與式(3-8)，可以得到下式(剪應變)，即：

$$\begin{aligned} \gamma_{xs} &= \frac{q_s}{Gt} \\ &= \frac{1}{t} \cdot \Gamma \cdot \phi'(x) \dots\dots\dots (3-9a) \\ &= \frac{1}{t} \cdot \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \cdot \phi'(x) \end{aligned}$$

式中  $\Gamma$  = 幾何常數 (Geometric Constant)，對單室箱型斷面而言，其定義如下：

$$\Gamma = \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots (3-9b)$$

另一方面，由圖 3.4 亦可看出下列之幾何方程式，即：

$$\cos \alpha = \frac{dy(s)}{ds} \dots\dots\dots (3-10a)$$

$$\sin \alpha = \frac{dz(s)}{ds} \dots\dots\dots (3-10b)$$

利用此二方程式，式(3-3)便可重新表示成：

$$v(x,s) = \xi(x) \frac{dy(s)}{ds} + \eta(x) \frac{dz(s)}{ds} + \phi(x)p(s) \dots\dots\dots (3-11)$$

然後將式(3-9)與式(3-11)代入式(3-2)，便可得到下式，即：

$$\frac{\partial u(x,s)}{\partial s} = \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \cdot \frac{\phi'(x)}{t} - \left[ \xi'(x) \frac{dy(s)}{ds} + \eta'(x) \frac{dz(s)}{ds} + \phi'(x)p(s) \right] \dots (3-12)$$

利用此式針對壁厚座標  $s$  積分之，式(3-12)便可重新表示成：

$$\begin{aligned} u(x,s) &= u_0(x,s) + \int_0^s \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \frac{\phi'}{t} ds - \int_0^s \left[ \xi'(x) \frac{dy(s)}{ds} + \eta'(x) \frac{dz(s)}{ds} + \phi'(x)p(s) \right] ds \\ &= u_0(x,s) - \int_0^s [\xi'(x)dy(s) + \eta'(x)dz(s)] - \phi'(x) \left[ \int_0^s p(s)ds - \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \int_0^s \frac{ds}{t} \right] \dots (3-13) \\ &= u_0(x,s) - \xi'(x)y(s) - \eta'(x)z(s) - \phi'(x) \left[ \int_0^s p(s)ds - \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \int_0^s \frac{ds}{t} \right] \end{aligned}$$

上式中， $u_0$  為某一積分常數值，其與鋼樑橫斷面形心之縱向變位  $\xi(x)$  亦有關聯。另一方面，由伏拉索夫曲線樑原理【33】中之定義，開放式斷面之單位翹曲 ( $\omega_{open}$ ) 或段式座標 (Sectorial Coordinate) 可以下式表之，即：

$$\omega_{open} = \int_0^s p(s)ds \dots \dots \dots (3-14a)$$

此函數之物理意義事實上乃是面積，如圖 3.5 所示。另一方面，仿效式(3-14a)，如將封閉式斷面之段式座標定義為：

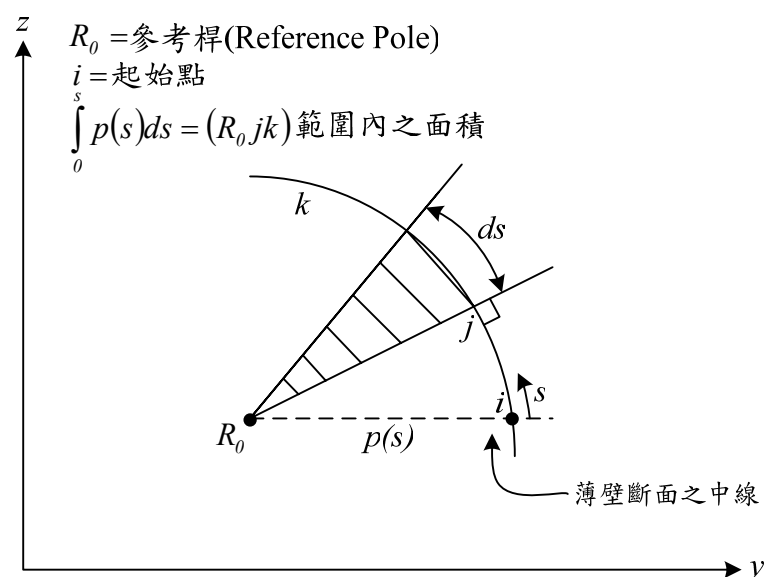


圖 3.5 翹曲函數之物理意義

$$\hat{\omega}_0(s) = \int_0^s p(s)ds - \frac{2A_0}{\oint \frac{ds}{t}} \int_0^s \frac{ds}{t} = \int_0^s \left[ p(s) - \frac{\Gamma}{t} \right] ds \quad \dots\dots\dots (3-14b)$$

式(3-13)便可表示成：

$$u(x,s) = u_0(x,s) - \xi'(x)y(s) - \eta'(x)z(s) - \phi'(x)\hat{\omega}_0(s) \quad \dots\dots\dots (3-15a)$$

比較式(3-14b)與(3-14a)，則可清楚看出式(3-14b)意指封閉式斷面以形心為基準點之單位翹曲。而式(3-14b)之最後一項，即：

$$\omega = \hat{\omega}_0(s)\phi'(x) \quad \dots\dots\dots (3-15b)$$

即是橫斷面上某一點之翹曲彎曲。

綜觀式(3-3)，式(3-4)與式(3-15)，可以清楚看出，薄壁鋼樑斷面上任一點之變位分量[亦即圖 3.2 中之 $u(x,s)$ ， $v(x,s)$ 與 $n(x,s)$ ]可以七個動自由度[即 $\zeta(x)$ ， $\xi(x)$ ， $\eta(x)$ ， $\phi(x)$ ， $\xi'(x)$ ， $\eta'(x)$ 與 $\phi'(x)$ ]表之，而且此七個動自由度均僅為單一變位數 $x$ 之函數。

綜合上述，亦可清楚認知，薄壁鋼樑受力作用時其斷面上任一點之變形位置，必須有七個動自由度方可具體描述之。然而，對一個平面格樑系統而言，所有之外載重均與格樑平面垂直，因此，在格樑平面之變形可以忽略。據此，上述之七個動自由度只剩下四個(即 $\eta$ ， $\phi$ ， $\eta'$ 與 $\phi'$ )適用於格樑相似法之結構分析，其中， $\phi'$ 代表與翹曲相關之自由度。

### 3.4 薄壁鋼樑之彈性原理

本章所述薄壁鋼樑之材質均具有均質性(Homogeneous)與等向性(Isotropic)，且其應力-應變關係限定於線彈性(Linear Elastic)範圍之內。由前述圖 3.2( $x, s, n$  座標系統)觀之，且根據彈性原理，吾人可得下列六個應變方程式，即：

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_s + \sigma_n)]/E \dots\dots\dots (3-16a)$$

$$\varepsilon_s = [\sigma_s - \nu(\sigma_n + \sigma_x)]/E \dots\dots\dots (3-16b)$$

$$\varepsilon_n = [\sigma_n - \nu(\sigma_x + \sigma_s)]/E \dots\dots\dots (3-16c)$$

$$\gamma_{xs} = \tau_{xs}/G \dots\dots\dots (3-16d)$$

$$\gamma_{sn} = \tau_{sn}/G \dots\dots\dots (3-16e)$$

$$\gamma_{nx} = \tau_{nx}/G \dots\dots\dots (3-16f)$$

上式中  $\nu$  = 柏松比 (Poisson's Ratio)，  
 $E$  = 彈性模數 (Elastic Modulus)

由前述伏拉索夫曲線樑原理之第一個基本假設，吾人可知：

$$\varepsilon_s = 0 \dots\dots\dots (3-17a)$$

$$\varepsilon_n = 0 \dots\dots\dots (3-17b)$$

$$\gamma_{sn} = 0 \dots\dots\dots (3-17c)$$

因此，式(3-16b,c 與 e)可引伸出下列方程式，即：

$$\sigma_s - \nu(\sigma_n + \sigma_x) = 0 \dots\dots\dots (3-18a)$$

$$\sigma_n - \nu(\sigma_x + \sigma_s) = 0 \dots\dots\dots (3-18b)$$

$$\tau_{sn} = 0 \dots\dots\dots (3-18c)$$

另一方面，由於薄壁鋼樑之壁厚甚薄，無法傳遞與壁面垂直之任何力量，因此，

$$\sigma_n = 0 \dots\dots\dots (3-19)$$

$$\tau_{xn} = 0 \dots\dots\dots (3-20)$$

至此，綜合式(3-16)至式(3-20)，吾人可以看出， $(x,s,n)$ 座標系統中之應力與應變只有四項具有實用之意義，即： $\sigma_x, \sigma_s, \varepsilon_x$ 與 $\tau_{xs}$ 。而且：

$$\sigma_s = \nu\sigma_x \dots\dots\dots (3-21a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu\sigma_s]/E \\ &= (1-\nu^2)\sigma_x/E \dots\dots\dots (3-21b) \end{aligned}$$

如進一步設定：

$$E_l = E/(1-\nu^2) \dots\dots\dots (3-22)$$

則式(3-21b)便可表示成：

$$\varepsilon_x = \sigma_x/E \dots\dots\dots (3-23)$$

此式乃是在薄殼元素(Thin Shell Element)中非常著名之應力-應變關係式。將式(3-23)代入式(3-21a)，便可得到下式，即：

$$\sigma_s = \nu\sigma_x = E_l\nu\varepsilon_x = E\nu\varepsilon_x/(1-\nu^2) \dots\dots\dots (3-24)$$

上式中之 $\sigma_s$ 與 $\sigma_x$ ， $\tau_{xs}$ 比較下非常微小，因此，可忽略之。

綜合以上所述，可以清楚知悉，在薄壁結構中，事實上只有 $\sigma_x$ 與 $\tau_{xs}$ 兩個與應力有關之項最為重要。另一方面，為了方便起見，彈性模數之修正值( $E_l$ )在下一節中將以 $E$ 註記之，以求全文之前後連貫。

### 3.5 正向應力

薄壁鋼樑斷面上任一點沿縱軸( $x$ 軸)量測之應變可以下式表之，即：

$$\varepsilon_x(x,s) = \frac{\partial u(x,s)}{\partial x} \dots\dots\dots (3-25)$$

因此，正向應力可以表示成：

$$\sigma_x(x,s) = E[u'_0(x,s) - \xi''(x)y(s) - \eta''(x)z(s) - \phi''(x)\hat{\omega}_0(s)] \dots\dots\dots (3-26)$$

由於 $y, z$ 軸乃是經過斷面形心之主軸，其一次慣性矩與積慣



性矩 (Product Moment of Inertia) 便可以下列諸式表之，即：

$$\int_A y dA = 0 \dots\dots\dots (3-27a)$$

$$\int_A z dA = 0 \dots\dots\dots (3-27b)$$

$$\int_A yz dA = 0 \dots\dots\dots (3-27c)$$

式 (3-26) 之括號內之第一項可由式 (3-28) 之力平衡方程式得知，即：

$$\int_A \sigma_x dA = N \dots\dots\dots (3-28)$$

式中  $N$  = 外在之軸向力

綜合上述，且由式 (3-26) 對整個橫斷面積 ( $A$ ) 積分之，則可得下列二式，即：

$$E \left[ u'_0(x, s) A - \phi''(x) \int_A \hat{\omega}_0(s) dA \right] = N \dots\dots\dots (3-29)$$

$$u'_0(x, s) = \frac{N}{EA} + \frac{\phi''(x)}{A} \oint \hat{\omega}_0(s) t ds \dots\dots\dots (3-30)$$

將式 (3-30) 反代入式 (3-26)，吾人便可將正向應力， $\sigma_x$ ，表示成：

$$\sigma_x(x, s) = \frac{N}{A} - E\xi''(x)y(s) - E\eta''(x)z(s) + E\phi''(x) \left[ \frac{I}{A} \oint \hat{\omega}_0(s) t ds - \hat{\omega}_0(s) \right] \dots\dots (3-31)$$

針對上式，如定義：

$$\hat{\omega}_n = \frac{I}{A} \oint \hat{\omega}_0(s) t ds - \hat{\omega}_0(s) \dots\dots\dots (3-32)$$

則式 (3-31) 便可以改寫成：

$$\sigma_x(x, s) = \frac{N}{A} - E\xi''(x)y(s) - E\eta''(x)z(s) + E\phi''(x)\hat{\omega}_n(s) \dots\dots\dots (3-33)$$

上式中， $\hat{\omega}_0(s)$  即是文獻【33-35】定義之“法化單位翹曲函數” (Normalized Unit Warping Function)。圖 3.6 所示即為典型箱型鋼樑之法化單位翹曲函數圖。

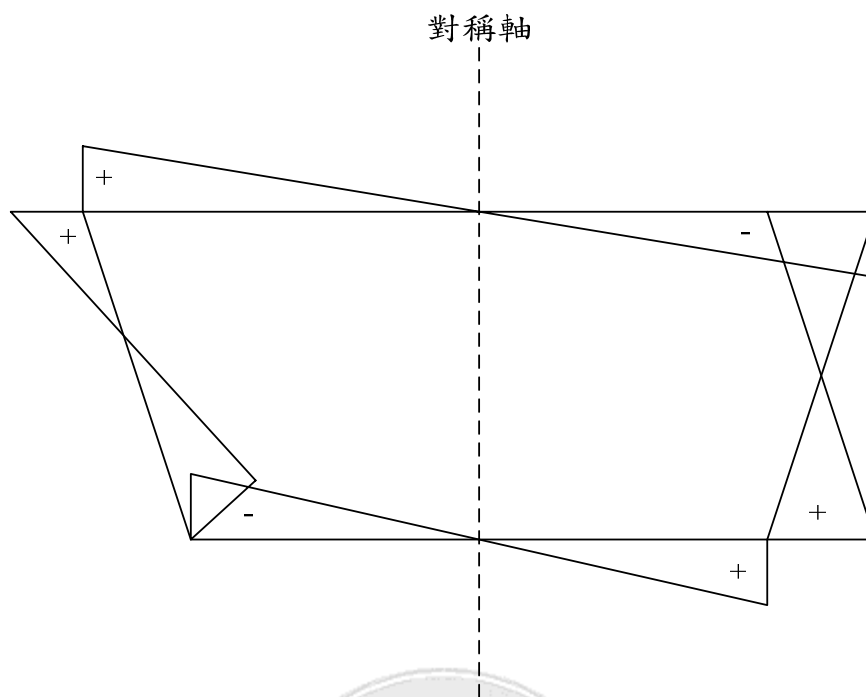


圖 3.6 典型箱型鋼樑斷面之法化單位翹曲函數

由於吾人選定之參考桿（見前述圖 3.5 之 Reference Pole）與斷面形心同位置，其段式坐標之初始半徑（Initial Radius of Sectorial Coordinates）， $\omega(x)$ ，與斷面主軸之初始半徑亦相同，因此，可得下列諸式：

$$\int_A \hat{\omega}_n(s) dA = 0 \quad \dots\dots\dots (3-34a)$$

$$\int_A \hat{\omega}_n(s) y dA = 0 \quad \dots\dots\dots (3-34b)$$

$$\int_A \hat{\omega}_n(s) z dA = 0 \quad \dots\dots\dots (3-34c)$$

緊接著，將式(3-33)等號之兩邊分別乘以  $y(s)$ ,  $z(s)$  與  $\hat{\omega}_n(s)$ ，然後再將此式對整個橫斷面積積分之，便可得下列諸式，即：

$$M_y = \int_A \sigma_x(x, s) z(s) dA = -\eta''(x) EI_y \quad \dots\dots\dots (3-35a)$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x(x, s) y(s) dA = \xi''(x) EI_z \quad \dots\dots\dots (3-35b)$$

$$B_i = -\int_A \sigma_x(x, s) \hat{\omega}_n(s) dA = \phi''(x) EI_w \quad \dots\dots\dots (3-35c)$$

式中  $I_y$  ,  $I_z$  = 針對形心主軸  $y$  與  $z$  軸之二次慣性矩 ,

$I_w$  = 翹曲常數【33-36】，其定義為：

$$I_w = \int_A \hat{\omega}_n^2(s) dA \dots\dots\dots (3-36)$$

式中  $M_y$  ,  $M_z$  = 針對形心座標軸  $y, z$  之外在彎矩

$B_i$  = 雙彎曲 (Bimoment)

式(3-35c)中之負號純粹是由於  $\sigma_x$  ,  $\hat{\omega}_n$  與  $B_i$  之符號定義。在本文中，構成雙彎矩之兩個彎矩互視之，在此定義其方向以逆時針為正，如圖 3.7 所示。

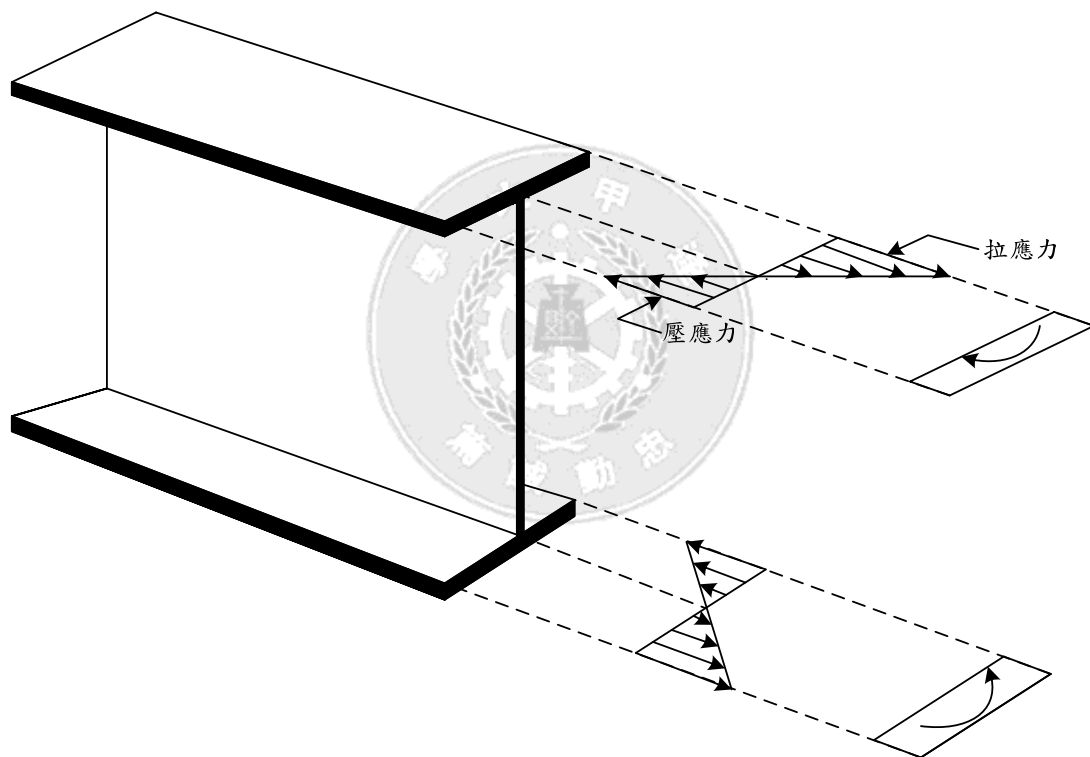


圖 3.7 正雙彎矩之符號定義

將式(3-35)代入式(3-33)，正向應力( $\sigma_x$ )之通式便可表示成：

$$\sigma_x = \sigma_n + \sigma_{by} + \sigma_{bz} + \sigma_w = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} - \frac{B_i \hat{\omega}_n}{I_w} \dots\dots\dots (3-37)$$

此式中，正向應力  $\sigma_x(x, s)$  由廣義力 (Generalized Forces)  $N(x)$  ,  $M_y(x)$  ,  $M_z(x)$  與  $B_i$  表示而成。前三項與傳統材料力學之理論無異，

其基本假設為尤拉-伯努利(Euler-Bernoulli)原理。第四項與翹曲正向應力有關，其斷面受到扭曲荷重後原有之平整性消失，且其翹曲係依照尤拉索夫之段式面積（見圖 3.5）理論【33】。

### 3.6 剪應力

回顧前述之式(3-2)，可以清楚看出，將伏拉索夫曲線樑原理【33】應用於薄壁鋼樑之最大缺失在於其僅考慮純扭曲造成之剪應變，而翹曲扭曲造成之剪應變( $\gamma_w$ )則完全忽略，此意謂著吾人無法利用翹曲剪應力( $\tau_w$ )、翹曲剪應變( $\gamma_w$ )之相互關係求解翹曲扭曲剪應力，必須另謀他法，利用薄壁鋼樑縱向之力平衡條件方可得之。

封閉式斷面之剪應力求解可以利用開放式斷面為之，然後再將其缺口兩側利用相容性(Compatibility)之原理使其具有封閉式斷面之特性。如圖 3.8 所示，圖中之  $y$ 、 $z$  軸為通過形心之主軸，考量某一微小元素  $tdsdx$ ，則由其  $x$  方向之力平衡，則吾人可以得知：

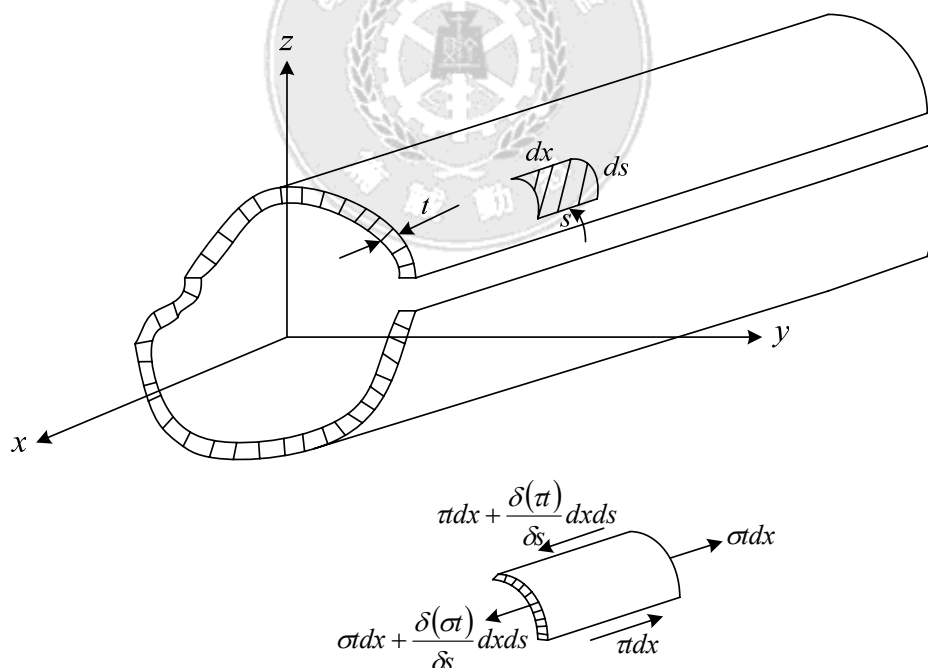


圖 3.8 典型開放式薄壁樑於縱向之剪力平衡

$$\frac{\partial(\pi)}{\partial s} = -\frac{\partial\sigma}{\partial x} \dots\dots\dots (3-38)$$

式中  $\tau$  = 剪應力。將上式由斷面之開口邊緣積分  $s$  之距離，則

可得剪力流表示式如下：

$$\tau(x, s)t(s) = -\int_0^s t(s) \frac{\partial \sigma(x, s)}{\partial x} ds + c(s) \dots\dots\dots (3-39)$$

式中  $c(s)$  為某一積分常數，且其在薄壁鋼樑縱向斷面開口處 ( $s=0$ ) 無外在之縱向剪力荷重之情況下，此積分常數值應自動消失 (等於零)。將式(3-37)微分，然後代入式(3-39)，則可得：

$$\pi = \frac{-I}{I_y} \frac{dM_y}{dx} \int_0^s ztds + \frac{I}{I_z} \frac{dM_z}{dx} \int_0^s ytds + \frac{I}{I_\omega} \frac{dB_i}{dx} \int_0^s \hat{\omega}_n tds \dots\dots\dots (3-40)$$

另一方面，吾人亦可由材料力學之基本原理得知下列四式，即：

$$V_z = \frac{dM_y}{dx} \dots\dots\dots (3-41a)$$

$$V_y = -\frac{dM_z}{dx} \dots\dots\dots (3-41b)$$

$$Q_z = \int_0^s ytds \dots\dots\dots (3-42a)$$

$$Q_y = \int_0^s ztds \dots\dots\dots (3-42b)$$

式中  $V_y, V_z$  = 沿  $y, z$  軸之正方向，由彎矩造成之剪力 (Bending Shear)  
 $Q_y, Q_z$  = 針對  $y, z$  軸之一次慣性矩

接著，如定義下式：

$$S_\omega = \int_0^s \hat{\omega}_n tds \dots\dots\dots (3-43)$$

為翹曲靜慣性矩 (Warping Static Moment) 【33，35】，則式(3-40)可以改寫成：

$$\tau = -\frac{V_y Q_z}{I_z t} - \frac{V_z Q_y}{I_y t} + \frac{S_\omega}{I_\omega t} \frac{dB_i}{dx} \dots\dots\dots (3-44)$$

圖 3.9 所示即為典型薄壁 I 型與箱型鋼樑之翹曲靜慣性矩圖。

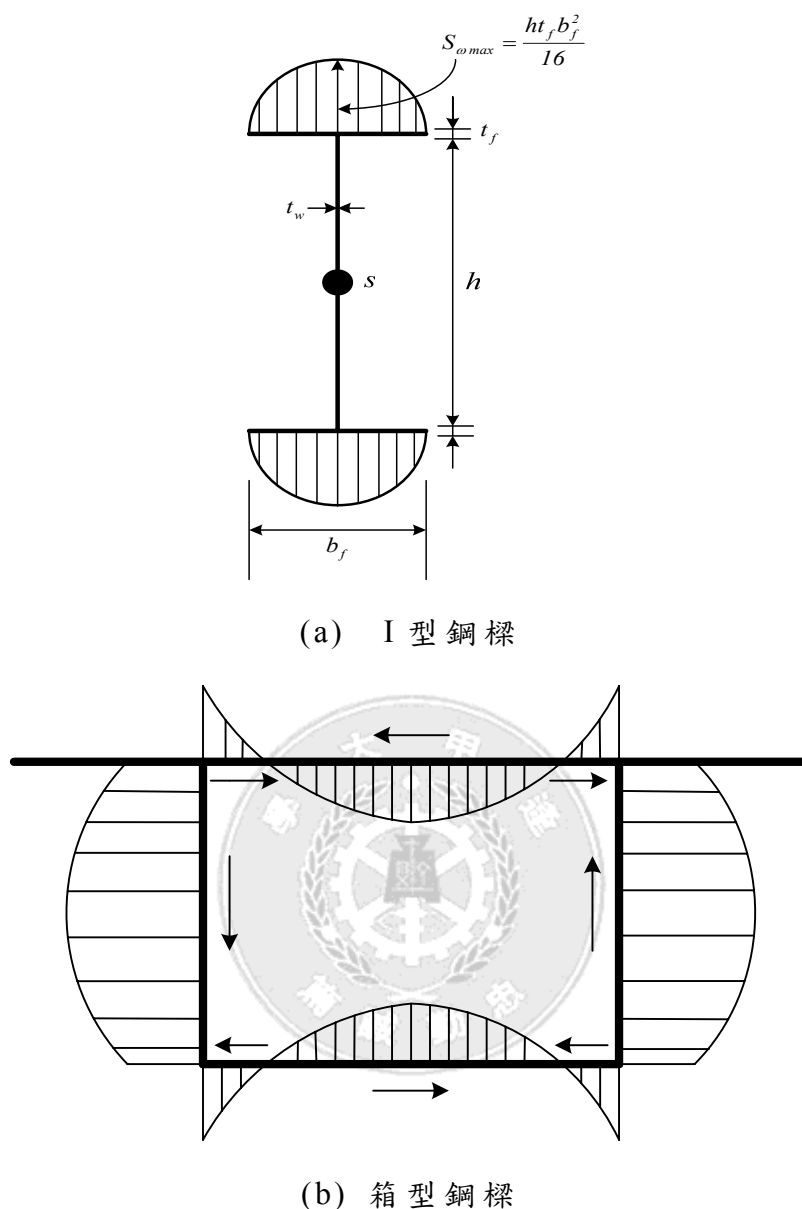


圖 3.9 典型薄壁鋼樑之翹曲靜慣性矩圖

雙彎矩， $B_i$ ，與翹曲扭曲， $M_\omega$ ，之關係式可以下式表之【35】，即：

$$M_\omega = -\frac{dB_i}{dx} = -EI_\omega \phi''' \dots\dots\dots (3-45)$$

因此，出現於式(3-44)中第三項之剪力流(由翹曲扭曲造成)便可示成：

$$(\tau_w t)_{open} = \frac{S_\omega M_\omega}{I_\omega} \dots\dots\dots (3-46)$$

由於吾人所考量之斷面仍為開放式斷面，其缺口仍未相接。因此，為了將此斷面封閉，在缺口處必須施加某一剪力流  $q_t$  使其缺口兩端具有連續性。因此，封閉式斷面之翹曲扭曲剪力流便可表示成：

$$(\tau_{\omega} t)_{closed} = \frac{S_{\omega} M_{\omega}}{I_{\omega}} + q_t \dots\dots\dots (3-47)$$

因為，在缺口處兩端無相對之變位存在，無翹曲剪力變形，因此，下式必須成立，即：

$$\omega_s = \oint \gamma_{\omega} ds = \oint \frac{\tau_{\omega}}{G} ds = 0 \dots\dots\dots (3-48)$$

式中  $\gamma_{\omega}$  乃是由翹曲扭曲造成之剪應變角度。緊接著，將式 (3-48) 代入式 (3-47)，解得  $q_t$ ，便可得：

$$q_t = -\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \frac{\oint S_{\omega} \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots (3-49)$$

為了得到箱型鋼樑斷面翹曲扭曲剪力流之表示成  $(\tau_{\omega} t)$ ，可將式 (3-49) 代入式 (3-47) 而得到下式，即：

$$\tau_{\omega} t = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \left( S_{\omega} - \frac{\oint S_{\omega} \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \right) \dots\dots\dots (3-50)$$

如定義：

$$S_{\dot{\omega}} = S_{\omega} - \frac{\oint S_{\omega} \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots (3-51)$$

則式 (3-50) 便可表示成：

$$\tau_{\omega} t = \frac{M_{\omega} S_{\dot{\omega}}}{I_{\omega}} \dots\dots\dots (3-52)$$

式 (3-51) 乃是對封閉式斷面而言，眾所周知之折減翹曲靜慣性矩 (Reduced Warping Static Moment)。緊接著，將式 (3-52) 代入式

(3-44)，便可得到由於縱向彎矩與翹曲扭曲造成之剪應力，如下式所示：

$$\tau = -\frac{V_y Q_z}{I_z t} - \frac{V_z Q_y}{I_y t} - \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega t} \dots\dots\dots (3-53)$$

吾人必須注意，式(3-53)中並未包含由純扭曲所造成之剪應力。

對封閉式斷面而言，外在之扭曲荷重由兩部分之內力共同抵抗，即：純扭曲( $M_{sv}$ )與翹曲扭曲( $M_\omega$ )，或以下式表之：

$$M_x = M_{sv} + M_\omega = GK_t \phi' - EI_\omega \phi'' \dots\dots\dots (3-54)$$

由基本之材料力學原理，吾人已知，純扭曲( $M_{sv}$ )可以下式表之：

$$M_{sv} = GK_t \phi' \dots\dots\dots (3-55)$$

對薄壁封閉式斷面而言，其純扭曲常數， $K_t$ ，可以布雷德薄壁管原理(Bredt's thin-tube theory)得之[與前述式(3-6)同]，即：

$$K_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots (3-6)$$

$$\tau_{sv} = \frac{M_{sv}}{2A_0 t} \dots\dots\dots (3-56)$$

綜合上述，可以清楚看出，造成薄壁鋼樑剪應力者計有彎矩，純扭曲與翹曲扭曲諸因素。

### 3.7 曲線樑元素之力與變位之關係

對直線形之薄壁樑而言，其變形狀態可以用四個應變量，即 $\epsilon_x, \kappa_x, \kappa_y$ 與 $\kappa_z$ 表示之。此四個應變量與其相對應之四個自由度可以下列諸式表示，即：

$$\epsilon_x = \zeta' \dots\dots\dots (3-57a)$$

$$\kappa_y = -\eta'' \dots\dots\dots (3-57b)$$

$$\kappa_z = \xi'' \dots\dots\dots (3-57c)$$

$$\kappa_x = \phi' \dots\dots\dots (3-57d)$$



式中  $\kappa_y$  與  $\kappa_z$  分別是主軸  $zx$  與  $xy$  平面之曲率，而  $\kappa_x$  則是與翹曲相關之曲率。將上述四式代入式(3-35)與式(3-54)，則直線形薄壁樑之力-變位關係便可以下列五式代表之，即：

$$N = EA\varepsilon_x \dots\dots\dots (3-58a)$$

$$M_y = EI_y\kappa_y \dots\dots\dots (3-58b)$$

$$M_z = EI_z\kappa_z \dots\dots\dots (3-58c)$$

$$M_x = GK_t\kappa_x - EI_\omega\kappa_x'' \dots\dots\dots (3-58d)$$

$$B_i = EI_\omega\kappa_x' \dots\dots\dots (3-58e)$$

對一個直線薄壁樑而言，只要其變形量甚小，則其變形量便可以用 Lagrange 座標或 Eulerian 座標描述之，不過，對一個曲線薄壁樑而言，即使其變形量甚小，為了描述其包含翹曲變形之影響，吾人必須充份利用其力平衡與動自由度之關係。

由文獻【37】，曲線樑元素之縱向應變， $\varepsilon_x$ ，可以下式表之，即：

$$\varepsilon_x = \zeta' + \frac{\xi}{R} \dots\dots\dots (3-59)$$

式中  $R$  = 曲率半徑

針對 Lagrange 座標系統而言，受到甚小變形量  $\zeta, \xi, \eta$  與  $\phi$  之曲線樑元素之曲率  $\kappa_x, \kappa_y$  為  $\kappa_z$  與其初始未變形狀態在各軸之投影可表示成：

$$\kappa_x = \phi' \dots\dots\dots (3-60a)$$

$$\kappa_y = -\eta'' \dots\dots\dots (3-60b)$$

$$\kappa_z = -\frac{1}{R} + \frac{\xi}{R^2} + \xi'' \dots\dots\dots (3-60c)$$

式中曲線樑之座標系統定義為：正曲率時， $y$  軸之正值指向圓心，反之，負曲率時， $y$  軸正值之沿長線值背向圓心，如圖 3.10 所示。式(3-60c)之第一項表示該曲線樑之初始曲率，第二項表示由於曲線樑  $\xi(x)$  伸長量之變化而造成之曲率變化。此現象亦可由下式看出：在  $y$  軸正值方向之變形  $\xi(x)$  所造成  $xy$  平面之曲率事實上乃是曲率半徑之倒數，據此，吾人可以得到下式，即：

$$\frac{-1}{R+\xi} = -(R+\xi)^{-1} = -R^{-1} + R^{-2}\xi + \dots = -R^{-1} + R^{-2}\xi \dots\dots\dots (3-61)$$

上式中，較高階之項省略之。

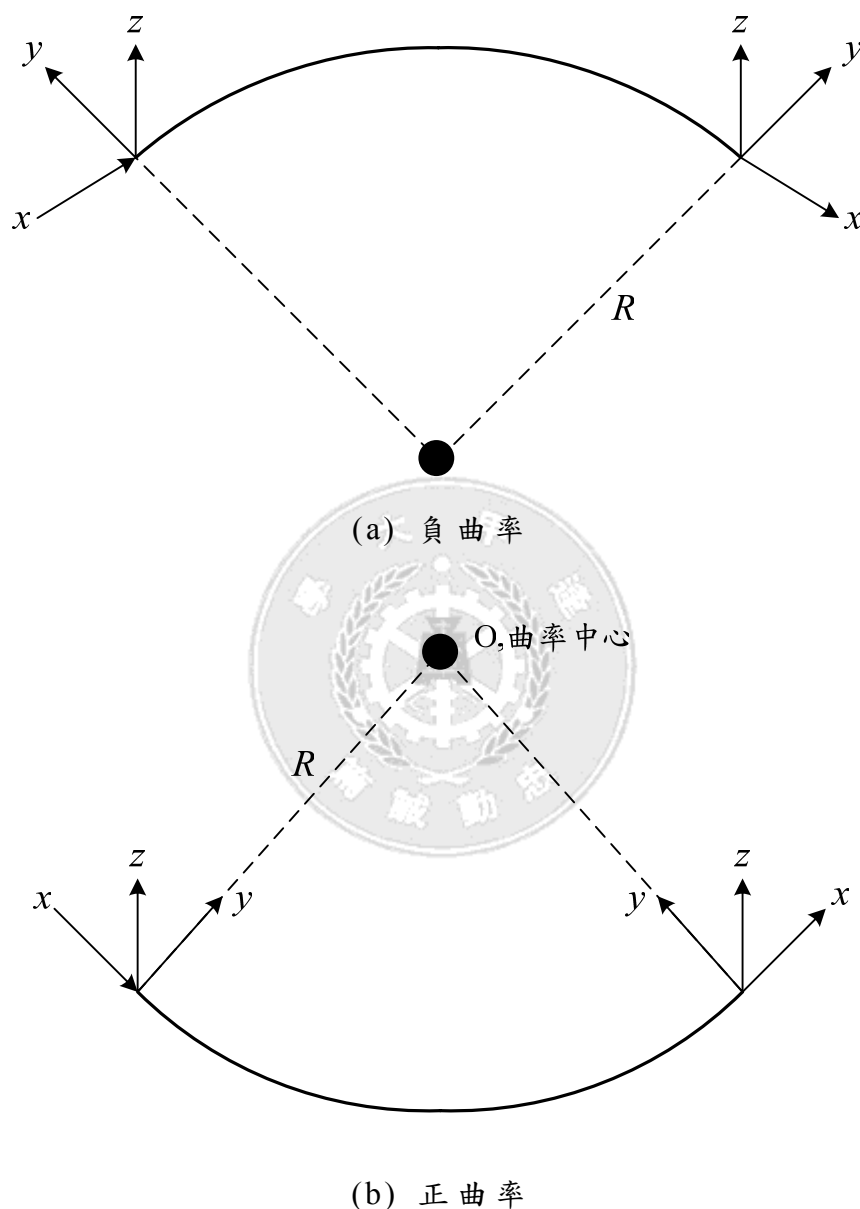


圖 3.10 曲線樑元素之曲率符號定義

為了將曲線樑元素之變形狀態由 Lagrange 座標轉換為 Eulerian 座標，必須建立一個 Jacobian 旋轉矩陣（兩座標系統間有 9 個方向餘弦，Direction Cosines）。其在變形狀態下之 Eulerian 座標假設為  $x_l, y_l$  與  $z_l$ 。然後，在 Eulerian 座標下之曲率方程式便可表示成：

$$\kappa_{x_l} = \kappa_x \cos(\alpha x_l) + \kappa_y \cos(\beta x_l) + \kappa_z \cos(\gamma x_l) \dots\dots\dots (3-62a)$$

$$\kappa_{y_l} = \kappa_x \cos(\alpha y_l) + \kappa_y \cos(\beta y_l) + \kappa_z \cos(\gamma y_l) \dots\dots\dots (3-62b)$$

$$\kappa_{z_l} = \kappa_x \cos(\alpha z_l) + \kappa_y \cos(\beta z_l) + \kappa_z \cos(\gamma z_l) \dots\dots\dots (3-62c)$$

或以矩陣型式表示成：

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{x_l} \\ \kappa_{y_l} \\ \kappa_{z_l} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi' & \eta' \\ -\xi' & 1 & \phi \\ -\eta' & -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-63)$$

吾人必須注意，此旋轉矩陣中對角線上之三個單位值乃是由於曲線樑上非常微小之變形值  $\xi, \eta$  與微小之旋轉角  $\phi$ 。將式(3-60)代入式(3-62)，吾人便可得到下列諸式，即：

$$\kappa_{x_l} = \phi' + \eta' \left( \frac{-1}{R} + \xi'' + \frac{\xi}{R^2} \right) - \eta'' \xi' \dots\dots\dots (3-64a)$$

$$\kappa_{y_l} = -\eta'' + \phi \left( \frac{-1}{R} + \xi'' + \frac{\xi}{R^2} \right) - \eta'' \xi' \dots\dots\dots (3-64b)$$

$$\kappa_{z_l} = \xi'' + \frac{\xi}{R^2} - \phi' \eta' - \eta'' \phi \dots\dots\dots (3-64c)$$

上式中，如將  $\xi, \eta, \phi$  與其微分項之乘積忽略，同時刪除  $1/R$ （亦指初始曲率，Initial Curvature）項，則吾人便可得到下列之彎矩與扭曲曲率諸式，即：

$$\kappa_x = \phi' - \frac{\eta'}{R} \dots\dots\dots (3-65a)$$

$$\kappa_y = -\eta'' - \frac{\phi}{R} \dots\dots\dots (3-65b)$$

$$\kappa_z = \xi'' - \frac{\xi}{R^2} \dots\dots\dots (3-65c)$$

利用式(3-64)之曲率方程式與式(3-59)之縱向應變方程式，則曲線薄壁樑元素之力-變位關係式便可表示成：

$$N = EA \left( \zeta' + \frac{\xi}{R} \right) \dots\dots\dots (3-66a)$$

$$M_y = EI_y \left( -\eta'' - \frac{\phi}{R} \right) \dots\dots\dots (3-66b)$$

$$M_z = EI_z \left( \xi'' + \frac{\xi}{R^2} \right) \dots\dots\dots (3-66c)$$

$$M_x = GK_t \left( \phi' + \frac{\eta'}{R} \right) - EI_\omega \left( \phi''' + \frac{\eta'''}{R} \right) \dots\dots\dots (3-66d)$$

$$B_i = EI_\omega \left( \phi'' - \frac{\eta''}{R} \right) \dots\dots\dots (3-66e)$$

至此可以清楚看出，當曲率半徑無限大時，上述五式之表示法事實上與直線薄壁樑之表示法完全相同。

### 3.8 曲線薄壁樑元素之力平衡關係

如圖 3.11 所示，考量曲線鋼樑某一小段元素之力平衡，此元素受到六種外力，亦即：

- ① 沿著每一軸之正向均佈荷重 ( $q_x$ 、 $q_y$  與  $q_z$ )
- ② 針對每一軸之均佈扭曲荷重 ( $m_x$ 、 $m_y$  與  $m_z$ )

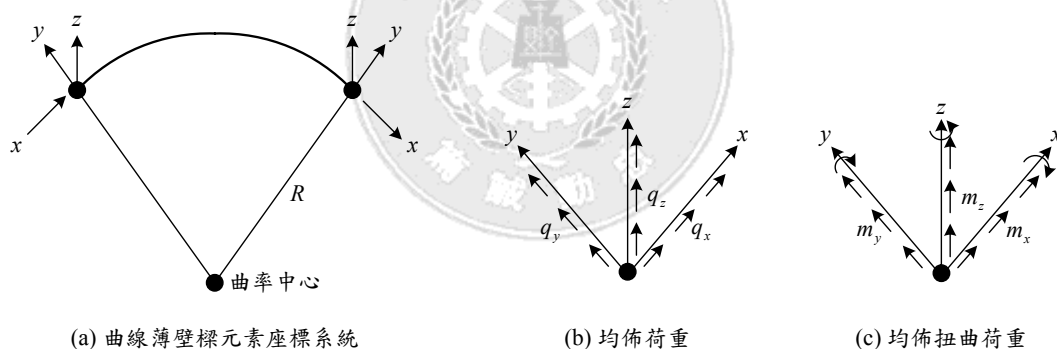


圖 3.11 典型曲線薄壁樑元素受到之外力圖

在力平衡條件之下，作用於  $x$ 、 $y$  與  $z$  軸之合力必須為零，同時針對每一軸合成彎矩亦必須等於零，如圖 3.12(b)至 3.12(f)所示。因此，六個靜力平衡方程式可以表示成：

$$\sum F_x = 0 ; \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{V_y}{R} + q_x = 0 \dots\dots\dots (3-67a)$$

$$\sum F_y = 0 ; \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{N}{R} + q_y = 0 \dots\dots\dots (3-67b)$$

$$\sum F_z = 0 ; \frac{\partial V_z}{\partial x} + q_z = 0 \dots\dots\dots (3-67c)$$

$$\sum M_x = 0 ; \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{M_y}{R} + m_x = 0 \dots\dots\dots (3-67d)$$

$$\sum M_y = 0 ; \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{M_x}{R} - V_z + m_y = 0 \dots\dots\dots (3-67e)$$

$$\sum M_z = 0 ; \frac{\partial M_z}{\partial x} + V_y + m_z = 0 \dots\dots\dots (3-67f)$$

上述六個靜力平衡方程式通常可用來推導未含翹曲效應之曲線薄壁樑元素。不過，翹曲效應對曲線薄壁鋼樑之結構行為影響至鉅，因此，單從力平衡之條件仍然不足以推導曲線薄壁鋼樑之勁度矩陣。如同文獻【38，39】之研究結果顯示，未含翹曲效應所估算出來之結構反應可能低估，甚至於產生明顯錯誤。因此，為了推導曲線薄壁鋼樑之勁度矩陣，除了力平衡條件之外，必須另謀他途方可。

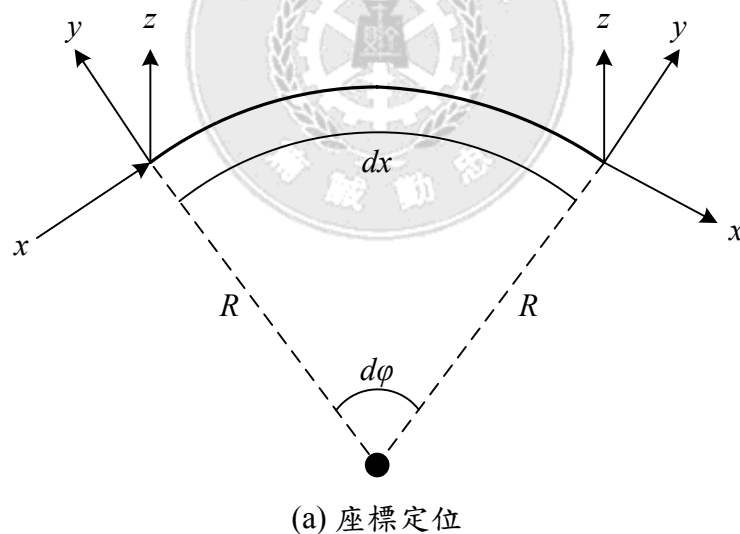


圖 3.12 曲線薄壁鋼樑元素之力平衡

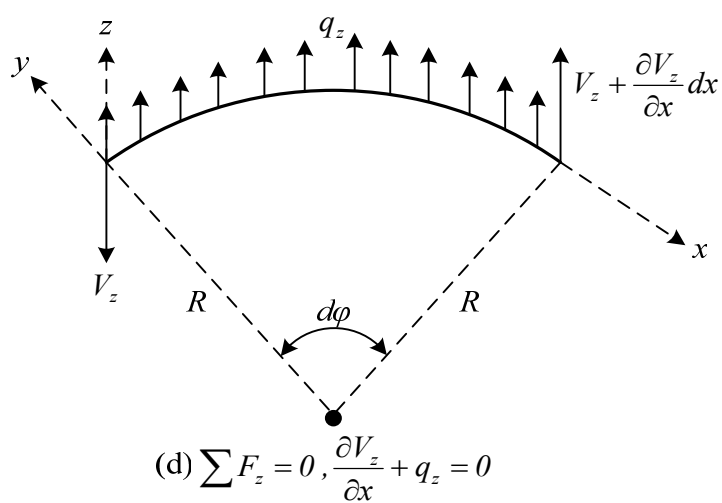
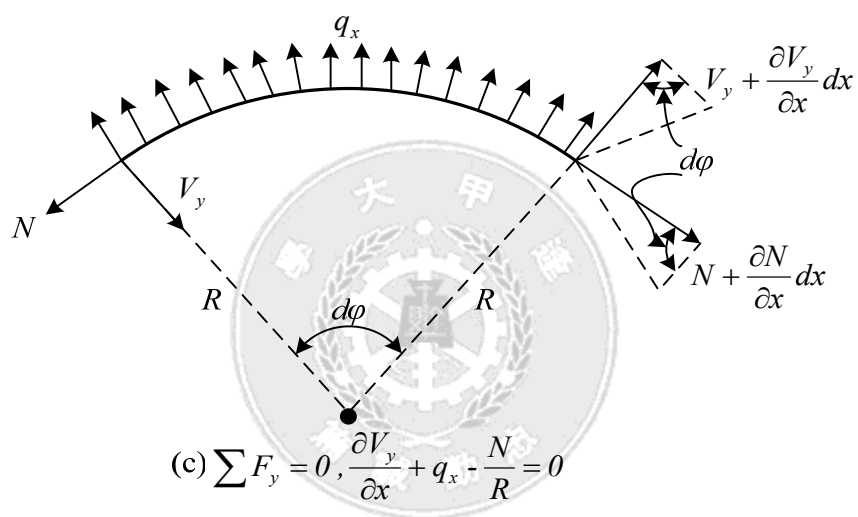
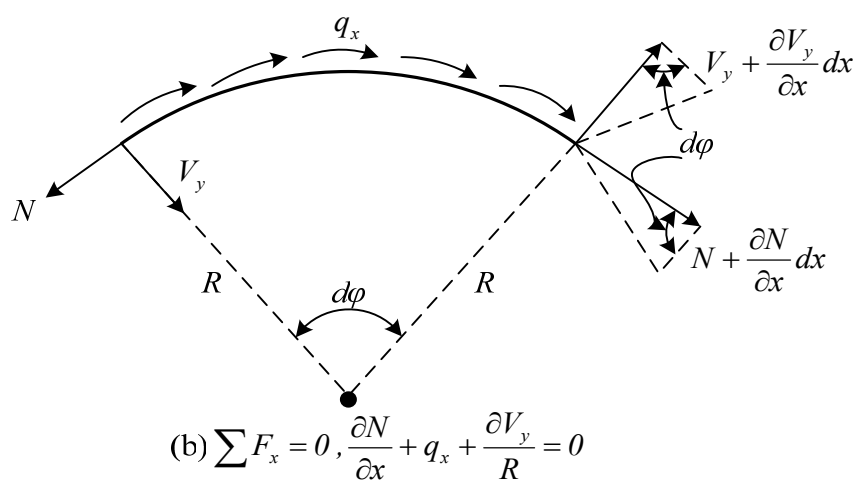
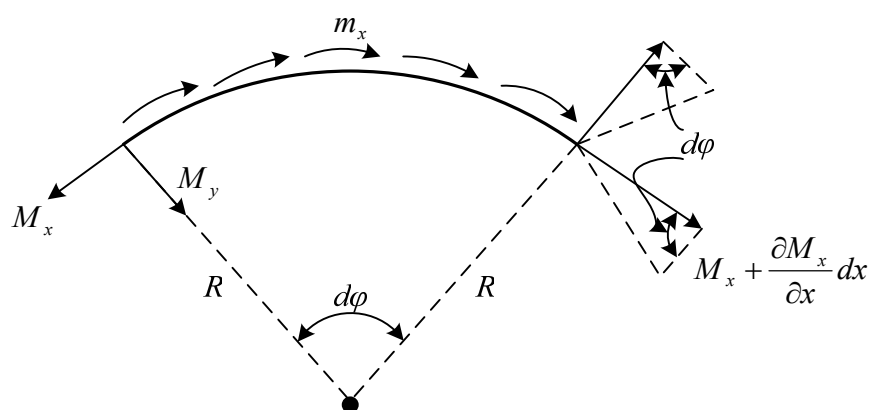
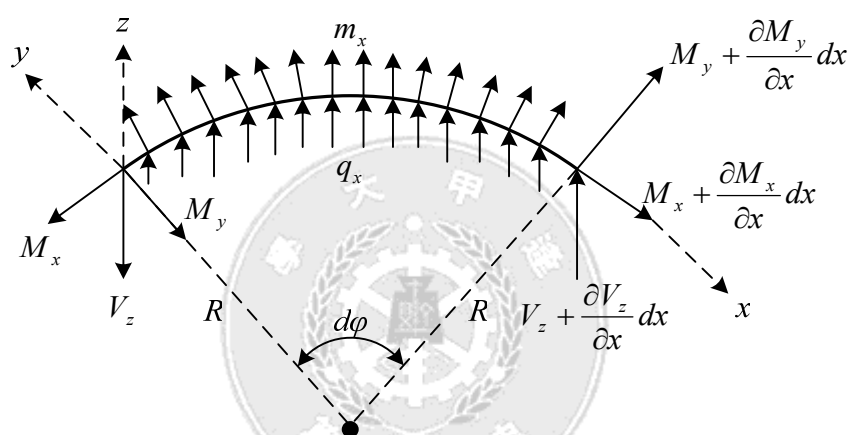


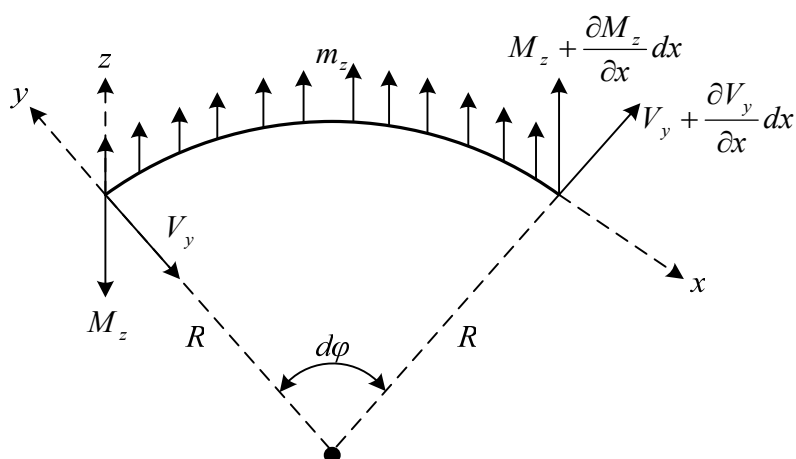
圖 3.12 曲線薄壁鋼樑元素之力平衡(續)



$$(e) \sum M_x = 0, \frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x + \frac{M_y}{R} = 0$$



$$(f) \sum M_y = 0, \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{M_x}{R} - V_z + m_y = 0$$



$$(g) \sum M_z = 0, \frac{\partial M_z}{\partial x} + m_z + V_y = 0$$

圖 3.12 曲線薄壁鋼樑元素之力平衡(續)

### 3.9 變位方程式

為了推導曲線薄壁樑元素之變位微分方程式，式(3-67)之力平衡方程式必須與式(3-66)[此式乃在於表達元素內力與變位之關係]一起考量。

由於式(3-66)中未考量剪力之影響，因此，動自由度  $\eta$  與其微分項並未出現在式(3-66a)之軸向力( $N$ )中，因此，式(3-67)之六個方程式可以刪除其中之  $V_y$ ， $V_z$  與  $N$  三項，剩下之三個方程式便可以表示成：

$$\frac{\partial^3 M_z}{\partial x^3} + \frac{I}{R^2} \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{q_x}{R} - \frac{\partial^2 m_z}{\partial x^2} - \frac{m}{R^2} \dots\dots\dots (3-68a)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \frac{I}{R} \frac{\partial M_x}{\partial x} = -q_z - \frac{\partial m_y}{\partial x} \dots\dots\dots (3-68b)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{M_y}{R} = -m_x \dots\dots\dots (3-68c)$$

對曲線箱型鋼樑而言，外在載重  $m_y$  與  $m_z$  可以忽略。因此，式(3-68)可以重新縮改成：

$$M_z''' + \frac{M_z'}{R^2} = \frac{q_x}{R} \dots\dots\dots (3-69a)$$

$$M_y''' - \frac{M_x'}{R} = -q_z \dots\dots\dots (3-69b)$$

$$M_x' + \frac{M_y}{R} = -m_x \dots\dots\dots (3-69c)$$

上述三個方程式係利用式(3-66)及其微分而得之，其與曲線薄壁鋼樑元素之三個變形量( $\xi, \eta$ 與 $\phi$ )互有關係。緊接著，如將式(3-66)代入式(3-69)，則吾人可得到下列諸式：

$$EI_z \left( \xi^{iv} + \frac{2\xi'''}{R^2} + \frac{\xi'}{R^4} \right) = \frac{q_x}{R} \dots\dots\dots (3-70a)$$

$$\left( -EI_y - \frac{EI_\omega}{R^2} \right) \eta^{iv} + \frac{GK_t}{R^2} \eta'' + \frac{EI_\omega}{R} \phi^{iv} - \left( \frac{EI_y + GK_t}{R} \right) \phi'' = -q_z \dots\dots\dots (3-70b)$$

$$\left( \frac{EI_\omega}{R} \right) \eta^{iv} - \frac{EI_y + GK_t}{R} \eta'' - EI_\omega \phi^{iv} + GK_t \phi'' - \frac{EI_y}{R^2} \phi = -m_x \dots\dots\dots (3-70c)$$



吾人必須注意，式(3-70a)與垂直變位  $\eta$  及旋轉角  $\phi$  無關，因此可以直接求解。然而，式(3-70b)式(3-70c)卻是與外載重  $\eta$ ， $\phi$  均有關係，因此，此二式必須聯立求解。由此吾人亦可看出，只要格樑系統未受到軸向力，則格樑平面系統外與格樑系統平面內之變形可分別求解之原因【33】。

如上所述，式(3-70b)、(3-70c)與格樑系統之勁度及變形量  $\eta$ ， $\phi$  均有關係。因此，此二式並非互相獨立，然而，吾人可藉消失其中之變形量( $\eta$ )而得到另一個獨立方程式。依文獻【33】，此方程式可表示成：

$$EI_{\omega}\phi^{iv} + \left(\frac{2EI_{\omega}}{R^2} - GK_t\right)\phi^{iv} + \frac{I}{R^2}\left(\frac{EI_{\omega}}{R^2} - 2GK_t\right)\phi''' - \frac{GK_t}{R^4}\phi \\ = q_z\left(\frac{EI_y + GK_t}{EI_y}\right) - m_x \frac{GK_t}{R^2 EI_y} \quad \dots (3-71)$$

此方程式之解由齊次解(Homogeneous Solutions)與特殊解(Particular Solutions)共同組成，如下是所示：

$$\phi = C_1 \cosh \frac{x}{a} + C_2 \sinh \frac{x}{a} + C_3 \cos \frac{x}{R} + C_4 x \cos \frac{x}{R} \\ + C_5 \sin \frac{x}{R} + C_6 x \sin \frac{x}{R} + R^3 \left( \frac{I}{GK_t} + \frac{I}{EI_y} q_z \right) + \frac{R^2}{EI_y} m_x \quad \dots (3-72)$$

上式中， $a$ 之定義為：

$$a = \sqrt{EI_{\omega}/GK_t} \quad \dots (3-73)$$

為了求解式(3-52)中之 $\eta$ ，吾人可先求得式(3-70b)中之齊次解，然後再求其特殊解，其完整解答之形式如下：

$$\eta = C_1 \left( -\frac{a^2}{R} \cosh \frac{x}{a} \right) + C_2 \left( -\frac{a^2}{R} \sinh \frac{x}{a} \right) + C_3 \left( R \cos \frac{x}{R} \right) + C_4 \left( R x \cos \frac{x}{R} - b \sin \frac{x}{R} \right) \\ + C_5 \left( R \sin \frac{x}{R} \right) + C_6 \left( b \cos \frac{x}{R} + R x \sin \frac{x}{R} \right) + C_7 + C_8 x - \frac{R^2 x^2}{2GK_t} q_z \quad \dots (3-74)$$

上式中， $b$ 之定義為：

$$b = \frac{2EI_y R^4}{EI_{\omega} + EI_y R^2 + GK_t R^2} \quad \dots (3-75)$$

上述方程式之數學解析不只費時費力而且不容易以通式 (General Form) 之形式存在，對曲線薄壁樑而言，如果其橫斷面性質變化 (例如鋼板厚度、寬度與深度變化) 或沿鋼橋長度方向之曲率不一，則其求解將更麻煩。

根據上述理論，Hong【40】與 Thornton Master【41】利用直接勁度法 (Direct Stiffness Method) 研發一個包含翹曲效應之曲線格樑勁度矩陣，此矩陣對分析類似 I 型鋼樑之開放式斷面成效甚佳，然對箱型鋼樑之封閉式斷面而言，在建構結構勁度矩陣時必須利用一個  $8 \times 8$  之反矩陣，以至於在某些情況之下，由於翹曲常數值比其他數值大許多而造成無法求解 (I 11-Conditioned) 之窘況。

綜合以上各節敘述，吾人可以清楚看出，利用數學方程式解析曲線薄壁樑之結構行為實無法符合工程實務之需，因此，在下一節中，吾人將以能量法 (Energy Method) 之原理與步驟，直接構建曲線薄壁格樑元素之勁度矩陣，且此矩陣可同時應用於 I 型與箱型薄壁鋼樑。

### 3.10 伏拉索夫元素之勁度矩陣

結構構件之勁度矩陣代表該構件之變形與內力間之關係。如前所述，對一個直線薄壁鋼樑元素而言，其節點至少應具有四個自由度，亦即垂直變位  $\eta$ ，扭曲旋轉角  $\phi$ ，變矩旋轉角  $\eta'$  與翹曲自由度  $\phi'$ 。文獻【42，43】亦曾利用此四個自由度推導曲線薄壁鋼樑之元素勁度矩陣。不過，如同式 (3-65a) 提到，曲線薄壁鋼樑與翹曲效應有關之雙彎矩自由度， $\kappa_x$ ，應表示成  $\phi' - \eta'/R$  方屬正確。因此，曲線薄壁鋼樑元素之節點應具有下列四個自由度，即：

- ① 針對  $x$  軸之旋轉角  $= \phi$
- ② 針對  $y$  軸之旋轉角  $= \theta = -\eta'$
- ③ 沿著  $z$  軸之垂直變位  $= \eta$
- ④ 翹曲自由度，副曲率效應 (Secondary Curvature)  $= \kappa_x = \phi' - \frac{\eta'}{R}$

由式 (3-66) 與式 (3-67)，吾人已知曲線薄壁鋼樑內力之表示式如下，即：

$$M_x = M_{sv} + M_{\omega} = GK_t \left( \phi' - \frac{\eta'}{R} \right) - EI_{\omega} \left( \phi''' - \frac{\eta'''}{R} \right) \dots\dots\dots (3-76a)$$

$$M_y = EI_y \left( -\eta'' - \frac{\phi}{R} \right) \dots\dots\dots (3-76b)$$


$$V_z = M'_y - \frac{M_x}{R} = EI_y \left( -\eta''' - \frac{\phi'}{R} \right) - \frac{GK_t}{R} \left( \phi' - \frac{\eta'}{R} \right) + EI_\omega \left( \phi''' - \frac{\eta'''}{R} \right) \dots\dots\dots (3-76c)$$

$$B_i = EI_\omega \left( \phi'' - \frac{\eta''}{R} \right) \dots\dots\dots (3-76d)$$

### 3.10.1 變位向量

假設平面曲線薄壁鋼樑元素之廣義變形如圖 3.13 所示，且每一節點具有四個自由度，其邊界條件如表 3.1 所示。

表 3.1 曲線薄壁樑之邊界條件

| 邊界條件  | 變形  | 力  |
|---|---|--|
| 自由端<br>(Free End)   |  | $M_{sv} = 0, M_w = 0$<br>$M_y = 0, V_z = 0, B_i = 0$ |
| 鉸接<br>(Hinge)   | $\eta = 0, \phi = 0, \eta'' = 0$  | $M_y = 0, B_i = 0$                                   |
| 固定端<br>(Fixed End)  | $\phi = 0, \theta = 0, \phi' = 0$<br>$\eta = 0, \eta' = 0$                        | $M_{sv} = 0$   |
| 符號說明：<br>$\phi$ = 扭曲旋轉角, twisting angle<br>$\eta$ = 垂直變位, vertical deflection<br>$\theta$ = 彎矩旋轉角, bending rotation<br>$M_{sv}$ = 純扭曲, pure torsion<br>$M_w$ = 翹曲扭曲, warping torsion<br>$M_y$ = 縱向彎矩, bending moment<br>$V_z$ = 垂直剪力, vertical shear<br>$B_i$ = 雙彎矩, bimoment |   |  |

如將變位向量， $\{\delta\}$ ，以下式定義之：

$$\{\delta\} = \left[ \phi \quad \eta' \quad \eta \quad \phi' - \frac{\eta'}{R} \right]^T \dots\dots\dots (3-77a)$$

式中  $\phi$  = 與純扭曲對應之自由度

$\eta'$  = 與縱向彎矩對應之自由度

$\eta$  = 與縱向垂直剪力對應之自由度

$\phi' - \frac{\eta'}{R}$  = 與雙彎矩對應之自由度

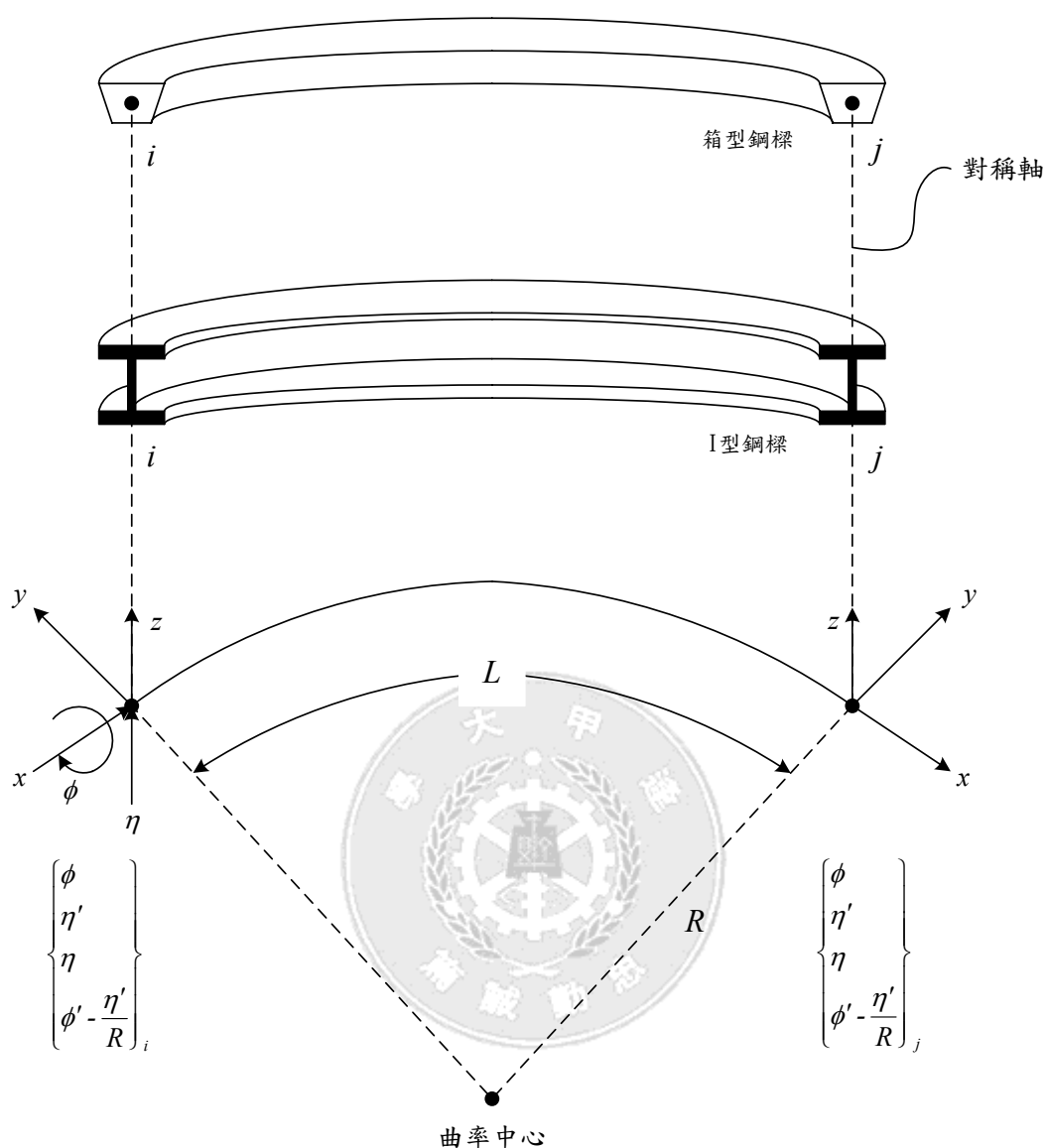


圖 3.13 平面曲線薄壁鋼樑元素

由式(3-77a)之變位向量觀之，同時參考虛功原理(Principle of Virtual Work)與變位向量 $\{\delta\}$ 相對應之節點力向量 $\{F\}$ 可以下式定之，即：

$$\{F\} = \{M_x \ M_y \ V_z \ B_i\}^t \dots\dots\dots (3-77b)$$

假設垂直變位， $\eta$ ，與扭曲旋轉角， $\phi$ ，可以下列之三次多項式表之：

$$\eta = a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 + a_4\alpha^3 \dots\dots\dots (3-78)$$

$$\phi = b_1 + b_2\alpha + b_3\alpha^2 + b_4\alpha^3 \dots\dots\dots (3-79)$$

式中

$$\alpha = \frac{x}{l} \dots\dots\dots (3-80a)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\eta'}{\ell} \dots\dots\dots (3-80b)$$

則另二個自由度便可以表示成：

$$\eta' = a_2 + 2a_3\alpha + 3a_4\alpha^2 \dots\dots\dots (3-81a)$$

$$\phi' - \frac{\eta'}{R} = b^2 + 2b_3\alpha + 3b_4\alpha^2 - \frac{a_2}{R} - \frac{2a_3\alpha}{R} - \frac{3a_4\alpha^2}{R} \dots\dots\dots (3-81b)$$

將式(3-78)至(3-81)代入式(3-77a)，則變位向量便可以表示成：

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_2 & 2a_3 & 3a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 - \frac{a_2}{R} & 2b_3 - \frac{2a_3}{R} & 3b_4 - \frac{3a_4}{R} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-82a)$$

或以矩陣之型式表示成：

$$\{\delta\} = [C] \cdot \{\bar{\alpha}\} \dots\dots\dots (3-82b)$$

接著，利用其邊界條件，即：

$$\text{於節點 } i \text{ 之處； } x=0, \alpha=0 \dots\dots\dots (3-83a)$$

$$\text{於節點 } j \text{ 之處； } x=\ell, \alpha=1 \dots\dots\dots (3-83b)$$

曲線薄壁鋼樑於節點  $i$  與  $j$  處之變位向量便可表示成：

$$\{\delta\}_i = \begin{pmatrix} \phi_i \\ \eta'_i \\ \eta_i \\ \left(\phi' - \frac{\eta'}{R}\right)_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ b_2 - \frac{a_2}{R} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3-84a)$$

$$\{\delta\}_j = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \eta'_2 \\ \eta_2 \\ \left(\phi' - \frac{\eta'}{R}\right)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ a_2 + 2a_3 + 3a_4 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ b_2 + 2b_3 + 3b_4 - \frac{a_2}{R} - \frac{2a_3}{R} - \frac{3a_4}{R} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3-84b)$$

將  $i$  與  $j$  節點自由度之特性代入式(3-84a)與(3-84b)，吾人便可得到下列諸式，即：

$$\phi = \phi_i + \phi'_i \alpha + (-3\phi_i - 2\phi'_i + 3\phi_2 - \phi'_2) \alpha^2 + (2\phi_i + \phi'_i - 2\phi_2 + \phi'_2) \alpha^3 \dots\dots (3-85)$$

$$\eta = \eta_i + \eta'_i \alpha + (-3\eta_i - 2\eta'_i + 3\eta_2 - \eta'_2) \alpha^2 + (2\eta_i + \eta'_i - 2\eta_2 + \eta'_2) \alpha^3 \dots\dots (3-86)$$

$$\eta' = \eta'_i + (-6\eta_i - 4\eta'_i + 6\eta_2 - 2\eta'_2) \alpha + (6\eta_i + 3\eta'_i - 6\eta_2 + 3\eta'_2) \alpha^2 \dots\dots (3-87)$$

$$\begin{aligned} \phi' - \frac{\eta'}{R} &= \left(\phi'_i - \frac{\eta'_i}{R}\right) + \left[-6\left(\phi_i - \frac{\eta_i}{R}\right) - 4\left(\phi'_i - \frac{\eta'_i}{R}\right) + 6\left(\phi_2 - \frac{\eta_2}{R}\right) - 2\left(\phi'_2 - \frac{\eta'_2}{R}\right)\right] \alpha + \\ &\quad \left[6\left(\phi_i - \frac{\eta_i}{R}\right) + 3\left(\phi'_i - \frac{\eta'_i}{R}\right) - 6\left(\phi_2 - \frac{\eta_2}{R}\right) + 3\left(\phi'_2 - \frac{\eta'_2}{R}\right)\right] \alpha^2 \end{aligned} \dots\dots (3-88)$$

變位向量， $\{\delta\}$ ，便可以表示成：

$$\{\delta\} = [N]\{\delta\}_e = [N] \begin{Bmatrix} \{\delta\}_i \\ \{\delta\}_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-89)$$

上式中， $[N]$ 為  $4 \times 8$  大小之形狀函數矩陣(Shape Function Matrix)

### 3.10.2 元素勁度矩陣

由於吾人假設曲線薄壁鋼樑之結構行為在於彈性極限(Elastic Limit)之內，故曲線薄壁鋼樑之系統總應變能可以表示成：

$$U = U_b + U_t + U_w \dots\dots\dots (3-90)$$

式中  $U_b$ ， $U_t$  與  $U_w$  分別是縱向彎矩，純扭曲與翹曲扭曲(雙彎矩)造成之應變能。其中：

$$U_b = \frac{I}{2E} \int_0^l \frac{M_y^2}{I_y} d\alpha = \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left(-\eta'' - \frac{\phi}{R}\right)^2 d\alpha \dots\dots\dots (3-91a)$$

$$U_t = \frac{I}{2G} \int_0^l \frac{M_x^2}{K_t} d\alpha = \frac{GK_t}{2} \int_0^l \left( \phi' - \frac{\eta'}{R} \right)^2 d\alpha \dots\dots\dots (3-91b)$$

$$U_w = \frac{I}{2E} \int_0^l \frac{B_i^2}{I_w} d\alpha = \frac{EI_w}{2} \int_0^l \left( \phi'' - \frac{\eta''}{R} \right)^2 d\alpha \dots\dots\dots (3-91c)$$

因此，總應變能， $U$ ，可以表示成：

$$U = \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left( -\eta'' - \frac{\phi}{R} \right)^2 d\alpha + \frac{GK_t}{2} \int_0^l \left( \phi' - \frac{\eta'}{R} \right)^2 d\alpha \dots\dots\dots (3-92)$$

$$+ \frac{EI_w}{2} \int_0^l \left( \phi'' - \frac{\eta''}{R} \right)^2 d\alpha$$

吾人必須注意，在上式應變能之推導過程中，吾人已將彎矩剪力與翹曲扭曲剪力之應變能忽略。接著，將式(3-85)後諸式與式(3-92)處理之，經積分便可得下式，即：

$$U = \frac{EI_y}{2l} \int_0^l \{\delta_e\}' \{a\}' \{a\} \{\delta_e\} dx + \frac{GK_t}{2l} \int_0^l \{\delta_e\}' \{b\}' \{b\} \{\delta_e\} dx \dots\dots (3-93)$$

$$+ \frac{EI_w}{2l} \int_0^l \{\delta_e\}' \{c\}' \{c\} \{\delta_e\} dx$$

或

$$U = \frac{I}{2} \{\delta_e\}' [K_e] \{\delta_e\} \dots\dots\dots (3-94)$$

上式中， $[K_e]$ 為元素勁度矩陣(參見附錄 II)，可以下式表之：

$$[K_e] = [K_b] + [K_t] + [K_w] \dots\dots\dots (3-95)$$

式中  $[K_b]$  = 縱向彎矩之元素勁度矩陣

$[K_t]$  = 純扭曲造成之元素勁度矩陣

$[K_w]$  = 雙彎矩造成之元素勁度矩陣

## 第四章 樑式鋼橋設計方法

### 4.1 前言

樑式鋼橋設計之方法有四大類，其中以容許應力設計法 (Allowable Stress Design, ASD) 與強度設計法 (Load Factor Design, LFD) 為目前橋樑工程界鋼橋設計之兩大主流。本章之主旨在於將 ASD 與 LFD 之差異性作系統化之比較，同時將 LFD 之設計細則進行完整之說明與探討。橋樑結構設計必須依循有公信力之設計規範，因為橋樑設計規範乃是橋樑設計人員據以設計之技術指導原則與依據。任何橋樑設計規範之背後均有其基本之理念與法則，其追求橋樑結構設計之安全性、耐久性與經濟性之目標雖相同，然其發展背景與理論基礎則不盡相同。

世界上各先進國家均有其本身之橋樑設計規範，惟本文所探討之規範僅止於美國 AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials) 規範【1】。事實上，我國之“公路橋樑設計規範”【44】乃是依 AASHTO 規範【1】第 16 版 (1996 年) 為藍本修訂而成，而最新版之 AASHTO 橋樑設計規範則是 2002 年之第 17 版。另一方面，吾人必須有深切之體認，AASHTO 橋樑設計規範【1】由第 16 版發展至第 17 版，其內容實有巨大之改變，因此，我國交通部之“公路橋樑設計規範”【44】尚未與最新之 AASHTO 橋樑設計規範【1】同步。基於此，本章所探討之設計內容亦將以 AASHTO 規範【1】為主。

綜觀美國 AASHTO 橋樑設計規範【1，45-47】，其所涵蓋之鋼橋設計方法計有下列四種，即：

- ① 容許應力設計法 (Allowable Stress Design, ASD) 【1】
- ② 載重因數設計法 (Load Factor Design, LFD) 【1】，台灣地區之橋樑設計規範【47】則稱為強度設計法。
- ③ 自動應力設計法 (Autostress Design Method, ADM) 【45】
- ④ 載重及抗力因數設計法 (Load and Resistance Factor Design, LRFD) 【46】，工程界亦有人以極限強度設計法稱之。

上述四種設計方法係針對傳統之直線形樑式 (Girder Type) 鋼橋而言。對平面曲線形樑式鋼橋而言，AASHTO 平面曲線形鋼橋設計規範【47】發展至今仍只侷限於容許應力設計法與載重因數



設計法，其設計原理與理論架構均詳述於 AASHTO 之 “Guide Specifications for Horizontally Curved Highway Bridges” 規範【47】中。然而，如果從鋼橋之數量觀之，曲線形鋼橋之數目仍遠遜於直線形鋼橋。

任何結構設計必須遵循之鐵律乃是：

$$R(\text{結構之內在抵抗力}) \geq Q(\text{外在之載重效應}) \dots\dots (4-1)$$

且上式中之  $R$  與  $Q$  均具有某種程度之不確定性，在兼顧橋樑結構安全性與功能性之前提下，設計規範之發展亦是根據式(4-1)之定律而逐步更新。

在容許應力設計法使用了數十年之後，橋樑工程界便構思在因數化載重(Factored Loads，即載重乘以某一大於 1.0 之因數)之前提下，橋樑構件以最大設計強度(Maximum Design Strength)設計之，此乃載重因數設計法最早之理念由來。因此，具體言之，載重因數設計法係依設計載重乘以因數以設計各構材之方法。1970 年代以前，絕大部份之鋼橋均以 ASD 設計，之後，新的鋼橋則漸以 LFD 設計之。

自動應力設計法於 1986 年為 AASHTO 正式採用，充份利用熱軋型鋼樑結實斷面(Compact Section)可產生塑性鉸(Plastic Hinge)之觀念，之後亦將其應用範圍擴展至鈑樑(Plate Girder)系統，其規範亦於 1991 年更新【45】，其設計觀念乃是 LFD 方法理念之延伸，因此，橋樑工程界亦將 Autostress Design 以 Alternate Load Factor Design 稱之，簡稱為 ALFD。另一方面，以美國境內為例，以自動應力觀念設計之鋼橋均屬直線 I 型鋼橋，且其設計均以 LFD 方法作為檢核之工具。惟隨著 LRFD 規範【46】之出現，且橋樑工程師均已普遍熟悉 ASD 與 LFD，因此，直至目前為止，全美國境內以 ALFD 設計且已完工之鋼橋未超過 10 座【11】。

橋樑之 LRFD 方法係於 1994 年之 AASHTO 規範【46】正式推出，由於該規範【46】是傳統 ASD 與 LFD 設計理念之巨大轉變，且仍僅是第二版之階段，規範【46】中有些條文尚具爭議性，且大部份之橋樑工程師至今仍未完全適應。因此，至目前為止其實際設計案例甚少。惟吾人應有深切之體認，從結構行為與理論之內涵而論，LRFD 之設計觀念可謂大勢所趨，即使針對鋼建築結構亦是如此【48，49】。

表 4.1 所示為公路樑式鋼橋於 AASHTO 各種設計規範【1，

45-47】之適用性，由表中吾人可以清楚看出，AASHTO 各種設計規範【1，45-47】之設計方法之中，目前仍以 ASD 與 LFD 為主流。惟隨著時代之進步，較新式之樑式鋼橋以自動應力設計法或 LRFD 為之，應是與日俱增。

在進入 21 世紀之後，吾人相信以 LRFD 設計之鋼橋將逐漸取代昔日之 ASD 與 LFD 設計方法，然規範之更新必須循序漸進，在充份了解 ASD 與 LFD 之設計內涵之後，再逐步認識 LRFD 之精義，對橋樑工程師而言應是明智之舉。惟本研究係針對曲線 I 型鋼橋，故本章所探討之內容僅侷限於 ASD 與 LFD。

樑式鋼橋有 I 型與箱型鋼橋兩大類，I 型鋼橋之橫斷面亦可分為熱軋型鋼樑與鈑樑(Plate Girder)兩種，如圖 4.1 所示。

圖 4.2 所示即為 I 型鈑樑受彎時之應力型態，翼鈑主要承受由彎矩造成之軸向拉應力與壓應力，而腹鈑則以承受剪力為主。

圖 4.3 所示為 I 型鋼鈑樑之設計細部，其共包含七大細部，即：

- 
- ①腹鈑(Web)
  - ②翼鈑(Flange)
  - ③橫向加勁材(Transverse Stiffener)
  - ④縱向加勁材(Longitudinal Stiffener)
  - ⑤支承加勁材(Bearing Stiffener)
  - ⑥剪力連結器(Shear Connector)
  - ⑦接頭(Splice)

上述七大細部中，各細部均有其特地功能，其設計細節可謂非常繁雜，限於篇幅，本章所探討之設計細節僅止於前四項。

## 4.2 ASD 之理論背景

容許應力設計法與一般通稱之工作應力設計法(Working Stress Design, WSD)或服務載重設計法(Service Load Design, SLD)無異，從 AASHTO 最早期之規範於 1921 年(其時稱為 AASHO, American Association of State Highway Officials)問世以來，此法即已存在。直至今日，其他較精進之設計方法雖已陸續為橋樑工程界接受，惟 ASD 在橋樑設計時仍具有舉足輕重之份量。因為 ASD 不僅可以單獨作為設計之方法，其亦可與其他設計方法(例如 LFD)搭配作為初步規劃、經費比較、檢核(Check)與複檢(Double Check)之工具。

在 AASHTO 所有可資利用之鋼橋設計方法中，容許應力設計法之設計理念最為簡易，其結構反應(Structural Responses，例如彎矩、剪力…)以所有作用於結構構件上之力(或應力)之總和估計之，以最普遍之載重群組 I (Group Loading I，見參考文獻【1，44】)為例，其受力狀態可以下式表之，即：

$$f = D + (L + I) \dots\dots\dots (4-2)$$

式中  $f$  = 橋樑構件上某一斷面或某一部份所受到之合力或總應力

$D$  = 靜載重(Dead Load)或稱死載重

$L$  = 活載重(Live Load)

$I$  = 衝擊力(Impact Effect)

容許應力設計法中對安全係數(Safety Factor 或 Factor of Safety，FS)之界定甚為單純。即任一結構構件中，在任何工作載重或服務載重(Working Load 或 Service Load，即所有載重之總和)之下，其承受之應力不能超過規範規定之容許應力。另一方面，容許應力乃是根據鋼結構構件之特性與其在橋樑上所具備之功能(受彎構件、受剪斷面、受壓構件等)而異，例如對於樑式鋼橋結構而言，鋼樑最大容許彎矩正向應力(Normal Stresses)定為  $0.55F_y$ 。如以數學式表之：

$$\left[ f_b = \frac{My}{I} \right] \leq \left[ F_b = \frac{F_y}{FS} \right] \dots\dots\dots (4-3)$$

式中  $f_b$  = 鋼材受到之實際彎矩應力(Bending Stresses)。

$M$  = 鋼樑斷面之內在彎矩。

$y$  = 材料力學理論中，斷面某部位與中立軸(Neutral Axes)之距離。

$I$  = 鋼樑橫斷面之二次慣性矩。

$F_b$  = 規範中規定之容許彎矩應力。

$F_y$  = 降伏應力(Yield Stresses)。

$FS$  = 安全係數。

由上式吾人可以清楚看出，容許應力設計法乃是利用低於降伏應力( $F_y$ )之容許應力( $F_b$ )來控制其安全係數，即：

$$FS = \frac{F_y}{F_b} \dots\dots\dots (4-4)$$

由此式吾人應可看出，容許應力設計法之容許應力必定在彈性極限(Elastic Limit)之內，其與載重之種類與組合並無直接之關係。如以  $F_b = 0.55F_y$  為例，則其安全係數至少等於 1.82(即  $1/0.55$ )，而構件實際所承受之應力通常小於  $F_b$ ，因此，其實際之安全係數比 1.82 大些，當然，安全係數太大並不見得合乎經濟效益。因此，如何在安全係數與經濟性之間取得平衡點乃是橋樑設計者不可忽略之問題。

表 4.2 所示為容許應力設計法之設計載重組合表。橋樑結構在其服務年限之內必須承受各種不同之載重，這些載重發生之時機與頻率皆不盡相同，有些載重發生之時機與大小甚至無法準確地預測。因此，欲使橋樑結構隨時處於安全之狀況，則對各種不同載重之大小與發生時機之掌握便非常重要，此乃橋樑設計規範中載重組合>Loading Combination)之基本理念。根據文獻【1】，載重組合可以下式估算之：

$$Group(N) = \gamma[\alpha_D \cdot D + \beta_L(L + I) + \beta_C CF + \beta_E E + \beta_B + \beta_S SF + \beta_W W + \beta_{WL} WL + \beta_L \cdot LF + \beta_R(R + S + T) + \beta_{EQ} EQ + \beta_{ICQ} ICE] \quad (4-5)$$

式中  $N$  = 載重群組之分類號數

$\gamma$  = 載重因數(Load Factor)，見文獻【1】之表 3.22.1A。

$\beta$  = 係數，因載重型態而異，見文獻【1】之表 3.22.1A。

$D$  = 靜載重

$L$  = 活載重

$I$  = 衝擊效應

$E$  = 土壓力

$B$  = 浮力

$W$  = 結構物之風力

$WL$  = 活載重之風力

$ICE$  = 冰壓力

$LF$  = 活載重之縱向力

$CF$  = 離心力

$R$  = 肋桁縮短(Rib Shortening)

$S$  = 乾縮

$T$  = 溫差荷重

$EQ$  = 地震力

$SF$  = 水流壓力

表 4.2 所示之載重群組看似非常複雜，然仔細觀之，吾人可以看出其適用性，亦即：

- 群組 I → III，適用於上部結構
- 群組 IV → VI，主要適用於拱橋與剛架(Frames)結構
- 群組 VII → IX，針對下部結構
- 群組 X，針對箱涵或涵洞

由式(4-1)觀之，任何結構設計必具有某些不確定性(Uncertainty)，亦即結構內在之抵抗力具有不確定性，且外在之載重效應亦具有某種程度之不確定性，然容許應力設計法中，吾人如將式(4-1)、式(4-3)與式(4-4)審視比較，並重新以下式改寫之：

$$R(\text{結構之內在抵抗力}) = \frac{F_y}{FS} = F_b \geq f_b(\text{外在之載重效應}) \dots (4-6)$$

則由此式吾人可清楚看出，ASD之設計法則乃是利用安全係數之觀念來涵蓋結構內在抵抗力之不確定性，而外在載重之不確定性則完全忽略。此亦可由表 4.2 中之載重因數( $\gamma$ )在任何狀況下均全部等於 1.0 看出端倪，亦即在橋樑以 ASD 設計時，其外在載重在某一載重群組之下均為定值，或可謂 ASD 設計法則中，其外在載重完全無因數化(Factored Loads)之觀念。

另一方面，吾人亦應注意，安全係數乃是非常籠統且模糊之字眼，針對橋樑設計而言，因為：

- ①每根構件之功能與受力狀況均不同，因此，理論上，一座橋樑中之各構件均有其相對應之安全係數，且隨著受力狀況之不同而隨時在變化。
- ②橋樑結構由甚多構件組成，每根構件各有其安全係數，則整座橋樑之安全係數與各構件安全係數之關係為何？
- ③如果一座橋樑有某一安全係數存在，則此橋樑之壽命到底有多長？如何估算？

由上所述，吾人可以看出，容許應力設計法中所謂之安全係數頗具爭議性。例如美國土木工程師學會(American Society of Civil Engineers, ASCE)於 1956 年至 1966 年間為了清楚定義安全係數之內涵，特別成立一個委員會，在期末報告【50】之結論中特別強調：“安全係數甚難定義，如欲更清楚定義安全係數之內涵，使用或然率與統計之觀念制定設計規範應為唯一之途”。

## 4.3 LFD 理論背景

### 4.3.1 基本觀念

載重因數設計法在台灣地區以強度設計法(Strength Design Method, SDM)稱之，惟美國橋樑工程界均以 LFD(Load Factor Design)稱呼。在 1960 年代經過一系列之研發，1965 年由美國鋼鐵學會 AISI(American Iron and Steel Institute)組成一個委員會欲

將現有之橋樑設計規範作有系統之更新，1969 年由 Vincent【51】正式公佈其研究成果，經過各方人馬之充份討論與修訂之後，於 1973 年正式被 AASHTO〔第十一版〕採納為橋樑設計方法之一。直至今日，在美國境內，新建公路橋樑以 LFD 設計者佔絕大部份。

由 LFD 之名稱觀之，吾人可以依稀看出，載重因數設計法特別強調外在載重之因數化，亦即在考量外在載重之不確定性之下，此法可以保證吾人所設計之鋼橋滿足下列三項需求，即：

- ①在橋樑設計年限之內，設計活載重(Design Vehicles，例如 HS20 活載重)在吾人預估之交通量之內不會對該橋產生不利影響(例如無金屬疲勞顧慮)。
- ②偶而通過橋樑之超載荷重(Overload)不至於對該橋造成破壞(例如不會造成鋼橋構件之永久變形或構件之局部挫屈)。
- ③在特殊之緊急狀況之下，即使超大型載重車輛通過時，尚不至於對該橋造成立即之危險。

如將上述三項需求與橋樑設計所要求之服務性(Serviceability)、耐久性(Durability)與安全性(Safety)對照，則吾人可以發現，上述①、②項乃是針對橋樑之服務性與耐久性，而第③項則是針對橋樑之安全性(因吾人係以最大設計載重設計該橋)而言。

載重因數設計法乃是比傳統之容許應力設計法更精進之一種橋樑結構設計方法，將古老之彈性設計理念推展至與極限設計(Ultimate Design)、崩潰設計(Collapse Design)有關之觀念。基本上，此法之原始觀念乃源自鋼材之限制狀態(Limit States)。此處所謂之限制狀態意指鋼結構之整體或其中某部份已無法依原先設計之功能作用之。限制狀態又可分為兩部份分別探討：即：

- ①強度(Strength)或安全性(Safety)
- ②服務性(Serviceability)

強度之限制狀態乃是根據結構安全性或鋼材之載重能力而定，例如塑性強度、挫屈(Buckling)與斷裂(Fracture)等等均屬之。

服務性之限制狀態主要乃是考量結構物在工作載重(或服務載重)下之表現，例如垂直變位太大(雖然或許在容許應力之內)，振動(Vibrations)與疲勞(Fatigue)等等均屬之。

表 4.3 所示為載重因數設計法之基本理念，而表 4.4 則是其載重群組。由此二表中可以清楚看出，LFD 之設計理念比傳統之容許應力設計法完整許多，且較符合橋樑結構受力後所表現之實際行為(例如靜載重與活載重效應分開考量，受力與變形分別處理，服務性與安全性兼顧等等)。

#### 4.3.2 LFD 之設計載重分類

容許應力設計法最為人詬病者莫過於此法未能充份反應作用於橋樑結構上活載重之實際影響。有鑑於此，AASHTO 載重因數設計法【1】中將設計載重組合依不同之設計目的與考量將其分為以下三大類，即：

- ①服務載重(Service Loads)或稱工作載重(Working Loads)
- ②超載荷重(Overloads)，簡稱超載重
- ③最大設計載重(Maximum Design Loads)

前兩項載重組合主要是針對橋樑之服務性需求(Serviceability Requirements)與耐久性考量，而最大設計載重則是針對橋樑結構之安全性考量。以下吾人將分別說明之：

##### 1.服務載重

所謂服務載重意指橋樑設計時所考量之所有載重總和，例如靜載重、活載重(規範規定、橋樑主管機關核定之設計活載重或其他未超載且不須公路主管機關核許之一般活載重)、衝擊力等等均屬之。其結構分析之原理考量與容許應力設計法無異，完全不須考量載重之因數化，例如載重群組 I【1】可以下式表之：

$$f = D + (L + I) \dots\dots\dots (4-7)$$

除了上述之結構應力必須符合設計規範要求之外，在服務載重情況下之主要結構設計考量有以下兩大項，即：

- ①疲勞(Fatigue)，其設計參數主要是根據活載重造成之應力範圍(Stress Ranges)。
- ②活載重之垂直變位(Live Load Deflections)，其與結構之勁度(Stiffness)有直接關係。

每一個鋼結構細部(Steel Structural Details)不同，則其受疲勞裂縫之影響便不同，裂縫成長所需之時間亦相去其遠。一般而言，

鋼結構裂縫形成之潛在程度與影響裂縫成長所需時間之因素主要有以下三大項，即：

- ①應力範圍(Stress Ranges)
- ②應力循環(Stress Cycles)
- ③結構細部種類(Type of Details)

控制活載重垂直變位之主要目的在於避免因橋樑上部結構之振動(Vibration)而造成非結構構件(例如燈座與其他附屬設施)之破壞與降低用路人之舒適性。依規範規定【1，44】，樑式鋼橋結構之活載重垂直變位必須小於跨距長度之  $1/1000 \sim 1/800$ ，方不致於產生振動造成之後遺症。

## 2.超載荷重

超載荷重意指其出現頻率不高且不致於對橋樑結構造成機能上或強度上立即危害之最大可容許荷重。由於超載荷重之交通組成(Traffic Composition，即重車佔所有交通量之比例)甚低，因此，超載荷重不至於對橋樑結構造成疲勞之威脅。從設計之目的觀之，超載荷重可表示為：

$$f = \alpha D + \beta(L + I) \dots\dots\dots (4-8)$$

式中  $\alpha$  = 靜載重之放大係數(Magnification Coefficient)  
或載重因數(Load Factor)，其值應大於或等於 1.0。

$\beta$  = 活載重之載重係數(Load Coefficient)，其值應力於或等於 1.0。

上式中， $\alpha$ 之主要功用在於考量靜載重於日後有增加之空間(例如日後在橋面版上加鋪或加厚磨耗層、橋底加掛管線等等)，此與吾人在橋樑設計所顧及之預加荷重(Future Load)之觀念完全一致【52】。在一般之情況下，如果無預加荷重之考量，則可取  $\alpha = 1.0$ ，此時超載荷重之設計式便可以下式表之，即：

$$f = D + \beta(L + I) \dots\dots\dots (4-9)$$

從式(4-8)與式(4-9)觀之，亦可以清楚看出， $\beta$ 之主要功用在於使設計者能對可能之超載荷重(法定範圍外之活載重)有放大與調整之彈性空間。一般而言，針對超載荷重



之考量，依 AASHTO 規範【1】之建議，通常取  $\beta = 1.67$  (即  $5/3$ )。如果活荷重為 H20【1】，則  $\beta$  應採 2.2，如 AASHTO 規範【1】之第 3.22.5 節所規定者。吾人亦必須注意，AASHTO 規範【1】中之載重群組 IA(Group IA)，事實上乃是針對超載荷重而考量，且 2.2 之由來乃是由  $1.3 \times 5/3$  得之。

超載荷重之另一層設計考量在於構件永久變形之避免，因此，對結實斷面(Compact Section，亦有人以堅實斷面稱之)而言，AASHTO 橋樑設計規範【1】雖然准許其在負彎矩區有 10%彎矩重新分配(Moment Redistribution)之能力，但其彎矩正向應力仍必須在彈性範圍之內〔負彎矩區以  $0.80F_y$  為限，對正彎矩區而言，合成斷面(Composite Section)不得超過  $0.95F_y$ ，非合成斷面則必須小於  $0.80F_y$ 。註：正彎矩之定義乃是斷面上方受壓，下方則受拉〕。

### 3.最大設計載重

為了確保橋樑結構之安全性，且同時顧及各種與橋樑安全相關因素之不確定性(Uncertainty)，LFD 橋樑設計時必須有最大設計載重之考量。由結構力學之觀念而言，其設計數學式可表示如下，即：

$$\phi F_y \geq \gamma [\alpha D + \beta (L + I)] \dots\dots\dots (4-10)$$

式中  $\gamma$  = 載重因數(Load Factor)

$\phi$  = 強度折減因數(Strength Reduction Factor)

由式(4-10)吾人可以清楚看出橋樑結構設計之基本理念，即結構之內在抵抗力(即上式中之  $\phi F_y$ )不得小於載重造成之效應(即式中之  $\gamma [\alpha D + \beta (L + I)]$ )。由於構件之理論降伏強度( $F_y$ )不得高估，因此，強度折減因數( $\phi$ )必定小於 1.0。另一方面，外載重不得低估，因此，載重因數( $\gamma$ )必定大於 1.0。由此吾人亦可知道，強度折減因數與載重因數之觀念其實就是安全係數之應用【52】，而且同時兼顧到內在抵抗力與外在載重之不確定性。

強度折減因數( $\phi$ )代表結構系統內部中之不確定性，此不確定性之來源甚廣，例如材料、斷面特性與其他無法全然掌握之因素等均屬之。

### 4.3.3 LFD 之基本假設

以 LFD 進行受彎鋼樑構件設計時，依設計規範【1，44】之規定，其基本假設有下列四項，即：

1. 撓曲構材內之應變應假定與其自中立軸(Neutral Axis)之距離成正比。
2. 鋼材之應力低於所用鋼材之降伏強度  $F_y$  時，應為 E 值 ( $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ) 乘以該鋼材之應變。若應變大於鋼材降伏強度之應變，其應力則與應變無關，並等於降伏強度  $F_y$  值。此項假定並應適用於混凝土橋面版負彎矩區內之縱向鋼筋，若該區域內設有剪力連結器(Shear Connector)以確保其合成效用(Composite Action)。
3. 在最大強度時，合成樑混凝土橋面版之壓應力與應變無關，其值等於  $0.85f'_c$ ， $f'_c$  為混凝土於 28 天時之理論抗壓強度。
4. 除非符合規範中之特殊規定，撓曲計算時混凝土之拉力強度應省略不計。

## 4.4 LFD 樑之斷面分類

利用 LFD 進行 I 型鋼橋設計時吾人必須注意其鋼結構斷面之分類。基本上，根據 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，LFD 之樑構件斷面可以分為以下三大類，即：

- ①結實斷面 (Compact Sections)
- ②具側向支撐之非結實斷面 (Braced Non-Compact Sections)
- ③介於上述兩者間之漸變斷面 (Transitions)

由 LFD 設計方法對鋼樑設計斷面之分類，吾人亦可看出其比 ASD 精進之處，尤其是 LFD 對結構穩定之考量亦可驗證出其比傳統之 ASD 更符合橋樑結構之實際行為。以下吾人將分別說明之：

### 4.4.1 結實斷面

結實斷面之必要條件之一是構件在受力狀況下絕對不可以有局部挫屈之情況發生。局部挫屈，顧名思義，意指構件之某一部份(肢材)已挫屈而發生失穩現象，雖不至於造成整個結構之毀損，然其挫屈處之斷面已無法發揮其整體強度，應有之結構功能

已喪失。一般而言，I 型鋼樑構件之局部挫屈大部份發生在翼板(頂板與底板之合稱)，少部份則發生於腹板。局部挫屈之主要控制因素乃是斷面肢材之寬厚比或深厚比。

圖 4.4 所示為加勁肢材(Stiffened Element)與非加勁肢材之示意圖，所謂肢材意指斷面之某一部份，加勁肢材則指此肢材之首尾兩端有其他肢材接續。而非加勁肢通常於設計時必須避免發生局部挫屈之首要對象。

結實斷面乃是斷面在無局部挫屈(Local Buckling)之前提下可以形成塑性鉸(Plastic Hinge)之基本條件。除此之外，結實斷面亦應滿足之基本條件為：①樑深必須固定，②腹板必無縱向加勁板，③受拉側翼板不能開孔。

按 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】之規定，結實斷面之縱向彎矩容量(Moment Capacity，即抗彎能力)可以下式表之：

$$M_u = F_y Z \dots\dots\dots (4-11)$$

式中  $Z$  = 塑性斷面模數 (Plastic Section Modulus)

$M_u$  = 斷面之極限彎矩容量 (Ultimate Bending Capacity)

$F_y$  = 鋼材之降伏應力值

圖 4.5 所示即為典型鋼樑之極限彎矩容量示意圖，圖中之  $M_p$  乃是塑性彎矩，其意與式(4-11)中之  $M_u$  相同，亦即針對結實斷面而言，其斷面可發揮之最大彎矩容量為塑性彎矩。

以 AASHTO 規範【1】LFD 設計之結實斷面必須滿足下列四項要求，即：

#### ①斷面對稱性

鋼樑(熱軋型鋼樑或板樑)必須具有單軸(對 I 型鋼樑之弱軸或  $y$  軸)或雙軸對稱(Biaxial Symmetrical)之斷面特性。一般而言，熱軋 I 型鋼樑之斷面均屬雙軸對稱，而 I 型板樑之頂板與底板可能因設計之需要而寬厚不一，而只具單軸對稱之情況。此處之對稱軸亦是斷面之主軸(Principal Axes)。

#### ②受壓翼板寬厚比之控制

翼板寬厚比控制之主要目的在於確定其受壓(例如正彎矩區之頂板與負彎矩區之底板)時不能有局部挫屈之疑慮(參考圖 4.6)。對 I 型鋼板樑而言，翼板屬於未加勁肢材

(Unstiffened Element)，其寬厚比必須滿足下式之條件，即：

$$b / t \leq 4110 / \sqrt{F_y} \dots\dots\dots (4-12)$$

式中之  $b$ ， $t$  分別為受壓翼板之寬度與厚度。〔註：式(4-12)為文獻【1】之式(10-93)〕

### ③腹板挫屈之避免

腹板必須有足夠之穩定性，以避免鋼樑之腹板因受壓而產生垂直挫屈，因此，腹板之深厚比必須控制。依 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，結實斷面腹板之深度與厚度比 (Depth / Thickness Ratio) 必須滿足下式之條件，即：

$$D / t_w \leq 19230 / \sqrt{F_y} \dots\dots\dots (4-13)$$

式中之  $D$  與  $t_w$  分別為腹板之深度與厚度。如以腹板單位長度視之，則腹板深厚比之控制與柱構件細長比之觀念類似。〔註：式(4-13)乃是文獻【1】之式(10-94)〕

腹板之深厚比亦必須與受壓翼板之寬厚比同時檢核，當  $b/t$ 、 $D/t_w$  同時超過規範限制值之 75% 時，則受壓翼板與腹板亦必須滿足下式之規定，即：

$$\frac{D}{t_w} + 4.68 \left( \frac{b}{t} \right) \leq \frac{33650}{\sqrt{F_{yf}}} \dots\dots\dots (4-14)$$

式中  $F_{yf}$  為受壓翼板之降伏應力值。〔註：式(4-14)為文獻【1】之式 (10-95)〕圖 4.7 所示為腹板受力之各種可能型式之綜合，由此圖亦可清楚了解，為何吾人在控制腹板之深厚比時亦必須同時檢核受壓翼板之寬厚比。

### ④側向支撐數量應足夠

側向支撐可以有效防止鋼樑受彎矩時造成側向扭曲挫屈，對樑式鋼橋而言，其側向支撐可以分為兩大類，即：

- 點式側向支撐，例如橫隔樑(參考圖 4.8)
- 連續式側向支撐，例如正彎矩區之 RC 橋面版(參見圖 4.9)

側向支撐長度會直接影響鋼樑之抗彎能力，因此，側向支撐(Lateral Bracing)之數量必須足夠，以避免受彎鋼樑之壓

力側有側向扭曲挫屈(Lateral Torsional Buckling)之隱憂。圖 4.10 所示為鋼樑挫屈之示意圖。圖 4.11 所示則為無側向支撐鋼樑之側向扭轉挫屈，由此圖可清楚看出，側向支撐之設計重點在於鋼樑受彎時承受壓應力之鋼樑翼板斷面。如以  $L_b$  代表受壓翼板相鄰兩支撐點之距離， $r_y$  代表針對鋼樑  $y$ - $y$  軸之迴轉半徑(Radius of Gyration)， $M_\ell$  代表樑上某支撐段端點上較小之彎矩， $M_u$  代表鋼樑之極限彎矩強度(對結實斷面而言，其為前述之  $M_u = F_y Z$ )，則側向支撐必須滿足下式之規定，即：

$$\frac{L_b}{r_y} \leq \frac{\left[ 3.6 - 2.2 \left( \frac{M_\ell}{M_u} \right) \right] \times 10^6}{F_y} \dots\dots\dots (4-15)$$

式中之  $M_\ell/M_u$  比值應取正值或負值必須視鋼樑受彎矩造成之曲率而定。當彎矩在兩支撐點僅產生單一曲率時， $M_\ell/M_u$  為正。反之，產生反向曲率時， $M_\ell/M_u$  為負。〔註：式(4-15)為文獻【1】之式(10-96)〕

所需側向支撐能防止主構材之側向位移及扭轉，或將受壓翼板之頂部及側部埋設於混凝土版之內。

#### ⑤橫斷面最大軸向壓力

一般而言，除非情況特殊，例如地震或縱坡太大，否則樑式鋼橋通常無軸向受壓之顧慮。在 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，作用於樑式鋼橋主構件之軸向力必須滿足下式之規定，即：

$$P \leq 0.15 F_y A \dots\dots\dots (4-16)$$

式中  $A$  = 樑構件之橫斷面積。當軸向力  $P$  超過  $0.15 F_y A$  時，則原樑構件應當作樑-柱構件(Beam-Column)處理之。考量鋼樑之耐震能力時必須充份考量順橋向地震時之軸向壓力。

具結實斷面之連續式構件是其具有彎矩重新分配(Moment Redistribution)之特色。依 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，以彈性皆析所決定支承點上之負彎矩在超載重(Overload)及最大設計載重時最大可減少 10%，但跨距內之彎矩應增加等值反向靜態下兩相鄰支承點所減少之負彎矩。例如，跨距中央之彎矩應增加兩相鄰支承點上所減少

彎矩之平均值，如圖 4.12 所示。

#### 4.4.2 具側向支撐之非結實斷面

從鋼樑之抗彎能力而言，具側向支撐之非結實斷面乃是僅次於結實斷面者，其主要理由在於此種斷面並不具有形成塑性鉸之條件。因此，其彎矩容量比結實斷面小，亦即必定小於塑性彎矩。

依據 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，具側向支撐之非結實斷面之彎矩容量針對鋼樑受彎時之拉應力與壓應力側而異，可以下列兩式其中之一計算之，即：

$$M_u = F_y S_{xt} < M_P \dots\dots\dots (4-17)$$

式中  $S_{xt}$  = 針對受拉翼板之彈性斷面模數

$$M_u = F_{cr} S_{xc} R_b < M_P \dots\dots\dots (4-18)$$

式中， $S_{xc}$  = 針對受壓翼板之彈性斷面模數。 $R_b$  則為受壓翼板之應力折減因數(其值必 $\leq 1.0$ )。〔註：式(4-17)與式(4-18)分別為文獻【1】之式(10-98)與式(10-99)〕式(4-18)中， $F_{cr}$  為受壓翼板之挫屈應力，其定義為：

$$F_{cr} = \left(4400 \frac{t}{b}\right)^2 \leq F_y \dots\dots\dots (4-19)$$

式中  $b$ 、 $t$  分別為受壓翼板之寬度與厚度。

$$R_b = 1 - 0.002 \left( \frac{D_c t_w}{A_{fc}} \right) \left[ \frac{D_c}{t_w} - \frac{\lambda}{\sqrt{f_b}} \right] \leq 1.0 \dots\dots\dots (4-20)$$

式中  $D_c$  = 受彎構件橫斷面之彈性中立軸與受壓翼板之淨距  
(即腹板受壓部份之深度)

$A_{fc}$  = 受壓翼板之橫斷面積

與結實斷面之設計觀念類似，採用式(4-17)、式(4-18)之前提乃是下列四個條件必須滿足，即：

① 受壓翼板寬厚比之控制

$$\frac{b}{t} \leq 24 \dots\dots\dots (4-21)$$

②腹板深厚比必須控制，以避免腹板因受壓而產生垂直挫屈

$$D/t_w \leq 150 \dots\dots\dots (4-22)$$

③受壓翼板之側向支撐距離

$$L_b \leq \frac{20,000,000 A_f}{F_y d} \dots\dots\dots (4-23)$$

式中  $A_f$  = 翼板之面積

$d$  = 樑深

側向支撐距離如果未符合此式之規定，則此構件便應以部份側向支撐構件視之，亦即斷面之抗彎能力將明顯下降至  $M_y$  以下。

④最大軸向壓力

與結實斷面相同，具側向支撐之非結實斷面之可容許斷面最大軸向壓力必須遵循下式之規定，即：

$$P \leq 0.15 F_y A \dots\dots\dots (4-24)$$

#### 4.4.3 介於上述兩者間之漸變斷面(Transitions)

所謂漸變斷面意指此種斷面之彎矩容量介於上述結實斷面與具側向支撐之非結實斷面之間者，而且其彎矩容量可以直接利用直線內插法求得，但無論如何其腹板仍亦絕不可有局部挫屈之疑慮，其深度( $D$ )與厚度( $t_w$ )比仍必須滿足下式之條件，即：

$$D / t_w = 19230 / \sqrt{F_y} \dots\dots\dots (4-25)$$

由上所述，吾人亦可清楚看出，漸變斷面之彎矩容量介於降伏彎矩與塑性彎矩之間。

#### 4.4.4 部份側向支撐構件

部份側向支撐構件(簡稱“部份側撐構件”)意指鋼樑之側向支撐量不足(並非完全無側撐之意)或相鄰兩側向支撐之

間距太大，促使鋼樑之抗彎能力明顯下降許多。

當某構件同時符合下列兩條件時，則此構件便應視為部份側撐構件，即：

①鋼樑之側向支撐未滿足“具側向支撐之非結實斷面”之規定，且

②受壓翼板與構件斷面對腹板垂直軸之慣性矩比  $\frac{I_{yc}}{I_y}$ ，在  $0.1 \leq \frac{I_{yc}}{I_y} \leq 0.9$  之範圍時。

依 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，部份側撐鋼樑之抗彎能力可以下式計算之：

$$M_u = M_r R_b \dots\dots\dots (4-26)$$

式中  $M_r$  = 彎矩容量，其值必定小於  $M_y$ 。

$R_b$  = 彎矩容量折減因數(Bending Capacity Reduction Factor)，且其值必  $\leq 1.0$ 。 $R_b$  值之算法依 I 型鋼板樑之佈設條件可分為 2 種，即：

1. 如為縱向加勁樑，且當腹板滿足下式之條件時(即無腹板挫屈之疑慮時)， $R_b = 1.0$

$$\frac{D}{t_w} \leq 5,460 \sqrt{\frac{k}{f_b}} \dots\dots\dots (4-27)$$

式(4-27)中， $f_b$  為受壓翼板之因數化彎矩應力， $k$  值則依斷面縱向加勁材之幾何佈設而異，

$$\text{如果 } \frac{d_s}{D_c} \geq 0.4, \text{ 則 } k = 5.17 \left( \frac{D}{d_s} \right)^2 \geq 9 \left( \frac{D}{D_c} \right)^2 \dots\dots\dots (4-28)$$

$$\text{如果 } \frac{d_s}{D_c} < 0.4, \text{ 則 } k = 11.64 \left( \frac{D}{D_c - d_s} \right)^2 \dots\dots\dots (4-29)$$

式(4-28)、(4-29)中， $d_s$  = 鋼板式縱向加勁板之中心線或角鋼式縱向加勁材之邊緣與受壓翼板內緣之距離。 $D_c$  = 腹板受壓深度，樑對稱時為  $D/2$ 。當腹板之上、下端均受壓，則  $k$  值應採用 7.2。



## 2. 其他構件， $R_b \leq 1.0$

$$R_b = 1 - 0.002 \left( \frac{D_c t_w}{A_{fc}} \right) \left[ \frac{D_c}{t_w} - \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{M_r}{S_{xc}}}} \right] \leq 1.0 \dots\dots\dots (4-30)$$

式中  $t_w$  = 腹板厚度

$A_{fc}$  = 受壓翼板之面積

$M_r$  = 側向扭曲挫屈彎矩或降伏彎矩

$S_{xc}$  = 針對受壓翼板之彈性斷面模數。對合成斷面而言， $S_{xc}$  僅適用於活載重設計階段之情況

$$\lambda = 15400, \text{ 如果 } D_c \leq D/2$$

$$= 12500, \text{ 如果 } D_c > D/2$$

部份側撐構件之斷面彎矩容量(即側向扭轉挫屈彎矩) $M_r$ (必小於降伏彎矩  $M_y$ )之計算有兩種情況，即：

1. 當腹板具縱向加勁材或  $\frac{D_c}{t_w} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{F_y}}$  時

$$M_r = 91 \times 10^6 C_b \left( \frac{I_{yc}}{L_b} \right) \sqrt{0.772 \frac{J}{I_{yc}} + 9.87 \left( \frac{d}{L_b} \right)^2} \leq M_y \dots\dots\dots (4-31)$$

2. 當斷面之  $\frac{\lambda}{\sqrt{F_y}} < (D_c/t_w)$  時，其亦可分為下列三種狀況，即：

① 如果  $L_b \leq L_p$ ，則  $M_r = M_y \dots\dots\dots (4-32)$

② 如果  $L_r \geq L_b > L_p$ ，則：

$$M_r = C_b F_y S_{xc} \left[ 1 - 0.5 \left( \frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \dots\dots\dots (4-33)$$

$$L_r = \left( \frac{572 \times 10^6 I_{yc} d}{F_y S_{xc}} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (4-34)$$

③ 如果  $L_b > L_r$ ，則：

$$M_r = C_b \frac{F_y S_{xc}}{2} \left( \frac{L_r}{L_b} \right)^2 \dots\dots\dots (4-35)$$

式中  $L_b$  = 受壓翼板之未支撐距離

$$L_p = 9500 r' / \sqrt{F_y} \dots\dots\dots (4-36)$$

$r'$  = 受壓翼板對腹板面垂直軸之迴轉半徑

$I_{yc}$  = 受壓翼板對腹板垂直軸之慣性矩

$d$  = 樑深

$$J = \frac{[(bt^3)_c + (bt^3)_t + Dt_w^3]}{3} \dots\dots\dots (4-37)$$

上式中  $b$ 、 $t$  分別為受壓(下標  $c$ )、受拉(下標  $t$ )翼板之寬度與厚度。

$C_b$  = 彎矩係數(Bending Coefficient)，其可分為兩種情況，即：

$$C_b = 1.75 + 1.05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0.3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2.3 \dots\dots\dots (4-38)$$

式中  $M_1$  及  $M_2$  分別為無側向支撐部份端點較小及較大彎矩，當產生反向曲率時  $M_1/M_2$  取正值，產生單一曲率時  $M_1/M_2$  取負值。

$C_b = 1.0$ ，當構材為無側向支撐懸臂樑或構材在側向支撐間有彎矩大於或等於二端點之較大者。

由此吾人亦可清楚看出，欲使鋼樑之抗彎能力保持在某一程度以上，則吾人必須仔細檢視相鄰側向支撐之間距。另一方面，讀者如參考圖 4.13，必可對前述三種斷面與部份側撐構件之斷面抗彎容量有更深一層之認識。

## 4.5 加勁材

I 型鋼板樑之加勁材有三大類，即①支承加勁材(Bearing Stiffener)，②豎向加勁材(Transverse Stiffener)，③縱向加勁材(Longitudinal Stiffener)。如圖 4.14 所示。加勁材通常有角鋼與鋼

板兩大類，惟工程界仍以採用鋼板佔大部份，其主要原因在於裁切與銲接均較容易。

一般而言，支承正上方一定會加設支承加勁材，但不一定會有豎向、加勁材與縱向加勁材。豎向縱向加勁材可能共同存在或僅有豎向加勁材。設計者應有清晰之設計觀念，使用過量之豎向、縱向加勁材對 I 型鋼樑可能造成負面之效果，例如殘餘應力。

依 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，I 型鋼加勁大樑可分為以下兩大類，即：

- ①豎向加勁大樑
- ②縱向加勁大樑

以下吾人將分別探討之。

#### 4.5.1 豎向加勁大樑

豎向加勁材之主要目的在於補強腹板之抗剪能力，同時亦可作為橫隔樑、隔板與大樑間之連接板(Connection Plate)。“豎向”意指其與大樑長度方向成垂直向，AASHTO 公路橋樑設計規範【1】中以“Transverse Stiffeners”稱之，因此，工程界亦有人以“橫向材勁材”稱之。

當腹板之抗剪能力無法滿足規範之規定時，則腹板便必須加設豎向加勁材。I 型鋼樑加設豎向加勁材是大樑之拉力場作用(Tension Field Action)可以發揮之基本條件，如圖 4.15 所示。

在無縱向加勁材之前提之下，設置豎向加勁材時必須確定腹板之深厚比滿足下式之規定，即：

$$\frac{D}{t_w} \leq \frac{36,500}{\sqrt{F_y}} \dots\dots\dots (4-39)$$

將常用之  $F_y$  值代入上式，則吾人便可清楚看出，鋼板降伏強度愈大者，其  $D/t_w$  值便愈小，此意謂著鋼板之  $F_y$  值愈大，則其抗剪能力便愈強。

| $D/t_w$ | $F_y$<br>(psi) |
|---------|----------------|
| 192     | 36,000         |
| 163     | 50,000         |
| 138     | 70,000         |
| 122     | 90,000         |
| 115     | 100,000        |

如果腹板之深厚比超過規範之規定〔式(4-39)〕，則設計者有兩個途徑可解決，即：

①調整腹板之  $D$ 、 $t_w$  值

②加設縱向加勁材

豎向加強材之寬厚比必須滿足下式之規定，即：

$$\frac{b'}{t} \leq 16 \dots \dots \dots (4-40)$$

式中  $b'$ 、 $t$  = 加板材之突出寬度(Projecting Width)與厚度

跨距中之加勁材(有別於支承正上方之支承加勁材)之總斷面積應符合式(4-41)之規定，即：

$$A \geq \left[ 0.15B \frac{D}{t_w} (1-C) \left( \frac{V}{V_u} \right) - 18 \right] \frac{F_{yweb}}{F_{cr}} t_w^2 \dots \dots \dots (4-41)$$

式中  $B=1.0$ ，如果豎向加勁材成對(即同一腹板斷面兩側各有一豎向加勁材)

=1.8，如果豎向加勁角鋼只位於腹板之單側

=2.4，如果豎向加勁板只位於腹板之單側

$F_{yweb}$  = 腹板之降伏強度

式(4-41)中， $F_{cr} = \frac{9025000}{(b'/t)^2} \leq F_{y1}$

其中， $b'$ 為豎向加勁材之突出寬度，而  $F_{y1}$  乃是加勁材之降伏應力。

豎向加勁材對參考面之二次慣性矩應符合式(4-42)之規定，即：

$$I \geq d_0 t_w^3 J \dots\dots\dots (4-42)$$

$$\text{式中 } J = \left[ 2.5 \left( \frac{D}{d_0} \right)^2 - 2 \right] \geq 0.5$$

$d_0$  = 相鄰兩豎向加勁材之間距

計算豎向加勁材之二次慣性矩時之參考面取法有兩種，即：

- ① 當加勁材成對佈設時，應取腹板之中心線為參考面
- ② 當加勁材只位於腹板單邊時，參考面應為加勁材與腹板之接觸面

豎向加勁材不需承壓於受拉翼板上。加勁材銲縫末端至腹板與翼板間角銲縫之近邊距離不得小於  $4t_w$  或大於  $6t_w$ 。為使僅設於腹板一邊之加勁材有效起見，加勁材應能承壓，但不需密接於受壓翼板上。如圖 4.16 所示。

若豎向加勁材用作隔板或橫構架與小樑或大樑之連接，則應與上、下翼板剛性連接，以避免發生腹板局部挫屈或龜裂之情況，圖 4.17、4.18 所示即為典型之例。

#### 4.5.2 縱向加勁大樑

縱向加勁材之主要目的在於補足腹板與豎向加勁材之不足。另一方面，縱向加勁材置於樑構件之受壓側，故縱向加勁材亦可增強樑構件之抗彎穩定性。

當對稱性 I 型斷面鋼樑之腹板厚度不足，無法滿足式(4-43)時，則此樑構件便必須加設縱向加勁材，且將其置於距離受壓翼板內緣之  $\frac{D}{5}$  處 ( $D$  = 腹板深度)，如圖 4.19 所示。

$$\frac{D}{t_w} \leq \frac{73,000}{\sqrt{F_y}} \dots\dots\dots (4-43)$$

如仔細比較式(4-39)與式(4-43)，則吾人可清楚看出，式(4-43)剛好為式(4-41)之兩倍。

縱向加勁材可以於腹板之單側或雙側佈設，依需要而異。惟 AASHTO 規範【1】中之設計規定均只針對一根縱向加勁材。另

一方面，吾人應有清晰之設計觀念，採用較厚之腹板應比加設縱向加勁板為佳。

縱向加勁材之尺寸應符合下列規定，即：

(a) 縱向加勁材之厚度  $t_s$  必須：

$$t_s \geq \frac{b' \sqrt{F_y}}{2600} \dots\dots\dots (4-44)$$

且作用於縱向加勁材之因數化彎曲應力必須小於加勁材之降伏應力。

(b) 縱向加勁材之剛度必須符合下式，即：

$$I \geq Dt_w^3 \left[ 2.4 \left( \frac{d_0}{D} \right)^2 - 0.13 \right] \dots\dots\dots (4-45)$$

(c) 加勁材之迴轉半徑不得小於：

$$r \geq \frac{d_0 \sqrt{F_y}}{23,000} \dots\dots\dots (4-46)$$

從結構力學之觀點而言，式(4-45)係為補強大樑之抗彎能力，而式(4-46)、式(4-47)係為了提升大樑腹板之垂直穩定性，避免腹板產生垂直挫屈。依 AASHTO 規範【1】之設計理念，計算上述  $I$  及  $r$  值時，係採用等效柱(Equivalent Column)之理論，同時亦應考慮以不超出  $18t_w$  寬之腹板(參見圖 4.20)為縱向加勁材之一部份。又豎向加勁材之彈性斷面模數，應不小於：

$$S_s = \frac{1}{3}(D/d_0)S_t \dots\dots\dots (4-47)$$

式中  $S_t$  = 縱向加勁材之彈性斷面模數。

$D$  = 翼板淨距

## 4.6 LFD 樑構件之剪力強度容量

對完全未加勁之腹板而言，腹板之剪力容量(Shear Capacity，即抗剪能力)可以下式計算之，即：

$$V_u = CV_p \dots\dots\dots (4-48)$$

式中  $V_u$  = 塑性或挫屈剪力

對腹板具豎向加勁材之 I 型鋼板樑而言，其剪力容量應考量拉力場作用下之後挫屈(Post-Buckling)效應，依據 AASHTO 規範【1】，其可以下式估算之：

$$V_u = V_p \left[ C + \frac{0.87(1-C)}{\sqrt{1+(d_o/D)^2}} \right] \dots\dots\dots (4-49)$$

式中  $V_p$  = 腹板之塑性剪力強度(Plastic Shear Strength，參考圖 4.21)，依 AASHTO 公路橋樑設計規範【1】，其應為：

$$V_p = 0.58F_yDt_w \dots\dots\dots (4-50)$$

式(4-48)中之  $C$  為常數，其為挫屈剪應力與降伏剪應力之比值，共有下列三種狀況，即：

- ① 如果  $\frac{D}{t_w} < \frac{6,000\sqrt{k}}{\sqrt{F_y}}$ ，則  $C = 1.0$
- ② 如果  $\frac{6,000\sqrt{k}}{\sqrt{F_y}} \leq \frac{D}{t_w} \leq \frac{75,000\sqrt{k}}{\sqrt{F_y}}$ ，則  $C = \frac{6,000\sqrt{k}}{\left(\frac{D}{t_w}\right)\sqrt{F_y}}$
- ③ 如果  $\frac{D}{t_w} > \frac{75,000\sqrt{k}}{\sqrt{F_y}}$ ，則  $C = \frac{4.5 \times 10^7 k}{\left(\frac{D}{t_w}\right)^2 F_y}$

式中  $k$  = 挫屈係數(Buckling Coefficient)。

對完全未加勁之腹板而言，其值可取 5.0，否則應以下式計算之，即：

$$k = 5 + \left[ 5 \div \left( d_o/D \right)^2 \right] \dots\dots\dots (4-51)$$

式中  $D$  = 翼板間無支撐之淨距

$d_o$  = 豎向加勁材之間距

$F_y$  = 腹板之降伏應力

LFD I 型鋼鉸樑設計亦須考量彎矩-剪力互制(Moment-Shear Interaction)，其可分為下列兩種狀況。

1. 如果斷面同時受到彎矩與剪力共同作用，且內在彎矩大於  $0.75M_u$ ，則斷面剪力便須符合下式之規定(參考圖 4.22)。

$$V/V_u = 2.2 - (1.6M/M_u) \dots\dots\dots (4-52)$$

2. 針對合成非結實斷面而言，如果因數化彎曲應力  $f_s$  大於  $0.75F_u$ ，則斷面剪力便須符合下式之規定。

$$V/V_u = 2.2 - (1.6f_s/F_u) \dots\dots\dots (4-53)$$

式中  $f_s$  = 其較大值之  $F_s/f_u$  頂鉸或底鉸之因數化之彎矩正向應力

若  $D/t_w$  值大於 150，須設置豎向中間加勁材。對無縱向加勁之樑，豎向中間加勁材間距不得超過  $D[260/(D/t_w)]^2$ ，以確保樑之組立施工製造。

對縱向或豎向加勁樑之簡支端，其第一中間加勁材之設置應使其端點之剪力不超過塑性或挫屈剪力，其值由下式計算：

$$V_u \leq V_p \dots\dots\dots (4-54)$$

對豎向加勁樑，其第一中間加勁材之間距不得超過 1.5D。對縱向加勁樑，其第一中間加勁材之間距不得超過分割後最大次格間樑深之 1.5 倍。

## 4.7 結語

本文已將樑式鋼橋之 ASD 與 LFD 設計理論差異性作了完整之比較，且亦將 I 型鉸樑鋼橋之 LFD 設計細則進行系統化之整理與描述。

綜合前述之設計細則，吾人可清楚看出，由結構力學之觀點，拉力桿件之結構破壞行為可能為拉力降伏或斷裂，而壓力構件之破壞模式主要為局部挫屈、整體挫屈或壓力降伏。受彎鋼樑構件之破壞模式則同時包含受拉桿件及受壓構件之破壞模式，如局部挫屈、降伏、斷裂、及在彎矩力偶下產生扭轉挫屈破壞。而影響



鋼樑抗彎能力之主要因素可歸類為下列數項：

- (1) 鋼材之降伏應力，例如  $M_p = ZF_y$ 。
- (2) 斷面之尺寸大小，因其決定  $I$ ， $S$ ， $Z$  等斷面性質，
- (3) 殘留應力，因殘留應力可能使鋼樑在受力時提早進入降伏狀態，
- (4) 斷面肢材之寬厚比、深厚比，因其將影響鋼樑構件之局部挫屈強度，
- (5) 受壓翼板處之側向支撐間距，因其影響鋼樑構件之側向扭轉挫屈強度。



表 4.1 AASHTO 規範之樑式鋼橋適用性

| 設計規範 | 最早出現年代 | 適用性   |         |      |
|------|--------|-------|---------|------|
|      |        | 直線形鋼橋 | 平面曲線形鋼橋 |      |
|      |        |       | I 型鋼橋   | 箱型鋼橋 |
| ASD  | 1921   | √     | √       | √    |
| LFD  | 1973   | √     | √       | √    |
| ALFD | 1986   | √     |         |      |
| LRFD | 1994   | √     |         |      |

表 4.2 容許應力設計法之載重群組

| Col. No. | 1        | 2           | 3         | 3A        | 4  | 5 | 6         | 7  | 8 | 9   | 10 | 11    | 12 | 13  | 14  |
|----------|----------|-------------|-----------|-----------|----|---|-----------|----|---|-----|----|-------|----|-----|-----|
| GROUP    | $\gamma$ | $\beta$ 係 數 |           |           |    |   |           |    |   |     |    |       |    |     | %   |
|          |          | D           | $(L+I)_n$ | $(L+I)_p$ | CF | E | B         | SF | W | WL  | LF | R+S+T | EQ | ICE |     |
| 容許應力設計法  | I        | 1.0         | 1         | 1         | 0  | 1 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   | 100 |
|          | IA       | 1.0         | 1         | 2         | 0  | 0 | 0         | 0  | 0 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   | 150 |
|          | IB       | 1.0         | 1         | 0         | 1  | 1 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   | **  |
|          | II       | 1.0         | 1         | 0         | 0  | 0 | 1         | 1  | 1 | 1   | 0  | 0     | 0  | 0   | 125 |
|          | III      | 1.0         | 1         | 1         | 0  | 1 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0.3 | 1  | 1     | 0  | 0   | 125 |
|          | IV       | 1.0         | 1         | 1         | 0  | 1 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 1  | 0   | 125 |
|          | V        | 1.0         | 1         | 0         | 0  | 0 | 1         | 1  | 1 | 1   | 0  | 0     | 1  | 0   | 140 |
|          | VI       | 1.0         | 1         | 1         | 0  | 1 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0.3 | 1  | 1     | 1  | 0   | 140 |
|          | VII      | 1.0         | 1         | 0         | 0  | 0 | 1         | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 1   | 133 |
|          | VIII     | 1.0         | 1         | 1         | 0  | 1 | 1         | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 1   | 140 |
|          | IX       | 1.0         | 1         | 0         | 0  | 0 | 1         | 1  | 1 | 1   | 0  | 0     | 0  | 1   | 150 |
|          | X        | 1.0         | 1         | 1         | 0  | 0 | $\beta_E$ | 0  | 0 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   | 100 |

註：1.  $(L+I)_n$ ：係針對典型 AASHTO 之 H 與 HS 貨車載重與衝擊效應。

2.  $(L+I)_p$ ：橋樑主管機關所定超載荷重(Overload)之活載重與衝擊效應。

3.\*\*：由橋樑主管機關訂定，用於超載荷重之橋樑評定(Rating)。

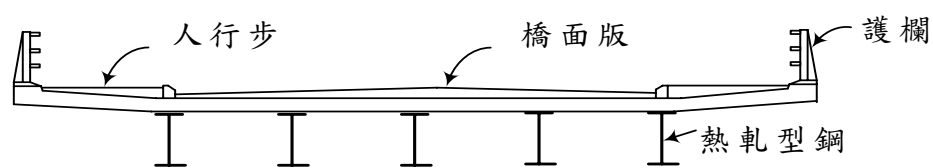
4.請同時參考文獻〔1〕之 Table 3.22.1A

表 4.3 強度設計法之基本理念

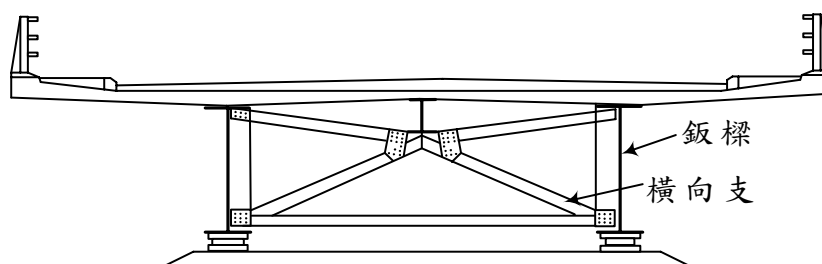
| 基本功能  | 載重模式                             | 設計載重值                      | 結構反應之設計重點     | 設計參數               |
|---|----------------------------------|----------------------------|---------------|--------------------|
| 服務性<br>(Serviceability)   | 服務載重<br>(Service Loads)          | $D + (L + I)$              | ①疲勞<br>②活載重變位 | ①活載重應力範圍<br>②勁度    |
|   | 超載荷重<br>(Overloads)              | $D + \beta(L + I)$         | 永久變形          | ①最大應力<br>②摩擦性接頭之滑動 |
| 安全性<br>(Safety)   | 最大設計載重<br>(Maximum Design Loads) | $\gamma[D + \beta(L + I)]$ | $\phi$ (最大強度) | 彎矩、剪力與軸向力強度        |
| 註：D=靜載重，I=衝擊力， $\gamma$ =載重因數<br>L=活載重， $\beta$ =載重係數， $\phi$ =強度折減因數 |                                  |                            |               |                    |

表 4.4 強度設計法之載重群組

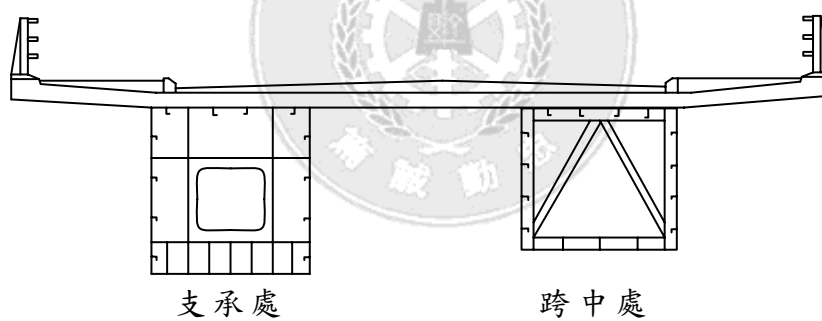
| Col. No.                 | 1    | 2           | 3         | 3A        | 4  | 5   | 6         | 7  | 8 | 9   | 10 | 11    | 12 | 13  |
|--------------------------|------|-------------|-----------|-----------|----|-----|-----------|----|---|-----|----|-------|----|-----|
| GROUP                    |      | $\beta$ 係 數 |           |           |    |     |           |    |   |     |    |       |    |     |
|                          |      | D           | $(L+I)_n$ | $(L+I)_p$ | CF | E   | B         | SF | W | WL  | LF | R+S+T | EQ | ICE |
| 載重因數設計法                  | I    | 1.3         | $\beta_D$ | 1.67*     | 0  | 1.0 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   |
|                          | IA   | 1.3         | $\beta_D$ | 2.20      | 0  | 0   | 0         | 0  | 0 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   |
|                          | IB   | 1.3         | $\beta_D$ | 0         | 1  | 1.0 | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   |
|                          | II   | 1.3         | $\beta_D$ | 0         | 0  | 0   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 1   | 0  | 0     | 0  | 0   |
|                          | III  | 1.3         | $\beta_D$ | 1         | 0  | 1   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0.3 | 1  | 1     | 0  | 0   |
|                          | IV   | 1.3         | $\beta_D$ | 1         | 0  | 1   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 1  | 0   |
|                          | V    | 1.25        | $\beta_D$ | 0         | 0  | 0   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 1   | 0  | 0     | 1  | 0   |
|                          | VI   | 1.25        | $\beta_D$ | 1         | 0  | 1   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0.3 | 1  | 1     | 1  | 0   |
|                          | VII  | 1.3         | $\beta_D$ | 0         | 0  | 0   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 1   |
|                          | VIII | 1.3         | $\beta_D$ | 1         | 0  | 0   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 0   | 0  | 0     | 0  | 1   |
|                          | IX   | 1.20        | $\beta_D$ | 0         | 0  | 0   | $\beta_E$ | 1  | 1 | 1   | 0  | 0     | 0  | 1   |
|                          | X    | 1.30        | $\beta_D$ | 1.67      | 0  | 0   | $\beta_E$ | 0  | 0 | 0   | 0  | 0     | 0  | 0   |
| 註：參考文獻【1】之 Table 3.22.1A |      |             |           |           |    |     |           |    |   |     |    |       |    |     |



(a)熱軋型鋼樑橋

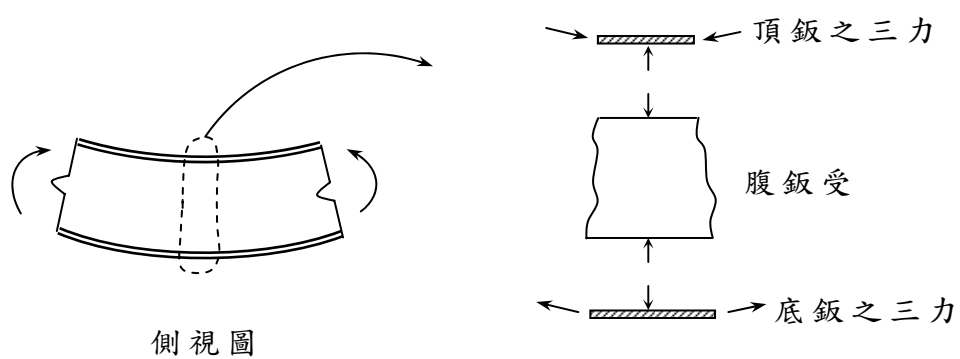


(b)鉸樑鋼橋



(c)箱型鋼橋

圖 4.1 樑式鋼橋之分類



翼板與腹板受力之自由

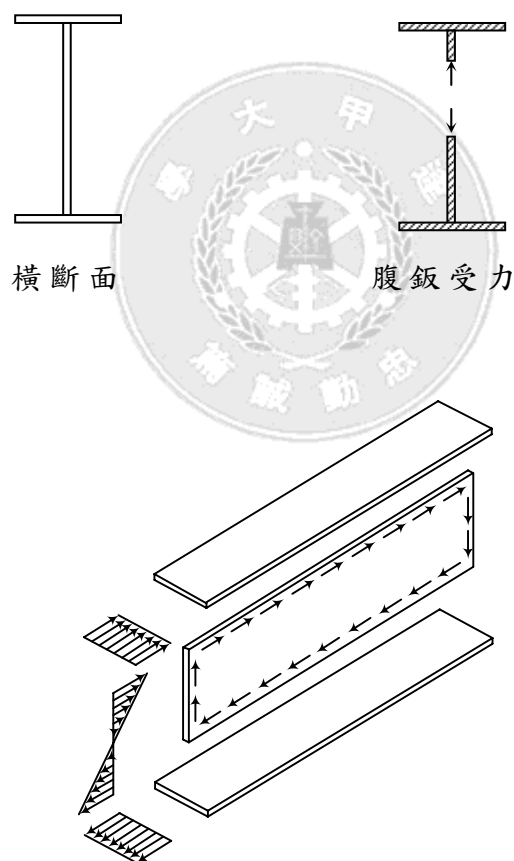
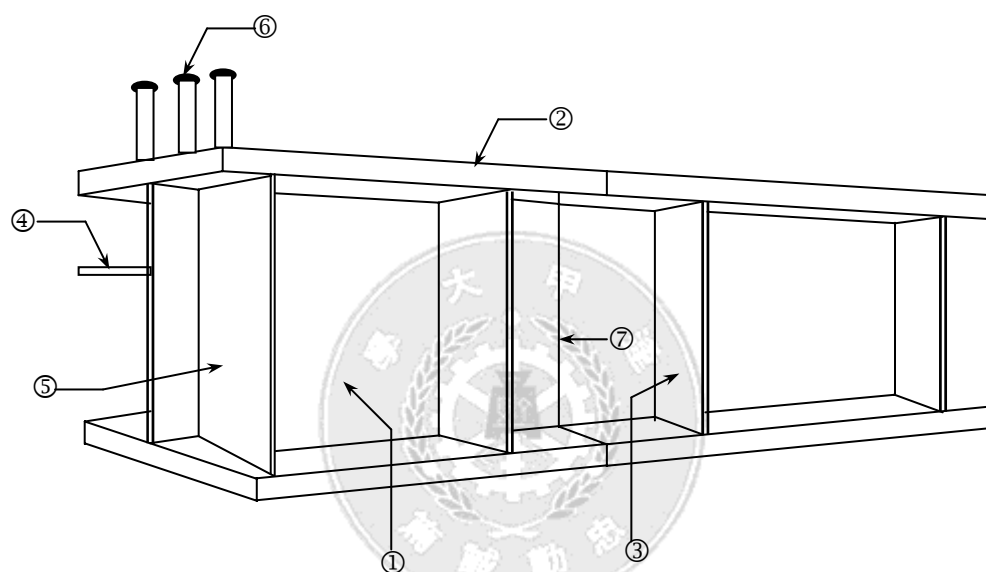


圖 4.2 I 型鋼板樑受彎矩時之翼板與腹板受力示意圖



- ① = 腹板 (Web)
- ② = 翼板 (Flange)
- ③ = 豎向加勁材 (Transverse Stiffener)
- ④ = 縱向加勁材 (Longitudinal Stiffener)
- ⑤ = 支承加勁材 (Bearing Stiffener)
- ⑥ = 剪力連結器 (Shear Connector)
- ⑦ = 接頭 (Splice)

圖 4.3 典型 I 型鋼板樑之設計細部

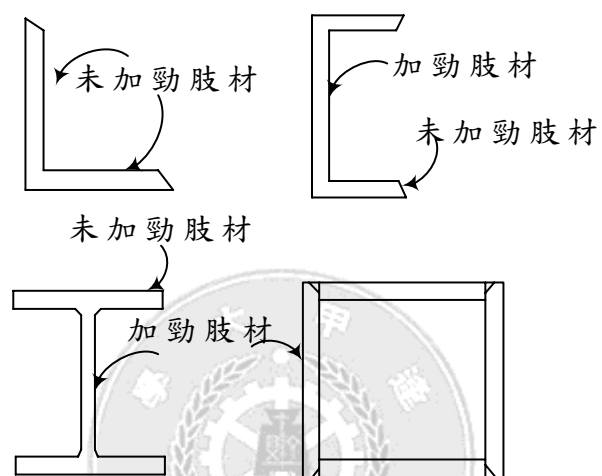


圖 4.4 加勁肢材與非加勁肢材之分野

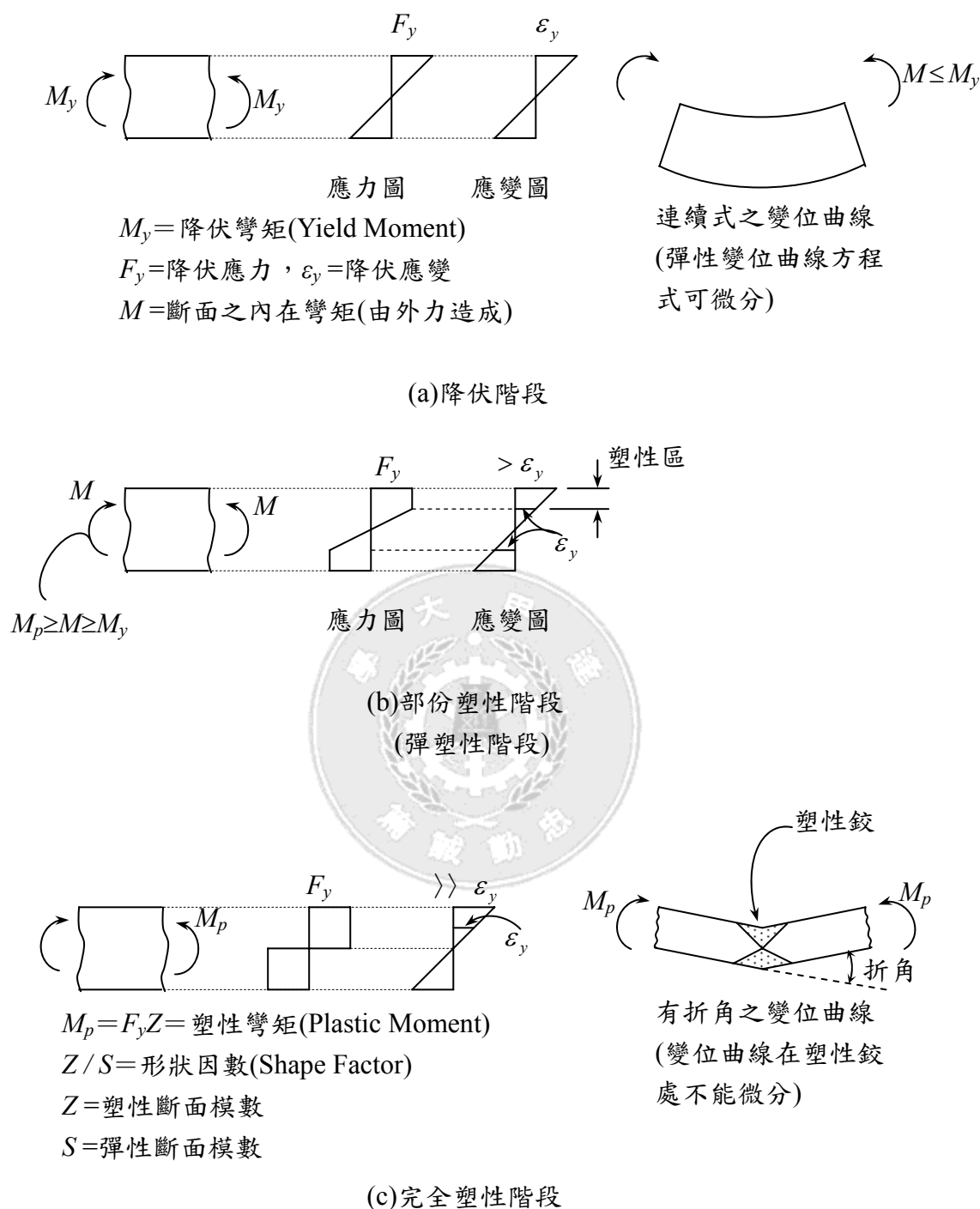


圖 4.5 極限彎矩容量示意圖



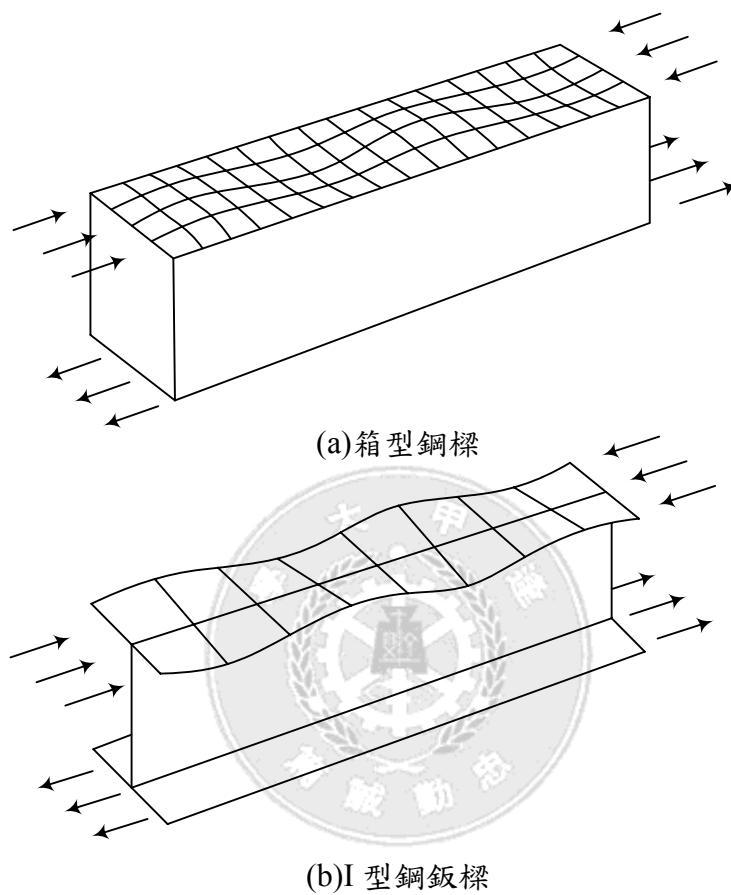
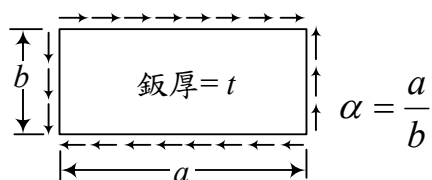
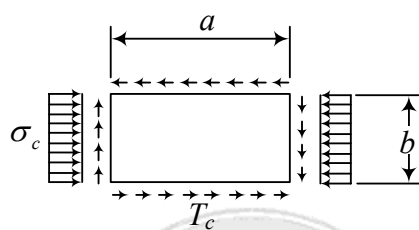


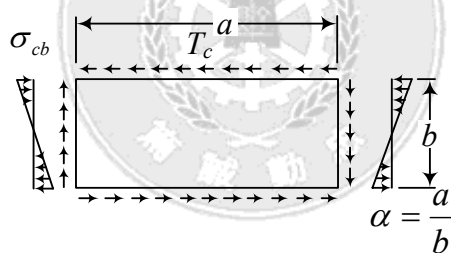
圖 4.6 翼鈑因受壓而發生局部挫屈



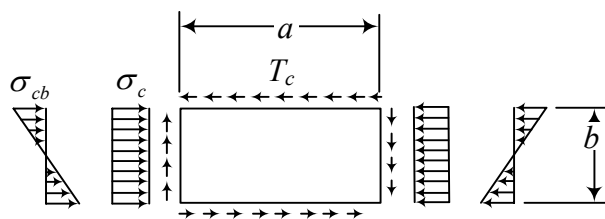
(a)純剪力



(b)剪力與壓力



(c)剪力與彎矩



(d)剪力、壓力與彎矩

圖 4.7 腹板受力之各種可能型式

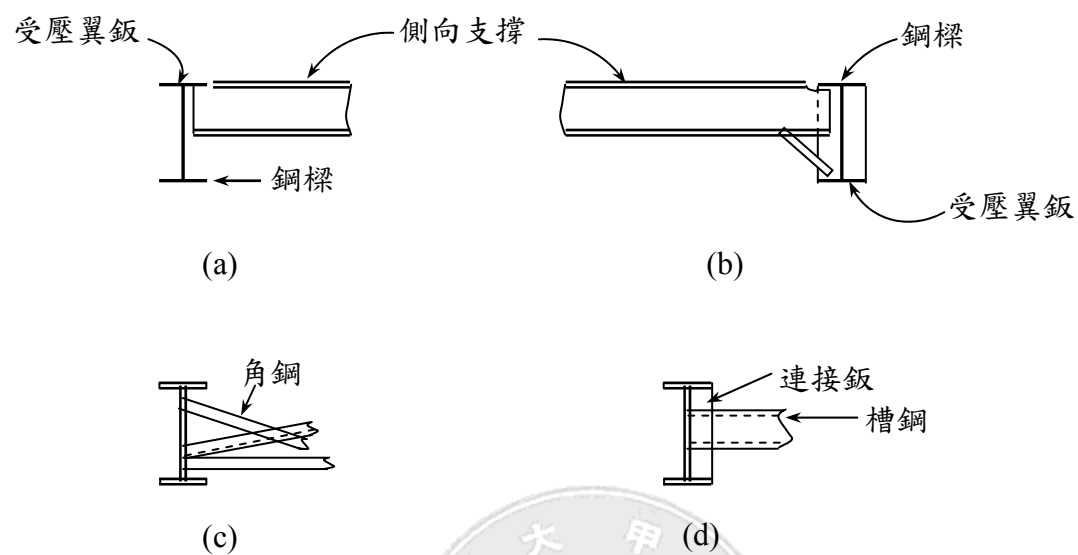


圖 4.8 典型鋼樑之點式側向支撐

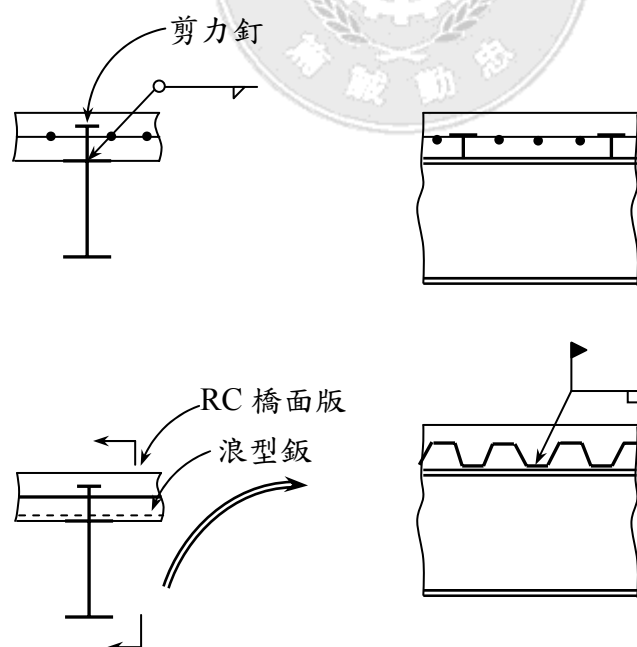


圖 4.9 典型鋼樑之連續式側向支撐

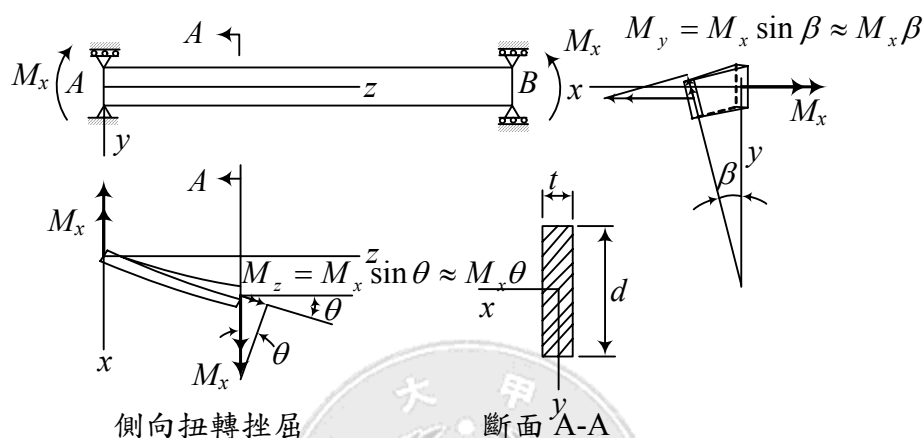
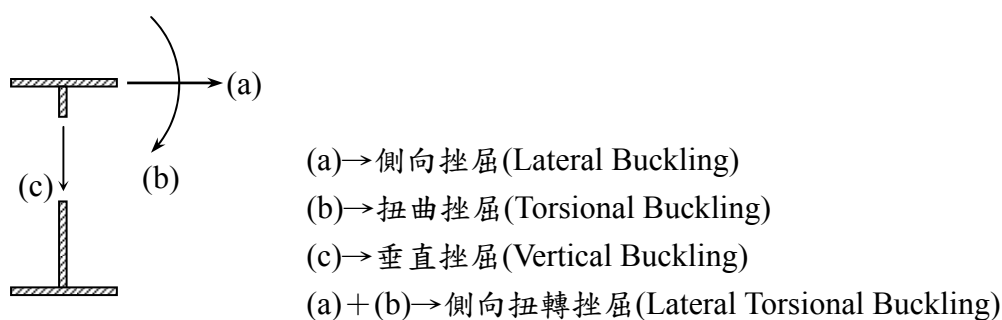


圖 4.10 典型 I 型鋼樑之受力挫屈模式

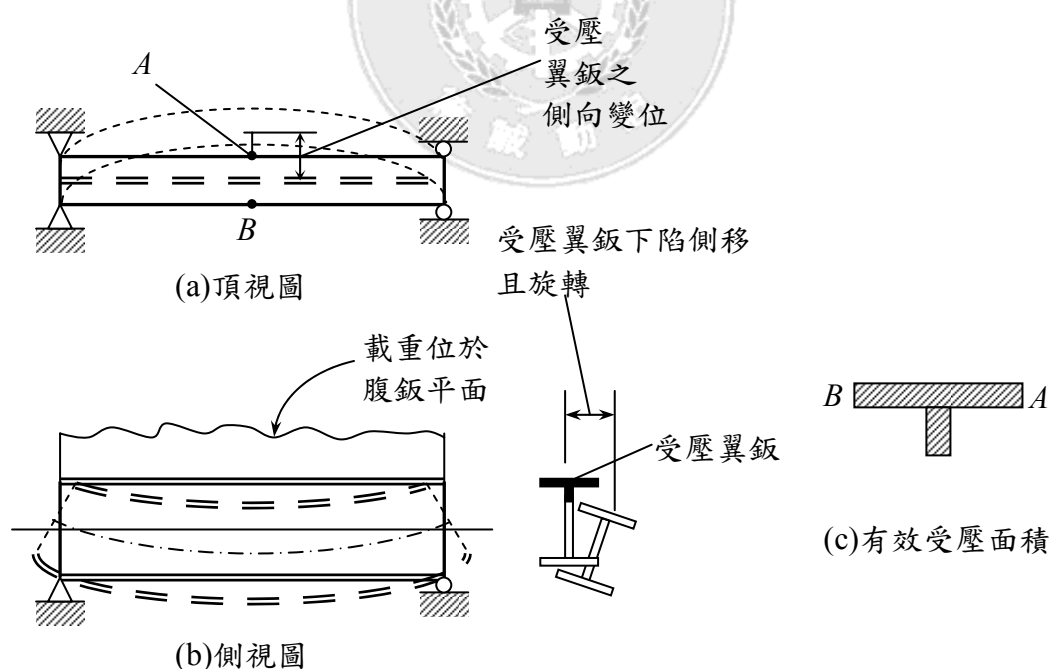


圖 4.11 鋼樑在跨距處無側向支撐，因受力而造成之側向扭轉挫屈

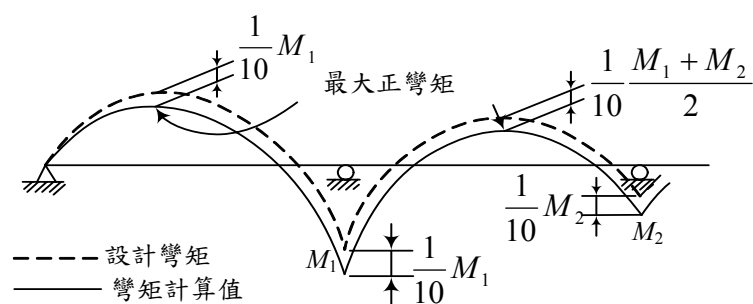


圖 4.12 連續樑之彎矩重新分配

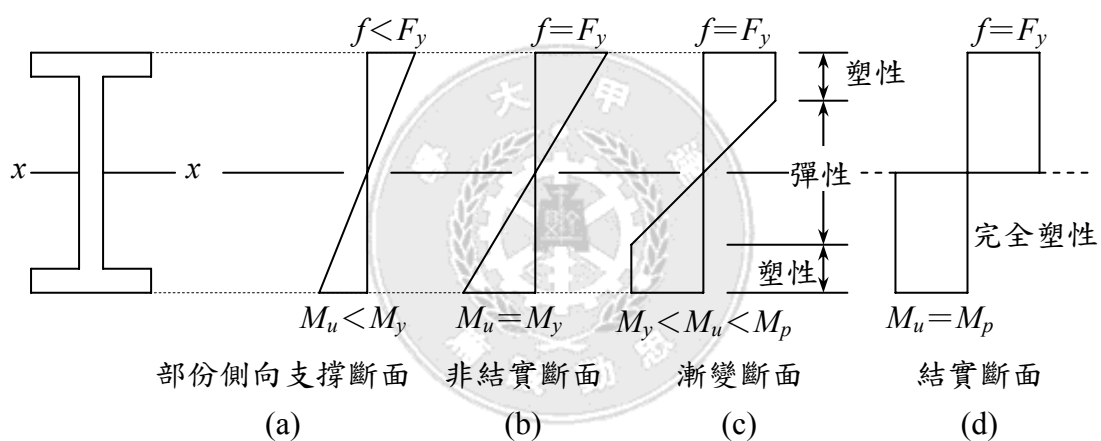


圖 4.13 LFD 設計中，不同鋼樑斷面之彎矩正向應力分佈

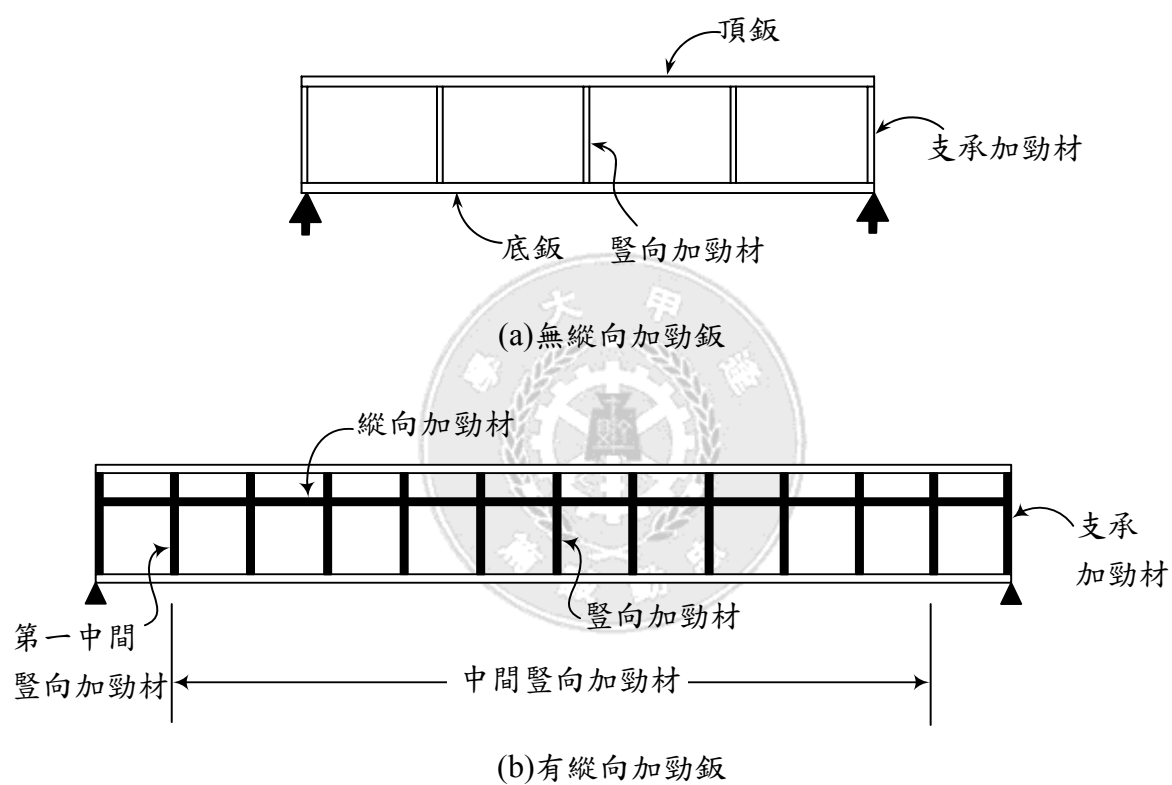


圖 4.14 I 型鋼板樑之加勁材

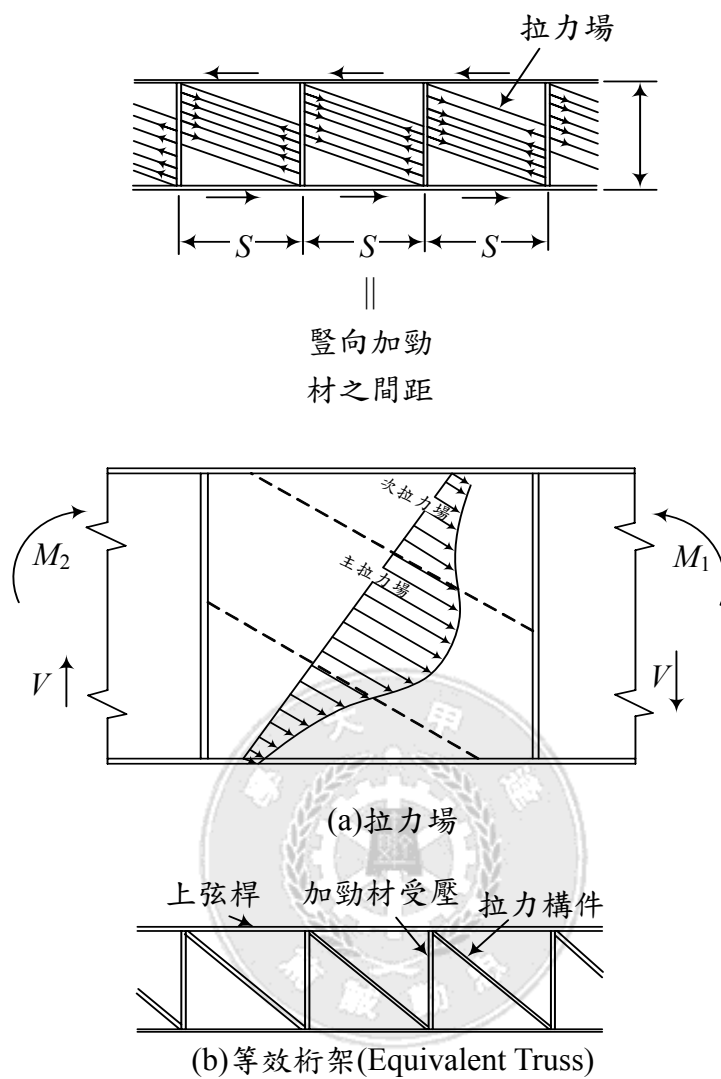


圖 4.15 拉力場之觀念

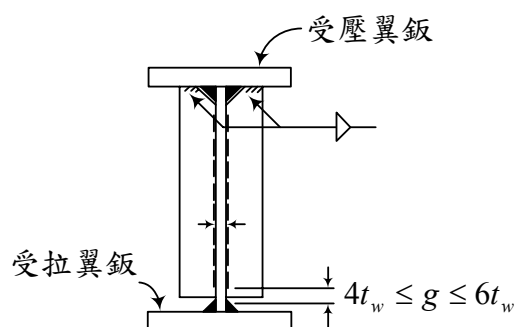


圖 4.16 豎向加勁板與翼板之接合

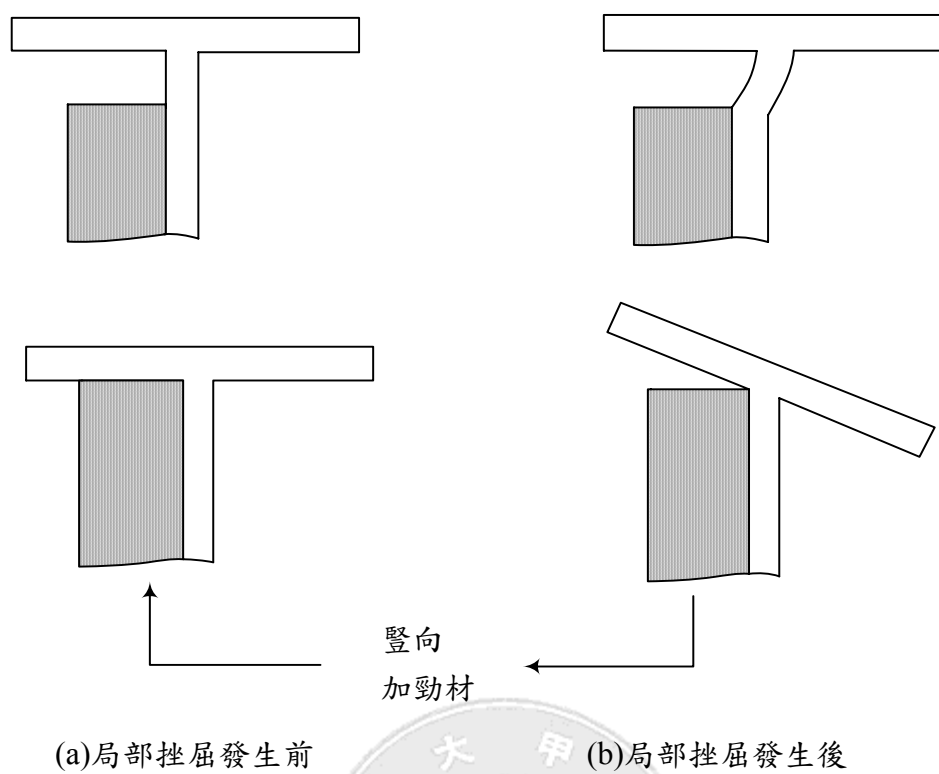


圖 4.17 豎向加勁材佈設不良可能造成之局部挫屈示意圖



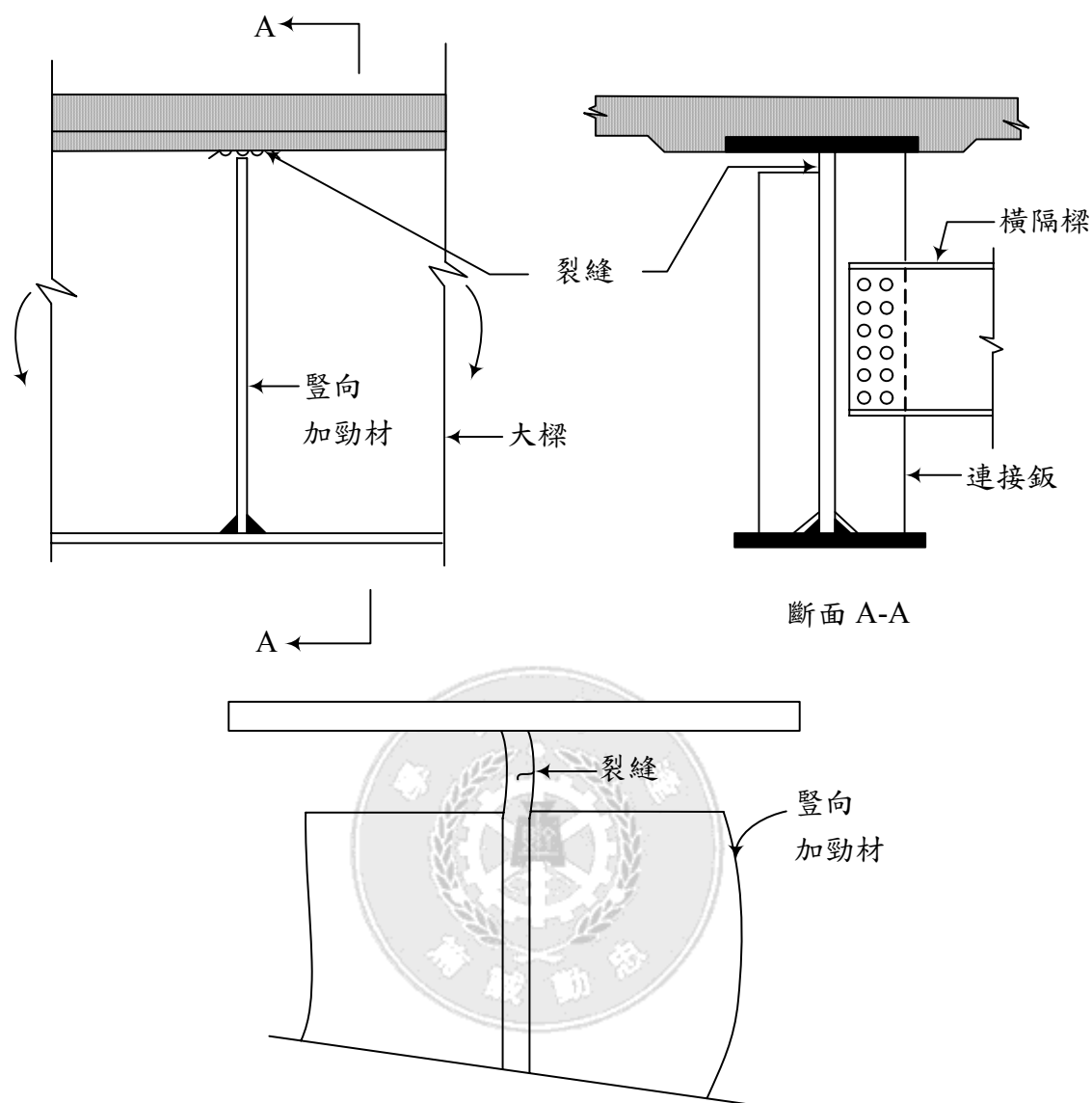


圖 4.18 豎向加勁材佈設不良可能造成之局部挫屈示意圖

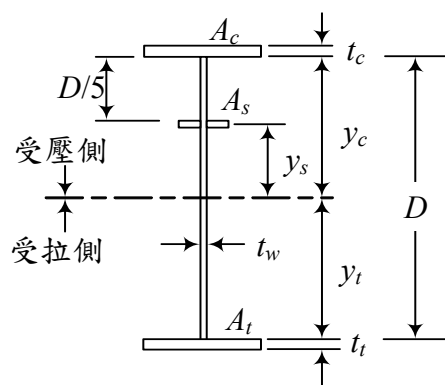


圖 4.19 縱向加勁材

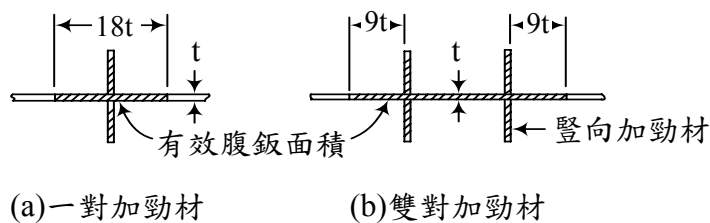


圖 4.20 等效柱之觀念

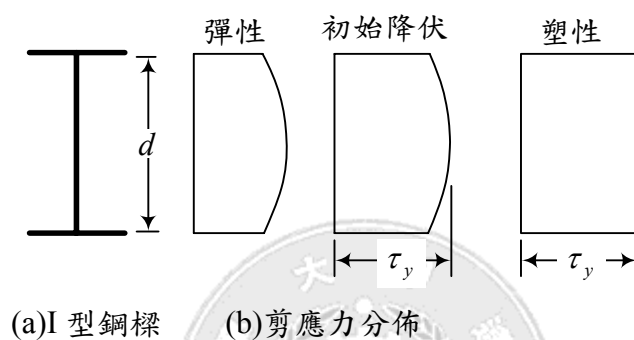


圖 4.21 腹板剪應力狀態

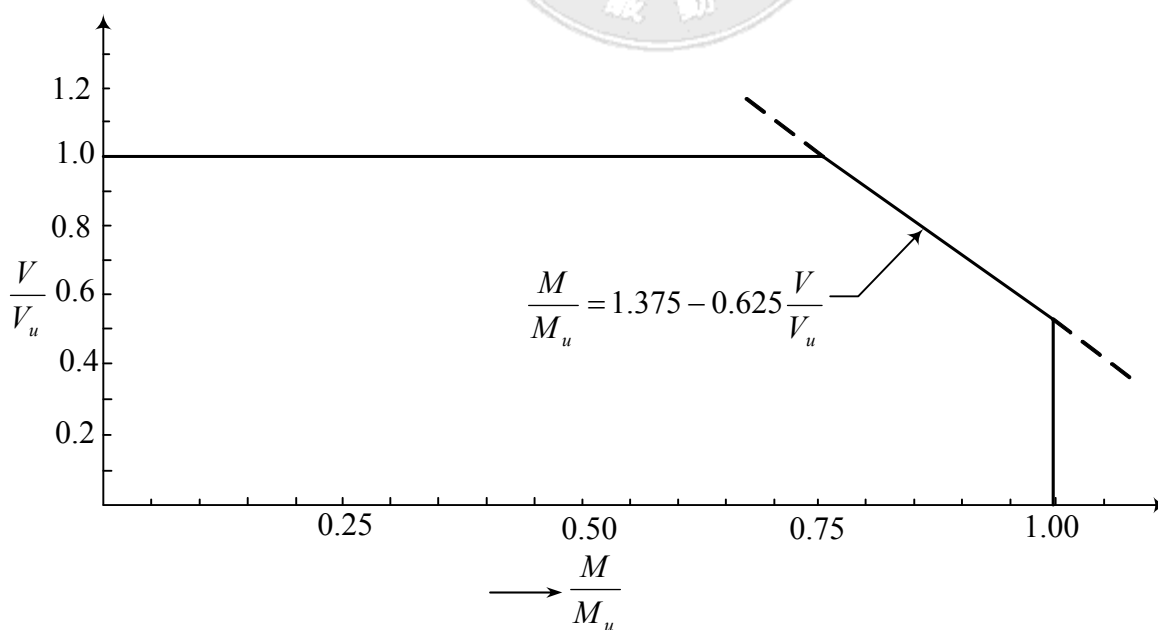


圖 4.22 LFD I 型鋼樑之彎-剪互制

## 第五章 格樑系統

### 5.1 前言

所謂格樑相似法意指將橋樑之上部結構以具平面狀之格樑(Grid)系統模擬之，此格樑系統之縱向樑即為橋樑上部結構之大樑，橫向樑則為橋樑之橫隔樑，縱向樑與橫向樑之接點一般均為剛接點(Rigid Joint)。

一般而言，當橋樑之跨距與橋寬比值愈大時，用格樑相似法便可愈精確地求得曲線 I 型鋼橋之結構行為。但必須注意，即使將整個曲線 I 型鋼橋之上部結構模擬為格樑系統，格樑結構本身仍是一個高度靜不定之結構系統。

### 5.2 格樑相似法之早期應用

將格樑相似法之概念用於整座橋樑上部結構之分析首先由 Lavelle 與 Boick【54】於 1965 年提出，之後更由 Lavelle 等人【55】於 1971 年加以修正。在此方法中，吾人將曲線 I 型鋼橋上部結構視為平面(雙面)之格樑(Grid)系統，而載重則垂直於格樑平面，翹曲效應則完全忽略不計。典型之格樑平面系統如圖 5.1 所示。格樑相似法之早期研發過程完全接受美國聯邦高速公路總署(Federal Highway Administration, FHWA)所主導之 CURT(Consortium of University Research Teams)研究計畫所贊助，所發展之電腦程式定名為 CUGAR1【55】。在 CUGAR1【55】發展出來之同時，有其他學者與工程界人士嘗試用數學函數來建立曲線樑之勁度矩陣。但這些方法均因為使用時受限於邊界條件太多則無法求解之困境，因此，這些數學解析方法並不為工程界人士所青睞。

1975 年，Lavelle【56】為了考慮曲線樑翹曲之效應，把 CUGAR1【55】加以修正而成為日後工程顧問公司首先使用於實際曲線橋樑設計之電腦程式，此程式定名為 CUGAR2。但是 CUGAR2 仍只適用於開放式之曲線樑斷面。一年之後，CUGAR2 由 Lavelle【57】繼續更新，使其亦能分析封閉式曲線樑(亦含箱型鋼樑)與桁架型式之橫隔樑，此程式定名為 CUGAR3。在此程式中，曲線橋之樑深需為一定值，而且箱型鋼樑必須有上側支撐，以使箱型斷面變為封閉式。對於複合式結構而言，頂鈑之勁度假設為無限大。CUGAR 系列之電腦程式在實際應用上僅適用於靜

載重分析，至於活載重分析則必須靠有經驗之工程師將活載重靜止置放於正確位置方能求最大之結構反應，例如最大變矩、最大扭曲等等。

CUGAR1、2、3 電腦程式對曲線橋樑分析之最大貢獻不在於其學術理論背景，而在於這些電腦程式將整座曲線橋樑上部結構之靜力分析列入考量。眾所周知，整座曲線橋樑上部結構之分析工作不但繁瑣而且費時，不是一般具有正確解之數學解析方程式可以輕易完成，因此，客觀而言，Lavelle 等人【54-57】發展 CUGAR 系統程式對橋樑工程界最大之貢獻應是將曲線橋樑結構分析之電腦程式化。

1973 年，加州大學柏克萊分校之 Powell 教授亦發展了一套針對曲線 I 型鋼橋分析之電腦程式 CURVBRG【58】。基本上，Powell 教授【58】仍沿用 CUGAR 系列之觀念，只不過在建立曲線樑元素勁度矩陣時將曲線樑元素再細分為 8 個直線段之小樑元素，如此建立之曲線樑元素勁度矩陣大小為  $36 \times 36$ 。然後再經由靜濃縮(Static Condensation)之過程，最後形成之曲線樑元素勁度矩陣則為  $8 \times 8$  之大小。CURVBRG【58】之最大缺點與 CUGAR 系列一樣，完全無自動分析載重之能力。

直至目前為止，對曲線 I 型鋼橋而言，格樑相似法最大之爭議乃是，如何決定使用在複合斷面之有效混凝土版面寬(Effective Slab Width)，此寬度是決定複合斷面必備之工具。在現今之 AASHTO 平面曲線橋樑規範【1】中對此並無明確之定義，因此，實用上橋樑工程師仍採用直線橋樑規範來決定(AASHTO Art. 10.38.3, 16th Edition, 1996)。另一方面，格樑相似法最大之優點則是大大地簡化了曲線鋼橋上部結構分析之複雜程度，尤其是當 I 型鋼樑數目多而且支承中心線有斜角(Skewed Angle)之時。

### 5.3 改良式格樑相似法

美國馬里蘭大學(University of Maryland, College Park)土木工程研究所為了改進 CUGAR 系列與 CURVBRG【58】電腦程式之缺點，特別研發另一套以格樑相似法為主體之曲線鋼橋電腦程式，定名為 DESCUS(DESIGN of Curved bridge System)【59】。DESCUS 電腦程式分為兩大部分，其中 DESCUS1 程式專為分析曲線 I 型鋼橋設計，DESCUS2 程式則用於分析曲線箱型鋼橋。此程式中，曲線 I 型鋼橋之曲線樑元素每一節點均具有四個自由度，亦即縱向彎矩、垂直剪力、純扭曲與雙彎矩(Bimoment)。而

且最大的突破乃是 DESCUS 程式具有自動分析活載重之能力、卡車載重(Truck Loading)與車道載重(Lane Loading)可以依設計規範之規定，自動地在格樑平面上縱向(橋樑長度方向)或橫向(與行車方向垂直者)移動，以求得格樑平面上最大之活載重結構反應。在美國境內，直至目前為止，已有超過 350 座以上之曲線 I 型鋼橋利用 DESCUS 程式完成設計與施工。

使用格樑相似法時，必須注意其節點編碼系統，以避免結構勁度矩陣太大，間接影響電腦程式之時間效率。圖 5.1 所示即為典型格樑相似法之節點編碼方法。

橋樑設計之初必須從公路線形、上部結構佈置(大樑與橫隔樑等)並配合下部結構研擬該橋之平面佈置，此即為架構平面圖(Framing Plan)。圖 5.2 所示即為典型平面曲線鋼橋之架構平面圖。圖中之 G1、G2、G3 與 G4 代表此橋樑共有四根大樑(G 為 Girder 之簡稱)，而大樑之組成可能是 I 型鋼樑或箱型鋼樑。如果將鋼橋上部結構各大樑與下部結構接觸之各支承中心連接成一條想像之線(即通稱支承中心線，Centerline of Bearings)，則支承中心線與各大樑之相互位置便可由其交叉角度看出。此交叉如為垂直者(即  $90^\circ$ )，則吾人稱此為輻射狀支承(Radial Supports)，即大樑中心線與下部結構支承中心線成垂直狀。如果支承中心線與大樑並非以  $90^\circ$  交叉，則吾人稱此類之成為斜交式支承(Skewed Supports)。圖 5.3 至 5.6 所示為橋台、橋墩支承中心線與上部結構大樑中心線之各種交叉型式。以圖 5.3 所示為例，墩台之支承中心線之延長線相交於同心圓之圓心，亦即墩台之支承中心線均位於輻射線之上，而大樑中心線與之相互垂直。因此，墩台之支承均屬於輻射狀支承，圖 5.4 與圖 5.5 之橋墩支承屬輻射狀支承，而兩側橋台支承則屬斜交式支承。由此二圖中，吾人亦可清楚看出，此類橋樑之下部結構支承中心線均平行，橋墩支承中心線位於圓心之輻射線上，因此，橋墩之支承屬於輻射狀支承，而橋台之支承則屬於斜交式支承。圖 5.6 之右側橋台支承中心線屬輻射狀支承，而橋墩與左側橋台之支承中心線則屬於斜交式支承。

一般而言，支承中心線如能與大樑互為垂直，則不論從規劃設計或施工之觀點均較為簡易，然而，由於公路路網之整體考量與地理環境之限制，支承中心線與大樑斜交在許多場合幾乎是無法避免之客觀現實。

針對上述下部結構不同之支承中心線與大樑交叉之型式，其橫隔樑(Diaphragms)佈置之型態亦稍有不同。橫隔樑依其所在位

置之不同，其稱呼亦稍有差異。一般而言，位於橋樑最外側者，以端隔樑(End Diaphragms)稱之，其餘位處跨徑之範圍者則以 Intermediate Diaphragms(或可稱為中隔樑)稱之。對於所有位於支承上方之橫隔樑，亦有人以支承橫隔樑(Support Diaphragms)稱呼。

曲線鋼橋下部結構之支承中心線與大樑之相對交叉位置會影響橫隔樑之佈置型態。以圖 5.3 為例，其下部結構所有支承係以輻射狀佈置，因此，橫隔樑可以沿著大樑之長度方向等間隔佈置，橫隔樑與大樑相互垂直，而且所有支承中心線與橫隔樑之延長線均相交於同心圓之圓心處，因此，此種佈置之橫隔樑稱為輻射狀橫隔樑(Radial Diaphragms)。圖 5.4 所示之中隔樑屬輻射狀佈置，而端隔樑則為斜交式。圖 5.5 所示之橫隔樑佈置對每一根大樑而言均為等間隔佈置，其與墩台之相對位置均為斜交式。圖 5.6 所示之橫隔樑系統則屬交錯式(Staggered)排列，但除左側橋台與橋墩之外，其橫隔樑均與大樑保持垂直。

由上述可知，橫隔樑之佈置型態變化多端，型式之選定無一定之準則，AASHTO 規範【1】除建議最大可容許間距(Diaphragm Spacing)之外，亦無強制規定型式之佈置，然必須注意，從橫隔樑受力最佳化之觀點而言，橫隔樑最好與大樑相互垂直。

## 5.4 橫隔樑之種類與型式

一般從橫隔樑受力最佳化觀點而言，橫隔樑最好與大樑相互垂直。對曲線 I 型鋼橋而言，為詳細區分外樑之位置，吾人通常把曲率半徑最大者稱為外側外樑(Outside Exterior Girder)，反之，曲率半徑最小者稱為內側外樑(Inside Exterior Girder)。鋼樑分為內、外大樑的主要目的在於其受力狀態不同，因此，AASHTO 標準橋樑設計規範【1】中規定，外樑之斷面大小不可小於內樑。

常用於 I 型鋼樑之橫隔樑有下列數種型式，即：

- ①橫向剛架(Cross Frame)或橫向支撐(Cross Bracing)，分別為典型 K 型與 X 型橫向剛架式之橫隔樑(K-Type and X-Type Cross Frames, Diaphragms)。
- ②軋型鋼橫隔樑(Rolled Cross Beam)，例如 I 型鋼、槽鋼等…

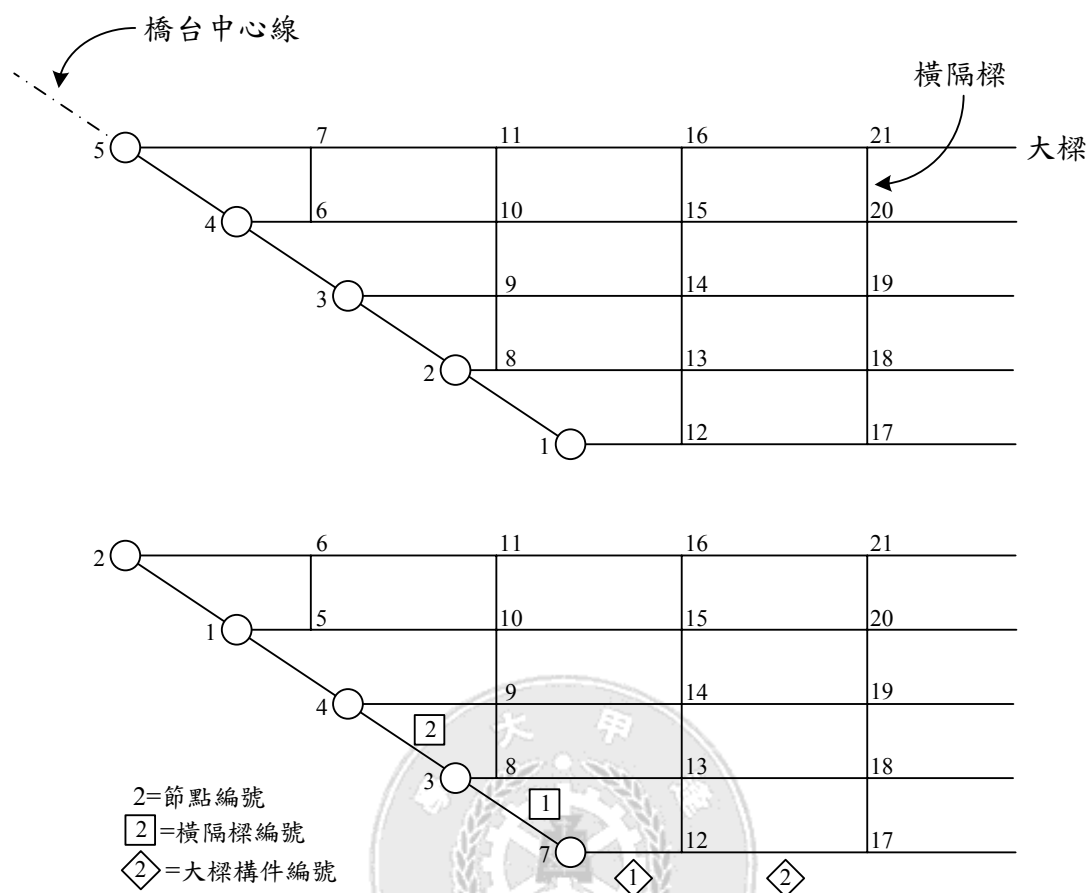


圖 5.1 格樑相似法之典型格樑系統與節點編碼系統

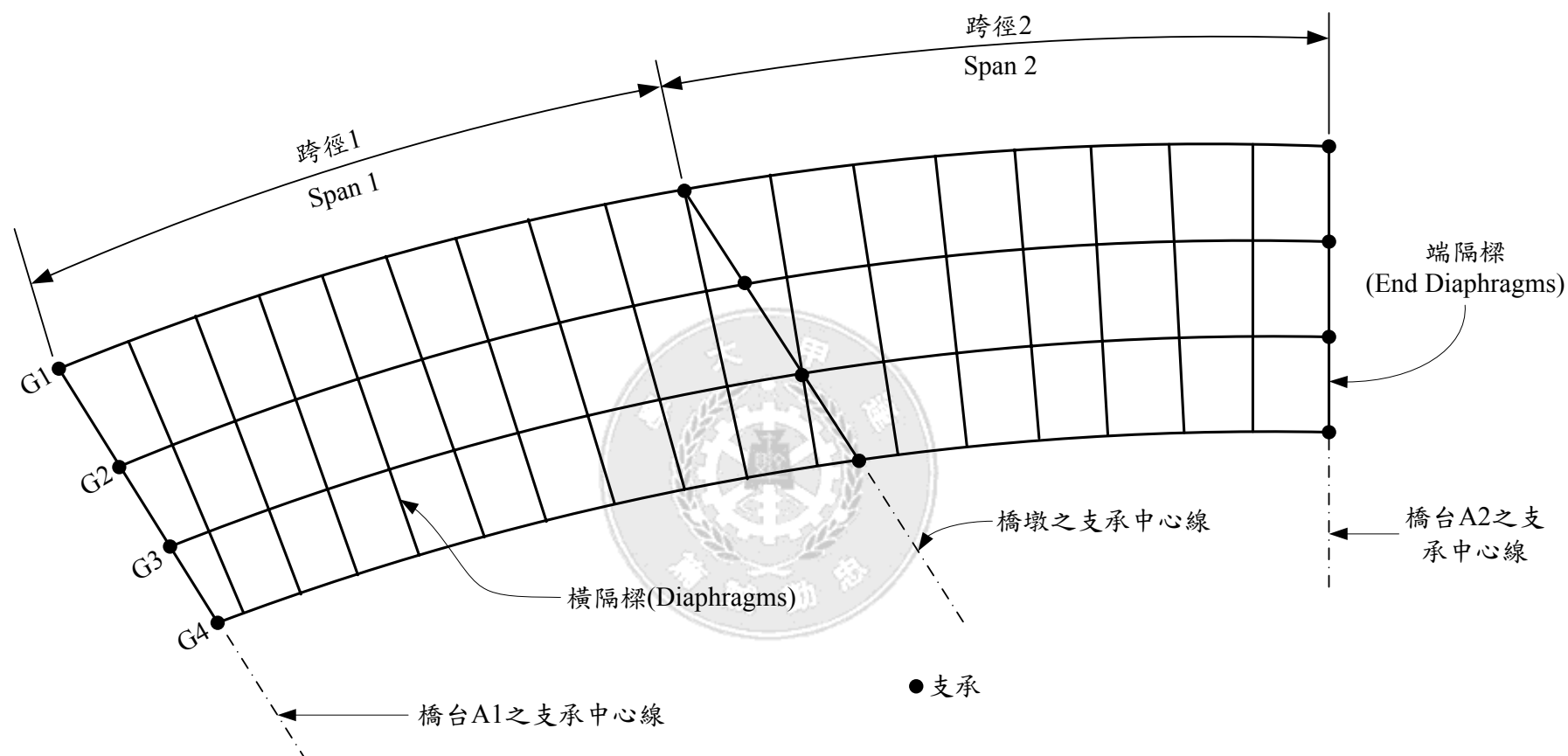


圖 5.2 典型平面曲線鋼橋之架構平面圖



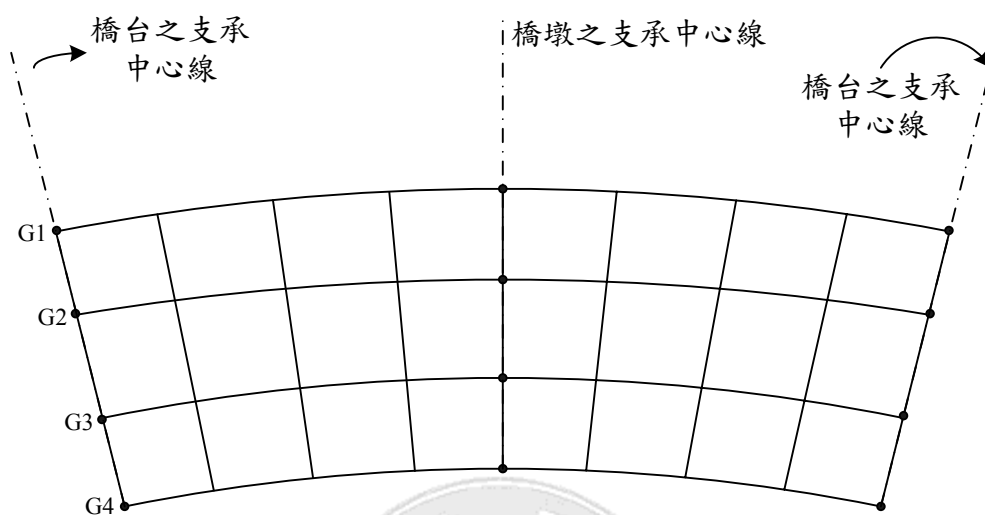


圖 5.3 輻射狀之平面架構

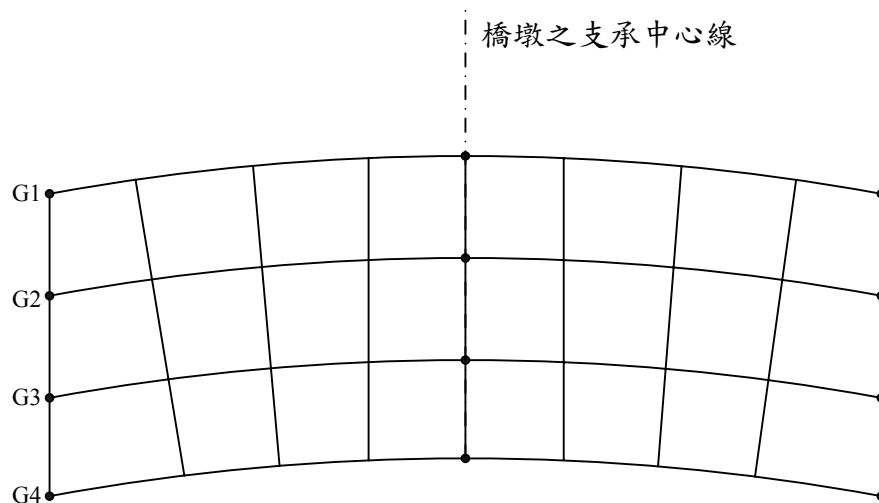


圖 5.4 輻射狀之隔樑與斜交式之端隔樑

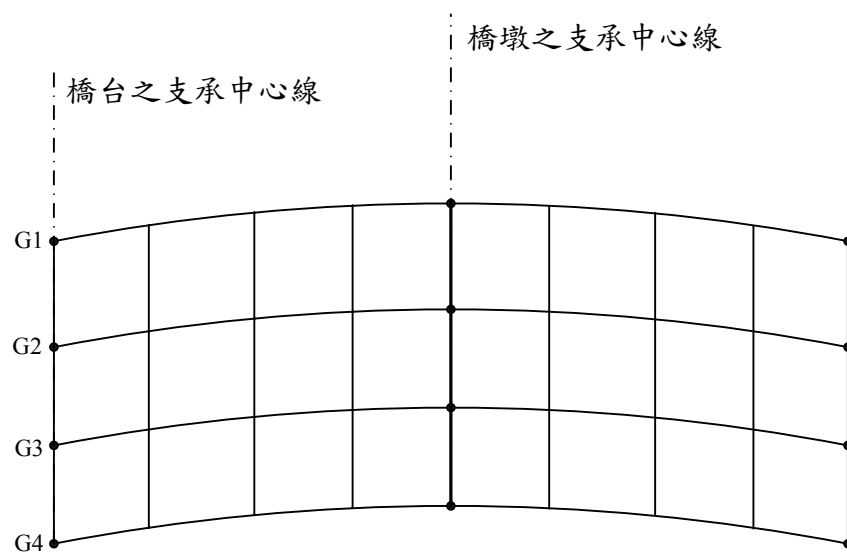


圖 5.5 斜交式佈置之橫隔樑系統

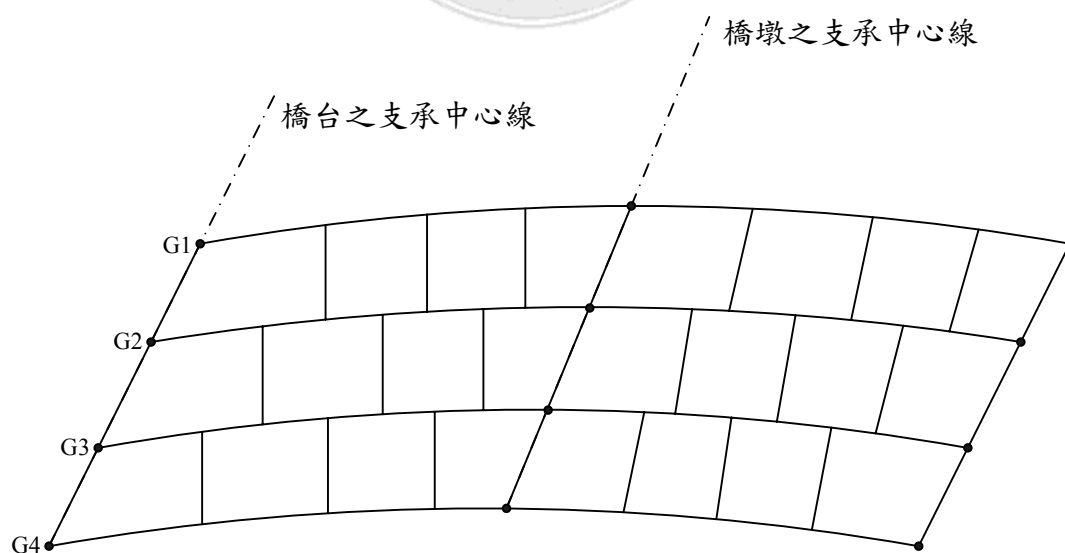


圖 5.6 交錯式佈置之橫隔樑系統

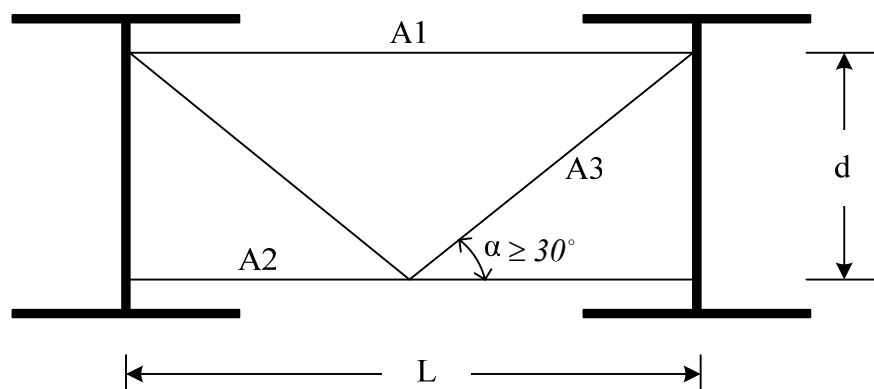


圖 5.7 典型之 K 型橫隔樑(一)

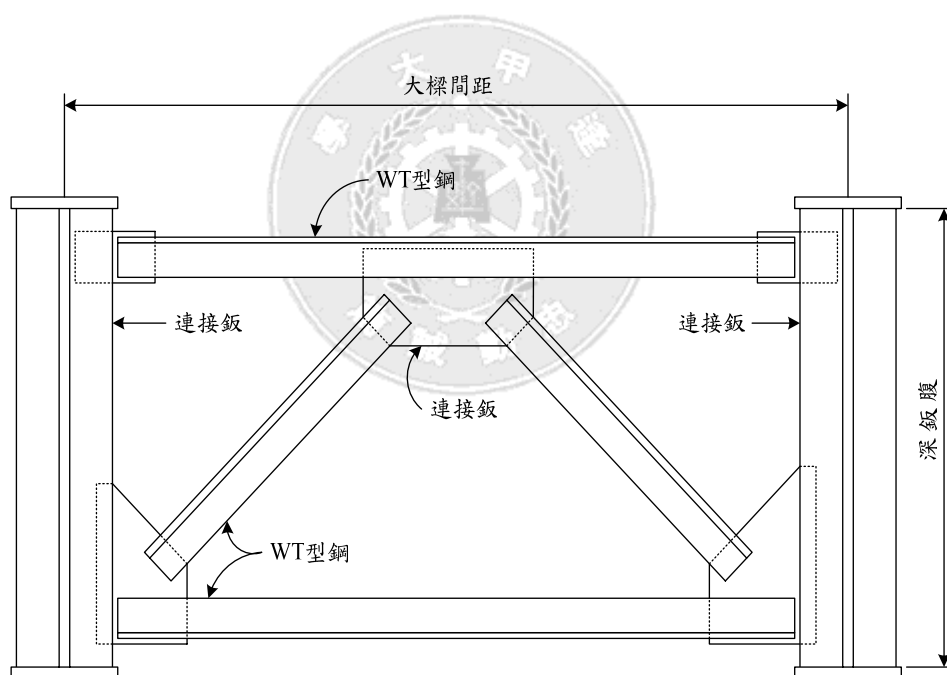
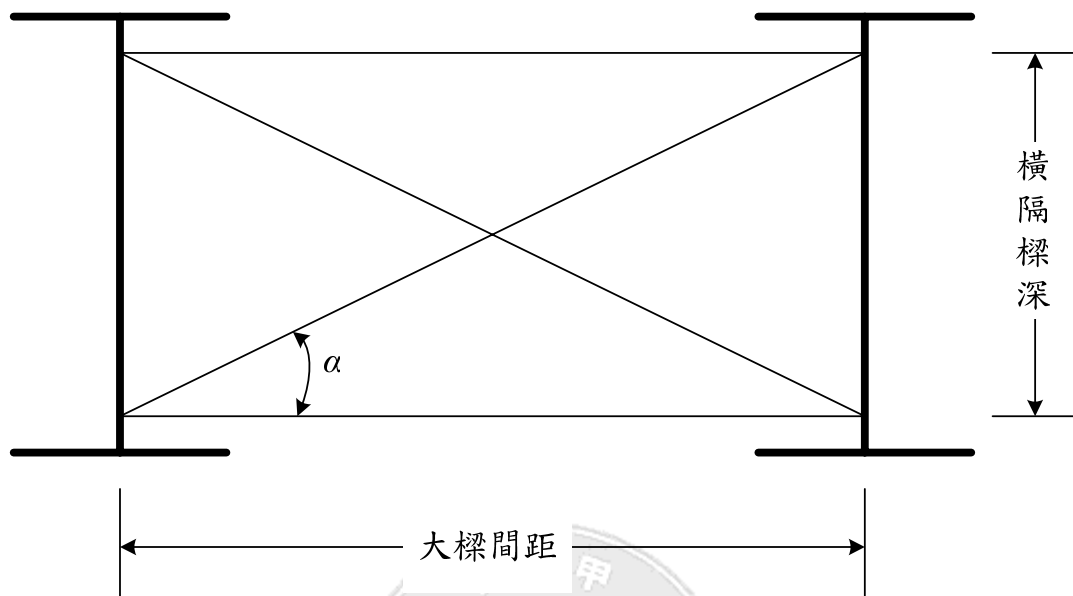


圖 5.8 典型之 K 型橫隔樑(二)  
(位於橋墩帽樑之正上方)



註： $\alpha$ 角通常不宜小於 $30^\circ$

圖 5.9 典型之 X 型橫隔樑

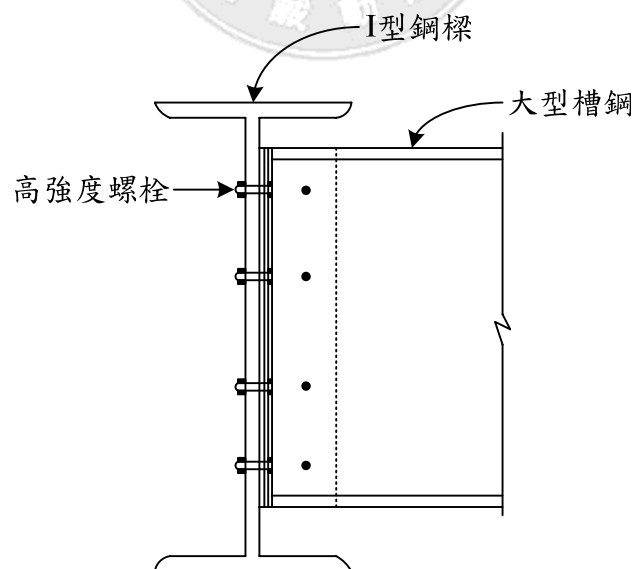


圖 5.10 I 型鋼構成橫隔樑之典型範例

## 5.5 部份翹曲束制橫隔樑元素

### 5.5.1 理論推導

本節之主要目的是根據格樑相似模式探討具部份翹曲束制 (Partially Warping Restraints) 構件對其扭曲行為之影響。在導出其構件元素勁度矩陣後，吾人亦以數值實例加以說明。本文所推演出之部份翹曲束制觀念對橋樑工程師在實務設計時具有正面之助益。

根據薄壁樑理論【60,61】，翹曲變形， $\omega$ 可表示成：

$$\omega = -\hat{\omega}_0 \phi'(x) \dots\dots\dots (5-1)$$

式中  $\hat{\omega}_0$  = 翹曲函數 (Warping Function) 或扇形座標 (Sectorial Coordinate)， $\phi(x)$  則是沿著橫隔樑長度之扭曲旋轉角函數，其為下式之解：

$$\phi'''(x) - \frac{GK_t}{EI_\omega} \phi' = -\frac{M_x}{EI_\omega} \dots\dots\dots (5-2)$$

式中  $M_x$  = 扭矩， $I_\omega$  = 翹曲常數， $K_t$  = 扭曲常數  
如定義：

$$\frac{GK_t}{EI_\omega} = \lambda^2 \dots\dots\dots (5-3)$$

則式(5-2)便可改寫成：

$$\phi'''(x) - \lambda^2 \phi' = -\frac{\lambda^2}{GK_t} M_x \dots\dots\dots (5-4)$$

針對某橫隔樑，如其長度為  $\ell$ ，且有一端為完全固定(即完全翹曲束制)，另一端則為完全自由端(即為完全翹曲自由，Warping Free)。假設此橫隔樑之自由端承受集中扭矩  $T$ ，則根據文獻【62】與【63】，沿此橫隔樑長度之扭曲旋轉角之變化率便可表示成：

$$\phi'(x) = \frac{T}{GK_t} [1 - \cosh \lambda x + \tanh \lambda \ell \sinh \lambda x] \dots\dots\dots (5-5)$$

則沿橫隔樑長度之扭曲旋轉角可表示成：

$$\phi(x) = \frac{T}{GK_t \lambda} [\lambda x - \sinh \lambda x + \tanh \lambda \ell (\cosh \lambda x - 1)] \dots\dots\dots (5-6)$$

自由端之扭曲旋轉角則可表示成：

$$\phi_f = \frac{T}{GK_t \lambda} [\lambda \ell - \tanh \lambda \ell] = \frac{T \ell}{GK_t} \frac{\lambda \ell - \tanh \lambda \ell}{\lambda \ell} \dots\dots\dots (5-7)$$

針對鉸樑式(Plate Girder)橫隔樑而言，如定義  $K_{te}$  為其有效扭曲常數(Effective Torsional Constant)，即：

$$K_{te} = \frac{T \ell}{G \phi_f} \dots\dots\dots (5-8)$$

以  $K_{te}$  代入式(5-7)，則  $K_{te}$  和  $K_t$  之關係式便可寫成：

$$K_{te} = K_t \frac{\lambda \ell}{\lambda \ell - \tanh \lambda \ell} \dots\dots\dots (5-9)$$

綜合式(5-1)與式(5-5)，則翹曲變形便可以得到式(5-10)表之，即：

$$\omega_f = -\hat{\omega}_0 \phi'(\ell) = -\hat{\omega}_0 \frac{T}{GK_t} \dots\dots\dots (5-10)$$

假設固定端僅受到部份翹曲變形之束制，則其翹曲變形  $\omega_p$  與自由端之自由翹曲變形  $\omega_f$  間可以正比例之關係表之，即：

$$\omega_p = C_{or} \omega_f = -C_{or} \hat{\omega}_0 \frac{T}{GK_t} \dots\dots\dots (5-11)$$

式中  $C_{or}$  = 翹曲束制常數，其數值介於 0 與 1 之間。綜合式(5-1)與式(5-11)，則固定端(翹曲未完全束制)便可表示成：

$$\omega_p = -\hat{\omega}_0 \phi'(0) = -C_{or} \hat{\omega}_0 \frac{T}{GK_t} \dots\dots\dots (5-12)$$

由於固定端部分翹曲束制所造成之斜率可表示為：

$$\phi'(0) = C_{or} \frac{T}{GK_t} \dots\dots\dots (5-13)$$

由薄壁樑之原理，受到集中扭曲荷載之懸臂薄壁樑扭曲旋轉角之通式可表示為：

$$\phi(x) = A + B \cosh \lambda x + C \sinh \lambda x + \frac{T x}{GK_t} \dots\dots\dots (5-14)$$

式中  $A$ 、 $B$  與  $C$  為未確定常數。為了解這些常數，吾人必須利用

下列三個邊界條件：

$$\phi(0) = 0 \dots\dots\dots (5-15)$$

$$\phi'(0) = C_{or} \frac{T}{GK_t} \dots\dots\dots (5-16)$$

$$\phi''(\ell) = 0 \dots\dots\dots (5-17)$$

利用式(5-14)，常數  $A$ 、 $B$ 、 $C$  便可表示成：

$$A = \frac{T}{GK_t \lambda} (C_{or} - 1) \tanh \lambda \ell \dots\dots\dots (5-18)$$

$$B = -\frac{T}{GK_t \lambda} (C_{or} - 1) \tanh \lambda \ell \dots\dots\dots (5-19)$$

$$C = \frac{T}{GK_t \lambda} (C_{or} - 1) \dots\dots\dots (5-20)$$

基於此，式(5-14)便可改寫成：

$$\phi(x) = \frac{T}{GK_t \lambda} (C_{or} - 1) [\tanh \lambda \ell - \tanh \lambda \ell \cosh \lambda x + \sinh \lambda \ell] + \frac{T x}{GK_t} \dots\dots (5-21)$$

此式之微分，即扭曲旋轉角之變化率便為：

$$\phi'(x) = \frac{T}{GK_t} \left[ 1 + (C_{or} - 1) \frac{\cosh \lambda (\ell - x)}{\cosh \lambda \ell} \right] \dots\dots\dots (5-22)$$

式(5-21)實為懸臂薄壁樑固定端為部份翹曲束制情況下，承受集中扭曲荷載時之扭曲旋轉角之通式解。自由端扭曲旋轉角  $\phi_f$  則可由前述式(5-5)得知，如下式所示。

$$\phi_f = \frac{T \ell}{GK_t} \left[ \frac{\lambda \ell + (C_{or} - 1) \tanh \lambda \ell}{\lambda \ell} \right] \dots\dots\dots (5-23)$$

由前述完全翹曲束制情況下有效扭曲常數之定義，則依相同原理，固定端部分翹曲束制情況下之有效扭曲常數便可表示成：

$$K_{tep} = \frac{T \ell}{G \phi_f} \dots\dots\dots (5-24)$$

最後， $K_{tep}$  與  $K_t$  間修正後之關係便可表示成：

$$K_{tep} = K_t \left[ \frac{\lambda \ell}{\lambda \ell + (C_{or} - 1) \tanh \lambda \ell} \right] \dots\dots\dots (5-25)$$

圖 5.11 所示為薄壁型鋼橫隔樑翹曲邊界條件(即  $C_{or}$  值之變化)對有效扭曲常數之影響。由此圖可清楚看出，隨著翹曲束制常數之增加，有效扭曲常數則遞減。另一方面，此圖亦清楚顯示，構件長度增加會使翹曲效應減弱。

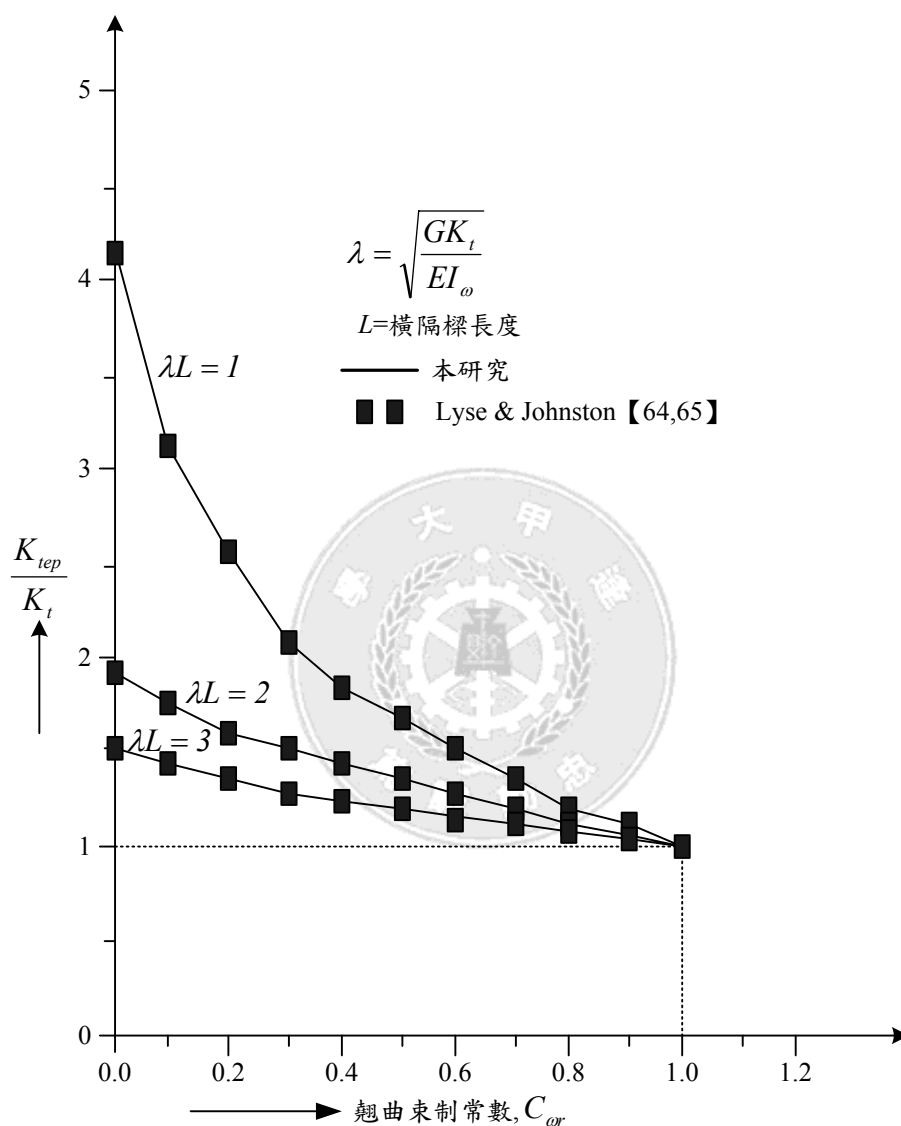


圖 5.11 翹曲邊界條件與有效扭曲常數之關係

### 5.5.2 元素矩陣

前述有效扭曲常數一旦已經推導出來，則吾人便可利用傳統直線樑每節點具三個自由度之理論推導其元素勁度矩陣(Element Stiffness Matrix)，詳見附錄 II。由此矩陣亦可清楚看出，傳統薄壁樑之純扭曲常數( $K_t$ )由有效扭曲常數( $K_{tep}$ )取代，而  $K_{tep}$  之值則與大樑、橫隔樑間之邊界條件有直接關係。



### 5.5.3 數值分析

為了驗證前述推導具部份翹曲束制薄壁樑元素勁度矩陣之正確性，以下將以某一 W24×104 橫隔樑為例進行數值分析。此 W24×104 型鋼長度為 10ft，一端固定，另一端則可完全自由變形，自由端承受 1k-ft 之扭曲荷載。由本研究與文獻【64,65】所得有關扭曲旋轉角之比較如圖 5.12 所示，由此圖可清楚看出，翹曲束制之程度愈小，則其扭曲旋轉角亦愈小。

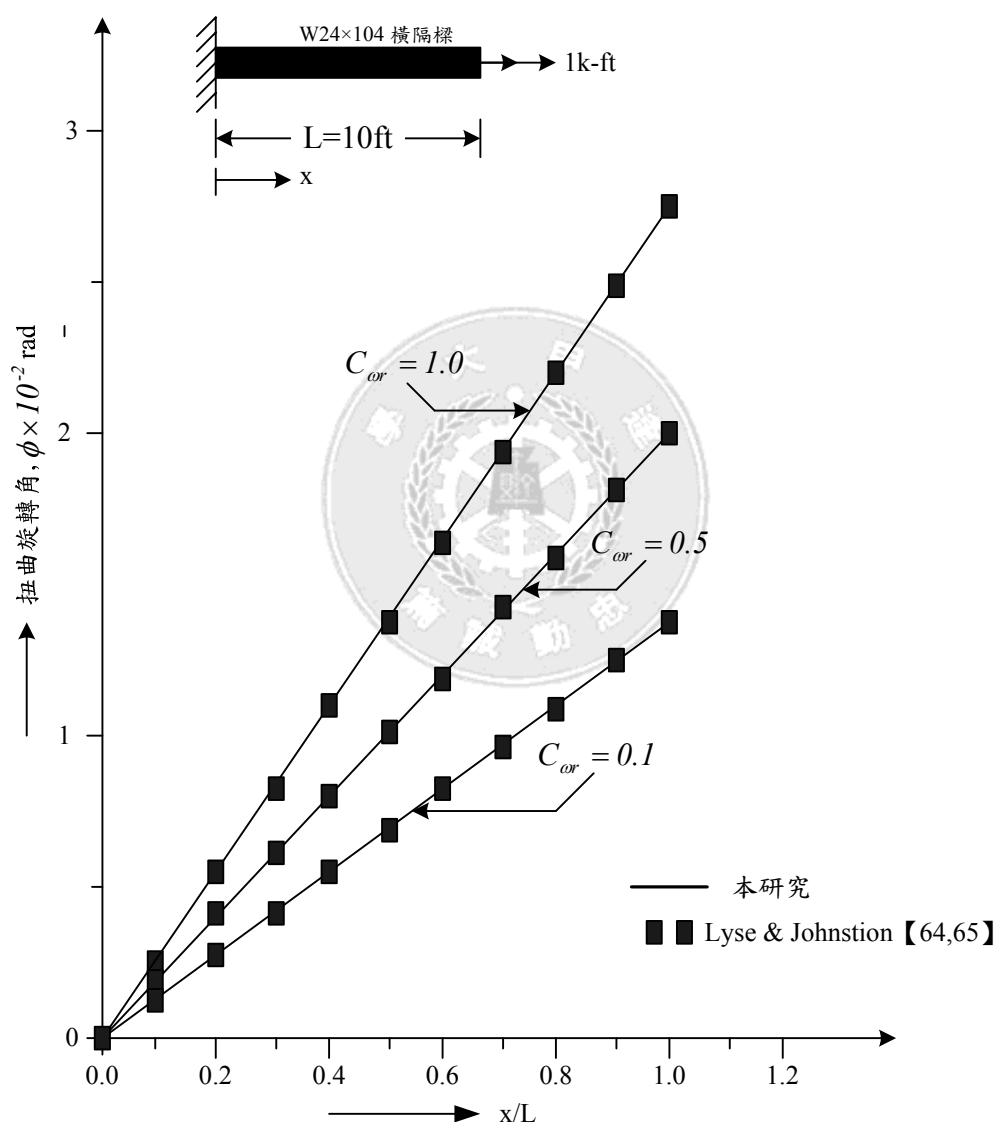


圖 5.12 翹曲束制邊界條件對扭曲旋轉角之影響

圖 5.13 所示則是針對不同之固定端翹曲束制條件，自由端承受扭曲荷載時之扭曲旋轉角。由此圖可看出，隨著  $C_{wr}$  值愈大則自由端之扭曲旋轉角亦愈大。

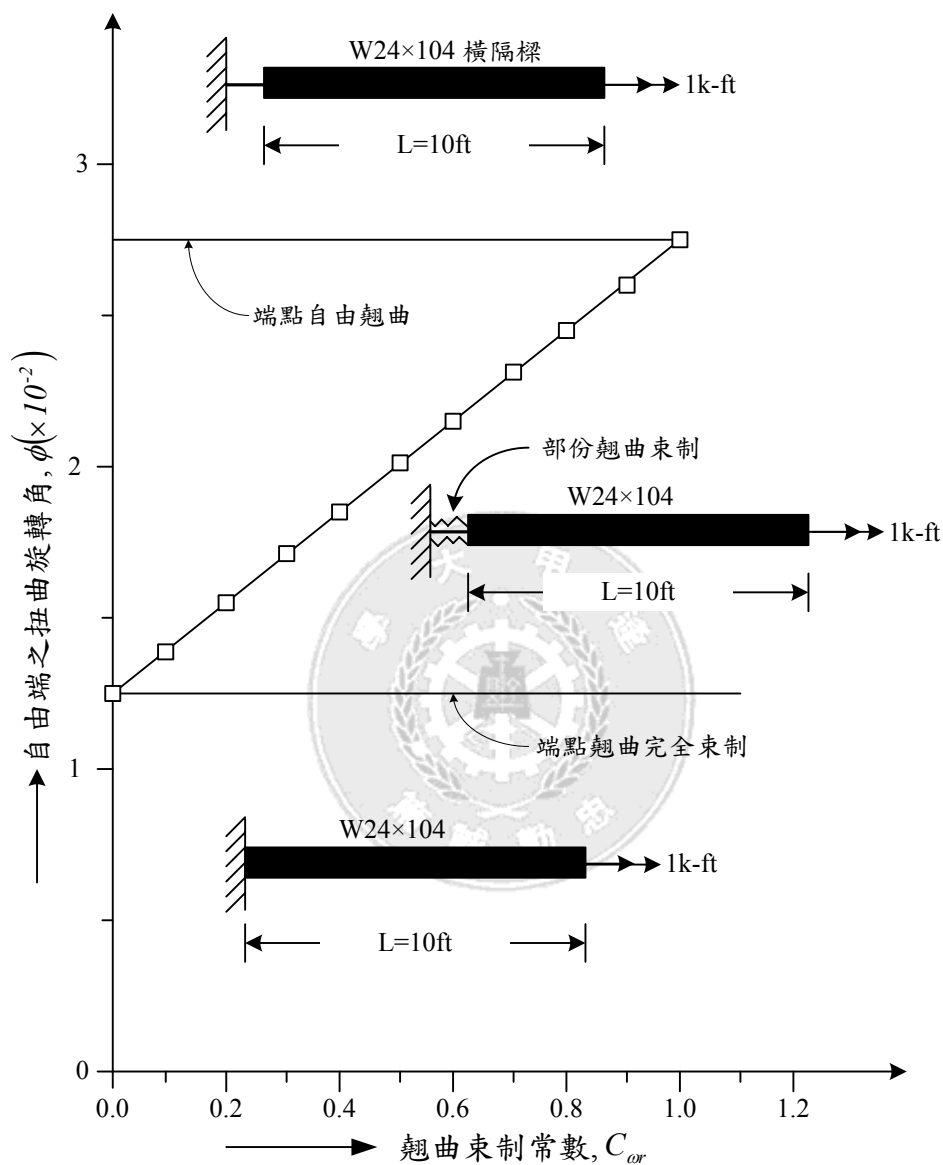


圖 5.13 扭曲旋轉角與翹曲邊界條件之變化關係

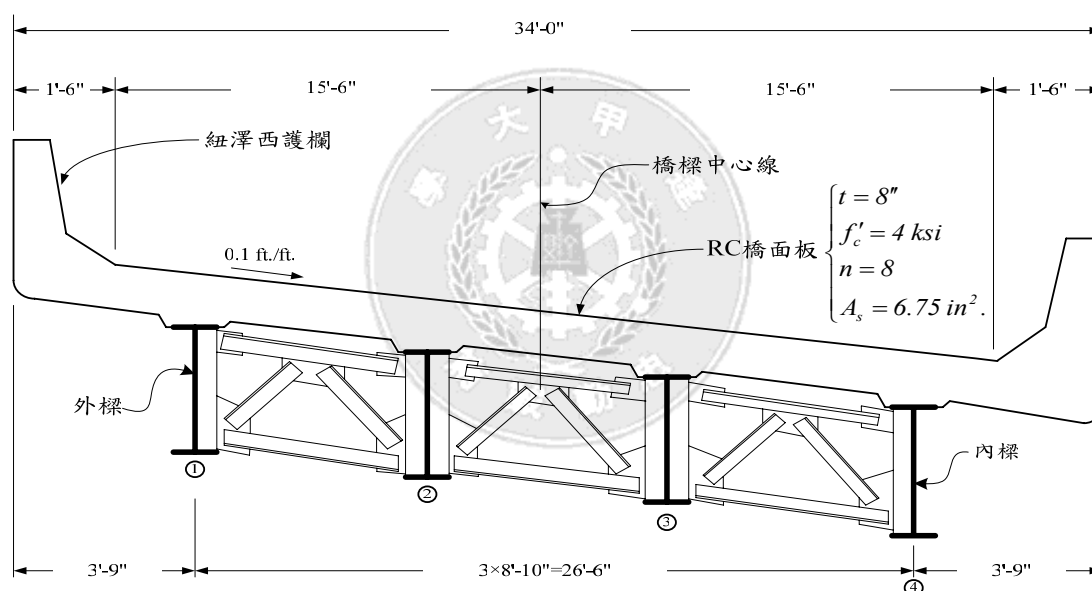
## 第六章 實例分析

### 6.1 前言

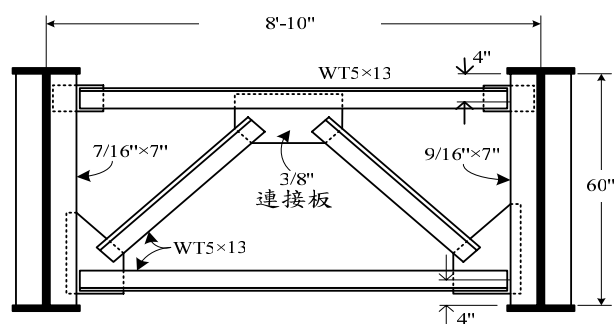
依前述所推導之伏拉索夫曲線薄壁樑元素與部分翹曲束制樑元素，本章將進行實例分析以驗證其正確性。

### 6.2 曲線橋斷面與尺寸

圖 6.1(a)所示為本實例分析之橫斷面，其共有 4 根大樑，即圖中所示之①、②、③、④。此橋之鋼筋混凝土橋面板厚為 8"，其 28 天齡期之抗壓強度為 4ksi。圖 6.1(b)所示則為其橫隔樑佈設圖，由此圖可看出，曲線大樑係由鉸樑組成，其腹板深 60"。



(a)橫斷面



(b)橫隔樑

圖 6.1 實例分析曲線 I 型鋼橋

圖 6.2 所示為四根大樑之斷面尺寸與長度，其中"G"為大樑(Girder)之簡稱。

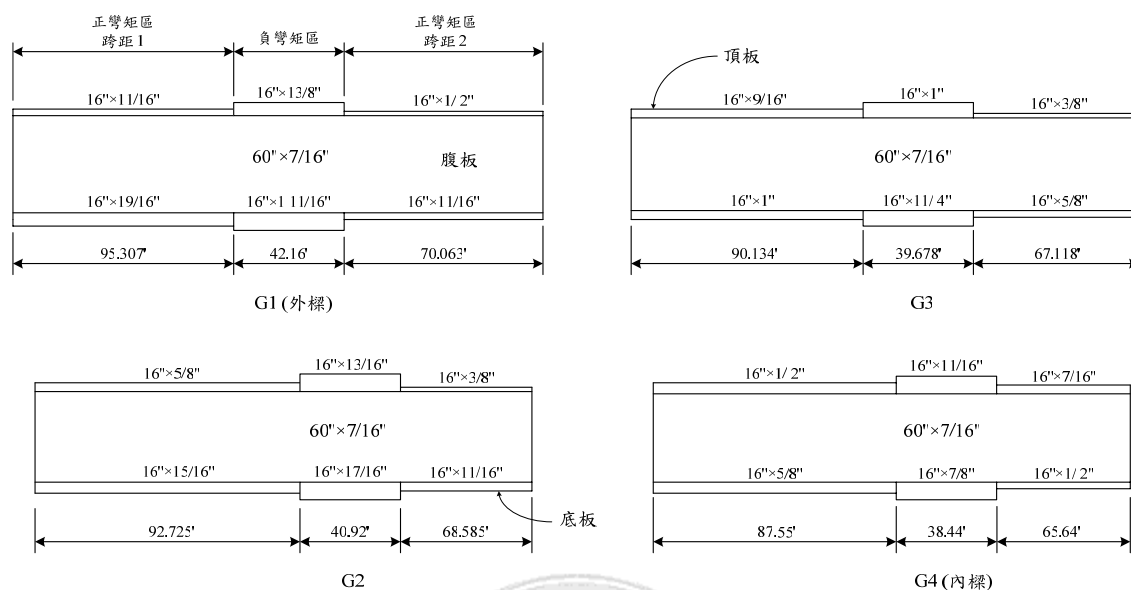


圖 6.2 曲線 I 型大樑斷面尺寸

### 6.3 曲線橋之平面佈設

為了驗證所推導曲線樑元素之力學正確性與橫隔樑之佈設準則，此實例分析採取之平面剛架佈設(Framing Plan)如圖 6.3 所示，其共分成三種狀況，總結如下：

- (a)平面佈設 1：橋台 1、2 與橋墩之支承中心線皆與大樑垂直。
- (b)平面佈設 2：橋台 1、橋台 2 與橋墩之支承中心線與大樑均有斜角(Skewed Angle)存在。
- (c)平面佈設 3：橋台 2 之支承中心線與大樑垂直，橋台 1 與橋墩之支承中心線則與大樑成斜角。

### 6.4 結構分析軟體

本研究採用之分析軟體為 DESCUS 1【21】，DESCUS 1 程式專為分析曲線 I 型鋼橋設計。此程式中，曲線 I 型鋼橋之曲線樑元素每一節點均具有四個自由度，亦即縱向彎矩、垂直剪力、純扭曲與雙彎矩(Bimoment)，即吾人前述推導之 Vlasov Element。與其它分析軟體比較，DESCUS 1 之最大的突破乃是 DESCUS 1 程式具有自動分析活載重之能力；卡車載重(Truck Loading)與車

道載重(Lane Loading)可以依設計規範【1】之規定，自動在格樑系統之平面上縱向(橋樑長度方向)或橫向(與行車方向垂直者)移動，以求得格樑平面上最大之活載重結構反應。在美國境內，直至目前為止，已有超過 350 座以上之曲線 I 型鋼橋利用 DESCUS 1 程式完成設計與施工。台灣地區有數家大型工程顧問公司亦擁有此軟體，工程實績超過 10 座。

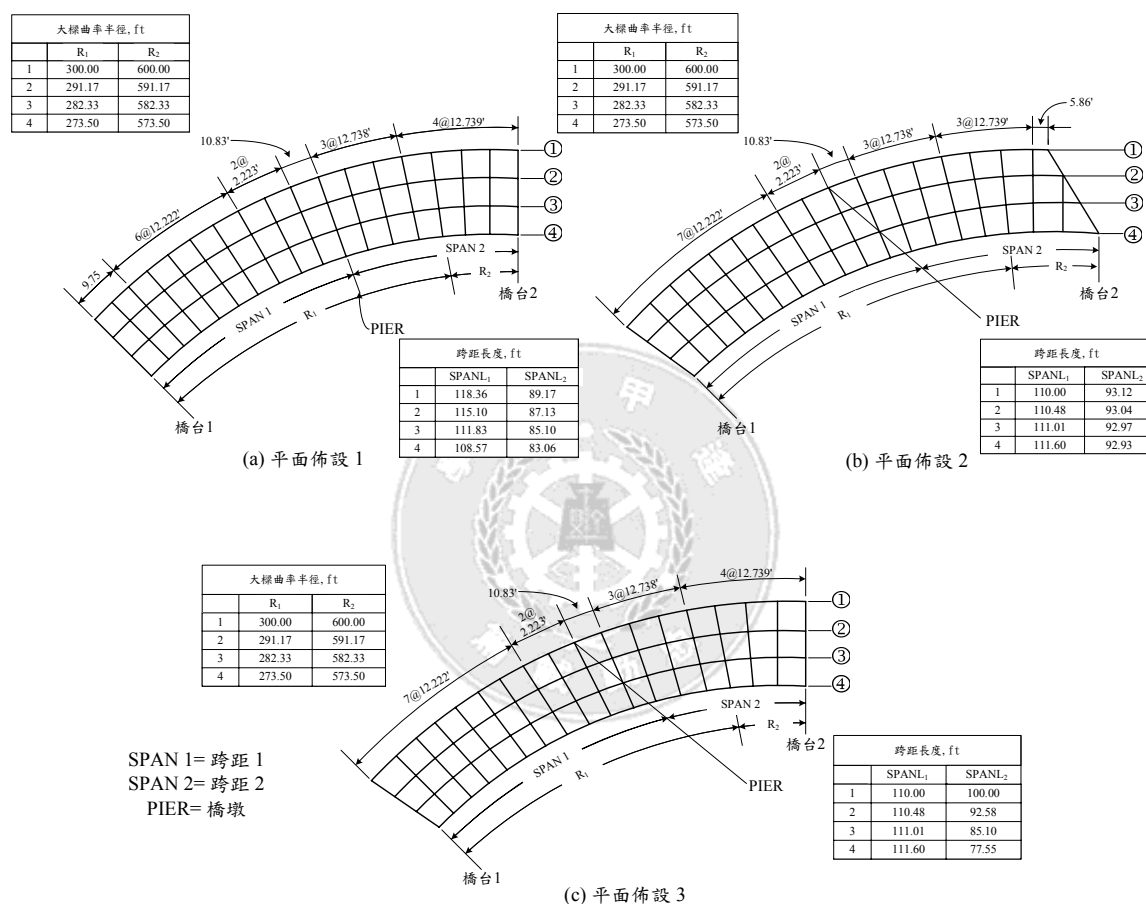


圖 6.3 曲線 I 型鋼橋之平面佈設

## 6.5 斷面性質計算

鋼橋結構分析之所有不同斷面性質中以鋼橋縱向之彎矩斷面性質最為重要，其原因在於縱向彎矩造成之正向應力與垂直變位在所有不同之結構反應中通常佔最大之比例。

對非合成式(Noncomposite)鋼橋而言，鋼樑本身必須承受上部結構所有荷重，以 I 型鋼樑為例(見圖 6.4)，其斷面至少具有單軸(y 軸)對稱性，以形心軸(Centroidal Axes)為基準之斷面性質可表示如下：

$$\int_A y dA = \int_A x dA = \int_A xy dA = 0 \dots\dots\dots (6-1)$$

上式中之  $A$  代表橫斷面積之意。

斷面形心位置( $x_c$ ， $y_c$ )可以由下式得之：

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \dots\dots\dots (6-2a)$$

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \dots\dots\dots (6-2b)$$

橫斷面之面積與針對  $x$ 、 $y$  軸之二次慣性矩則可以下式表之：

$$A = \int_A dA \dots\dots\dots (6-3a)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA \dots\dots\dots (6-3b)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \dots\dots\dots (6-3c)$$

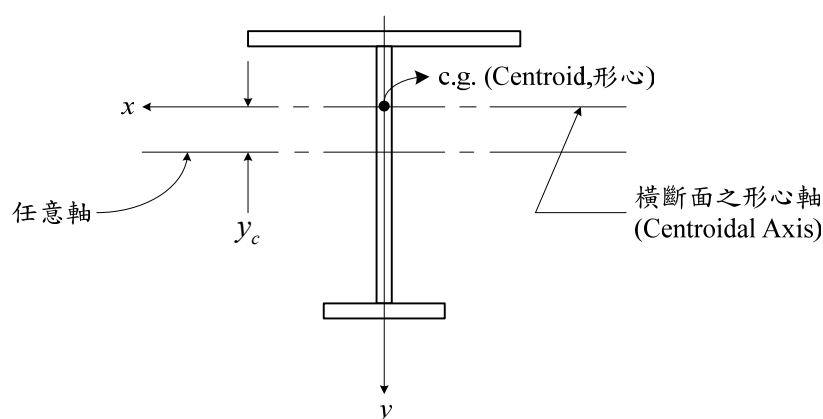


圖 6.4 典型之單軸對稱 I 型鋼樑斷面

針對縱向彎矩之結構行為而言，合成式鋼橋上部結構之斷面性質必須分為三大階段，每一階段所代表之橫斷面物理特性與橋樑受力狀態均不同，而這三大階段乃是以彈性斷面模數(Elastic Section Modulus)作為分界點。如以  $E_s$  代表鋼材之彈性模數(Elastic Modulus)， $E_c$  代表混凝土橋面版之彈性模數，則彈性斷面模數比  $n$ (Modulus Ratio)便可表示成：

$$n = \frac{E_s}{E_c} \dots\dots\dots (6-4)$$

此式亦是材料力學中轉換面積法(Transformed Area Method)求解合成斷面性質之理論基礎。即將原為合成式之斷面轉換為純鋼材之理想斷面，亦即將鋼樑上部之鋼筋混凝土部份利用彈性斷面模數之觀念將其轉換為等值之鋼材。圖 6.5 原合成斷面之 RC 橋面版寬度為有效翼板寬(Effective Flange Width，見文獻【1】第 10.38.3 節)，其面積轉換之作法為有效翼板寬保持不變，但將原橋面版厚度縮小  $n$  倍。

如將完全合成斷面之彈性斷面模數比定義為  $n$ ，則依據 AASHTO 之公路橋樑標準規範【1】，隨著荷重狀況之改變，彎矩斷面性質之三大階段便可以分類為：

- ①  $n = \infty$ ，靜載重狀態，非合成斷面。
- ②  $3n$ ，附加靜載重狀態，部份合成斷面。
- ③  $n$ ，活載重狀態，完全合成斷面。

以下吾人將分別說明之。

在上部結構鋼樑系統已完全定位，直至混凝土橋面版澆置之

後，由於此時之混凝土仍屬濕軟之狀態，無抵抗外力之功用，因此  $E_c = 0$ ，所以此階段之  $n = E_s/E_c = \infty$ ，亦即此階段仍屬施工初期，橋樑所受到之荷重只有上部結構本身之靜載重。

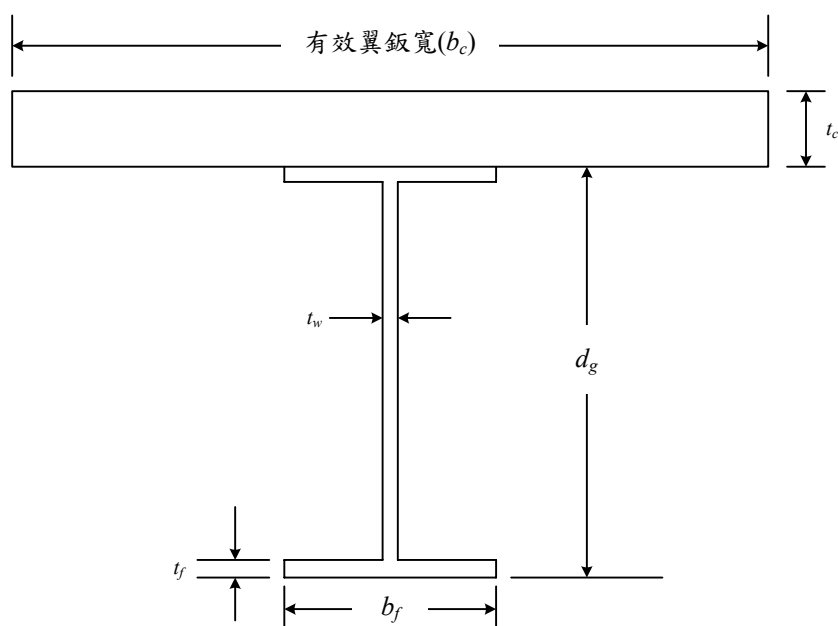
混凝土橋面版施工完成後，橋面版雖已達到某種程度之強度，但吾人仍必須進行橋面版上其他附屬構件之施工，例如護欄、欄杆、照明設施、排水設施與磨耗層等等。針對此階段之橋樑受力狀態，AASHTO 公路橋樑標準規範【1】之 10.38.1.4 節中將彈性斷面模數比定義為  $3n = E_s/E_c$ ，其相對應之荷重為附加靜載重 (Superimposed Dead Load)。吾人亦必須注意，此受力階段之彈性斷面模數比定義為  $3n$  之主要考量在於 RC 橋面版之潛變 (Creep) 效應。

橋樑完工通車後，混凝土橋面版便可以開始承受外在活載重之作用，此時合成斷面之作用已完全成熟，其彈性斷面模數比為  $n$ ，其相對應之荷重狀態乃是活載重。

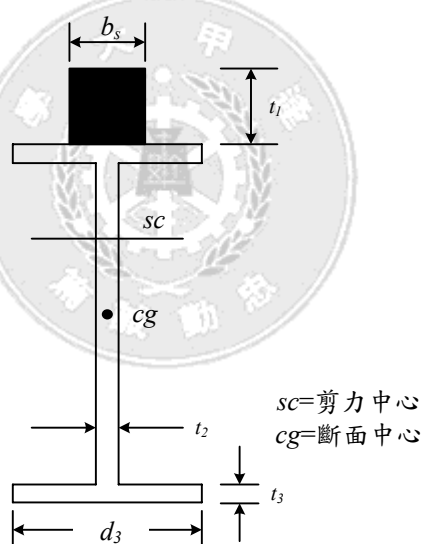
表 6.1~6.3 所示即為分析實例中，三個平面佈設之橫斷面性質總表，其中連續樑之正、負彎矩定義如圖 6.6 所示。







(a) 合成斷面



$$\begin{aligned} t_1 &= t_c \\ b_s &= b_c/n \\ t_3 &= t_f \\ d_3 &= b_f \\ n &= E_s/E_c \end{aligned}$$

(b) 理想斷面

圖 6.5 I 型鋼樑合成斷面與理想斷面之轉換

表 6.1 平面佈設 1 之二次慣性矩(in.4)

|   | 正彎矩區，跨距 1 |        |        | 負彎矩區  |       | 正彎矩區，跨距 2 |        |       |
|---|-----------|--------|--------|-------|-------|-----------|--------|-------|
|   | 大樑+       |        | 大樑+    | 大樑+   |       | 大樑+       |        | 大樑+   |
|   | 大樑        | 3n 混凝土 | n 混凝土  | 大樑    | 混凝土   | 大樑        | 3n 混凝土 | n 混凝土 |
| ① | 38640     | 76704  | 109177 | 53949 | 63660 | 25138     | 52028  | 70974 |
| ② | 34772     | 70102  | 98822  | 47133 | 56637 | 22932     | 51405  | 70878 |
| ③ | 30106     | 61444  | 85292  | 41268 | 50769 | 22179     | 49513  | 67929 |
| ④ | 24300     | 50094  | 68014  | 30807 | 40020 | 21565     | 45831  | 61943 |

表 6.2 平面佈設 2 之二次慣性矩(in.4)

|   | 正彎矩區，跨距 1 |        |       | 負彎矩區  |       | 正彎矩區，跨距 2 |        |       |
|---|-----------|--------|-------|-------|-------|-----------|--------|-------|
|   | 大樑+       |        | 大樑+   | 大樑+   |       | 大樑+       |        | 大樑+   |
|   | 大樑        | 3n 混凝土 | n 混凝土 | 大樑    | 混凝土   | 大樑        | 3n 混凝土 | n 混凝土 |
| ① | 33447     | 66902  | 93538 | 49974 | 59694 | 23262     | 49806  | 67972 |
| ② | 32154     | 66440  | 93436 | 47132 | 56637 | 24058     | 51720  | 70926 |
| ③ | 30106     | 61444  | 85292 | 43386 | 52426 | 23262     | 49806  | 67972 |
| ④ | 23087     | 51451  | 70886 | 35661 | 44549 | 20709     | 45616  | 61917 |

表 6.3 平面佈設 3 之二次慣性矩(in.4)

|   | 正彎矩區，跨距 1 |        |       | 負彎矩區  |       | 正彎矩區，跨距 2 |        |       |
|---|-----------|--------|-------|-------|-------|-----------|--------|-------|
|   | 大樑+       |        | 大樑+   | 大樑+   |       | 大樑+       |        | 大樑+   |
|   | 大樑        | 3n 混凝土 | n 混凝土 | 大樑    | 混凝土   | 大樑        | 3n 混凝土 | n 混凝土 |
| ① | 33447     | 66902  | 93538 | 53064 | 62570 | 24300     | 50094  | 68014 |
| ② | 32154     | 66440  | 93436 | 47133 | 56637 | 24058     | 51720  | 70926 |
| ③ | 30106     | 61444  | 85292 | 41268 | 50769 | 21393     | 47572  | 64941 |
| ④ | 25943     | 53916  | 73895 | 31844 | 40788 | 19711     | 43533  | 58840 |

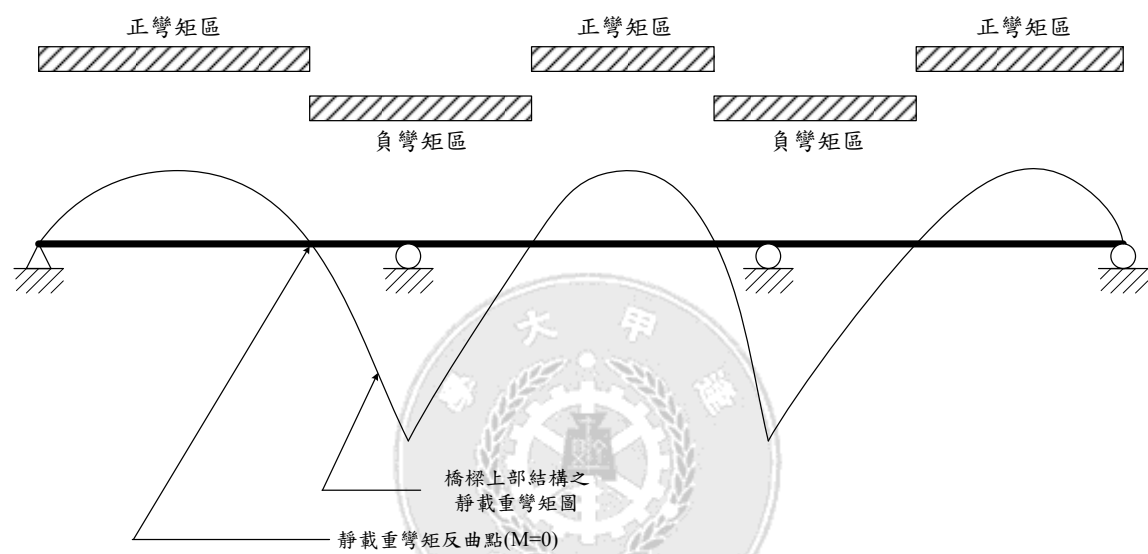


圖 6.6 連續樑結構正負彎矩區之定義

## 6.6 分析比較

為了進行各種平面佈設之結構行為比較，首先將平面曲線鋼橋之曲率忽略，亦即將其視為直線形鋼橋。利用直線樑近似法所得之縱向彎矩歸納如表 6.4 所示。

表 6.4 直線樑近似法之大樑縱向彎矩

| 節點編號 | 大樑①     | 大樑②     | 大樑③     | 大樑④     |
|------|---------|---------|---------|---------|
| 1    | 0.0     | 0.0     | 0.0     | 0.0     |
| 2    | 487.7   | 476.9   | 458.0   | 436.8   |
| 3    | 916.9   | 887.0   | 842.3   | 795.3   |
| 4    | 1178.6  | 1136.3  | 1074.4  | 1012.0  |
| 5    | 1260.5  | 1213.5  | 1144.3  | 1078.2  |
| 6    | 1162.6  | 1118.7  | 1052.2  | 994.2   |
| 7    | 884.9   | 851.8   | 797.9   | 759.8   |
| 8    | 427.5   | 412.9   | 381.6   | 375.1   |
| 9    | -204.5  | -193.7  | -189.9  | -153.7  |
| 10   | -1014.6 | -968.9  | -924.8  | -833.2  |
| 11   | -1879.9 | -1797.7 | -1707.3 | -1557.4 |
| 12   | -1043.3 | -995.4  | -947.8  | -854.7  |
| 13   | -382.9  | -360.8  | -345.4  | -296.8  |
| 14   | 85.0    | 89.0    | 82.8    | 99.0    |
| 15   | 356.5   | 351.5   | 335.2   | 332.3   |
| 16   | 431.5   | 424.9   | 408.2   | 398.0   |
| 17   | 310.1   | 305.3   | 294.2   | 285.2   |
| 18   | 0.0     | 0.0     | 0.0     | 0.0     |

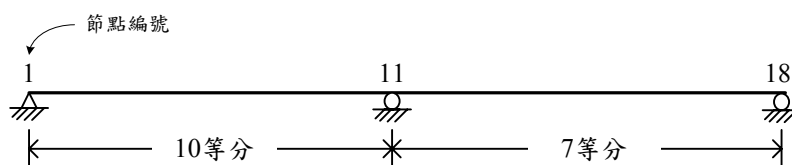


圖 6.7 所示即為平面佈設 1，僅針對靜載重之大樑縱向彎矩比較圖，由此圖可看出 DESCUS 1 之結果與 MSC/NASTRAN【32】程式之結果非常接近。其中 MSC/NASTRAN 在學術界與工程界頗負盛名，為結構分析領域常用之分析軟體，圖 6.8 即為針對本分析實例之模式，其中，I 型大樑之頂板、腹板、底板與橫隔構件皆以樑元素模擬之。

由圖 6.7 亦可清楚看出，以直線樑分析模式而言，曲率半徑愈小，則誤差愈大，由大樑 G4 觀之最為明顯。如僅針對靜載重，V-Load Method 之結果與 MSC/NASTRAN 及本研究之結果比較尚可接受，故吾人強調 V-Load Method 在初步設計可扮演重要角色。

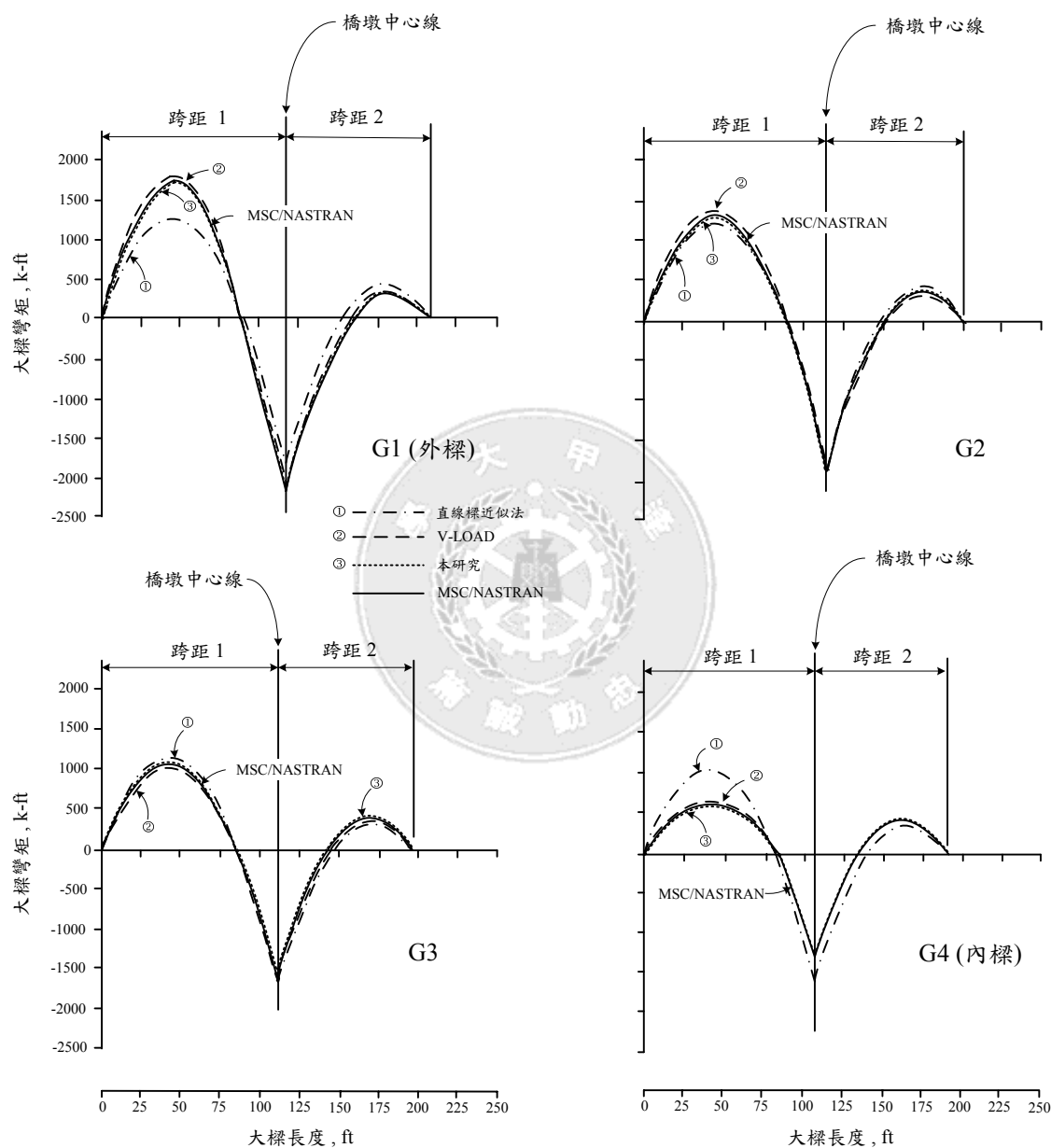
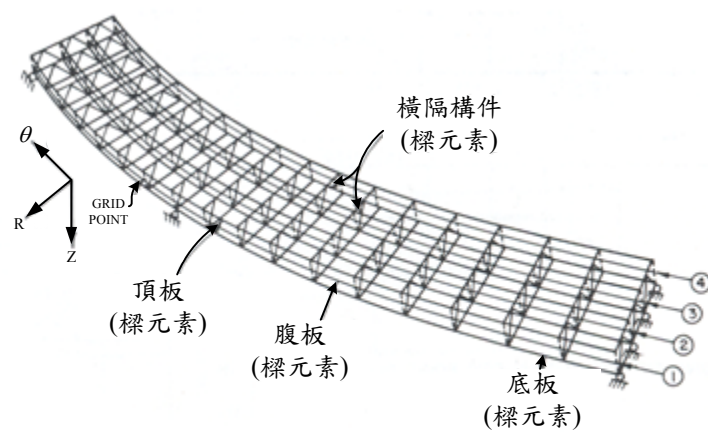
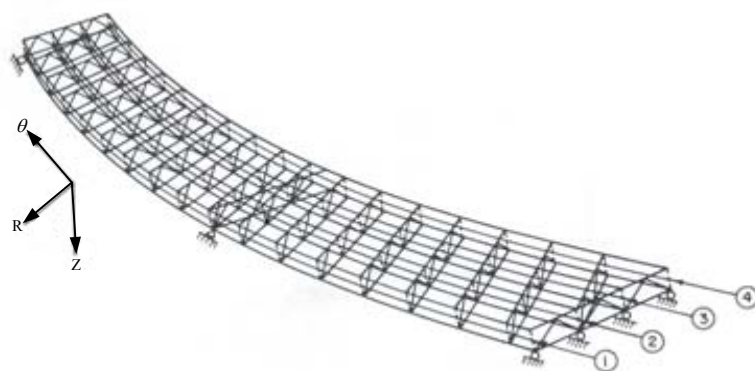


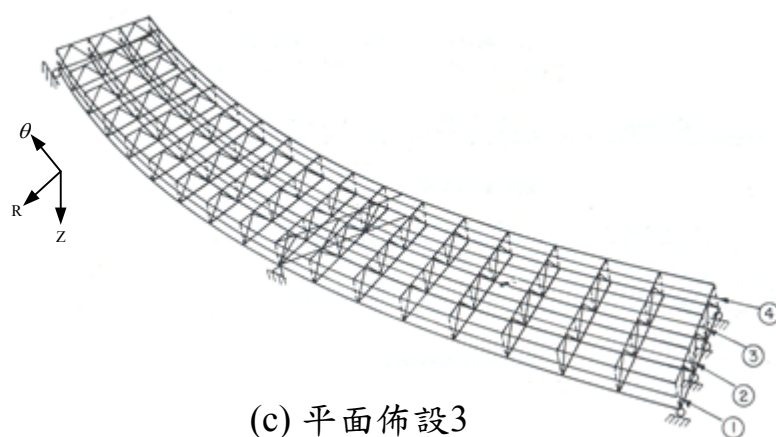
圖 6.7 平面佈設 1 之靜載重彎矩比較圖



(a) 平面佈設1



(b) 平面佈設2



(c) 平面佈設3

圖 6.8 MSC/NASTRAN 之分析模式

圖 6.9 所示則是 V-Load Method 中作用於翼板之等值橫向荷載(Equivalent Lateral Loads)，原鋼橋結構中之橫隔樑可視為支承，其計算可參照前述章節。

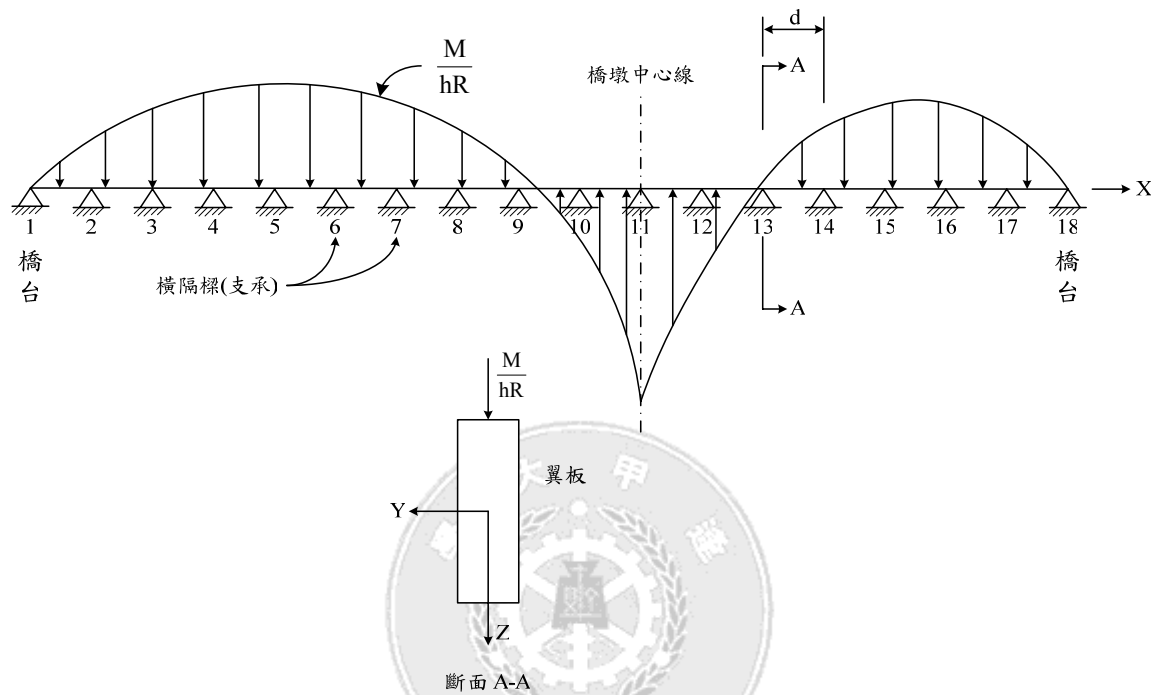


圖 6.9 V-Load Method 中作用於翼板之等值橫向荷載

圖 6.10 所示為各分析模式所得之靜載重彎矩值與直線樑近似值之彎矩差異值比較圖，亦即曲率造成之影響。由此圖可看出，直線近似法不宜用在曲線鋼樑之力學分析，尤其是外樑(G1)與內樑(G4)處。

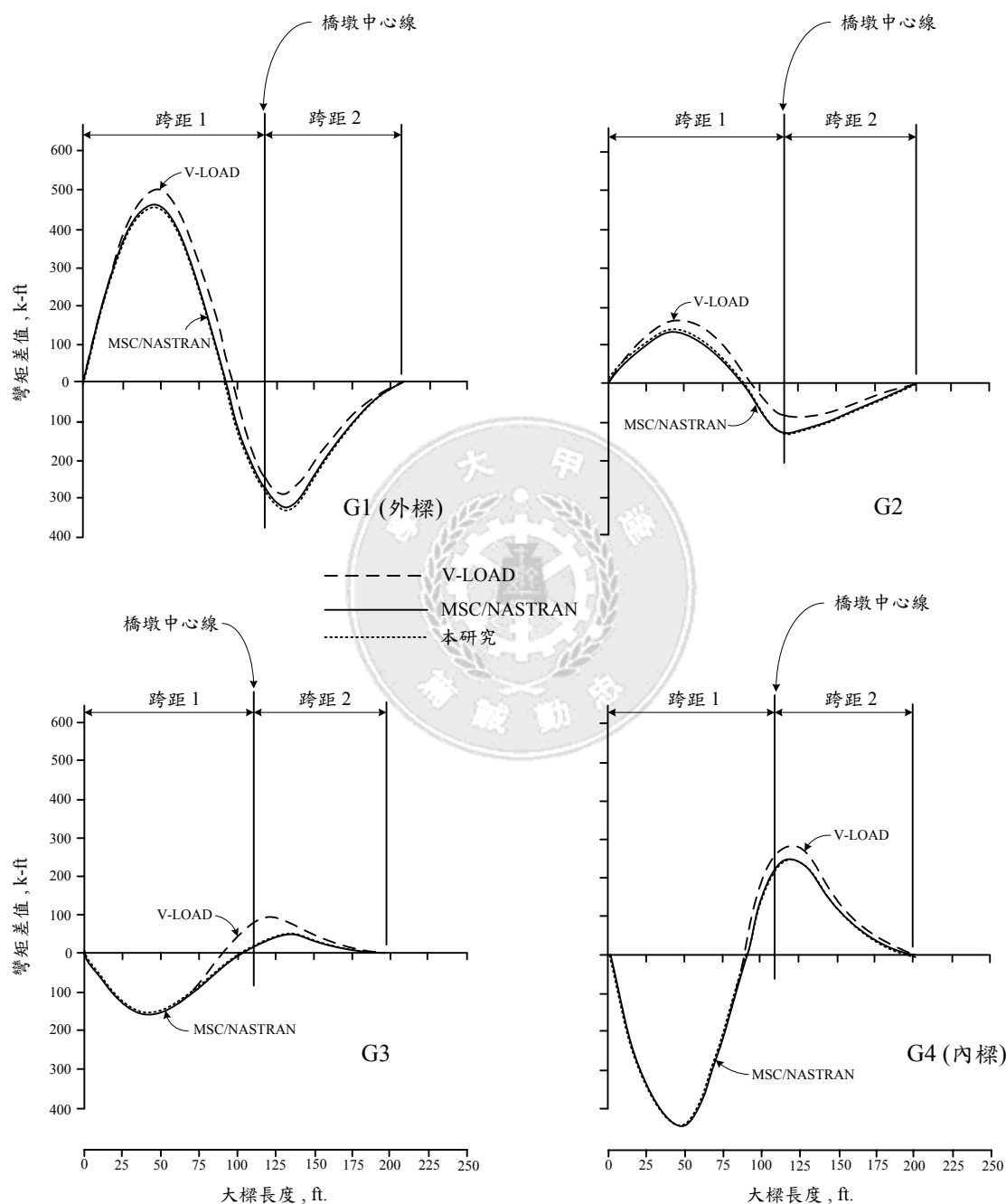


圖 6.10 平面佈設 1 曲率造成之靜載重彎矩差異值



圖 6.11 與圖 6.12 分別為平面佈設 2、3 之靜載重彎矩值比較圖。綜合圖 6.7 與 6.11、6.12，吾人可清楚看出，不論平面佈設情況為何，曲率半徑愈小者，則以直線樑近似法得到之結果有較大之誤差。另外，吾人亦可清楚看出，本研究所推導之 Vlasov Element 所得之精度與 MSC/NASTRAN 程式非常接近，表 6.5~表 6.7 為各分析模式所得之彎矩比較值。

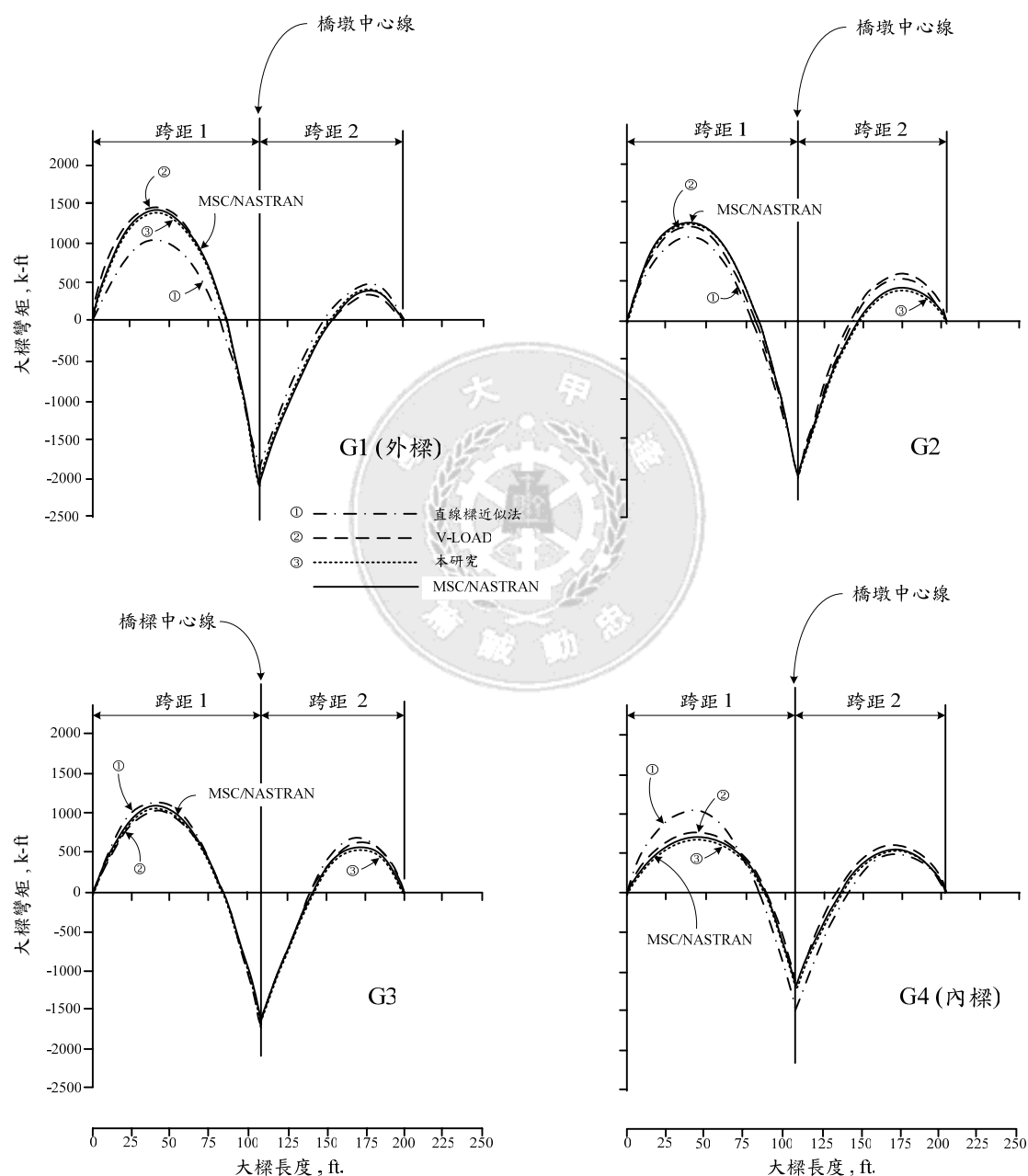


圖 6.11 平面佈設 2 之靜載重彎矩值比較圖

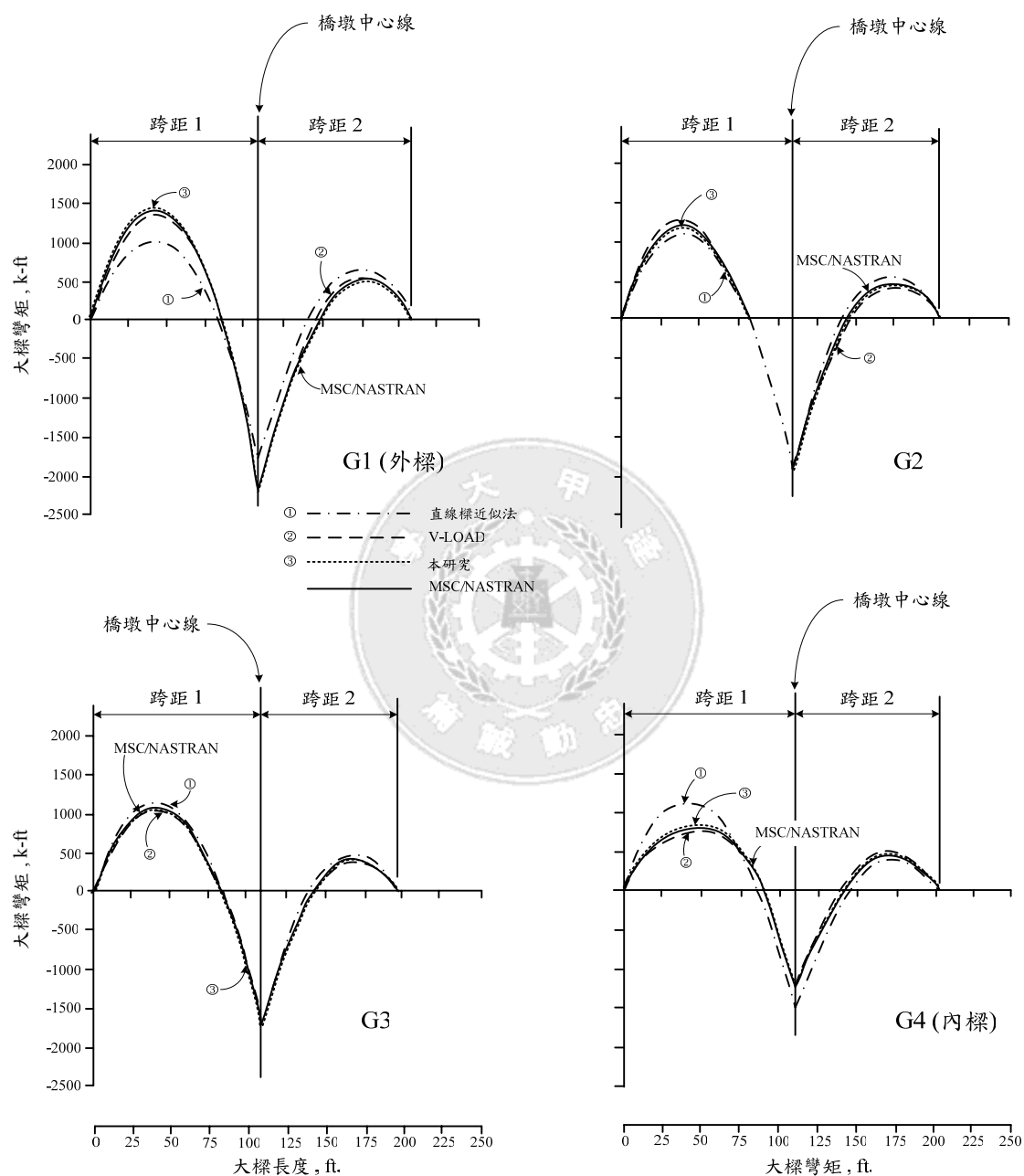


圖 6.12 平面佈設 3 之靜載重彎矩值比較圖

表 6.5 各分析模式靜載重彎矩值比較-平面佈設 1

| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.37L <sub>1</sub> ) | 1262.9        | 1731.6              | 1760.8                  | 1728.9      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1879.9       | -2157.9             | -2145.5                 | -2160.1     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.75L <sub>2</sub> ) | 425.4         | 374.1               | 373.7                   | 376.1       |

| G2                                |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.37L <sub>1</sub> ) | 1215.9        | 1347.9              | 1378.0                  | 1346.7      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1797.7       | -1947.4             | -1883.7                 | -1946.8     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.68L <sub>2</sub> ) | 430.3         | 382.8               | 406.4                   | 380.7       |

| G3                                |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.37L <sub>1</sub> ) | 1147.1        | 984.1               | 990.4                   | 983.6       |
| 橋墩處負彎矩                            | -1707.3       | -1692.9             | -1619.7                 | -1690.3     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.67L <sub>2</sub> ) | 412.9         | 425.4               | 434.7                   | 424.1       |

| G4(內樑)                            |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.37L <sub>1</sub> ) | 1080.4        | 625.0               | 625.2                   | 624.2       |
| 橋墩處負彎矩                            | -1557.4       | -1313.7             | -1292.7                 | -1311.8     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.67L <sub>2</sub> ) | 403.6         | 461.9               | 479.6                   | 459.8       |

表 6.6 各分析模式靜載重彎矩值比較-平面佈設 2

| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 1012.2        | 1396.7              | 1432.6                  | 1395.8      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1814.3       | -2038.1             | -1997.6                 | -2036.7     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.70L <sub>2</sub> ) | 551.9         | 520.8               | 482.4                   | 519.1       |

| G2                                |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.39L <sub>1</sub> ) | 1058.2        | 1212.2              | 1191.0                  | 1210.7      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1826.6       | -1904.7             | -1896.6                 | -1901.6     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.69L <sub>2</sub> ) | 562.7         | 542.3               | 548.2                   | 541.7       |

| G3                                |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.36L <sub>1</sub> ) | 1077.7        | 1013.9              | 952.2                   | 1011.7      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1822.3       | -1756.0             | -1751.9                 | -1754.8     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.68L <sub>2</sub> ) | 563.9         | 558.4               | 570.0                   | 560.1       |

| G4(內樑)                            |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.39L <sub>1</sub> ) | 1075.3        | 684.8               | 728.1                   | 681.4       |
| 橋墩處負彎矩                            | -1822.9       | -1573.7             | -1625.1                 | -1574.2     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.67L <sub>2</sub> ) | 547.8         | 531.2               | 549.0                   | 530.9       |

表 6.7 各分析模式靜載重彎矩值比較-平面佈設 3

| G1(外樑)                            |               |                     |                         |             |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------|
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.36L <sub>1</sub> ) | 975.1         | 1393.1              | 1392.6                  | 1391.8      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1947.7       | -2132.9             | -2144.7                 | -2130.8     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.71L <sub>2</sub> ) | 672.6         | 607.7               | 617.8                   | 606.8       |
| G2                                |               |                     |                         |             |
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.39L <sub>1</sub> ) | 1060.8        | 1205.6              | 1196.9                  | 1206.7      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1819.8       | -1945.5             | -1894.2                 | -1943.6     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.69L <sub>2</sub> ) | 552.9         | 533.6               | 536.8                   | 532.5       |
| G3                                |               |                     |                         |             |
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.36L <sub>1</sub> ) | 1120.0        | 1007.2              | 990.1                   | 1006.6      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1706.6       | -1687.0             | -1633.4                 | -1686.1     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.67L <sub>2</sub> ) | 412.9         | 415.9               | 425.6                   | 413.8       |
| G4(內樑)                            |               |                     |                         |             |
| 位置                                | 直線近似法<br>k-ft | MSC/NASTRAN<br>k-ft | V-Load-Analysis<br>k-ft | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.44L <sub>1</sub> ) | 1159.3        | 770.5               | 808.5                   | 768.8       |
| 橋墩處負彎矩                            | -1571.3       | -1287.9             | -1378.6                 | -1288.3     |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.72L <sub>2</sub> ) | 288.2         | 319.6               | 302.8                   | 318.2       |

圖 6.13 所示為 MSC/NASTRAN 程式針對合成式(Composite)斷面之分析模式，其中 RC 橋面版係以轉換面積之方法將其轉換為鋼材，再以板元素模擬之。表 6.8 所示則是 DESCUS 1 與 MSC/NASTRAN 程式之彎矩比較值。

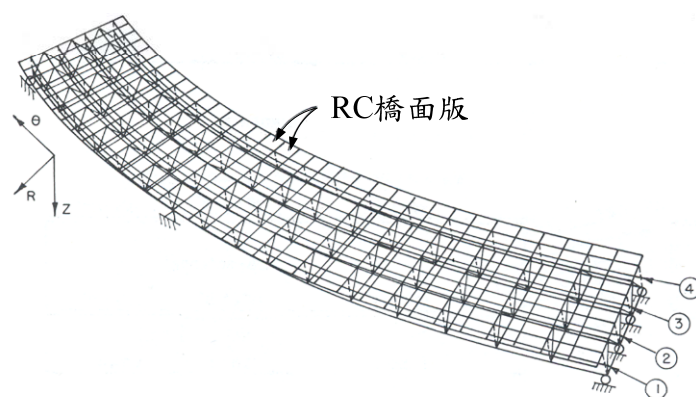


圖 6.13 平面佈設 1-合成式(MSC/NASTRAN)

圖 6.14 所示則為 MSC/NASTRAN 程式針對卡車活載重之分析模式，於產生最大活載重之位置以等值集中活載重模擬之。由此圖可看出，不具活載重自動分析模式之電腦程式在應用上有相當程度之受限。表 6.9 所示為 DESCUS 1 與 MSC/NASTRAN 程式之活載重彎矩比較表。

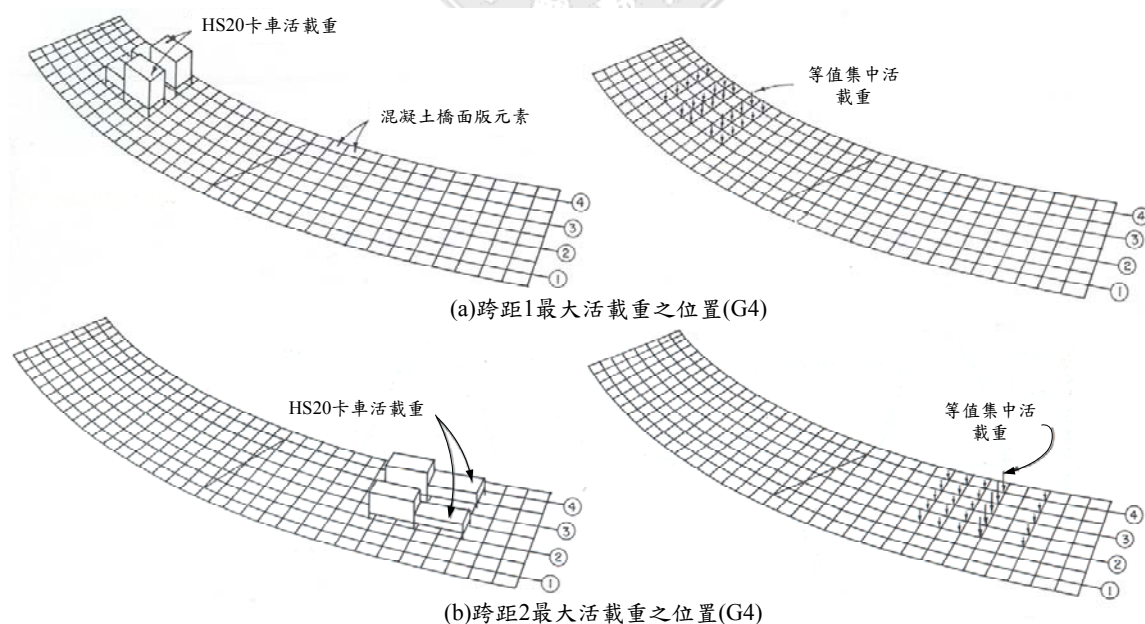


圖 6.14 MSC/NASTRAN 電腦程式之活載重模擬

由表 6.8 與表 6.9 亦可清楚看出，橫格樑數目愈少，則大樑之彎矩便增大，反之，橫格樑數目增大，則大樑之彎矩便減小。此意謂著橫隔樑對 I 型鋼橋上部結構之受力特性具有分攤載重之特性。其中 MSC/NASTRAN 之結構分析模式如圖 6.15 所示。

表 6.8 DESCUS 1 與 MSC/NASTRAN 程式附加靜載重彎矩值比較-平面佈設 1

| G1(外樑)                            |                     |                        |                       |             |
|-----------------------------------|---------------------|------------------------|-----------------------|-------------|
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設 1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 647.7               | 513.0                  | 490.0                 | 492.7       |
| 橋墩處負彎矩                            | -653.9              | -573.8                 | -551.5                | -554.2      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.68L <sub>2</sub> ) | 164.8               | 177.1                  | 169.2                 | 171.3       |
| G2                                |                     |                        |                       |             |
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設 1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 499.3               | 480.1                  | 440.7                 | 442.6       |
| 橋墩處負彎矩                            | -567.1              | -546.6                 | -512.1                | -514.6      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.68L <sub>2</sub> ) | 168.5               | 168.8                  | 153.4                 | 155.6       |
| G3                                |                     |                        |                       |             |
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設 1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 357.8               | 392.9                  | 379.1                 | 381.2       |
| 橋墩處負彎矩                            | -482.8              | -467.2                 | -464.1                | -467.3      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.68L <sub>2</sub> ) | 172.8               | 155.2                  | 150.7                 | 152.4       |
| G4(內樑)                            |                     |                        |                       |             |
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設 1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 219.7               | 308.7                  | 319.4                 | 321.6       |
| 橋墩處負彎矩                            | -366.0              | -383.4                 | -384.5                | -386.7      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.67L <sub>2</sub> ) | 170.9               | 151.1                  | 144.1                 | 146.4       |

表 6.9 DESCUS 1 與 MSC/NASTRAN 程式活載重彎矩值比較

| G1(外樑)                            |                     |                        |                      |             |
|-----------------------------------|---------------------|------------------------|----------------------|-------------|
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 3648.0              | 2504.7                 | 2320.6               | 2323.4      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1525.4             | -1186.3                | -913.2               | -916.3      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.54L <sub>2</sub> ) | 2541.6              | 1768.2                 | 1615.6               | 1618.3      |
| G2                                |                     |                        |                      |             |
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.42L <sub>1</sub> ) | 2342.2              | 2175.7                 | 1977.4               | 1980.1      |
| 橋墩處負彎矩                            | -1155.6             | -1128.0                | -959.3               | -963.4      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.53L <sub>2</sub> ) | 1787.3              | 1591.5                 | 1403.4               | 1406.1      |
| G3                                |                     |                        |                      |             |
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.37L <sub>1</sub> ) | 1895.2              | 1834.1                 | 1822.0               | 1825.1      |
| 橋墩處負彎矩                            | -875.3              | -817.2                 | -818.3               | -821.2      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.53L <sub>2</sub> ) | 1528.2              | 1401.5                 | 1262.4               | 1264.6      |
| G4(內樑)                            |                     |                        |                      |             |
| 位置                                | MSC/NASTRAN<br>與橫隔樑 | MSC/NASTRAN<br>橫隔樑數量減半 | MSC/NASTRAN<br>平面佈設1 | 本研究<br>k-ft |
| 跨距1最大彎矩處<br>(0.37L <sub>1</sub> ) | 1914.5              | 1553.1                 | 1579.5               | 1583.4      |
| 橋墩處負彎矩                            | -944.9              | -809.0                 | -746.7               | -749.6      |
| 跨距2最大彎矩處<br>(0.53L <sub>2</sub> ) | 1680.7              | 1331.2                 | 1321.7               | 1324.8      |



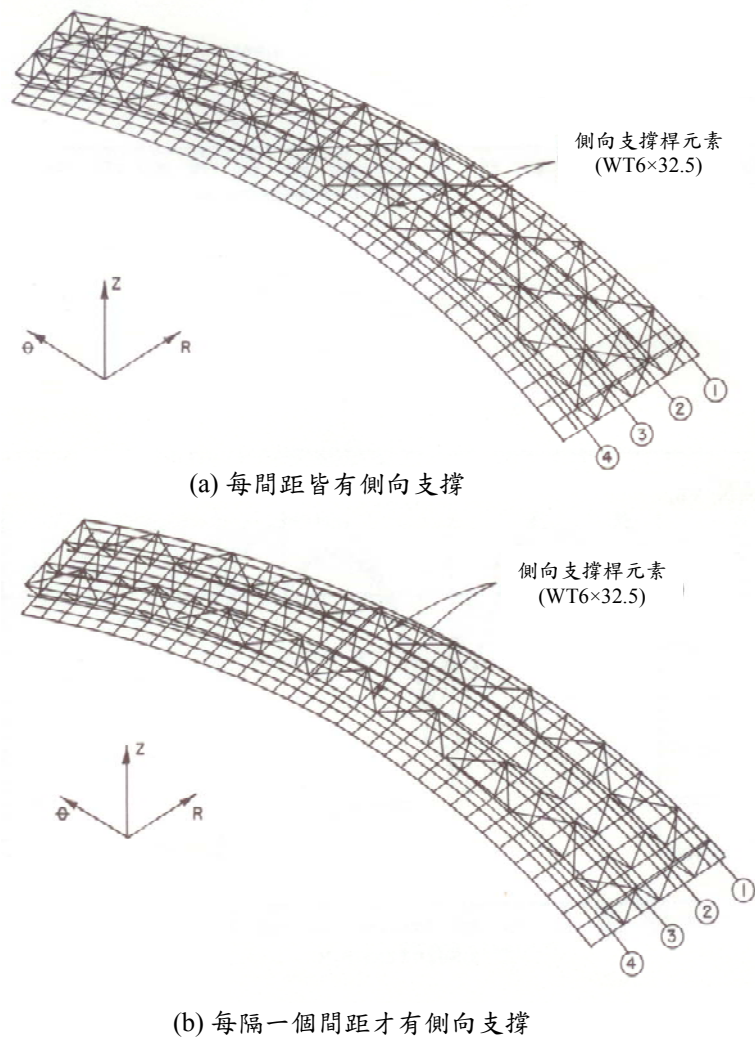


圖 6.15 MSC/NASTRAN 程式將橋面版以側向支撐桿元素模擬

## 第七章 結論與建議

### 7.1 前言

根據前述章節之立論與實例分析，本章將其重點節錄作為本論文之結論。

### 7.2 結論

1. 本論文發展之 Vlasov Element 薄壁鋼樑元素與部分翹曲束制樑元素可應用於曲線 I 型鋼橋之設計，其精度亦可滿足 AASHTO 規範之要求。
2. 無論根據 AASHTO ASD 或 LFD 設計法，橫隔樑與 I 型鋼樑成直角佈設時，曲線 I 型鋼橋所呈現之整體力學效果最佳，上部結構之垂直變位量分佈最均勻。
3. I 型鋼樑中之橫隔樑系統可依正、負彎矩之力學特性分別考量。於正彎矩區亦必須考量施工時鋼橋獨立存在，橋面版未硬固前之應力。於負彎矩區，除非有特殊考量，否則應忽略 RC 橋面版中之鋼筋拉力。
4. I 型鋼樑之未側撐長度（Unbraced Length，兩相鄰橫隔樑之間距）為影響 I 型鋼樑彎矩行為最重要之因素。
5. 橫隔樑之勁度會明顯影響 I 型鋼樑之結構行為。當使用較具剛性之橫隔樑時，則大樑之彎矩應力與剪應力便明顯減低。
6. 當橫隔樑之勁度增加時，則作用在橫隔樑之力量亦增加。作用在橫隔樑上之力量可用來決定應使用之橫隔樑種類、型式與尺寸大小。
7. 端隔樑之邊界條件會直接影響 I 型鋼橋之結構行為。當採用較具剛性之端隔樑，例如鋼板式，則 I 型鋼樑之彎矩應力將大為減低。
8. 使用較具剛性，但間隔較大之橫隔樑於 I 型鋼橋設計中，不如採用較具柔性，但間隔較密之橫隔樑，惟其間距仍應在設計規範規定之距離之內。
9. 曲線鋼橋分析軟體宜採用具有活載重自動分析能力者，否則

當橋樑線形(Alignment)複雜時，其所耗費之時間可能不貲，且力學分析精準度較無法掌握。

### 7.3 建議

1. 本研究探討之分析模式僅侷限於等間距 I 型鋼橋之分析，對於幾何線形較特殊之 I 型鋼橋分析則有待後續之研究。
2. 本研究發展之部份翹曲束制元素理論上雖可應用於結構設計，惟束制百分比如何與工程實務結合，例如銲接接合、螺栓接合種類之影響程度如何，應是後續可再研究之重點。
3. 如何將本研究發展之部份翹曲束制元素應用在整座 I 型鋼橋結構之分析可作為日後改進 DESCUS 1 電腦程式功能之重點。



## 參考文獻

1. AASHTO, "Guide Specifications for Horizontally Curved Steel Girder Highway Bridges", American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington D.C., 2003.
2. Meyer, C., and Scordelis, A. C., "Analysis of Curved Folded Plate Structures", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 97, No.ST10, Paper 8434, Oct.1971, pp.2459-2480.
3. Chu, K. H., Pinjarkar, S. G., "Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges", Proc., Str. Div. Paper 843, ASCE, Oct. 1971, pp.2481-2501.
4. Lansberry, C. R., "A Fully Compatible Annular Segment Finite Element", Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering University of Pennsylvania, 1971.
5. Shore, S., and Lansberry, C. R., "A Fully Compatible Annular Segment Finite Lement", Consortium of University Research Teams Report No. TO272, Towne School of Civil and Mechanical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA., June.,1973.
6. Shore, S., and Wilson, J. L., "Users Manual for the Static Analysis of Curved Bridges (STACRB)", Consortium of University Research Teams Report No. TO173, Towne School of Civil and Mechanical Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1973.
7. Fam, A. T. M., "Static and Free Vibration Analysis of Curved Box Bridges", Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Montreal, Canada, 1973.
8. Bazant, Z. P., and Nimeiri, M. E., "Stiffness Method for Curved Box Girders at Initial Stress", Journal of the Str. Div., ASCE, Vol. 100, ST10, Paper 10877, Oct., 1974, pp.2071-2090.
9. Lavelle, F. H., and Boick, J. S., "Program to Analyze Curved Girder Bridges", Engineering Bulletin No.8, University of Rhode Island, Kingston RI, 1965.

10. Lavelle, F. H., Grieg, R. A., and Wemmer, H. T., "CUGAR1, Girder Analysis Revision 1", Engineering Bulletin No.14, University of Rhode Island, R. I., Sept.,1971.
11. Lavelle, F. H., and Laska, R. J., "CUGAR2, Volume 1 Users Manual", University of Rhode Island, Kingston, RI, May.,1975.
12. Lavelle, F. H., "The CUGAR3 Algorithm:, Consortium of University Research Teams", Report No.56, University of Rhode Island, Kingston, R.I., Jan.,1976.
13. Hsu, Yao T., "The Development and Behavior of Vlasov Element on the Modeling of Horizontally Curved Composite Box Girder Bridges" Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Maryland, College Park,1989.
14. Hsu, Y. T., Fu, C. C., and Schelling, D. R., "An Improved Horizontally Curved Beam Element", Computer and Structures, Vol.34, No.2, Pergamon Press,1990.
15. Sawko, F., "Recent Development in the Analysis of Steel Bridge Using Electronic Computers", Paper 4, Proceedings of the Conference on Steel Bridges, Institution of Civil Engineers, London, June,1968.
16. Gottfeld, H., Die Berechnung raumlich gekrummter stahlbrucken. (The Analysis of Spatially Curved Steel Bridges), Bautechnik, 1932, pp.715.
17. Umanskii, A.A., "Spatial Structures", Moscow, 1948. (In Russian)
18. Dabrowski, R., "Curved Thin-Walled Girders, Theory and Analysis", Translation No.144, Cement and Concrete Association, London 1972.
19. Federhofer, K., "Buckling Stability of a Curved Girder with a Simply-Symmetrical, Thin-Walled and Open Cross-Section under Uniform Radial Loadong", (In Russian), Osterreichisches Ingenieur-Archive, Vol.4, 1950, pp.27-44.
20. Vlasov, V. Z., "Thin-Walled Elastic Beams", Second Edition; National Science Foundation, Washington D.C. 1961.

21. Production Software Inc., “DESCUS 1&2-Users Manual” , College Park, Maryland, 1991.
22. Saint-Venant, B., “Analysis of Solid Beams of Simple or Double Curvature” ,(In French), Comptes Rendus, I’Academie des Science de Paries , Vol.17, 1843.
23. Heins, C. P. and K. R. Spates, “Behavior of a Single Horizontally Curved Girder” Proc., ASCE, Journal of the Structural Division, July, 1970.
24. Hiroshi Nakai and Chai Hong Yoo, “Analysis and Design of Curved Steel Bridges” , McGraw-Hill Book Company, 1988.
25. Yang, Yeong-Bin and Kuo, Shyh-Rong, “Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures” , Prentice Hall, Simon & Schuster(Asia) Pte Ltd, Songapore, 1994.
26. Sahin, M. A., “The Specification and Comparison of Methodologies for the Automated Minimum Cost Design of Horizontally Curved Girder Bridges Structures” , Dissertation Submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Maryland in partial fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy, 1985.
27. Hsu. Y. T., D. R. Schelling and W. J. Frank, “Review of Design Methods for Curved Box Girder Bridges” , Bridge Engineering Software Center, Report No.BR03-002, Department of Civil Engineering, University of Maryland, College Park, September 1986.
28. 徐耀賜,「平面曲線複合箱型鋼橋之設計方法」,結構工程季刊第八卷,第三期,民國82年9月。
29. USS Highway Structures Design Handbook, “V-Load Analysis” , Chapter 12, Volume 1, 1984.
30. “V-Load ANALYSIS, An Approximate Procedure, Simplified and Extended, for Determining Moments and Shears in Designing Horizontally-Curved Open-Framed Highway Bridges” , USS Publication, July, 1984.
31. “Highway Structures Design Handbook” , Volume 1, Chapter 12, United States Steel Corporation, ADUSS 88-1895-01, 1988.

32. McCormick, C. W., Editor, “ MSC/NASTRAN User’s, Manual” , the MacNeal-Schwendler Corporation, Los Angels, CA 90041.
33. Vlasov, V. Z., “Thin-Walled Elastic Bars” , (in Russian). 2nd. Ed. Fizmatgiz, Moscow, U.S.S.R.,1959; also (in English), Israel Program for Scientific Translations, Jeruaem,1961.
34. Dabrowski, R., “Curved Thin-Walled Girder” , Cement and Concrete Association, London, England, 1968.
35. Galambos, T. V., “ Structural Members and Frames ” , Prentice-Hall Inc., Eaglewood Cliffs, New Jersey, 1968.
36. Heins, C. P., “Bending and Torsional Design in Structural Members” , Lexington Books, Lexington, Mass., Sept., 1975.
37. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., “Theory of Elasticity” , 2nd. ed., McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y., 1951.
38. Krahula, J. L., “Analysis of Bent and Twisted Bars Using Finite Element Methods” , AIAA Journal, Vol.5, No.6, 1967.
39. Krajcinoric, D. K., “A Consistent Discrete Element Technique for Thin-Walled Assemblages” , International Journal of Solid Structures, Vol.5, pp.639-662, Pergamon Press, 1969.
40. Hong, H. K., “Improved Stiffness Analysis of a Grid of Curved Members and Vlasov’s Theory” , M. S. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Maryland, College Park, Maryland, 1979.
41. Thornton, W. T. and Bhanu G. Master, “Direct Stiffness Formulation for Horizontally Curved Beams” , Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.103, No.ST1, Jan.,1977, pp.284-289.
42. El-Amin, F. M., and Brotton, D. M., “Horizontally Curved Beam Finite Element Including Warping” , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.10, 1976, pp.1397-1428.
43. Chang, P. C., Heins, C. P., Li, G. H. and Shi D., “Theoretical Seismic Analysis of Curved Box Girder Bridges” , Department

of Civil Engineering, University of Maryland, College Park, Maryland, 1984.

44. 中華民國交通部，「公路橋樑設計規範」，幼獅文化事業公司印行，民國 90 年 1 月。
45. American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), “Guide Specifications for Alternate Load Factor Design Procedures for Steel Beam Bridges Using Braced Compact Sections” , Washington , D.C., 1991 .
46. American Association of State Highway and Transportaion Officials (AASHTO) “ AASHTO LRFD Bridge Design Specifications” , First Edition, Washington, D.C., 1994, 2002 (2nd. Editon) .
47. American Association of State Highway and Transportaion Officials (AASHTO), “Guide Specifications for Horizontally Curved Highway Bridges” , Washington, D.C., 2003, 2nd. Edition .
48. AISC, “ Manual of Steel Construction : Allowable Stress Design ” (ASD), 9th Ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, 1989 .
49. AISC, “Load and Resistance Factor Design” (LRFD), 3rd Ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, 2001 .
50. Alfred M. Freddenthal, Jewell M. Garrelts and Masanobu Shinozuke, “The Analysis of Structural Safety” , Journal of Structural Division, ASCE, Vol.92, ST1, Fed., 1966, pp.267-325 .
51. Vincent, G. S., “Tentative Criteria for Load Factor Design of Steel Highway Bridges” , AISI Bullitin no.15, March, 1969 .
52. 徐耀賜，「橋樑結構之基本功能」，全威圖書有限公司，台北市，民國 86 年 11 月。
53. 徐耀賜博士與美國馬里蘭大學橋樑工程研究中心 (BEST Center)口頭諮詢之資料，2003 年 7 月。
54. Lavelle, F. H., and J. S. Boick, “Program to Analyze Curved Girder Bridges” Engineering Bulletin No.8, University of Rhode Island, Kingston, R. I.,1965.



55. Lavelle, F. H., R. A. Grieg and H. R. Wemmer, "CUGAR1, Curved Girder Analysis Revision 1", Engineering Bulletin No.14, University of Rhode Island, R.I., September, 1971.
56. Lavelle, F. H., "The CUGAR2 Algorithm", CURT Technical Report No.4(L), Research Project HPR-2(111), University of Rhode Island, May 1975.
57. Lavelle, F. H., "The CUGAR3 Algorithm", Concortrium of University Research Teams, Report No.56, University of Rhode Island, Kingston, R. I., Jan.,1976.
58. Powell, G. H., "CURVBRG: A Computer Program for Analysis of Curved Open Girder Bridges", University of California, Berkeley, California, June, 1973.
59. Production Software inc. & Allied Consulting Engineers, Inc., "DESCUS 1&2- User's Manual", College Park, Maryland, 1994.
60. Vlasov, V.Z., "Thin-Walled Elastic Bars", Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem,1961.
61. Dabrowski, R., "Curved Thin-Walled Girder", Cement and Concrete Association, London, England,1972.
62. Heins, C.P., "Bending and Torsion Design in Structural Members", Lexington Books, Lexington, Mass., Sept.,1975.
63. Hus,Yao T., "The Development and Behavior of Vlasov Elements for the Modeling of Horizontally Curved Composite Box Girder Bridge Superstructures", Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Maryland, College Park, March,1989.
64. Krayterman, B. et. al., "Generalized Nonuniform Torsion of Beams and Frames", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.113, No.ST8, Aug.,1987.
65. Lyse, I., and Johnston, B.G., "Structural Beams in Torsion", Transaction, ASCE, Paper No.1941, April,1935.
66. ASCE-AASHTO Task Committee on Flexural Members of the Committee on Metals of the Structural Division, "Steel Box-Girder Bridge Ultimate Strength Considerations",Journal of

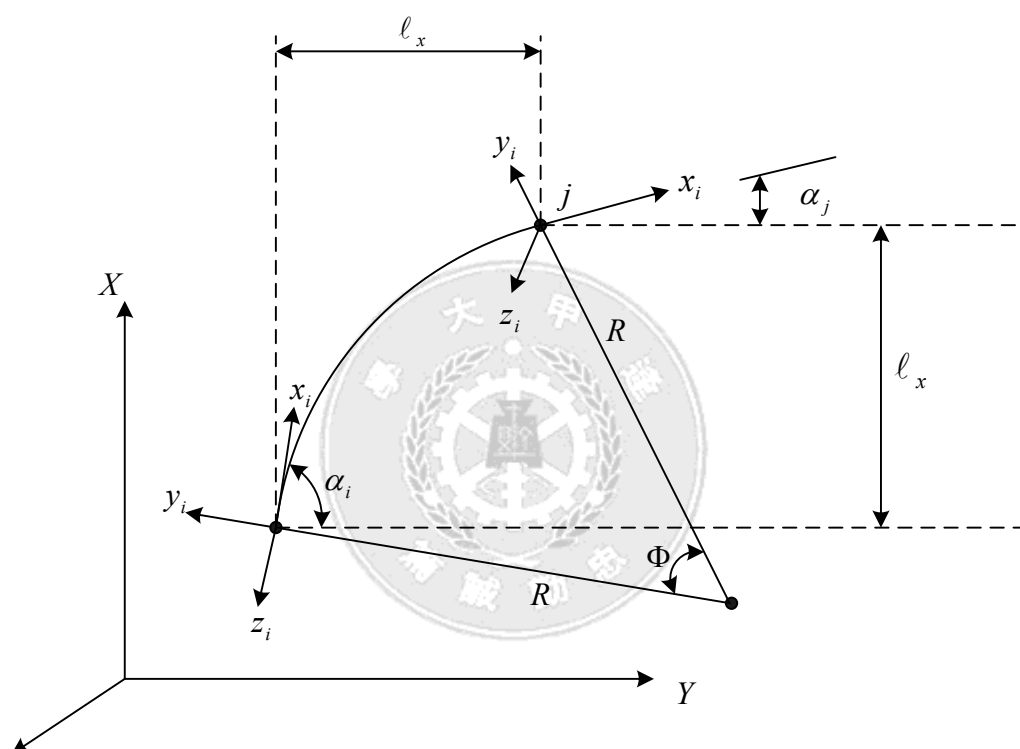
the Str.Div.,ASCE, Vol.97, No.ST12, Paper 11104, December 1974,pp.2433-2448.



## 附錄 I

### 每一節點距三各自由度之平面曲線薄壁樑勁度矩陣之推導

如附圖一所示，吾人所討論之曲線樑元素座落廣義座標 (Global Coordinates)，樑斷面之性質則假設沿其弧長方向均保持一定。



附圖一 每一節點具三個自由度曲線樑元素之座標定義

吾人設定此曲線樑之每一節點具有三個自由度(即縱向彎距、旋轉角、純扭曲旋轉角與垂直變位)，而曲線樑之勁度矩陣可以由柔度法求得。為了計算曲線樑之柔度，此樑元素之 i 端點固定而 j 端點則必須釋放 (Released) 元素端點 j 之柔度矩陣，F，(3×3 矩陣) 乃經由在  $X_j$ 、 $Y_j$  與  $Z_j$  方向別施加單位之純扭曲、彎距與剪力而求得。

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

其中

$$f_{11} = A \cdot (\phi - cs) + B \cdot (\phi + cs) \dots\dots\dots (2)$$

$$f_{12} = \mp A \cdot s^2 \pm B \cdot s^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$f_{13} = \pm A \cdot R \cdot (\phi - cs) \mp B \cdot R \cdot (\phi - 2s + cs) \dots\dots\dots (4)$$

$$f_{22} = A \cdot (\phi + cs) + B \cdot (\phi - cs) \dots\dots\dots (5)$$

$$f_{23} = -A \cdot R \cdot s^2 - B \cdot R \cdot (2 - 2c - s^2) \dots\dots\dots (6)$$

$$f_{33} = A \cdot R^2 \cdot (\phi - cs) + B \cdot R^2 \cdot (3\phi - 4s + cs) \dots\dots\dots (7)$$

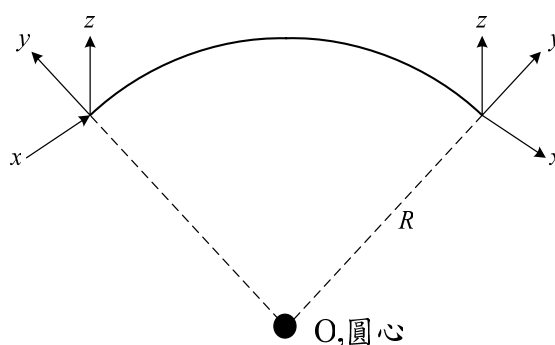
$$A = \frac{R}{2EI_y} \dots\dots\dots (8)$$

$$B = \frac{R}{2GK_t} \dots\dots\dots (9)$$

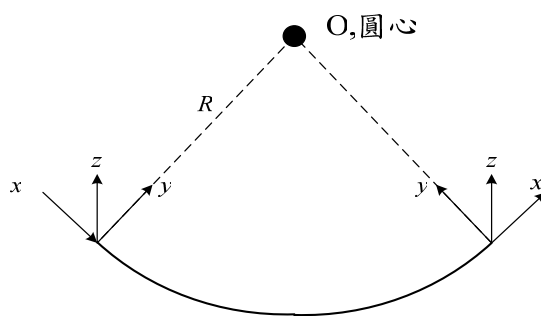
$$c = \cos \phi \dots\dots\dots (10)$$

$$s = \sin \phi \dots\dots\dots (11)$$

上式中如有正負號同時存在者，則上、下面符號分別相對應於附圖二中正負曲率。



(a) 負曲率



(b) 正曲率

附圖二 平面曲線樑之正負曲率定義

端點  $j$  相對於曲線樑元素區域座標之勁度矩陣，可由式(1)所示之柔度矩陣求其反矩陣便可求得。

$$K_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = F^{-1} \dots (12)$$

$$R_i = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 \\ -s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (13)$$

$$R_j = \begin{bmatrix} c_j & s_j & 0 \\ -s_j & c_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (14)$$

式中

$$c_i = \cos \alpha_i \dots (15a)$$

$$c_j = \cos \alpha_j \dots (15b)$$

$$s_i = \sin \alpha_i \dots (15c)$$

$$s_j = \sin \alpha_j \dots (15d)$$

曲線樑元素之轉換矩陣可表成：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ell_y \\ 0 & 1 & -\ell_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots (16)$$

其中  $\ell_x$  與  $\ell_y$  乃是曲線樑元素在廣義座標 X 與 Y 軸中之長度。

元素勁度矩陣  $\bar{K}_e$  ( $6 \times 6$  之大小) 相對應於廣義座標系統為端點勁度

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

或

$$k_{jj} = R_j^t \cdot k_j \cdot R_j \dots\dots\dots (18)$$

$$k_{ij} = -T \cdot k_{ji} \dots\dots\dots (19)$$

$$k_{ji} = k_{ij}^t \dots\dots\dots (20)$$

$$k_{ii} = -T \cdot k_{ji} \dots\dots\dots (21)$$

對於區域座標之元素勁度矩陣  $K_e$  便可經由轉換之過程求得。

$$K_e = R \cdot \bar{K}_e \cdot R^t \dots\dots\dots (22)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_j \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

## 附錄 II

### 節點具四自由度之平面曲線薄壁樑元素勁度矩陣

$$[K_e] = [K_b] + [K_t] + [K_w] \dots\dots\dots (1)$$

$$[K_b] = EI_y \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} & kb_{13} & kb_{14} & kb_{15} & kb_{16} & kb_{17} & kb_{18} \\ kb_{21} & kb_{22} & kb_{23} & kb_{24} & kb_{25} & kb_{26} & kb_{27} & kb_{28} \\ kb_{31} & kb_{32} & kb_{33} & kb_{34} & kb_{35} & kb_{36} & kb_{37} & kb_{38} \\ kb_{41} & kb_{42} & kb_{43} & kb_{44} & kb_{45} & kb_{46} & kb_{47} & kb_{48} \\ kb_{51} & kb_{52} & kb_{53} & kb_{54} & kb_{55} & kb_{56} & kb_{57} & kb_{58} \\ kb_{61} & kb_{62} & kb_{63} & kb_{64} & kb_{65} & kb_{66} & kb_{67} & kb_{68} \\ kb_{71} & kb_{72} & kb_{73} & kb_{74} & kb_{75} & kb_{76} & kb_{77} & kb_{78} \\ kb_{81} & kb_{82} & kb_{83} & kb_{84} & kb_{85} & kb_{86} & kb_{87} & kb_{88} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$kb_{11} = \frac{13\ell}{35R^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$kb_{21} = kb_{12} = \frac{11}{10R} - \frac{11\ell^2}{210R^3} \dots\dots\dots (4)$$

$$kb_{22} = \frac{4}{\ell} - \frac{4\ell}{15R^2} + \frac{\ell^3}{105R^4} \dots\dots\dots (5)$$

$$kb_{31} = kb_{13} = \frac{-6}{5R\ell} \dots\dots\dots (6)$$

$$kb_{32} = kb_{23} = \frac{6}{\ell^2} - \frac{1}{10R^2} \dots\dots\dots (7)$$

$$kb_{33} = \frac{12}{\ell^3} \dots\dots\dots (8)$$

$$kb_{41} = kb_{14} = \frac{11\ell^2}{210R^2} \dots\dots\dots (9)$$

$$kb_{42} = kb_{24} = \frac{2\ell}{15R} - \frac{\ell^3}{105R^3} \dots\dots\dots (10)$$

$$kb_{43} = kb_{34} = \frac{-1}{10R} \dots\dots\dots (11)$$

$$kb_{44} = \frac{\ell^3}{105R^2} \dots\dots\dots (12)$$

$$kb_{51} = kb_{15} = \frac{9\ell}{70R^2} \dots\dots\dots (13)$$

$$kb_{52} = kb_{25} = \frac{-1}{10R} - \frac{13\ell^2}{420R^3} \dots\dots\dots (14)$$

$$kb_{53} = kb_{35} = \frac{6}{5R\ell} \dots\dots\dots (15)$$

$$kb_{54} = kb_{45} = \frac{13\ell^2}{420R^2} \dots\dots\dots (16)$$

$$kb_{55} = \frac{13\ell}{35R^2} \dots\dots\dots (17)$$

$$kb_{61} = kb_{16} = \frac{1}{10R} + \frac{13\ell^2}{420R^3} \dots\dots\dots (18)$$

$$kb_{62} = kb_{26} = \frac{2}{\ell} + \frac{\ell}{15R^2} - \frac{\ell^3}{140R^4} \dots\dots\dots (19)$$

$$kb_{63} = kb_{36} = \frac{6}{\ell^2} - \frac{1}{10R^2} \dots\dots\dots (20)$$

$$kb_{64} = kb_{46} = \frac{-\ell}{30R} + \frac{\ell^3}{140R^3} \dots\dots\dots (21)$$

$$kb_{65} = kb_{56} = \frac{-11}{10R} + \frac{11\ell^2}{210R^3} \dots\dots\dots (22)$$

$$kb_{66} = \frac{4}{\ell} - \frac{4\ell}{15R^2} + \frac{\ell^3}{105R^4} \dots\dots\dots (23)$$

$$kb_{71} = kb_{17} = \frac{6}{5R\ell} \dots\dots\dots (24)$$

$$kb_{72} = kb_{27} = \frac{-6}{\ell^2} + \frac{1}{10R^2} \dots\dots\dots (25)$$

$$kb_{73} = kb_{37} = \frac{-12}{\ell^3} \dots\dots\dots (26)$$



$$kb_{74} = kb_{47} = \frac{1}{10R} \dots\dots\dots (27)$$

$$kb_{75} = kb_{37} = \frac{-6}{5R\ell} \dots\dots\dots (28)$$

$$kb_{76} = kb_{67} = \frac{-6}{\ell^2} + \frac{1}{10R^2} \dots\dots\dots (29)$$

$$kb_{77} = \frac{12}{\ell^3} \dots\dots\dots (30)$$

$$kb_{81} = kb_{18} = \frac{-13\ell^2}{420R^2} \dots\dots\dots (31)$$

$$kb_{82} = kb_{28} = \frac{-\ell}{30R} + \frac{\ell^3}{140R^3} \dots\dots\dots (32)$$

$$kb_{83} = kb_{38} = \frac{-1}{10R} \dots\dots\dots (33)$$

$$kb_{84} = kb_{48} = \frac{-\ell^3}{140R^2} \dots\dots\dots (34)$$

$$kb_{85} = kb_{58} = \frac{-11\ell^2}{210R^2} \dots\dots\dots (35)$$

$$kb_{86} = kb_{68} = \frac{2\ell}{15R} - \frac{\ell^3}{105R^3} \dots\dots\dots (36)$$

$$kb_{87} = kb_{78} = \frac{1}{10R} \dots\dots\dots (37)$$

$$kb_{88} = \frac{\ell^3}{105R^2} \dots\dots\dots (38)$$

$$[K_t] = GK_t \begin{bmatrix} kt_{11} & kt_{12} & kt_{13} & kt_{14} & kt_{15} & kt_{16} & kt_{17} & kt_{18} \\ kt_{21} & kt_{22} & kt_{23} & kt_{24} & kt_{25} & kt_{26} & kt_{27} & kt_{28} \\ kt_{31} & kt_{32} & kt_{33} & kt_{34} & kt_{35} & kt_{36} & kt_{37} & kt_{38} \\ kt_{41} & kt_{42} & kt_{43} & kt_{44} & kt_{45} & kt_{46} & kt_{47} & kt_{48} \\ kt_{51} & kt_{52} & kt_{53} & kt_{54} & kt_{55} & kt_{56} & kt_{57} & kt_{58} \\ kt_{61} & kt_{62} & kt_{63} & kt_{64} & kt_{65} & kt_{66} & kt_{67} & kt_{68} \\ kt_{71} & kt_{72} & kt_{73} & kt_{74} & kt_{75} & kt_{76} & kt_{77} & kt_{78} \\ kt_{81} & kt_{82} & kt_{83} & kt_{84} & kt_{85} & kt_{86} & kt_{87} & kt_{88} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

$$kt_{2i} = kt_{i2} = 0, \quad i = 1, 8 \dots\dots\dots (40)$$

$$kt_{6j} = kt_{j6} = 0, \quad j = 1, 8 \dots\dots\dots (41)$$

$$kt_{11} = \frac{6}{5\ell} \dots\dots\dots (42)$$

$$kt_{31} = kt_{13} = \frac{-6}{5R\ell} \dots\dots\dots (43)$$

$$kt_{33} = \frac{6}{5R^2\ell} \dots\dots\dots (44)$$

$$kt_{41} = kt_{14} = \frac{1}{10} \dots\dots\dots (45)$$

$$kt_{43} = kt_{34} = \frac{-1}{10R} \dots\dots\dots (46)$$

$$kt_{44} = \frac{2\ell}{15} \dots\dots\dots (47)$$

$$kt_{51} = kt_{15} = \frac{-6}{5\ell} \dots\dots\dots (48)$$

$$kt_{53} = kt_{35} = \frac{6}{5R\ell} \dots\dots\dots (49)$$

$$kt_{54} = kt_{45} = \frac{-1}{10} \dots\dots\dots (50)$$

$$kt_{55} = \frac{6}{5\ell} \dots\dots\dots (51)$$

$$kt_{71} = kt_{17} = \frac{6}{5R\ell} \dots\dots\dots (52)$$

$$kt_{73} = kt_{37} = \frac{-6}{5R^2\ell} \dots\dots\dots (53)$$

$$kt_{74} = kt_{47} = \frac{1}{10R} \dots\dots\dots (54)$$

$$kt_{75} = kt_{57} = \frac{-6}{5R\ell} \dots\dots\dots (55)$$

$$kt_{77} = \frac{6}{5R^2\ell} \dots\dots\dots (56)$$

$$kt_{81} = kt_{18} = \frac{1}{10} \dots\dots\dots (57)$$

$$kt_{83} = kt_{38} = \frac{-1}{10R} \dots\dots\dots (58)$$

$$kt_{84} = kt_{48} = \frac{-\ell}{30} \dots\dots\dots (59)$$

$$kt_{85} = kt_{58} = \frac{-1}{10} \dots\dots\dots (60)$$

$$kt_{87} = kt_{78} = \frac{1}{10R} \dots\dots\dots (61)$$

$$kt_{88} = \frac{2\ell}{15} \dots\dots\dots (62)$$

$$[K_w] = EI_w \begin{bmatrix} kw_{11} & kw_{12} & kw_{13} & kw_{14} & kw_{15} & kw_{16} & kw_{17} & kw_{18} \\ kw_{21} & kw_{22} & kw_{23} & kw_{24} & kw_{25} & kw_{26} & kw_{27} & kw_{28} \\ kw_{31} & kw_{32} & kw_{33} & kw_{34} & kw_{35} & kw_{36} & kw_{37} & kw_{38} \\ kw_{41} & kw_{42} & kw_{43} & kw_{44} & kw_{45} & kw_{46} & kw_{47} & kw_{48} \\ kw_{51} & kw_{52} & kw_{53} & kw_{54} & kw_{55} & kw_{56} & kw_{57} & kw_{58} \\ kw_{61} & kw_{62} & kw_{63} & kw_{64} & kw_{65} & kw_{66} & kw_{67} & kw_{68} \\ kw_{71} & kw_{72} & kw_{73} & kw_{74} & kw_{75} & kw_{76} & kw_{77} & kw_{78} \\ kw_{81} & kw_{82} & kw_{83} & kw_{84} & kw_{85} & kw_{86} & kw_{87} & kw_{88} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (63)$$

$$kw_{2i} = kw_{i2} = 0, \quad i = 1, 8 \dots\dots\dots (64)$$

$$kw_{6j} = kw_{j6} = 0, \quad j = 1, 8 \dots\dots\dots (65)$$

$$kw_{11} = \frac{12}{\ell^3} \dots\dots\dots (66)$$

$$kw_{31} = kw_{13} = \frac{-12}{R\ell^3} \dots\dots\dots (67)$$

$$kw_{33} = \frac{12}{R^2\ell^3} \dots\dots\dots (68)$$

$$kw_{41} = kw_{14} = \frac{6}{\ell^2} \dots\dots\dots (69)$$

$$kw_{43} = kw_{34} = \frac{-6}{R\ell^2} \dots\dots\dots (70)$$

$$kw_{44} = \frac{4}{\ell} \dots\dots\dots (71)$$

$$kw_{51} = kw_{15} = \frac{-12}{\ell^3} \dots\dots\dots (72)$$

$$kw_{53} = kw_{35} = \frac{12}{R\ell^3} \dots\dots\dots (73)$$

$$kw_{54} = kw_{45} = \frac{-6}{\ell^2} \dots\dots\dots (74)$$

$$kw_{55} = \frac{12}{\ell^3} \dots\dots\dots (75)$$

$$kw_{71} = kw_{17} = \frac{12}{R\ell^3} \dots\dots\dots (76)$$

$$kw_{73} = kw_{37} = \frac{-12}{R^2\ell^3} \dots\dots\dots (77)$$

$$kw_{74} = kw_{47} = \frac{6}{R\ell^2} \dots\dots\dots (78)$$

$$kw_{75} = kw_{57} = \frac{-12}{R\ell^3} \dots\dots\dots (79)$$

$$kw_{77} = \frac{12}{R^2\ell^3} \dots\dots\dots (80)$$

$$kw_{81} = kw_{18} = \frac{6}{\ell^2} \dots\dots\dots (81)$$

$$kw_{83} = kw_{38} = \frac{-6}{R\ell^2} \dots\dots\dots (82)$$

$$kw_{84} = kw_{48} = \frac{2}{\ell} \dots\dots\dots (83)$$

$$kw_{85} = kw_{58} = \frac{-6}{\ell^2} \dots\dots\dots (84)$$

$$kw_{87} = kw_{78} = \frac{6}{R\ell^2} \dots\dots\dots (85)$$

$$kw_{88} = \frac{4}{\ell} \dots\dots\dots (86)$$

符號說明：

$R$  = 曲率半率

$G$  = 剪力模數

$I_w$  = 翹曲常數

$I_y$  = 二次慣性矩

$E$  = 彈性模數

$K_t$  = 純扭曲常數

$\ell$  = 曲線樑元素之弧長

$[K_e]$  = 曲線薄壁樑元素勁度矩陣

$[K_b], [K_t], [K_w]$  = 分別為曲線薄壁樑彎矩、純扭曲與翹曲勁度矩陣

