

臨時性公車路網調整之多目標最佳化模式

MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION OF TEMPORARY BUS NETWORK ADJUSTMENT

林幸加 Hsin-Chia Lin¹

朱致遠 James C. Chu²

李承威 Cheng-Wei Li³

(111 年 8 月 8 日收件，111 年 12 月 20 日第一次修正，112 年 2 月 6 日接受)

摘 要

臨時性公車路網調整問題係指公車營運在面臨特殊事件或活動時，如工程施工所造成的道路封閉、大型活動的交通管制措施等，導致部分路段受影響而無法使原有公車路線正常營運下，於事前所規劃的臨時性路網調整，同時將調整路線事先公告讓民眾知道，並於事件或活動結束後恢復原營運路線。然過去做法經常以人為方式憑藉主觀經驗處理，缺乏一套有系統的規劃標準，且無同時考量路網調整前後的關係與變動及對既有乘客的影響，也因此常造成資源的浪費與既有乘客的流失。

針對臨時性公車路網調整問題，本研究建構一多目標混合整數線性規劃模式，求解兩個相互衝突的目標式，分別為最大化路網相似度與最小化標準化後旅行時間，達到同時兼顧路網調整前後的變動與對既有乘客的影響，又能考量乘客服務水準的路網調整方案。模式中使用集合分割法改寫，以增加問題求解的效率，同時採用增強型 ϵ -限制式法求解所建構模式的 Pareto 最佳解，用以改善過去研究於目標式單位不一致、權重訂定，以及不同目標間權衡取捨等問題。

-
1. 國立臺灣大學土木工程學系博士生/鼎漢國際工程顧問股份有限公司副董事長。
 2. 國立臺灣大學土木工程學系教授(聯絡地址：10617 臺北市羅斯福路 4 段 1 號，電話：02-33664235，E-mail: jameschu@ntu.edu.tw)。
 3. 國立臺灣大學土木工程學系碩士。

為評估本模式的路網改善成效，本研究藉由測試案例驗證模式的合理性與有效性，以及透過情境案例分析，探討不同封閉路段位置與不同公車路線數目對於路網調整之影響。分析顯示本模式的調整結果合理且效果良好，並可依不同目標函數間的權衡取捨找出最滿意的調整方案，此研究成果有利於規劃與決策者於臨時性公車路網調整策略上提供最適參考與建議。

關鍵詞： 公車路網調整、多目標混合整數線性規劃模式、路網相似度、旅行時間、集合分割法、增強型 ε -限制式法

ABSTRACT

Temporary bus network adjustment problem is an important issue in planning and operation of bus transport systems. When bus operation faces special events or activities, such as road closures during construction and traffic control measures for special activities, some road sections are affected and some original bus routes may not be able to provide services again. Planners need to adjust the bus network in advance, and announce the adjusted bus routes to people. After the events or activities come to an end, the bus network will be restored to its original state. The bus network adjustment is to reduce the business impacts of operators, and maintain the original service levels of passengers. However, some past practices were often used based on their subjective experiences, which lacks a systematic planning standard and fails to consider the relationship of before-and-after adjustment, as well as the impacts on existing passengers, often resulting in the waste of resources and loss of existing passengers.

Hence, the study proposes a multi-objective mixed integer linear programming model with two conflicting objectives, which maximizes the bus network similarity and minimizes the normalized travel time, so as to consider both the change of bus network and the influence on existing passengers. In addition, the model is reformulated as a set-partitioning problem to increase the efficiency of problem solving. Also, augmented ε -constraint method is used to solve for Pareto optimal solutions, which can improve the problems of past studies like the inconsistency of different objectives, the presume of weights, and the evaluation of trade-offs between different objectives.

To evaluate the effectiveness of bus network adjustment, the study verifies the reasonability and effectiveness of the model by test examples. Also, through scenario analysis, the impacts of different closed road sections and different number of bus routes are discussed. The results show that the proposed model is reasonable and effective. Also, decision-makers can have the most satisfactory adjustment plan based on their trade-offs between different objectives. The results of study can provide a reference for planners in making temporary bus

network adjustment.

Key Words : *Bus Network Adjustment; Multi-objective Mixed Integer Linear Programming Model; Bus Network Similarity; Travel Time; Set-Partitioning Formulation; Augmented ε -Constraint Method*

一、前言

公車系統的規劃與營運，大致可分成路網設計 (Network Design)、發車頻率訂定 (Frequencies Setting)、時刻表建構 (Timetable Development)、車輛排程 (Bus Scheduling) 與司機員排班 (Driver Scheduling) 五大類 (Ceder & Wilson^[1])。其中以路網設計尤為重要 (Ceder^[2])，然過去研究鮮少針對公車路網設計所衍生的公車路網調整問題進行探討，尤其是因應特殊事件或活動所進行的「臨時性公車路網調整」問題。針對臨時性公車路網調整問題，過去實務上做法經常以人為方式憑藉主觀經驗處理，缺乏一套有系統的規劃標準，或僅進行局部性的路線調整，而非以整體路網為考量，舉例來說，臺中市霧峰區吉峰路於 108 年 11 月 1 日至 109 年 1 月 31 日道路施工，客運業者係局部性將行駛該路段之公車改道至與吉峰路平行的峰堤路，而未作其他更全面性的考量與調整。

過去相關學術文獻多著重於新公車路線的規劃設計，缺乏臨時性公車路網調整的系統方法，然而，將設計新公車路線的方法應用在路線調整將無法考量路網調整前後的關係與變動，若路線變動太大，不僅會干擾業者的現有營運，也會影響既有乘客的搭乘習慣，而降低其搭乘意願 (Amiripour et al.^[3])，造成資源的浪費與既有乘客的流失，不利於城市公共運輸之發展。而過去文獻中少數考量公車路線調整之研究，皆非採用多目標數學規劃法求解，而是利用權重將多目標函數結合為單目標函數求解，不僅須處理多個目標函數單位不一致的問題，且還無法衡量不同目標函數間的權衡取捨 (Trade-off)，而影響決策者最終方案之選擇。因此，本研究旨在建構一適用於臨時性公車路網調整的最佳化模式，並採用多目標規劃之增強型 ε -限制式法 (Augmented ε -Constraint Method) 求解，以改善上述問題。

綜上所述，本研究旨在建構一臨時性公車路網調整的多目標混合整數線性規劃模式，並以最大化路網相似度，及最小化標準化後旅行時間為多目標求解，達到同時兼顧路網調整前後的變動與對既有乘客的影響，又能考量乘客的服務水準；模式中採用多目標規劃之增強型 ε -限制式法求解，使其在兩個衝突的目標下找到權衡方案，有助於規劃與決策者在公車路網調整策略之參考建議。

二、文獻回顧

「公車路網設計問題」是探討如何在一區域內設計公車路線，以及決定公車路線上經過的站點順序 (Guihaire & Hao^[4]; Ibarra-Rojas et al.^[5])，然「公車路網調整問題」是探討

如何改善原有的公車路網，以得到調整後的公車路線及其經過的站點順序，與公車路網設計問題相比，不同的地方在於模式中會有原本公車路網的資訊，因此須納入原本路網與調整後路網的關係與變動 (Amiripour et al.^[3])，並考量路網調整前後的變動幅度不能過大，且盡量滿足既有乘客的需求，否則會因路線變動太大，反而造成業者調整成本過高，及降低民眾搭乘意願。

文獻中考量公車路網調整問題的研究為數不多，Blum & Mathew^[6]所考慮的路線調整問題係在以限制式保留部份既有路線與維持發車頻率、行駛時間、與容量水準的條件下，進行路線重新設計，該研究並未考慮調整前後路線線形的關係，其目標式為最小化營運者與使用者成本之加總，其求解係採用高度啟發式的智慧代理人 (intelligent agent-based) 最佳化方法，而非可求得最佳解的數學規劃方法。Suman and Bolia^[7]最大化無轉乘乘客之延人公里數，調整前後的變動係以維持一定比例原有站點的規則加以限制。Amiripour et al.^[3]所考慮的路線調整問題係最小化加權後的乘客等候時間、公車剩餘容量、私有車改使用公車的損失時間、未被滿足需求，及車隊大小加總，在以遺傳演算法求解時，給予原有公車路線較高的被選擇機率，而非直接最小化路網調整前後的變動。Fan & Machemehl^[8]提出雙層規劃問題，上層模式最小化總成本，包含乘客成本、營運者成本，及需求未被滿足成本，限制式有路線長度、路線數目、班距、乘載率、車隊大小、及空間-公平性；下層模式最佳化乘客路徑，包含最小化乘客旅行成本與轉乘次數，限制式有最小總旅行時間限制，及允許需求未被滿足限制，該研究未考慮路網調整前後的關係與變動，但在對既有乘客的影響方面，使用空間-公平性限制式確保乘客在路網調整前後不會受到較大的變動。由上述回顧可看出，調整前後之路線變動程度 (相似度) 以及乘客旅行時間 (服務水準) 的變化，為路線調整的兩大主要考量，此點與本研究之作法相符，唯文獻中尚未有同時考慮兩者之研究，而在考慮其中一者時亦常以限制式的方式加以拘限，而非在目標式中予以最佳化，其成效相對較差，本研究同時將兩者以目標式的形式考量，屬本研究之學術創新之一。

多目標規劃法是一種可同時考量兩個目標以上之數學規劃法，在求解過程中，由於多目標規劃法的目標彼此間通常會有衝突，故難以找到一個最佳解可同時考量所有的目標，因此多目標規劃法是找 Pareto 最佳解 (Pareto optimal solutions)，此 Pareto 最佳解集合在目標空間所構成的曲線稱為 Pareto 前緣線 (Pareto front)，可提供決策者不同目標間的權衡關係，進而得到最終的選擇方案。過去文獻將多目標規劃的求解方法分為偏好法 (Preference-Based Methods) 與生成法 (Generating Methods) (Miettinen^[9]; Diwekar^[10]; Rangaiah^[11])。偏好法是指決策者在決策過程中有提供相關偏好資訊，依照決策者提供資訊之時機不同，可分為事先提供偏好資訊 (A Priori Methods) 與漸進式提供偏好資訊 (Interactive Methods) 兩類；生成法是指決策者在沒有提供偏好資訊下，由規劃者產生出一至多個 Pareto 最佳解後，決策者再從中選擇出最滿意解，可分為無提供偏好資訊 (No-Preference Methods) 與事後提供偏好資訊 (A Posteriori Methods) 兩類。由於本模式之規劃結果供實際決策參考，以及在求解過程中不處理決策者偏好問題，因此求解方法屬於生成法的事後提供偏好資訊類型。另外，由於本模式採用混合整數線性規劃模式進行求

解，因此僅能採用將多目標函數轉換為單一目標函數的純量化方法求出 Pareto 最佳解。

進一步比較純量化方法的權重法與 ε -限制式法，權重法是透過一系列不同的權重將 Pareto 前緣線繪製出來； ε -限制式法是將其中一個目標式當作主要的目標式，其餘目標式放入限制式中，並透過訂定不同的限制範圍 ε ，將 Pareto 解集合求解出來。使用 ε -限制式法的優點有以下三點 (Mavrotas^[12])，分別為 (1) 權重法只能求解出可行解區域的角點 (Corner solution)，而 ε -限制式法能在可行解區域求解出非角點，且較權重法更能找到更多且有效的解；(2) 權重法不能處理非凸函數 (Non-convex) 的問題，而 ε -限制式法沒有此問題；(3) 權重法不能處理目標式單位不一致的問題，但 ε -限制式法因為只有一個主要目標式，其餘在限制式中被約束，因此沒有目標式單位一致性的問題。然而 ε -限制式法亦存在部分缺點，包含 (1) 無法保證目標函數在限制式的限制範圍之適用性；(2) 無法保證得到的解均為有效的 Pareto 最佳解，而可能是近似於 Pareto 最佳解的解，且無法確定其近似的程度；(3) 求解時間費時，尤其是當問題的目標式多於兩個以上時，故基於上述缺點，本研究採用 Mavrotas^[12] 針對 ε -限制式法所修改的增強型 ε -限制式法 (Augmented ε -Constraint Method)，作為本模式之多目標求解方法。

由過去文獻顯示尚無同時處理路網調整前後的關係與變動及對既有乘客的影響，以使得路網在調整後的變動幅度最小，同時又對既有乘客的影響不會太大，因此本研究提出「路網相似度」的概念，描述路網調整後與原本路網的相似程度，並以最大化路網相似度來處理路網調整前後的變動與既有乘客的影響，同時為避免調整後路網對既有乘客造成過多旅行時間的增加，本研究於目標式中加入「標準化後旅行時間」，用以最小化路網調整後的旅行時間與調整前的旅行時間之比值，達到維持既有乘客的服務水準。

因此，本研究擬透過建構多目標混合整數線性規劃模式，以最佳化路網相似度與標準化後旅行時間為多目標求解，期望得到的路網調整結果能符合營運者與乘客的需求，且採用生成法的增強型 ε -限制式法，先產生問題的 Pareto 解集合，再透過模糊方法(Fuzzy Approach)處理決策者的最滿意方案。

三、模式構建

3.1 問題描述

給定一路網 $G=(N,A)$ ，其中 N 為節點 (公車站點) 之集合， A 為節線 (路段) 之集合，公車路線定義為公車行經的站點順序，其為往返路線且受最大路線長度限制，起訖對定義為具有相同起點與迄點的乘客，並且具有相同的移動路徑，且已知路網上存在原本行駛的公車路線與既有起訖對的移動路徑。

本研究欲探討在部分路段受影響，而使原有公車路線於影響期間無法正常營運下，規劃者考量公車路網調整前後的變動程度與對既有乘客的影響等因素，於事前所進行的臨時

性公車路網調整，使調整後的公車路線不行經該路段，但具有與原路線相同的出發站點與折返站點，僅進行公車路線的延長、縮短、合併與刪減，以及行經站點的變動等。此臨時性路網調整為事件或活動前之規劃，並會將調整路線事先公告讓民眾知道，最後於事件或活動結束後恢復回原營運路線。本研究以最大化路網相似度與最小化標準化後旅行時間為目標，進行臨時性公車路網調整。

3.2 問題假設

於本研究欲探討問題及利於模式建構，相關假設說明如下：

1. 所有公車路線皆為往返路線。
2. 不考慮公車容量限制。
3. 公車發車頻率固定。
4. 節線 (路段) 之旅行時間為已知且定值，不考慮隨機性。
5. 轉乘等待時間為兩條公車路線班距平均之二分之一。
6. 公車路網調整前後的起訖對需求不變。

3.3 模式

3.3.1 符號定義

集合

A	路網上所有節線之集合，以任兩節點表示
A_{ab}	路網調整前起訖對 (a,b) 乘客路徑之節線集合
CA	所有封閉節線之集合，以 (i,j) 表示
L	路網調整後所有路線之集合，以 l 與 e 表示
N	路網上所有節點之集合，以 i 、 j 、 k 、 a 、 b 表示
R	路網調整前所有起訖對之集合，以 (a,b) 表示

參數

d_l	路網調整後路線 l 的出發站節點
$dist_{ij}$	節點 i 至節點 j 的距離
ε	極小容忍值
g_l	路網調整後路線 l 的折返節點
M	極大值
max^{dist}	單一路線的最大行駛距離
max^t	單一路線的最大行經節線個數
n_{ab}^{link}	路網調整前起訖對 (a,b) 的行經節線個數
p_{ab}	路網調整後起訖對 (a,b) 未被服務之懲罰值

q_{ab}	起訖對 (a,b) 的需求量，並標準化成0至1的數值
t_{ab}	路網調整前起訖對 (a,b) 的旅行時間
$time_{ij}$	節點i至節點j的旅行時間
α	路線相似度的權重
β	旅行時間相似度的權重
ω	乘客路徑的最大轉乘次數限制
τ	路線轉乘等待時間
變數	
CN_{ij}	節點 i 與節點 j 在路網調整後是否有連通之二元變數，1 代表是，0 代表否
D_{ab}	起訖對 (a,b) 在路網調整前後的旅行時間差之連續變數
δ_{ab}	非線性轉換線性數學模式之二元變數
H_i	節點 i 是否在調整後的路網上之二元變數，1 代表是，0 代表否
P_{abijtl}	在調整後路網上，起訖對(a,b)是否在路段順序 t 時經過路線 l 的節線 (i,j) 之二元變數，1 代表是，0 代表否
S_{ab}^1	起訖對 (a,b) 在路網調整後的路線相似度之連續變數
S_{ab}^2	起訖對 (a,b) 在路網調整後的旅行時間相似度之連續變數
θ_{ab}	非線性轉換線性數學模式之二元變數
U_{ijtl}	路網調整後路線 l 是否在路段順序 t 時經過節線 (i,j) 之二元變數，1 代表是，0 代表否
V_{il}	節點 i 是否在路網調整後路線 l 之二元變數，1 代表是，0 代表否
W_{ab}	起訖對 (a,b) 在路網調整後是否沒有被服務之二元變數，1 代表是，0 代表否
X_{ijtl}	路網調整後路線 l 是否經過節線 (i,j) 之二元變數，1 代表是，0 代表否
Y_{abijl}	在調整後路網上，起訖對 (a,b) 是否有經過路線 l 的節線 (i,j) 之二元變數，1 代表是，0 代表否
Z_{abjle}	在調整後路網上，起訖對 (a,b) 是否有在節點 j 從路線 l 轉乘至路線 e 之二元變數，1 代表是，0 代表否

3.3.2 多目標混合整數線性規劃模式

本研究之最佳化模式以最大化路網相似度 (f_1) 與最小化標準化後旅行時間 (f_2) 為多目標進行求解，如式 (1) 與 (2) 所示。在路網相似度方面，本研究將其定義為調整後路網相較於調整前路網的相似程度，由路線相似度 (S_{ab}^1) 與旅行時間相似度 (S_{ab}^2) 所組成。 α 與 β 分別為路線相似度，以及旅行時間相似度之權重， $\alpha+\beta=1$ 。在標準化後旅行時間方面，本研究將其定義為起訖對在路網調整後的旅行時間與調整前的旅行時間之比值，標準化之目的為去除數據的單位，使其有相同的標準來比較與加總，該數值越小越好。其中，起訖對 (a,b) 在路網調整後的旅行時間主要由旅行時間、轉乘等待時間，及未被服務之懲罰值所組

成，分別依序為 $\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl}$ 、 $\sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle}$ ，以及 $p_{ab} W_{ab}$ ， $\frac{1}{q_{ab}}$ 為起訖對 (a,b) 需求量之倒數，使其符合目標式最小化之要求。

$$Max f_1 = \sum_{(a,b) \in R} q_{ab} (\alpha S_{ab}^1 + \beta S_{ab}^2) \quad (1)$$

$$Min f_2 = \sum_{(a,b) \in R} \frac{1}{q_{ab}} \left(\frac{\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab}}{t_{ab}} \right) \quad (2)$$

式 (3) 至式 (12) 為公車服務路線限制式。式 (3) 限制公車路線存在於調整後的路網上或被刪減兩者之一，若公車路線 l 存在於調整後的路網上，則以該路線出發站節點 d_l 為出發站點的節線 (d_l, k) 必須被該公車路線經過一次；若公車路線 l 被刪減，則以該路線出發站節點 d_l 為出發站點的節線 (d_l, k) 必定不被該公車路線經過。式 (4) 與 (5) 表示折返站點在調整後路網的位置，若公車路線 l 存在於調整後的路網上，則進入與離開該路線折返站點 g_l 的節線數分別為 1 次；若公車路線 l 被刪減，則進入與離開該路線折返站點 g_l 的節線數均必定為 0 次。式 (6) 與 (7) 表示若公車路線 l 存在於調整後的路網上，則對於該路線的每個中間節點而言，進入與離開該節點的節線數分別最多為 2 次；若公車路線 l 被刪減，則對於該路線的每個中間節點而言，進入與離開該節點的節線數均必定為 0 次。式 (8) 為往返路線限制式，若公車路線 l 經過節線 (i,j) ，則節線 (j,i) 必定會被公車路線 l 經過。式 (9) 為流量守恆限制式，在每條公車路線 l 中，對於該路線的節點 j 而言，進入該節點 j 的節線數總和，必須與離開該節點 j 的節線數總和一致。式 (10) 為封閉路段限制式，即所有公車路線皆不可經過封閉路段。式 (11) 表示調整後的路網必須至少存在一條公車路線。式 (12) 為最大路線長度限制式，即限制每條公車路線 l 的總路線長度不能大於單一路線的最大行駛距離。

$$\sum_{(d_l, k) \in A} X_{d_l k l} \leq 1, \forall l \in L \quad (3)$$

$$\sum_{(i, g_l) \in A} X_{i g_l l} = \sum_{(d_l, k) \in A} X_{d_l k l}, \forall l \in L \quad (4)$$

$$\sum_{(g_l, j) \in A} X_{g_l j l} = \sum_{(d_l, k) \in A} X_{d_l k l}, \forall l \in L \quad (5)$$

$$\sum_{(i, j) \in A} X_{i j l} \leq 2 \sum_{(d_l, k) \in A} X_{d_l k l}, \forall i \in N, i \neq d_l \neq g_l, l \in L \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} \leq 2 \sum_{(d_l,k) \in A} X_{d_lkl}, \forall j \in N, j \neq d_l \neq g_l, l \in L \quad (7)$$

$$X_{ijl} = X_{jil}, \forall (i,j) \in A, l \in L \quad (8)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} = \sum_{(j,k) \in A} X_{jkl}, \forall j \in N, l \in L \quad (9)$$

$$\sum_{l \in L} X_{ijl} = 0, \forall (i,j) \in CA \quad (10)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{(d_l,k) \in A} X_{d_lkl} \geq 1 \quad (11)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \text{dist}_{ij} X_{ijl} \leq \max^{\text{dist}}, \forall l \in L \quad (12)$$

式 (13) 至式 (18) 為節點連通性限制式，目的為判斷路網上任兩節點是否連通。式 (13) 與 (14) 用來判斷節點 i 是否在公車路線 l 上，若 $\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} = 1$ ，表示節點 i 為出發站節點或折返節點，則 $V_{il} = 1$ ；若 $\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} = 2$ ，表示節點 i 為中間節點，則 $V_{il} = 1$ ；若 $\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} = 0$ ，表示節點 i 不在公車路線 l 上，則 $V_{il} = 0$ 。式 (15) 與 (16) 用來判斷節點 i 是否在調整後的路網上，若 $\sum_{l \in L} V_{il} \geq 1$ ，表示節點 i 至少在其中一條公車路線上，則 $H_i = 1$ ；若 $\sum_{l \in L} V_{il} = 0$ ，表示節點 i 不在任何公車路線上，則 $H_i = 0$ 。式 (17) 與 (18) 用來判斷任兩節點是否連通，對於任兩節點 i 與 j ，且 $i \neq j$ ，若 $H_i + H_j = 2$ ，表示節點 i 與 j 同時都存在於調整後的路網上，則 $CN_{ij} = 1$ ；若 $H_i + H_j \leq 1$ ，表示節點 i 與 j 不同時存在於調整後的路網上，則 $CN_{ij} = 0$ 。

$$\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} \leq 2V_{il}, \forall i \in N, l \in L \quad (13)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} X_{ijl} \geq V_{il}, \forall i \in N, l \in L \quad (14)$$

$$\sum_{l \in L} V_{il} - 1 \leq -\varepsilon + (M + \varepsilon)H_i, \forall i \in N \quad (15)$$

$$\sum_{l \in L} V_{il} \geq H_i, \forall i \in N \quad (16)$$

$$H_i + H_j \leq CN_{ij} + 1, \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (17)$$

$$H_i + H_j \geq 2CN_{ij}, \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (18)$$

式 (19) 至式 (28) 為乘客移動路徑限制式。式 (19) 限制公車路線須先經過節線，起訖對才能行經該路線的該節線，若調整後的路網上，路線 l 的節線 (i, j) 不存在時，則對於所有起訖對而言，其路線 l 的節線 (i, j) 皆為 0。式 (20) 限制起訖對必須在調整後的路網上有連通，才能有該起訖對的行經路徑，若起訖對不連通時，則該起訖對在所有路線的所有節線皆為 0。式 (21) 限制起訖對 (a, b) 只能在有移動路徑與沒有移動路徑兩者擇一，若有移動路徑，則 $\sum_{l \in L} \sum_{(a,k) \in A} Y_{abakl} = 1$ ；若沒有移動路徑，則 $W_{ab} = 1$ 。若兩節點（站牌）的距離接近（例如：300 公尺內），實務上於其中任一站牌乘車應皆可被乘客接受，欲考慮此一狀況，可在式 (21) 判斷乘客是否有移動路徑時，將所有符合條件的移動路徑皆納入判斷，意即，對起訖對 (a, b) 來說，若 a 站點與 a' 站點相近，起訖對 (a, b) 可同時被連通 (a, b) 與 (a', b) 的移動路徑所服務。式 (22) 與 (23) 表示若起訖對 (a, b) 有移動路徑，則對於該起訖對的每個節點而言，進入與離開該節點的節線數分別最多為 1 次；若起訖對 (a, b) 沒有移動路徑，則對於該起訖對的每個節點而言，進入與離開該節點的節線數均必定為 0 次。式 (24) 限制起訖對 (a, b) 在節線 (i, j) 與 (j, i) 只能擇一。式 (25) 表示起訖對在調整後路網上的流量守恒，對於起訖對 (a, b) 而言，進入節點 j 的節線數總和，必須與離開節點 j 的節線數總和一致。式 (26) 與 (27) 表示起訖對在調整後路網的轉乘行為，若 $\sum_{\{(i,j) \in A | j \neq a\}} Y_{abijl} + \sum_{\{(j,k) \in A | j \neq a\}} Y_{abjke} = 2$ ，則 $Z_{abjle} = 1$ ，表示起訖對 (a, b) 在節點 j 有從路線 l 轉乘至路線 e ，其中 $l \neq e$ ；若 $\sum_{\{(i,j) \in A | j \neq b\}} Y_{abijl} + \sum_{\{(j,k) \in A | j \neq a\}} Y_{abjke} = 0$ 或 1，則 $Z_{abjle} = 0$ ，表示起訖對 (a, b) 在節點 j 沒有路線 l 與 e 的轉乘行為。式 (28) 表示起訖對的總轉乘次數限制，使其不超過最大轉乘次數 ω 。

$$X_{ijl} \geq Y_{abijl}, \forall (i, j) \in A, (a, b) \in R, l \in L \quad (19)$$

$$CN_{ab} \geq Y_{abijl}, \forall (i, j) \in A, (a, b) \in R, l \in L \quad (20)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{(a,k) \in A} Y_{abakl} + W_{ab} = 1, \forall (a, b) \in R \quad (21)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} Y_{abijl} \leq \sum_{l \in L} \sum_{(a,k) \in A} Y_{abakl}, \forall i \in N, (a, b) \in R \quad (22)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} Y_{abijl} \leq \sum_{l \in L} \sum_{(a,k) \in A} Y_{abakl}, \forall j \in N, (a, b) \in R \quad (23)$$

$$\sum_{l \in L} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} Y_{abjil} \leq 1, \forall (i, j) \in A, (a, b) \in R \quad (24)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{\{(i,j) \in A | j \neq b\}} Y_{abijl} = \sum_{l \in L} \sum_{\{(j,k) \in A | j \neq a\}} Y_{abjkl}, \forall j \in N, (a, b) \in R \quad (25)$$

$$\sum_{\{(i,j) \in A | j \neq b\}} Y_{abijl} + \sum_{\substack{\{(j,k) \in A | j \neq a\} \\ l \in L, e \in L, l \neq e}} Y_{abjke} \leq Z_{abjle} + 1, \forall j \in N, (a, b) \in R, \quad (26)$$

$$\sum_{\{(i,j) \in A | j \neq b\}} Y_{abijl} + \sum_{\substack{\{(j,k) \in A | j \neq a\} \\ l \in L, e \in L, l \neq e}} Y_{abjke} \geq 2Z_{abjle}, \forall j \in N, (a, b) \in R, \quad (27)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} Z_{abjle} \leq \omega, \forall (a, b) \in R \quad (28)$$

式 (29) 至式 (34) 為消除子迴圈限制式，目的為解決公車服務路線與乘客移動路徑所產生的子迴圈問題。其中式 (29) 至式 (31) 為消除公車服務路線之子迴圈，式 (29) 表示若公車路線 l 存在於調整後的路網上，則在此虛擬的時空路網上，以該路線出發站節點 d_l 為出發站點的節線 (d_l, j) 在路段順序 1 時必定為 1；若公車路線 l 被刪減，則在路段順序 1 時，所有以該路線出發站節點 d_l 為出發站點的節線 (d_l, j) 皆必定為 0。式 (30) 為連接調整後路網的公車服務路線與虛擬時空路網，即路線 l 經過節線 (i, j) ，在虛擬時空路網上也同樣要存在，其中，路段順序 t 的範圍為 1 至 $\max^t$ ， $\max^t$ 為路段順序的上界，在此為單一路線的最大行經節線個數。式 (31) 表示虛擬時空路網的流量守恆，即進入該節點 j 的節線數總和，必須與離開該節點 j 的節線數總和一致，並且須按照路段順序 t 依序連接。

$$\sum_{(d_l, j) \in A} U_{d_l j 1l} = \sum_{(d_l, j) \in A} X_{d_l j l}, \forall l \in L \quad (29)$$

$$\sum_{t=1}^{\max^t} U_{ijtl} = X_{ijl}, \forall (i, j) \in A, l \in L \quad (30)$$

$$\sum_{(i, j) \in A} U_{ij(t-1)l} = \sum_{(j, k) \in A} U_{jktl}, \forall j \in N, j \neq d_l, t \in \{2, \dots, \max^t\}, l \in L \quad (31)$$

式 (32)、(33) 與 (34) 為消除乘客路徑之子迴圈，以建立一虛擬的時空路網與模式搭配，並透過二元變數 P_{abijtl} 判斷在調整後路網上，起訖對 (a, b) 是否在路段順序 t 時經過路線 l 的節線 (i, j) ，使乘客路徑按照路段順序連接，藉此達到消除子迴圈之目的。式 (32) 表示若起訖對 (a, b) 的移動路徑存在於調整後的路網上，則在此虛擬的時空路網上，以該起訖對起點 a 為出發站點之路線 l 節線 (a, j) 在路段順序 1 時必定為 1；若公車路線 l 被刪減，則在路段順序 1 時，所有以該起訖對起點 a 為出發站點之路線 l 節線 (a, j) 皆必定為 0。式 (33) 為連接調整後路網的乘客移動路徑與虛擬時空路網，即起訖對 (a, b) 在路線 l 上經過節線 (i, j) ，在虛擬時空路網上也同樣要存在，其中，路段順序 t 的範圍為 1 至 $\max^t$ ， $\max^t$ 為路

段順序的上界，在此為單一路線的最大行經節線個數。式 (34) 表示虛擬時空路網的流量守恆，即進入該節點 j 的節線數總和，必須與離開該節點 j 的節線數總和一致，並且須按照路段順序 t 依序連接。

$$\sum_{l \in L} \sum_{(a,j) \in A} P_{abaj1l} = \sum_{l \in L} \sum_{(a,j) \in A} Y_{abajl}, \forall (a,b) \in R \quad (32)$$

$$\sum_{t=1}^{\max^t} P_{abijtl} = Y_{abijl}, \forall (i,j) \in A, (a,b) \in R, l \in L \quad (33)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{\{(i,j) \in A | j \neq b\}} P_{abij(t-1)l} = \sum_{l \in L} \sum_{\{(j,k) \in A | j \neq a\}} P_{abjktl}, \forall j \in N, (a,b) \in R, t \in \{2, \dots, \max^t\} \quad (34)$$

路網相似度由路線相似度 (S_{ab}^1) 與旅行時間相似度 (S_{ab}^2) 所組成。路線相似度定義為路網調整前起訖對形成的路線，在路網調整後該起訖對亦連通的路段重複程度，即衡量調整前路網的起訖對行經路線中，是否調整後路網也提供該起訖對的服務，以及有多少比例的路段被保留在調整後的路網上，其為一個介於 0 至 1 的連續變數，計算標準如式 (35) 至式 (37) 所示。式 (35) 限制起訖對必須在路網調整後有連通，才会有路線相似度，若路網調整後該起訖對無法被服務，則無論調整後路網有多少重複路段，其路線相似度仍為零。式 (36) 與 (37) 表示路線相似度的計算標準為 $\left(\frac{\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A_{ab}} Y_{abijl}}{n_{ab}^{link}}\right) \cdot n_{ab}^{link}$ 為起訖對 (a,b) 在路網調整前的行經路段數； $\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A_{ab}} Y_{abijl}$ 為起訖對 (a,b) 在路網調整後行經的路徑中，同樣也是調整前路網所行經的路段數，其中， A_{ab} 為路網調整前起訖對 (a,b) 的乘客路徑之節線集合。

旅行時間相似度定義為路網調整前起訖對形成路線的旅行時間，與在路網調整後該起訖對旅行時間的差異程度，此衡量乘客的旅行時間在路網調整前後的變動，以及反映調整後路網對既有乘客的影響，其為一個介於 0 至 1 的連續變數，計算標準如式 (38) 與 (39) 所示。式 (38) 表示起訖對在路網調整前後的旅行時間差 (D_{ab})，計算標準為起訖對在路網調整後的旅行時間、轉乘等待時間，以及未被服務懲罰值之加總，扣掉該起訖對在路網調整前的旅行時間，由於旅行時間差為非負值，因此對其取絕對值。式 (39) 表示旅行時間相似度的計算標準為 $\max\left\{\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right), 0\right\}$ 。若 $\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right)$ 計算為負值，代表起訖對在路網調整前後的旅行時間差距過大，則旅行時間相似度為零。

$$CN_{ab} \geq S_{ab}^1, \forall (a,b) \in R \quad (35)$$

$$\left(\frac{\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A_{ab}} Y_{abijl}}{n_{ab}^{link}}\right) - S_{ab}^1 \leq 1 - CN_{ab}, \forall (a,b) \in R \quad (36)$$

$$\left(\frac{\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A_{ab}} Y_{abijl}}{n_{ab}^{link}} \right) - S_{ab}^1 \geq 0, \forall (a, b) \in R \quad (37)$$

$$D_{ab} = \left| \left(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab} \right) - t_{ab} \right|, \forall (a, b) \in R \quad (38)$$

$$S_{ab}^2 = \max \left\{ \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}} \right), 0 \right\}, \forall (a, b) \in R \quad (39)$$

式 (40) 至式 (51) 為模式中使用之變數定義限制式。

$$X_{ijl} = \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A, l \in L \quad (40)$$

$$V_{il} = \{0, 1\}, \forall i \in N, l \in L \quad (41)$$

$$H_i = \{0, 1\}, \forall i \in N \quad (42)$$

$$CN_{ij} = \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in N, i \neq j \quad (43)$$

$$Y_{abijl} = \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A, (a, b) \in R, l \in L \quad (44)$$

$$W_{ab} = \{0, 1\}, \forall (a, b) \in R \quad (45)$$

$$Z_{abjle} = \{0, 1\}, \forall j \in N, (a, b) \in R, l \in L, e \in L, l \neq e \quad (46)$$

$$U_{ijtl} = \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A, t \in \{1, \dots, \max^t\}, l \in L \quad (47)$$

$$P_{abijtl} = \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A, (a, b) \in R, t \in \{1, \dots, \max^t\}, l \in L \quad (48)$$

$$0 \leq S_{ab}^1 \leq 1, \forall (a, b) \in R \quad (49)$$

$$D_{ab} \geq 0, \forall (a, b) \in R \quad (50)$$

$$0 \leq S_{ab}^2 \leq 1, \forall (a, b) \in R \quad (51)$$

考量式 (38) 與 (39) 為非線性數學模式，求解效率較線性數學模式低，因此本研究將其轉換為線性模式，以減少問題的複雜度。式 (38) 轉換為式 (52) 至式 (55)。式 (52) 與 (53) 用來決定 D_{ab} 的下界，使式 (38) 的絕對值拆解後， D_{ab} 的下界為正值或零。式 (54) 與 (55) 藉由新增二元變數 δ_{ab} ，用來決定 D_{ab} 的上界，其邏輯判斷式為若式 (38) 的絕對值內數值大於零，則 $\delta_{ab} = 0$ ， D_{ab} 的上界為 $(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab}) - t_{ab}$ ；若式 (38) 的絕對值內數值小於零，則 $\delta_{ab} = 1$ ， D_{ab} 的上界為 $t_{ab} -$

$(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab})$ ；若式 (38) 的絕對值內數值等於零，則 $\delta_{ab} = 0$ 或 1 ， D_{ab} 的上界為零。

$$D_{ab} \geq \left(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab} \right) - t_{ab}, \forall (a, b) \in R \quad (52)$$

$$D_{ab} \geq t_{ab} - \left(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab} \right), \forall (a, b) \in R \quad (53)$$

$$D_{ab} \leq \left(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab} \right) - t_{ab} + M \times \delta_{ab}, \forall (a, b) \in R \quad (54)$$

$$D_{ab} \leq t_{ab} - \left(\sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} time_{ij} Y_{abijl} + \sum_{l \in L} \sum_{\{e \in L | l \neq e\}} \sum_{j \in N} \tau Z_{abjle} + p_{ab} W_{ab} \right) + M \times (1 - \delta_{ab}), \forall (a, b) \in R \quad (55)$$

式 (39) 轉換為式 (56) 至式 (60)。式 (56) 與 (57) 藉由新增二元變數 θ_{ab} ，用來判斷 $\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right)$ 的正負符號，其邏輯判斷式為若 $\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) \geq 0$ ，則 $\theta_{ab} = 1$ ；若 $\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) < 0$ ，則 $\theta_{ab} = 0$ 。式 (58) 至式 (60) 利用 θ_{ab} 決定 S_{ab}^2 的數值，其邏輯判斷式為若 $\theta_{ab} = 1$ ，則式 (58) 表示 $S_{ab}^2 \leq M$ ，式 (59) 與 (60) 表示 $S_{ab}^2 = \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right)$ ，所以 $S_{ab}^2 = \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right)$ ；若 $\theta_{ab} = 0$ ，則式 (58) 表示 $S_{ab}^2 \leq 0$ ，式 (59) 與 (60) 表示 $-M + \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) \leq S_{ab}^2 \leq M + \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right)$ ，所以 $S_{ab}^2 = 0$ 。

$$\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) \leq (1 + \varepsilon)\theta_{ab} - \varepsilon, \forall (a, b) \in R \quad (56)$$

$$\left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) \geq -M \times (1 - \theta_{ab}), \forall (a, b) \in R \quad (57)$$

$$S_{ab}^2 \leq M \times \theta_{ab}, \forall (a, b) \in R \quad (58)$$

$$S_{ab}^2 - \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) + M \times \theta_{ab} \leq M, \forall (a, b) \in R \quad (59)$$

$$S_{ab}^2 - \left(1 - \frac{D_{ab}}{t_{ab}}\right) - M \times \theta_{ab} \geq -M, \forall (a, b) \in R \quad (60)$$

式 (61) 與 (62) 為非線性轉換為線性數學模式所使用之變數定義限制式。

$$\delta_{ab} = \{0,1\}, \forall (a, b) \in R \quad (61)$$

$$\theta_{ab} = \{0,1\}, \forall (a, b) \in R \quad (62)$$

本研究為提高求解的效率乃使用集合分割法將原數學模式進行改寫。首先，本研究列舉出所有公車路線的可行路徑，包含與原公車路線一致的出發站點與折返站點，以及排除超過單一路線總長度限制與經過封閉路段的路線，並將其整理至新增加的兩個集合裡。 B_{ln}^A 為路網調整後路線 l 的公車路徑 n 之節線集合，其元素以 (i, j) 表示； B_{ln}^N 為路網調整後路線 l 的公車路徑 n 之節點集合，其元素以 i 表示。此兩集合的每條路線的最後一條公車路徑為空集合，表示路線被刪減的情況。其次，新增二元變數 λ_{ln} ，決定在調整後路網上，路線 l 是否使用公車路徑 n 來當作該路線的走法，1 代表是，0 代表否。由於所有公車路線的可行路徑已被列舉出來，因此原模式的公車服務路線限制式 (式 (3) 至式 (12)) 將全部被刪除，取而代之的是增加式 (63) 與 (64)，式 (63) 表示每條公車路線 l 皆要在公車路徑 n 中挑選出一條來當作該路線的走法。式 (64) 表示調整後路網上至少須存在一條公車路線。其中， f_l 為路網調整後路線 l 的總公車路徑數目， n^{line} 為路網調整前的總公車路線數目。

$$\sum_{n=1}^{f_l} \lambda_{ln} = 1, \forall l \in L \quad (63)$$

$$\sum_{l \in L} \lambda_{lf_l} \leq n^{line} - 1 \quad (64)$$

另外，在節點連通性限制式方面，刪除式 (13) 至式 (16)，取而代之的是增加式 (65) 至式 (68)，包含新增二元變數 I_{iln} ，表示在調整後的路網上，節點 i 是否在路線 l 的公車路徑 n 之二元變數，1 代表是，0 代表否。式 (65) 與 (66) 用來判斷節點 i 是否在公車路線 l 的公車路徑 n 上，其邏輯判斷式為若節點 i 在節點集合 B_{ln}^N 裡，且 $\lambda_{ln} = 1$ ，則 $I_{iln} = 1$ ；若節點 i 在節點集合 B_{ln}^N 裡，但 $\lambda_{ln} = 0$ ，則 $I_{iln} = 0$ ；若節點 i 不在節點集合 B_{ln}^N 裡，則無論 λ_{ln} 是 0 或 1， I_{iln} 均為 0。式 (67) 與 (68) 用來判斷節點 i 是否在調整後的路網上，其邏輯判斷式為若 $\sum_{l \in L} \sum_{n=1}^{f_l} I_{iln} \geq 1$ ，表示節點 i 至少在其中一條公車路線上，則 $H_i = 1$ ；若 $\sum_{l \in L} \sum_{n=1}^{f_l} I_{iln} = 0$ ，表示節點 i 不在任何公車路線上，則 $H_i = 0$ 。

$$\lambda_{ln} = I_{ltn}, \forall l \in L, n \in \{1, \dots, f_l\}, i \in B_{ln}^N \quad (65)$$

$$I_{iln} = 0, \forall l \in L, n \in \{1, \dots, f_l\}, i \in N \setminus B_{ln}^N \quad (66)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{n=1}^{f_l} I_{ltn} - 1 \leq -\varepsilon + (M + \varepsilon)H_i, \forall i \in N \quad (67)$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{n=1}^{f_l} I_{iln} \geq H_i, \forall i \in N \quad (68)$$

在乘客移動路徑限制式方面，刪除式 (19)，取而代之的是增加式 (69)，表示新增的二元變數 λ_{ln} 與 Y_{abijl} 的關係，其邏輯判斷式為若 $\lambda_{ln} = 1$ ，表示路線 l 使用公車路徑 n 來當作該路線的走法，則對於每一組起訖對 (a, b) 而言，凡是 $(i, j) \in A \setminus B_{ln}^A$ ，即不屬於該路線 l 的公車路徑 n 之節線，其 Y_{abijl} 均為 0；若 $\lambda_{ln} = 0$ ，表示路線 l 沒有使用公車路徑 n 來當作該路線的走法，則對於每一組起訖對 (a, b) 而言，無論節線 (i, j) 是否屬於該路線 l 的公車路徑 n ，其 Y_{abijl} 均可為 0 或 1。在消除子迴圈限制式方面，由於所有公車路線的可行路徑已被列舉出來，且無公車服務路線之子迴圈，故刪除式 (29) 至式 (31)。其餘限制式因無涉及原變數 X_{ijl} ，因此均維持不變。而式 (70) 與 (71) 為集合分割法所新增之變數定義限制式。

本研究使用集合分割法所改寫的數學模式與原數學模式 (1) 至 (37)，及 (40) 至 (62) 為等價，因此後續皆採用集合分割法所改寫的數學模式進行求解，全部整理為式 (1)、(2)、(17)、(18)、(20) 至 (28)、(32) 至 (37)，以及 (40) 至 (71)。

$$\lambda_{ln} + Y_{abijl} - 1 \leq 0, \forall l \in L, n \in \{1, \dots, f_l\}, (i, j) \in A \setminus B_{ln}^A, (a, b) \in R \quad (69)$$

$$\lambda_{ln} = \{0, 1\}, \forall l \in L, n \in \{1, \dots, f_l\} \quad (70)$$

$$I_{iln} = \{0, 1\}, \forall l \in L, n \in \{1, \dots, f_l\}, i \in N \quad (71)$$

本研究採用增強型 ε -限制式法 (Augmented ε -Constraint Method) 求解多目標問題 (Mavrotas^[12])，其步驟簡述如下，首先，使用 Lexicographic Optimization 建立償付表，表中包含最大化路網相似度 (f_1) 與最小化標準化後旅行時間 (f_2) 下的各目標函數值；其次，計算此兩個目標函數的限制範圍；再者，本研究以路網相似度 (f_1) 為主要目標式，標準化後旅行時間 (f_2) 放入限制式中，將多目標問題轉換為單一目標問題，並計算標準化後旅行時間 (f_2) 的限制範圍 ε_r ；最後，求解不同權重之子問題以產生多個 Pareto 最佳解，並且形成一條 Pareto 前緣線，線上的點均互相權衡，即沒有任何一點能滿足所有的目標函數，因此須結合決策者的偏好資訊做最滿意的選擇，本研究採模糊方法 (Fuzzy Approach) 處理決策者在多目標規劃的最滿意方案 (Du et al.^[13]; Nezhad et al.^[14])。

4.1 測試案例

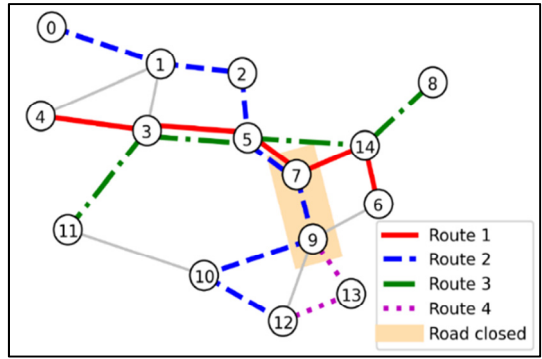


圖 2 本研究測試案例之公車路網圖

在求解結果方面，表 2 為償付表，表中的兩列分別代表在單一目標式下的各目標函數值，用來計算各目標函數的限制範圍，並以此計算 ε_r 值後，代入本模式求得 Pareto 最佳解。表 3 為 Pareto 最佳解結果，共產生 20 個解，每個解的求解時間均落在 5 分鐘上下，且其 Gap 皆趨近於 0。圖 5 為兩目標值之比較圖，由圖中可發現，隨著點編號增加，路網相似度 (f_1) 與標準化後旅行時間 (f_2) 的數值皆會遞減，表示路網相似度會越來越差，然而，標準化後旅行時間卻會越來越好，說明此兩個目標式是互相有衝突的，亦說明本研究是適合採用多目標規劃的求解方法來求解此問題。

表 1 本研究測試案例之參數設定

參數符號	解 釋	數 值
α	路線相似度的權重	0.5
β	旅行時間相似度的權重	0.5
d_l	路網調整後路線 l 的出發站節點	Route 1: 4、Route 2: 0、Route 3: 11，以及 Route 4: 12。
$dist_{ij}$	節點 i 至節點 j 的距離	假設公車速限為每小時 40 公里，兩節點距離則依照此速率轉換。
ε	極小容忍值	10^{-5}
f_l	路網調整後路線 l 的總公車路徑數目	Route 1: 9、Route 2: 7、Route 3: 6，及 Route 4: 4。
g_l	路網調整後路線 l 的折返節點	Route 1: 6、Route 2: 12、Route 3: 8，及 Route 4: 9。
M	極大值	10^5
max^{dist}	單一路線的最大行駛距離	46 (Chu ^[16])
max^t	單一路線的最大行經節線個數	26
n^{grid}	對標準化後旅行時間(f_2)所劃分的網格數	20
n_{ab}^{link}	路網調整前起訖對(a, b)的行經節線個數	假設路網調整前，所有起訖對皆採用最短旅行時間之路經，其行經節線個數如圖 3 所示。
n^{line}	路網調整前的總公車路線數目	4
ω	乘客路徑的最大轉乘次數限制	2
p_{ab}	路網調整後起訖對(a, b)未被服務之懲罰值	計算方式為起訖對(a, b)中，乘客所有可行路徑之總旅行時間最高者的 1.05 倍，如圖 4 所示。該倍數需大於 1 以使模式儘可能服務最多的乘客，但此值不宜過高，以免影響求解效率。
q_{ab}	起訖對(a, b)的需求量，並且標準化成 0 至 1 的數值	原起訖對需求量(Mandl ^[15] (1979)公車路網)，並將其標準化成 0 至 1 的數值。
t_{ab}	路網調整前起訖對(a, b)的旅行時間	假設路網調整前，所有起訖對皆採用最短旅行時間之路經，其旅行時間如圖 3 所示。
$time_{ij}$	節點 i 至節點 j 的旅行時間	如圖 1 所示。
τ	路線轉乘等待時間	假設公車班距為 20 分鐘，公車路線轉乘時間為兩條公車路線班距平均的二分之一，即 10 分鐘。
(w^1, w^2)	分別為路線相似度(f_1)與標準化後旅行時間(f_2)的權重	分為(0.9,0.1)、(0.75,0.25)，以及(0.5,0.5)三種權重進行探討。

OD	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-	8(1)	10(2)	27(4)	31(5)	13(3)	29(6)	15(4)	34(5)	23(5)	28(6)	37(5)	33(7)	-	-
1	8(1)	-	2(1)	19(3)	23(4)	5(2)	21(5)	7(3)	26(4)	15(4)	20(5)	29(4)	25(6)	33(5)	-
2	10(2)	2(1)	-	17(2)	21(3)	3(1)	19(4)	5(2)	24(3)	13(3)	18(4)	27(3)	23(5)	31(4)	-
3	27(4)	19(3)	17(2)	-	4(1)	4(1)	10(4)	6(2)	15(3)	24(3)	29(4)	10(1)	34(5)	42(4)	-
4	31(5)	23(4)	21(3)	4(1)	-	8(2)	14(5)	10(3)	29(4)	28(4)	33(5)	24(2)	38(6)	-	-
5	13(3)	5(2)	3(1)	4(1)	8(2)	-	6(3)	2(1)	11(2)	10(2)	15(3)	14(2)	20(4)	28(3)	-
6	29(6)	21(5)	19(4)	10(4)	14(5)	6(3)	-	4(2)	20(2)	23(3)	27(4)	29(4)	32(5)	40(4)	-
7	15(4)	7(3)	5(2)	6(2)	10(3)	2(1)	4(2)	-	20(2)	8(1)	13(2)	26(3)	18(3)	26(2)	-
8	34(5)	26(4)	24(3)	15(3)	20(4)	11(2)	20(2)	20(2)	-	34(4)	34(5)	25(4)	-	-	-
9	23(5)	15(4)	13(3)	24(3)	26(4)	10(2)	22(3)	8(1)	31(4)	-	5(1)	34(4)	10(2)	8(1)	-
10	28(6)	20(5)	18(4)	29(4)	33(5)	15(3)	27(4)	13(2)	36(5)	5(1)	-	38(5)	5(1)	17(2)	-
11	37(5)	29(4)	27(3)	10(1)	24(2)	14(2)	29(4)	20(3)	25(4)	34(4)	39(5)	-	44(6)	-	-
12	33(7)	25(6)	23(5)	34(5)	38(6)	20(4)	32(5)	18(3)	-	10(2)	5(1)	44(6)	-	2(1)	-
13	-	33(5)	31(4)	42(4)	-	28(3)	40(4)	26(2)	-	8(1)	17(2)	-	2(1)	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

OD	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-	8(1)	10(2)	27(4)	31(5)	13(3)	29(6)	15(4)	34(5)	23(5)	28(6)	37(5)	33(7)	-	-
1	8(1)	-	2(1)	19(3)	23(4)	5(2)	21(5)	7(3)	26(4)	15(4)	20(5)	29(4)	25(6)	33(5)	-
2	10(2)	2(1)	-	17(2)	21(3)	3(1)	19(4)	5(2)	24(3)	13(3)	18(4)	27(3)	23(5)	31(4)	-
3	27(4)	19(3)	17(2)	-	4(1)	4(1)	10(4)	6(2)	15(3)	24(3)	29(4)	10(1)	34(5)	42(4)	-
4	31(5)	23(4)	21(3)	4(1)	-	8(2)	14(5)	10(3)	29(4)	28(4)	33(5)	24(2)	38(6)	-	-
5	13(3)	5(2)	3(1)	4(1)	8(2)	-	6(3)	2(1)	11(2)	10(2)	15(3)	14(2)	20(4)	28(3)	-
6	29(6)	21(5)	19(4)	10(4)	14(5)	6(3)	-	4(2)	20(2)	23(3)	27(4)	29(4)	32(5)	40(4)	-
7	15(4)	7(3)	5(2)	6(2)	10(3)	2(1)	4(2)	-	20(2)	8(1)	13(2)	26(3)	18(3)	26(2)	-
8	34(5)	26(4)	24(3)	15(3)	20(4)	11(2)	20(2)	20(2)	-	34(4)	34(5)	25(4)	-	-	-
9	23(5)	15(4)	13(3)	24(3)	26(4)	10(2)	22(3)	8(1)	31(4)	-	5(1)	34(4)	10(2)	8(1)	-
10	28(6)	20(5)	18(4)	29(4)	33(5)	15(3)	27(4)	13(2)	36(5)	5(1)	-	38(5)	5(1)	17(2)	-
11	37(5)	29(4)	27(3)	10(1)	24(2)	14(2)	29(4)	20(3)	25(4)	34(4)	39(5)	-	44(6)	-	-
12	33(7)	25(6)	23(5)	34(5)	38(6)	20(4)	32(5)	18(3)	-	10(2)	5(1)	44(6)	-	2(1)	-
13	-	33(5)	31(4)	42(4)	-	28(3)	40(4)	26(2)	-	8(1)	17(2)	-	2(1)	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

圖 3 測試案例之路網調整前起訖對的旅行時間與經過節線個數

圖 4 測試案例之起訖對未被服務懲罰值

圖 6 為 Pareto 前緣線，共產生 20 個點，路網相似度介於 13.44 至 14.59 間，標準化後旅行時間則介於 6150.64 至 6591.1 間。由表 3 與圖 6 可知，以任意兩個解進行比較，當一方的路網相似度 (f_1) 較好時，另一方的標準化後旅行時間 (f_2) 則會較好，因此不存在一個解在兩個目標式皆為最佳，即無法在不損及一方的情況下，使另一方的結果更好，此結果符合多目標規劃的 Pareto 最佳解特性，說明本模式藉由多目標規劃求解方法所得到的解是合理的。圖 7 為不同權重下 Pareto 最佳解的整體隸屬函數變化圖，線的最高點代表在該權重下該點為決策者最好的結果，由圖可知， $(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$ 為第 1 點，路網相似度為 14.59，標準化後旅行時間為 6591.1，求解時間為 241 秒，調整後的公車路網如圖 8 所示； $(w^1, w^2) = (0.75, 0.25)$ 為第 4 點，路網相似度為 14.52，標準化後旅行時間為 6508.67，求解時間為 250 秒，調整後的公車路網如圖 9 所示； $(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)$ 為第 17 點，路網相似度為 14.01，標準化後旅行時間為 6219.37，求解時間為 261 秒，調整後的公車路網如圖 10 所示。表 4 為此三種權重下的求解結果。

在 $(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$ 下，受到封閉路段 (7, 9) 的影響，因此 Route 2 改行駛路段 (7, 14)、(14, 6) 與 (6, 9)，其餘路線維持原本的走法，說明在此權重下，只調整受影響路段的效果為最好；在 $(w^1, w^2) = (0.75, 0.25)$ 下，受到封閉路段影響，Route 2 會調整成 (7, 14)、(14, 6) 與 (6, 9)，此部分與上述權重結果一致，但其他不同之處在於 Route 3 不行駛路段 (5, 14)，而改行駛 (5, 7) 與 (7, 14)，雖然路網相似度會從 14.59 降至 14.52，但標準化後旅行時間卻能從 6591.1 減少至 6508.67，說明犧牲一小部分路網相似度的效用，卻能讓標準化後旅行時間有明顯的變好，使得在此權重下，此路網調整方案對決策者是最好的選擇；在 $(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)$ 下，受到封閉路段影響，Route 2 不行駛封閉路段 (7, 9)，改行駛路段 (7, 14)、(14, 6) 與 (6, 9)，以及 Route 3 不行駛路段 (5, 14)，而改行駛 (5, 7) 與 (7, 14)，此部分與上述權重結果一致，但其他不同之處在於 Route 3 不行駛路段 (3, 5)，而改行駛 (3, 1)、(1, 2) 與 (2, 5)、Route 2 不行駛 (9, 10) 與 (10, 12)，改行駛 (9, 13) 與 (13, 12)，以及 Route 4 不行駛 (12, 13) 與 (13, 9)，改行駛 (12, 10) 與 (10, 9)，會形成如此大的變動乃因為可讓乘客的旅行時間更有效率，使得在此權重下的整體隸屬函數值為最大，表示此路線調整方案對決策者是最滿意的結果。

表 2 測試案例之償付表

	f_1	f_2
$\max f_1$	14.59	6591.1
$\min f_2$	13.43	6150.64

表 3 測試案例之 Pareto 最佳解結果

點編號	ε_r	f_1	f_2	求解時間(秒)	Gap (%)
1	6591.1	14.59	6591.1	241	0.0
2	6567.92	14.53	6558.67	259	0.0
3	6544.74	14.52	6533.67	249	0.01
4	6521.56	14.52	6508.67	249	0.0
5	6498.37	14.47	6498.15	266	0.0
6	6475.19	14.39	6474.13	298	0.01
7	6452.01	14.38	6437.37	267	0.01
8	6428.83	14.37	6422.96	281	0.0
9	6405.64	14.36	6405.14	282	0.0
10	6382.46	14.35	6382.46	241	0.0
11	6359.28	14.3	6357.58	271	0.01
12	6336.1	14.29	6335.24	240	0.01
13	6312.91	14.25	6312.31	242	0.0
14	6289.73	14.19	6288.84	248	0.0
15	6266.55	14.09	6266.39	260	0.0
16	6243.37	14.06	6241.99	277	0.0
17	6220.18	14.01	6219.37	261	0.0
18	6197	13.95	6196.88	253	0.0
19	6173.82	13.83	6173	272	0.0
20	6150.64	13.44	6150.64	236	0.0

與原本公車路網比較，路線數目均維持 4 條，且與原本公車服務站點皆相同；在總路線長度方面，在 $(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$ 與 $(0.75, 0.25)$ 下，公車路網多行駛 4 公里，而 $(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)$ 的公車路網則多行駛 8 公里；在經過路段數方面， $(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$ 的公車路網減少行經 2 個路段，新增 2 個路段， $(w^1, w^2) = (0.75, 0.25)$ 的公車路網減少行經 4 個路段，新增 2 個路段，而 $(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)$ 的公車路網則減少行經 4 個路段，新增 4 個路段；在三種權重的公車路網下，其未被服務需求率皆為 0%；由上述路網調整結果可發現，隨著標準化後旅行時間 (f_2) 權重增加，公車路網的調整變動也增加，包含公車

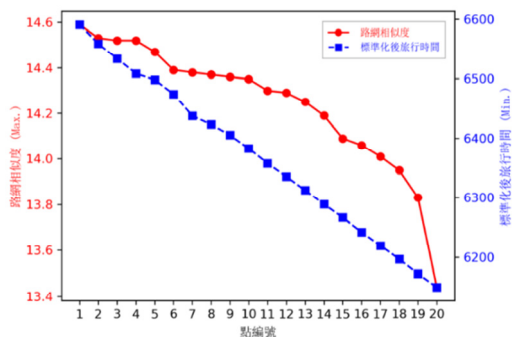


圖 5 測試案例之兩目標值比較圖

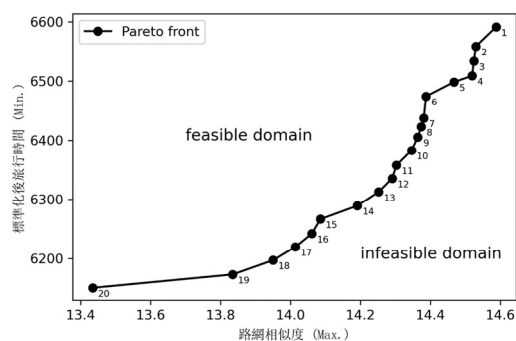


圖 6 測試案例之 Pareto 前緣線

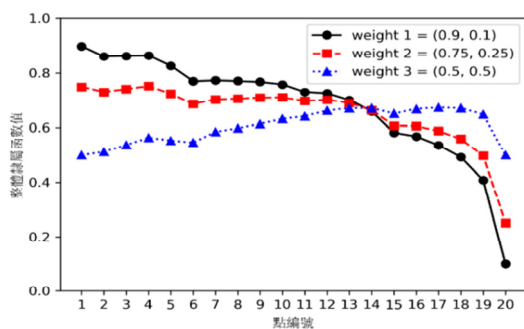


圖 7 測試案例於不同權重下 Pareto 最佳解的整體隸屬函數變化圖

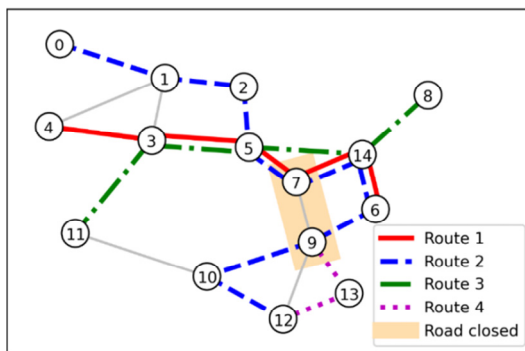


圖 8 測試案例於 $(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$ 下的公車路網圖

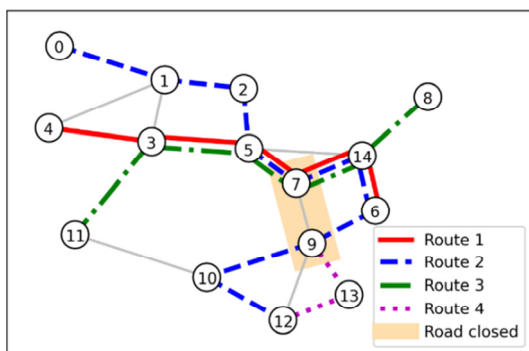


圖 9 測試案例於 $(w^1, w^2) = (0.75, 0.25)$ 下的公車路網圖

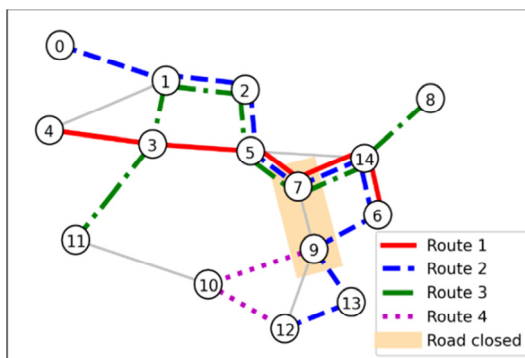


圖 10 測試案例於 $(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)$ 下的公車路網圖

表 4 測試案例於不同權重下之求解結果

	原公車路網	(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)	(w^1, w^2) = (0.75, 0.25)	(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)
目標式				
點編號	—	1	4	17
ε_r	—	6591.1	6521.56	6220.18
路網 相似度	—	14.59	14.52	14.01
標準化後旅 行時間	—	6591.1	6508.67	6219.37
求解時間 (秒)	—	241	250	261
Gap (%)	—	0	0	0
公車路線				
Route 1	4-3-5-7-14-6-1 4-7-5-3-4	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3 -4	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3 -4	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3 -4
Route 2	0-1-2-5-7-9-10 -12-10-9-7-5-2 -1-0	0-1-2-5-7-14-6-9-10-1 2-10-9-6-14-7-5-2-1-0	0-1-2-5-7-14-6-9-10-1 2-10-9-6-14-7-5-2-1-0	0-1-2-5-7-14-6-9-13-1 2-13-9-6-14-7-5-2-1-0
Route 3	11-3-5-14-8-1 4-5-3-11	11-3-5-14-8-14-5-3-11	11-3-5-7-14-8-14-7-5- 3-11	11-3-1-2-5-7-14-8-14- 7-5-2-1-3-11
Route 4	12-13-9-13-12	12-13-9-13-12	12-13-9-13-12	12-10-9-10-12
其他資訊				
路線數目	4	4	4	4
總路線 長度	104	108	108	112
服務站 點數	15	15	15	15
相同	—	15	15	15
減少	—	0	0	0
新增	—	0	0	0
經過 路段數	32	32	30	32
相同	—	30	28	28
減少	—	2	4	4
新增	—	2	2	4
未被服務需 求率	0%	0%	0%	0%

行經的路段增減，以及公車總路線長度等。

在目標函數權衡取捨方面，若決策者明確知道目標函數的權重，則依照圖 7 的整體隸屬函數變化，找出數值最高與其他數值相近的點進行比較；若決策者不確定目標函數的權重，則可於模糊方法中嘗試使用不同的權重，並搭配一些決策者的資訊，如路線調整成本、路網上的業者多寡等資訊，可從中比較各自最高點方案的利弊得失，做為決定最終的選擇方案。

在模式驗證方面，Route 1 有 9 種可行公車路線走法，Route 2 有 7 種可行公車路線走法，Route 3 有 6 種可行公車路線走法，Route 4 有 4 種可行公車路線走法，因此共有 $9 \times 7 \times 6 \times 4 - 1 = 1511$ 種公車路網調整走法，數目減 1 為排除全部公車路線皆被刪減的情況。本研究為簡化驗證流程，僅以封閉路段所在的 Route 2 進行調整，Route 1、Route 3 與 Route 4 維持原本情況，符合一般人為主觀經驗上的局部路線調整，此 7 種調整方案如表 5 所示；另在乘客路徑選擇方面，假設乘客會選擇最短旅行時間的路徑，符合一般乘客的路徑選擇思維。根據上述計算出路網相似度 (f_1) 與標準化後旅行時間 (f_2) 兩目標函數值，以及三種權重下的整體隸屬函數值 (θ^r)，並與模式得到的結果比較，進一步驗證本模式的有效性。權重下的整體隸屬函數值 (θ^r)，並與模式得到的結果比較，進一步驗證本模式的有效性。

表 5 測試案例之驗證路線說明

	Route 1	Route 2	Route 3	Route 4
方案 1	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	0-1-2-5-7-14-6-9-10-12-10-9-6-14-7-5-2-1-0	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12
方案 2	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	0-1-2-5-7-14-6-9-12-9-6-14-7-5-2-1-0	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12
方案 3	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	0-1-2-5-7-14-6-9-13-12-13-9-6-14-7-5-2-1-0	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12
方案 4	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	0-1-2-5-14-6-9-10-12-10-9-6-14-5-2-1-0	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12
方案 5	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	0-1-2-5-14-6-9-12-9-6-14-5-2-1-0	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12
方案 6	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	0-1-2-5-14-6-9-13-12-13-9-6-14-5-2-1-0	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12
方案 7	4-3-5-7-14-6-14-7-5-3-4	x	11-3-5-14-8-14-5-3-11	12-13-9-13-12

模式驗證結果如表 6 所示，路網相似度 (f_1) 以方案 1 最好，標準化後旅行時間 (f_2) 以方案 1 和方案 4 最好，另由於大部分目標函數值與原模式數值差異甚大，因此隸屬函數值為 0。在三種不同權重下，皆以本模式得到的整體隸屬函數值最好，即為最佳的公車路網調整方案，雖然在 $(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$ 下，方案 1 與本模式得到之公車路網一致，但由於本模式是兼顧最大化路網相似度與最小化標準化後旅行時間，而方案 1 僅是最小化乘客

表 6 測試案例之驗證結果

	f_1	f_2	θ_1^r	θ_2^r	θ^r
$(w^1, w^2) = (0.9, 0.1)$					
方案 1	13.99	6549.71	0.48	0.09	0.44
方案 2	11.44	10565.41	0	0	0
方案 3	11.72	10194.32	0	0	0
方案 4	12.32	6787.63	0	0	0
方案 5	10.12	10782.74	0	0	0
方案 6	10.4	10411.65	0	0	0
方案 7	3.19	29715.62	0	0	0
本模式之公車路網 (圖 8)	14.59	6591.1	1.0	0	0.9
$(w^1, w^2) = (0.75, 0.25)$					
方案 1	13.99	6549.71	0.48	0.09	0.38
方案 2	11.44	10565.41	0	0	0
方案 3	11.72	10194.32	0	0	0
方案 4	12.32	6787.63	0	0	0
方案 5	10.12	10782.74	0	0	0
方案 6	10.4	10411.65	0	0	0
方案 7	3.19	29715.62	0	0	0
本模式之公車路網 (圖 9)	14.52	6508.67	0.94	0.19	0.75
$(w^1, w^2) = (0.5, 0.5)$					
方案 1	13.99	6549.71	0.48	0.09	0.29
方案 2	11.44	10565.41	0	0	0
方案 3	11.72	10194.32	0	0	0
方案 4	12.32	6787.63	0	0	0
方案 5	10.12	10782.74	0	0	0
方案 6	10.4	10411.65	0	0	0
方案 7	3.19	29715.62	0	0	0
本模式之公車路網 (圖 10)	14.01	6219.37	0.5	0.84	0.67

旅行時間，因此兩者在乘客路徑選擇上有所不同，結果顯示本模式的調整走法優於方案 1，說明本模式具有良好的成效；另外，在其他兩種權重下，由於本模式得到之公車路網與 7 種方案皆不同，因此可說明本模式產生之結果比只有調整受封閉路段影響的路線更加有效。

五、結論與建議

5.1 結論

1. 本研究提出一適用於臨時性公車路網調整的多目標混合整數線性規劃模式，有助於規劃者在公車營運面臨特殊事件或活動時必須進行公車路網調整之參考，相較於目前實務上乃依賴規劃者的主觀經驗作為判斷標準，或者僅局部路線檢討調整，而非以整體路網為考量。
2. 本研究提出路網相似度的概念，描述路網調整後與原本路網的相似程度，並且給予一個量化的計算標準，包含以整體路網結構為觀點的路線相似度，以及以既有乘客旅行時間為觀點的旅行時間相似度；另外，本研究為考量既有乘客的服務水準，亦於目標式中納入標準化後旅行時間，以避免乘客的旅行時間有增加太多的情形。
3. 本研究採用多目標規劃之增強型 ϵ -限制式法求解，不同於過去研究使用權重而將多目標函數結合為單目標函數求解，所導致決策者有目標式單位不一致、權重的訂定，以及不同目標的權衡取舍等問題，本研究的多目標規劃求解方法可同時考量兩個不同的目標，並且可讓決策者觀察兩衝突目標的權衡取舍，以制定更加符合實際情況的路網調整方案。
4. 本研究的結果可供規劃者於實務上調整的建議，例如以模糊方法決定決策者最滿意的調整方案時，標準化後旅行時間的權重不宜設定過大，避免路網有過大的變動，以至於偏離路網調整的初衷；調整時應納入封閉路段附近的公車路線，而非僅考量受封閉路段影響的局部性路線，才能有較好的調整績效。

5.2 建議

1. 在目前測試案例的規模下，單一 Pareto 解可使用數學規劃求解軟體得到最佳解，有助於取得合理的多目標規劃結果。唯經過測試後發現隨著公車路網或是封閉路段範圍的擴大，求解時間將會明顯增加，建議未來可進一步發展啟發式演算法加速問題求解的效率。
2. 本研究目前僅著重在臨時性公車路網的調整上，建議未來研究可加入班次調整於模式中，讓臨時性的公車調整課題能更臻完善。
3. 本研究之重點為模式建構與求解驗證，結果顯示研究方法具合理性與有效性。後續可再進一步與實務作法進行比較，以及實務應用時執行面與法規面的檢討。

參考文獻

1. Ceder, A., & Wilson, N. H. M., "Bus Network Design", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.20, No.4, 1986, pp.331-344.
2. Ceder, A., "Operational Objective Functions in Designing Public Transport Routes", *Journal of Advanced Transportation*, Vol.35, No.2, 2001, pp.125-144.
3. Amiripour, S. M. M., Mohaymany, A. S., & Ceder, A. A., "Optimal Modification of Urban Bus Network Routes Using A Genetic Algorithm", *Journal of Transportation Engineering*, Vol.141, No.3, 2015.
4. Guihaire V., & Hao, J. K., "Transit Network Design and Scheduling: A Global Review", *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol.42, No.10, 2008, pp.1251-1273.
5. Ibarra-Rojas, O. J., Delgado, F., Giesen, R., & Muñoz, J. C., "Planning, Operation, and Control of Bus Transport Systems: A Literature Review", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.77, 2015, pp.38-75.
6. Blum, J. J., & Mathew, T. V., "Implications Of The Computational Complexity Of Transit Route Network Redesign For Metaheuristic Optimisation Systems", *IET Intelligent Transport Systems*, Vol.6, No.2, pp.124-131.
7. Suman, H. K., & Bolia, N. B., "Improvement in Direct Bus Services through Route Planning", *Transport Policy*, Vol.81, 2019, pp.263-274.
8. Fan, W., & Machemehl, R. B., "Bi-Level Optimization Model for Public Transportation Network Redesign Problem: Accounting For Equity Issues", *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol.2263, No.1, pp.151-162.
9. Miettinen, K., *Nonlinear Multi-Objective Optimization*, Springer Science and Business Media, Boston, 1999.
10. Diwekar, U., *Introduction To Applied Optimization*, Springer Science and Business Media, 2003.
11. Rangaiah, G. P., *Multi-Objective Optimization: Techniques And Applications In Chemical Engineering*, World Scientific Publishing Company, 2009.
12. Mavrotas, G., "Effective Implementation of The E-Constraint Method In Multi-Objective Mathematical Programming Problems", *Applied Mathematics And Computation*, Vol.213, No.2, 2009, pp.455-465.
13. Du, Y., Xie, L., Liu, J., Wang, Y., Xu, Y., & Wang, S., "Multi-Objective Optimization of Reverse Osmosis Networks by Lexicographic Optimization and Augmented Epsilon Constraint Method", *Desalination*, Vol.333, Iss.1, 2014, pp.66-81.
14. Nezhad, A. E., Javadi, M. S., & Rahimi, E., "Applying Augmented E-Constraint Approach and Lexicographic Optimization to Solve Multi-Objective Hydrothermal Generation Scheduling Considering The Impacts of Pumped-Storage Units", *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Vol.55, 2014, pp.195-204.
15. Mandl, C. E., *Applied Network Optimization*, London: Academic Press, 1979.
16. Chu, J. C., "Mixed-Integer Programming Model and Branch-and-Price-and-Cut Algorithm for Urban Bus Network Design And Timetabling", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.108, 2018, pp.188-216.