

國立交通大學
運輸科技與管理學系碩士班

碩士論文

異質性LWR模式車流遲滯現象之研究

A study on traffic flow hysteresis phenomenon
of LWR model with heterogeneous drivers

研究生：蔡昆廷

指導教授：卓訓榮 教授

中華民國九十三年七月

異質性車流模式遲滯現象之研究

學生：蔡昆廷

指導教授：卓訓榮

國立交通大學運輸科技與管理研究所

摘 要

傳統車流理論中，速度與密度關係圖為一線性關係，當車流密度增加，相對的車流速度就減少；車流密度減少，車流速度就增加。而根據實際道路偵測器得到的車流密度與速度的資料，發現速度與密度關係之間具有遲滯現象，與傳統車流理論中的線性關係不符合，因此本研究加入了異質駕駛行為的特性，以符合實際車流情形，並探討速度與密度之關係。遲滯現象為車流中速度與密度的關係式在車流遇到路段瓶頸或交通衝突的時候，會有減速的過程，當瓶頸通過或衝突排除的時候，會有加速的過程，而減速與加速的過程在速度與密度的圖形上顯示為不同的路徑，形成所謂的迴圈，也就是遲滯現象。

因此本研究之重點在探討巨觀模式之 LWR 模式與微觀模式之 Car-following 理論中，加入了異質駕駛行為的特性之後是否具有車流遲滯現象的特性，並找出滿足的條件。

A study on traffic flow hysteresis phenomenon of LWR model with heterogeneous drivers

Student: Kun-Ting Tsai

Advisor: Hsun-Jung Cho

Institute of Transportation Technology & Management
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This paper presents an approach to analyze the traffic flow hysteresis phenomenon of LWR model and Car-following theory with heterogeneous drivers. In classical traffic flow theory, the relationship between speed and density is a linear function. That means one speed value corresponds to exactly one density value while the traffic condition is changing. According to real data of speed and density which were collected from the road detector during a time period, we found that the speed and density curves obtained following the hysteresis loops. The reason is that there are no exact the same human behavior between each other in real world. The analysis shows that when add the heterogeneous drive-behaviors characteristic into the LWR model and Car-following theory and will present the hysteresis loops on the curve of the relationship of speed and density.

致 謝

在交大校園生活了兩年，看著校園中樹木日漸茁壯，體驗風城風的傳奇，結識許多知心好友，今朝即將離去，有些感觸在心中久久無法釋懷。

本論文得以完成，首先感謝恩師 卓訓榮教授於授業期間對學生在研究激勵、觀念啟迪、方法傳授與文句修砌等方面給許許多多幫助，使學生受益匪淺而研究亦得以順利完成。

論文口試期間，感謝台灣大學許添本老師及所上吳水威老師撥冗細審，並惠賜寶貴意見，使本論文疏漏謬誤之處得以匡正。在論文計畫書及進度審查期間，感謝所上吳水威老師及韓復華老師細心審閱，並提供寶貴意見與謬誤指正。還要感謝所上張新立老師、張隆憲老師、吳水威老師在論文進度報告研討時所給予之指正與建議。

感謝兩年來，感謝博士班學長黃明崇學長、吳育婷學姊的關心協助與提供經驗，讓我在一開始加入這個團隊的時候不會有太大的壓力，而論文方面也承蒙兩位學長、姐的指導，還有生活起居上的照顧，以及在我不順利的時候適時的給予幫助與安慰，還要感謝同門杜寰、憲宏的患難與共，彼此砥礪互相提攜。此外亦還有同研究室學弟妹健綸、勛傑、韻竹、永平、黃恆、家銘以及又楨之協助與幫忙，讓我在畢業之時更感受了像家庭一般的溫暖。

感謝父母與大姐、姐夫、二姐、許大哥提供我一個無後顧之憂的讀書環境，在面臨論文壓力之下時時叮嚀，還有最可愛的外甥多多，有你們的支持與鼓勵，使得學生得以完成本篇論文，謝謝你們在研究過程中的關心與包容。

最後，僅將此篇論文獻給所有感謝的人，將這份榮耀與您們分享。

蔡 昆 廷 謹誌

中華民國九十三年七月 于風城 NCTU

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
致 謝.....	iii
圖目錄.....	vi
表目錄.....	viii

Ch1 緒論

1.1 研究動機.....	1
1.2 研究目的.....	1
1.3 研究範圍.....	2
1.4 研究方法與流程.....	3

Ch2 文獻回顧

2.1 遲滯現象理論回顧.....	6
2.1.1 遲滯現象理論回顧.....	6
2.1.2 什麼是遲滯現象.....	7
2.2 車流遲滯現象理論回顧.....	8

Ch3 LWR 模式

3.1 LWR 理論基礎.....	16
3.2 求解 LWR 方程式之有限差分法.....	17
3.3 分析過程.....	18
3.3.1 遲滯現象車流速度與密度關係圖分析.....	19
3.3.2 有限差分法求解分析.....	20
3.3.3 駕駛行為異質性之分析.....	21
3.3.4 加入異質特性之車流遲滯現象.....	23
3.3.5 三種等級駕駛人的情形.....	24
3.3.6 n 種等級駕駛人的情形.....	26

Ch4 Car-following 理論

4.1 同質性跟車理論之車流現象.....	27
4.1.1 車隊通過瓶頸路段過程.....	27
4.1.2 進入 j 輛車與離開 n-j 輛車狀態.....	30
4.1.3 車隊通過過程之分析.....	30
4.1.4 小結.....	32
4.2 異質性 Car-following 理論之車流現象.....	32

4.2.1 車隊通過瓶頸路段過程	33
4.2.2 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車狀態	36
4.2.3 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車車流密度	37
4.2.4 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車平均速度	38
4.2.5 範例證明	38
4.3 小結	41
Ch5 數值範例	
5.1 Car-following 理論基礎	43
5.1.1 GM model 取 $m=0, l=0$	43
5.1.2 車隊通過瓶頸路段過程	43
5.1.3 數值範例	45
5.1.4 模擬結果	46
5.2 GM model 取 $m=0, l=1$	49
5.2.1 GM model 取 $m=0, l=1$	49
5.2.2 模擬結果	50
5.3 GM model 取 $m=1, l=0$	53
5.3.1 GM model 取 $m=1, l=0$	53
5.3.2 模擬結果	54
5.4 GM model 取 $m=1, l=1$	57
5.4.1 GM model 取 $m=1, l=1$	57
5.4.2 模擬結果	58
5.5 小結	61
Ch6 結論與建議	
6.1 結論	62
6.2 建議	63
Reference	64

圖目錄

圖 1.1 研究流程圖.....	5
圖 2.1 電磁效應.....	6
圖 2.2 電力與磁力的關係圖.....	6
圖 2.3 加速與減速的反應曲線.....	7
圖 2.4 偵測器，偵測紀錄下車流的速度、密度的資料.....	8
圖 2.6 加速與減速過程形成的遲滯迴圈.....	9
圖 2.7 Treiterer 與 Myers 在 1974 年所發表遲滯迴圈.....	10
圖 2.8 均衡與非均衡的速度密度關係圖.....	10
圖 2.9 1999 年 Zhang 提出的遲滯迴圈.....	12
圖 2.10 2002 年 Wong 研究的異質性駕駛人遲滯現象.....	13
圖 2.11 不同等級駕駛人以自由流速度.....	13
圖 2.12 車流狀況分成了五種程度.....	14
圖 2.13 2003 年 Juang 的研究中車流密度與流量的遲滯現象.....	15
圖 3.1 利用 FDM 其中之顯示法的 Lax-F 來求解 LWR 之一階偏微分方程式.....	18
圖 3.2 密度變化的過程.....	19
圖 3.3 減速過程的車流密度與加速過程的車流密度.....	20
圖 3.4 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖.....	21
圖 3.5 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖.....	24
圖 3.6 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖.....	24
圖 3.7 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖.....	25
圖 4.1 一車隊 n 部車，每部車間距為 h	27
圖 4.2 車輛尚未進入瓶頸路段.....	27
圖 4.3 車隊中第一部車進入瓶頸路段.....	28
圖 4.4 車隊中前 $n-1$ 部車進入瓶頸路段.....	28

圖 4.5 車隊中所有車輛均進入瓶頸路段.....	29
圖 4.6 車隊中第一部車離開瓶頸路段.....	29
圖 4.7 車隊中前 $n-1$ 部車離開瓶頸路段.....	29
圖 4.8 車隊中所有車輛均離開瓶頸路段.....	30
圖 4.9 狀態一、狀態七與狀態四的速度與密度關係圖.....	31
圖 4.10 狀態二與狀態六的速度與密度關係圖.....	31
圖 4.11 狀態三與狀態五的速度與密度關係圖.....	32
圖 4.12 一車隊 n 部車, 每部車間距為 h	33
圖 4.13 車隊尚未進入瓶頸路段.....	33
圖 4.14 車隊中第一輛車進瓶頸路段.....	34
圖 4.15 車隊中第 $n-1$ 部車進入瓶頸路段.....	34
圖 4.16 車隊所有車輛進入瓶頸路段.....	35
圖 4.17 車隊中第一輛車離開瓶頸路段.....	35
圖 4.18 車隊中第 $n-1$ 部車離開瓶頸路段.....	36
圖 4.19 車隊所有車輛離開瓶頸路段.....	36
圖 4.20 進入 1 輛車與離開 9 輛車的車隊平均速度差值.....	40
圖 4.21 進入 2,3,...,9 輛車與離開 8,7,...,1 輛車的平均速度差值.....	41
圖 5.1 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=0, l=0$).....	47
圖 5.2 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=0, l=0$).....	48
圖 5.3 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=0, l=1$).....	51
圖 5.4 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=0, l=1$).....	52
圖 5.5 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=1, l=0$).....	55
圖 5.6 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=1, l=0$).....	56
圖 5.7 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=1, l=1$).....	59
圖 5.8 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=1, l=1$).....	60

表 目 錄

表 4.1 進入 j 輛車與離該 $n-j$ 輛車的平均速度與車流密度.....	37
表 4.2 進入 1 輛車與離開 9 輛車的平均速度與車流密度.....	38
表 4.3 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車之車間距.....	39
表 4.4 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車之平均速度.....	39
表 4.5 進入 2, 3, ..., 9 輛車的 Δu_{ave}	40
表 5.1 Vehicle n 的初始速度與感受程度.....	43
表 5.2 Vehicle 1~9 的初始速度與感受程度($m=0, l=0$).....	45
表 5.3 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的平均速度($m=0, l=0$).....	46
表 5.4 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的車流密度($m=0, l=0$).....	46
表 5.5 Vehicle 1~9 的初始速度與感受程度($m=0, l=1$).....	49
表 5.6 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的平均速度($m=0, l=1$).....	50
表 5.7 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的車流密度($m=0, l=1$).....	50
表 5.8 Vehicle 1~9 的初始速度與感受程度($m=1, l=0$).....	53
表 5.9 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的平均速度($m=1, l=0$).....	54
表 5.10 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的車流密度($m=1, l=0$).....	54
表 5.11 Vehicle 1~9 的初始速度與感受程度($m=1, l=1$).....	57
表 5.12 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的平均速度($m=1, l=1$).....	58
表 5.13 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的車流密度($m=1, l=1$).....	58

第一章 緒論

1.1 研究動機

車流理論中，車流的波動方程式最早是由 Lighthill 與 Whitham 在 1955 年時所提出，其理論是將流體力學中的流量守恆律應用在車流行為上。Lighthill 和 Whitham 以運動波的理論以及流量與密度間函數的關係，來解釋交通上的行為。1956 年時，Richards 也提出類似的理論，因此稱此模式為 LW 模式或 LWR 模式。由於氣體力學上所有的氣體粒子都視為相同的流體分子，因此在 LWR 車流模式中，將所有的駕駛人及駕駛行為視為完全相同，也就是說駕駛人具有同質性 (homogeneous)，然而這個假設與實際車流不符合，真實車流現象則是每位駕駛人與駕駛行為都大為不同，儘管非常相似，也不可能完全相同，也就是說駕駛人具有異質性 (heterogeneous)。因此 LWR 模式中的車流速度與密度關係圖與實際車流所偵測到的車流速度與密度關係圖也就不相同，前者速度與密度的關係為一對一 (one-to-one)，後者速度與密度的關係則具有“遲滯”現象。因此，本研究以 LWR 模式和 Car-following 理論為基本理論，分別為巨觀和微觀車流理論，加入異質性駕駛人的特性之後，以數學解析的方法來證明異質性駕駛人之 LWR 模式與 Car-following 理論可以證明車流具有遲滯反應的現象。

1.2 研究目的

車流行為的模式依著眼點的不同，可概分為巨觀 (Macroscopic) 與微觀 (Microscopic) 兩類。對巨觀車流模型 (Stream Model) 而言，在某一平均車流密度下，整條車流係以某一平均速度前進；對微觀的跟車模型 (Car-Following Model) 而言，在與前車保持某一空間間距 (Spacing) 下，駕駛者會以某一速率行駛。巨觀車流中的波動模型，即將車流行為視為一連續的流體，而利用流體具備流量守恆的特性與車流具備流量等於密度乘以速度 ($q = kv$) 的關係，推導出一階偏微分方程式；巨觀車流理論最重要的三個基本特性： q (流量)、 k (密度)、

u (速度)，觀察兩兩的關係可以得到 $q-k$ 、 $k-u$ 、 $q-u$ 的圖形，這些圖形將可以呈現出交通車流的現況，實際車流現象的 $q-k-u$ 圖形可以由交通偵測器測量得到，而車流遲滯現象可以由此三個圖形中明顯的觀察出來，就速度—密度圖形來說，LWR 理論中根據交通車流模式，將速度寫成密度的關係式，如 Greenshields 模式中的速度和密度是線性的關係： $u = u_m \left(1 - \frac{k}{k_m} \right)$ ，其中的 u_m 指的是自由車流速度（free flow speed）， k_m 指的是擁擠密度，在速度—密度圖形中為一個線性的曲線，每一個密度值都只對應到一個速度值；微觀的跟車模型（Car-Following Model）即是在與前車保持某一空間間距下，駕駛者會以某一速率行駛，當前車具有一個加速或減速的動作，產生了一個刺激(stimuli)，乘上駕駛者本身的感受(sensitivity)，即是駕駛者做出來的反應(responsibility)，其反應則為駕駛者的加速或減速的動作。

因此，本研究的研究目的如下：

1. 巨觀：加入異質性駕駛人之 LWR 模式是否具有車流遲滯現象。
2. 微觀：加入異質性駕駛人之 Car-following 理論是否具有車流遲滯現象。

1.3 研究範圍

本研究的研究範圍主要是探討 LWR 模式與 Car-following 理論中加入異質駕駛人的特性是否會有車流的遲滯現象，遲滯現象為車流中速度與密度的關係式在車流遇到路段瓶頸或交通衝突的時候，會有減速的過程，當瓶頸通過或衝突排除的時候，會有加速的過程，而減速與加速的過程在速度與密度的圖形上顯示為不同的路徑，形成所謂的迴圈(loop)，也就是遲滯現象，這是在實際車流行為中可以偵測出來的，但是同質性 LWR 與 Car-following 理論則無法解釋此遲滯現象，本研究在於得到加入異質性的 LWR 與 Car-following 理論中是否滿足車流遲滯現象的特性，並找出滿足的條件。

1.4 研究方法與流程

異質性 LWR 模式中，模式核心的重點就是駕駛人的行駛速度不僅受到自己的影響，還會因為其他駕駛人的行駛情況而受到影響，所以此研究最重要的地方就是速度與密度的關係式並非傳統的 LWR 所使用 Greenshield 模式中的速度與密度式單一線性的關係，而是受到所有駕駛人層級的密度的影響，本研究以數學解析的方式，將異質性 LWR 模式中，所得到的速度與密度關係式，分析滿足遲滯現象的條件，並判斷異質性 LWR 模式是否滿足車流具有“遲滯”現象，本研究以有限差分法(Finite Difference Method)為分析方法，證明遲滯現象是由於異質性造成的結果；異質性的 Car-following 理論以跟車模式為理論基礎，每個駕駛者都具有不同的感受(sensitivity)，當一個車隊進入到路段瓶頸或事故地點時，車隊會開始減速，直到通過瓶頸路段之後才會開始加速，後車的加減速度均滿足 Car-following 理論，根據前車做出不同的反應，然後探討整個車隊的平均速度與密度的關係，是否具有車流遲滯現象。

因此，本研究的研究步驟為：

1. 巨觀車流 LWR 模式中，車流速度與密度的觀察者固定一地點，當前方路段發生擁擠現象時，經過觀察者地點的車流密度與速度開始變化，首先探討只有兩輛車的情況，要使得車流先減速再加速的過程中，當車流密度相同時，若車隊平均速度不同則表示具有“遲滯”的現象。
2. 找出步驟 1 中速度不同的條件，接著在解此 LWR 模式之有限差分法中得到滿足步驟 1 中速度不同的條件的情況。
3. 同步驟 1 與 2，在 n 輛車的情況之下，找出具有遲滯現象的條件。
4. 同步驟 1 與 2，改變“平均速度”的定義，找出具有遲滯現象的條件。
5. 微觀車流 Car-following 理論中，車流速度與密度的觀察者隨著車隊移動而移動，首先探討一車隊若為同質性駕駛人，在通過一瓶頸路段時車

隊一開始先減速然後再加速的過程中，速度與密度的關係圖。

6. 同步驟 2，加入異質性駕駛人之後，探討車隊在通過一瓶頸路段時，先減速再加速的過程中速度與密度的關係圖。
7. 舉一範例，有 10 部車輛，每位駕駛人的感受(sensitivity)不同，根據 Car-following 理論，計算出通過瓶頸路段與離開瓶頸路段之車流速度與密度，繪圖得到密度與速度的變化情形。
8. 比較分析加入異質性駕駛人的 LWR 模式與 Car-following 理論所得到的結果，與同質性駕駛人所得到的情形是否有所不同。



本研究的研究流程如圖所示：

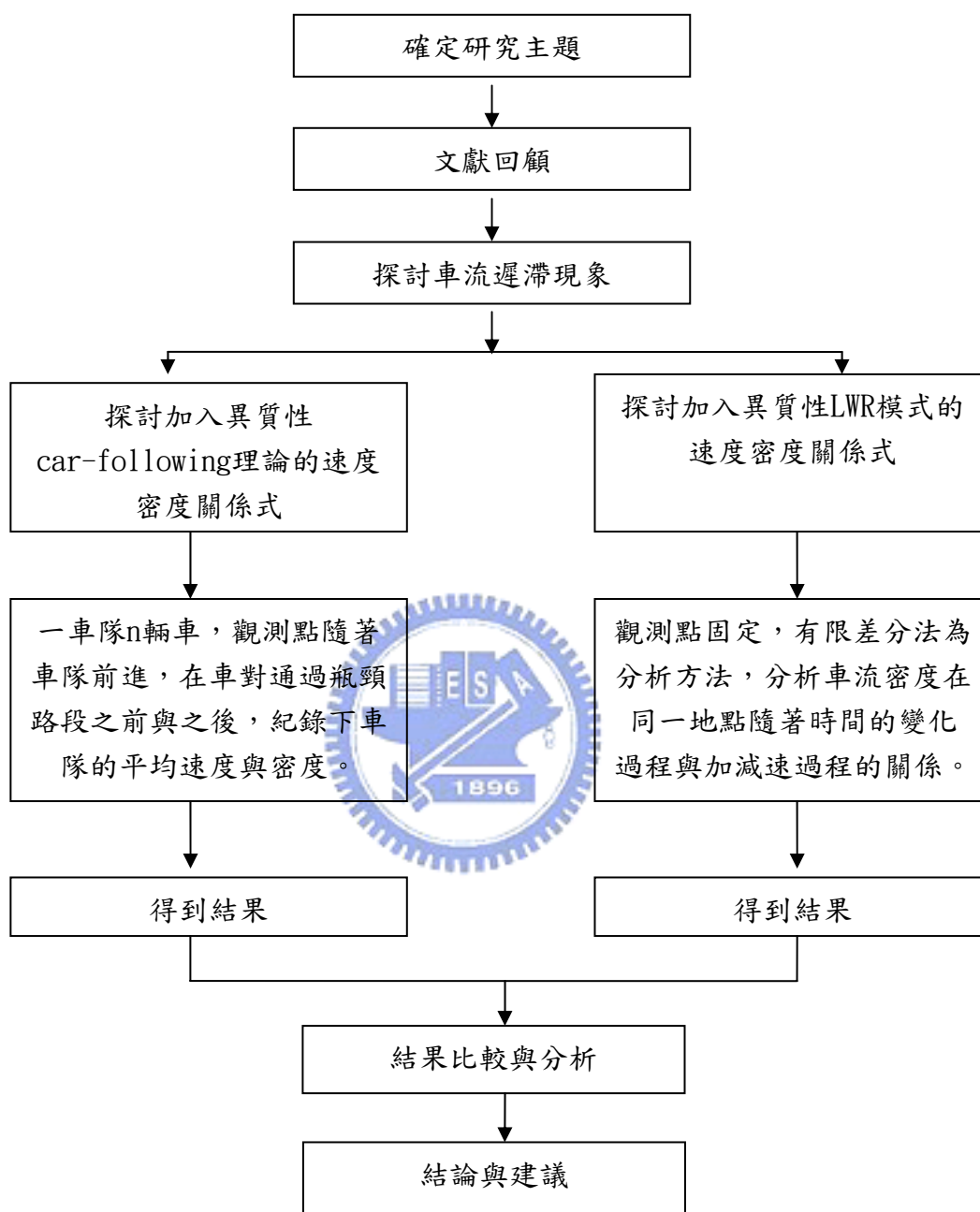


圖 1.1 研究流程圖

第二章 文獻回顧

2.1.1 遲滯現象理論之回顧

遲滯現象是自然界常見的現象，在工程應用上是極不易處理的問題，因此引起了很多研究者的興趣，也有許多假設和數學模型被提出。

在很多科學領域上都具有遲滯現象，例如電磁學、電子學、生物學、心理學、熱力學與交通車流等，一開始發現這種現象的研究是在電磁學裡，電力的大小與磁場的大小為一個正比的關係，圖 2.1 為電磁效應的作用，當外界的電力隨著時間變化時，增大或減少都會改變磁場作用的大小，

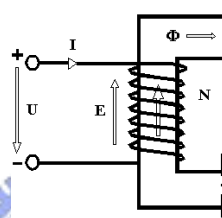


圖 2.1 電磁效應

但是由圖 2.2 可看出來，電力與磁力大小的關係並非一個線性的關係，

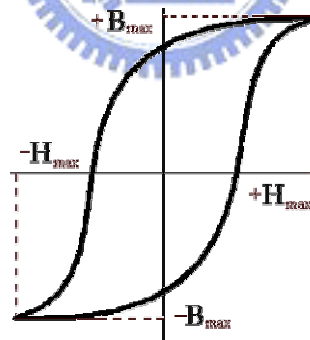


圖 2.2 電力與磁力的關係圖

此即為電磁學的遲滯現象。其中 H 為電力大小， B 為磁力大小，當電力增加時，磁力隨著增加，函數曲線由第三象限移到第一象限，直到最大的電力為止，隨後電力慢慢減少，而磁力也跟著減少，但是到了電力為零的時候，此時磁力因為遲滯效應而還有殘磁性，所以此時的磁力值尚大於零，直到電力下降到一定的程度時，磁力才完全為零，這就是所謂電磁的遲滯現象。熱力學也有遲滯現象，由溫度與鐵受熱膨脹程度關係圖顯示當溫度改變時，膨脹程度也跟著改變，但是溫度

與膨脹程度的關係具有一個遲滯效應，當溫度降低時，膨脹程度並非呈線性關係而降低，此效應可以由實驗結果觀察得知。

2.1.2 什麼是遲滯現象

以一個簡單的例子來說，假設一部越野車在賽道上行駛，假設車子前方沒有其他車輛競速的情形之下，剛開始駕駛人加速從 80miles/h 至 200miles/h，加速到 200miles/h 時，突然前方出現了紅燈信號，於是駕駛人開始減速從 200miles/h 至 80miles/h，假設加速度與減速度都是 100miles/h，在加速過程中，100miles/h 的加速度會比減速度的過程中減速度 100miles/h 來的快，也就是說減速的反應比加速的反應來的慢，如圖 2.3 所示。

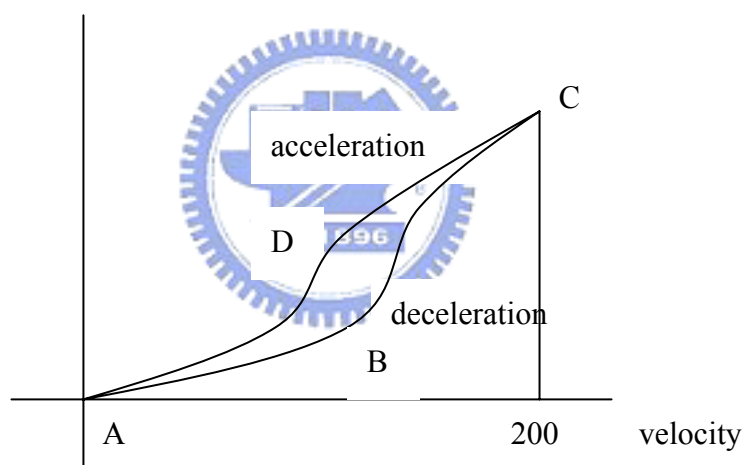


圖 2.3 加速與減速的反應曲線

遲滯迴圈(hysteresis loop)就是圖中呈現“S”曲線所包圍住的圖形，當速度增加時，曲線會沿著 ABC 到速度最大值，相反的，當速度減少時，曲線則會延著 CDA 會到速度最小值。所以整個迴圈的路徑為 ABCDA，形成所謂的遲滯迴圈。

2.2 車流遲滯現象理論之回顧

車流遲滯現象的研究並不廣泛，最早的研究為 1974 年由 Treiterer 和 Myers[15] 提出在實際的高速公路上可以觀察到這種現象，1996 年在舊金山 Skabardonis 的一項實驗中，在高速公路上設置了偵測器，偵測紀錄下車流的速度、密度的資料，畫出的速度與密度隨時間而變動的圖形如圖 2.4 所示，並且將所有的速度與密

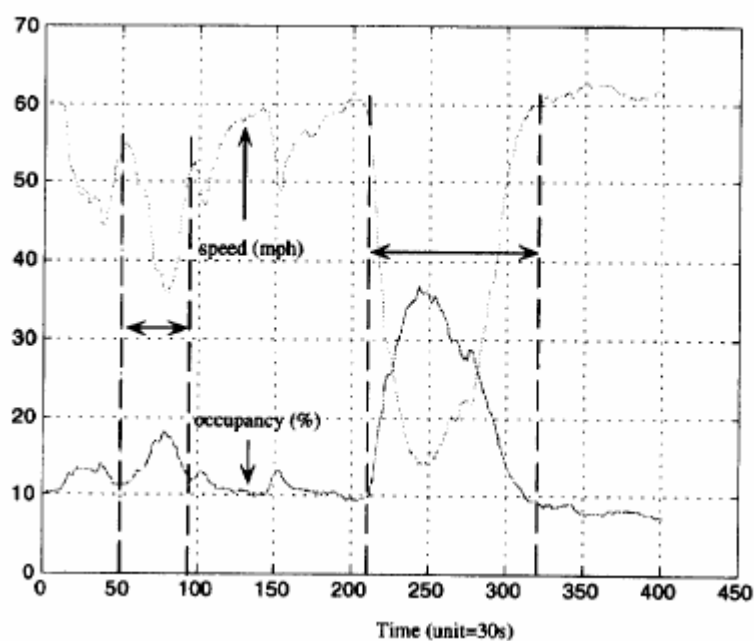


圖 2.4 偵測器，偵測紀錄下車流的速度、密度的資料

度資料繪出速度與密度的圖形，如圖 2.5 所示，很明顯的可以看出當速度減少時，

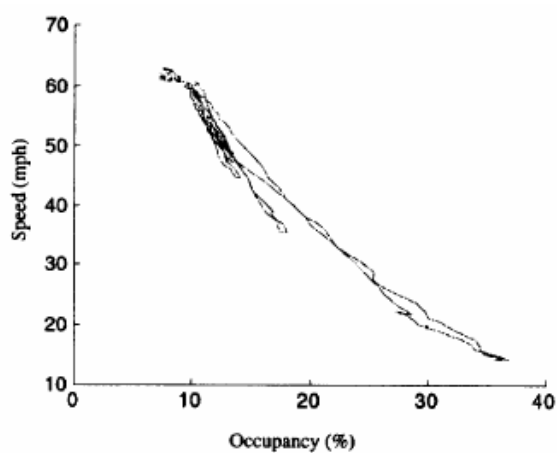


圖 2.5 速度與密度隨時間而變動的圖形

密度增加，圖形的描繪是根據時間點紀錄下所有的速度與密度的值，也就是在相

關的時間點上所對應的速度與密度值紀錄下來，圖形上隨著速度減少、密度增加或速度增加、密度減少的過程中，可觀察出此關係不是一個平滑的曲線，而是形成一個具有遲滯現象的圖形，如圖 2.6 所示。

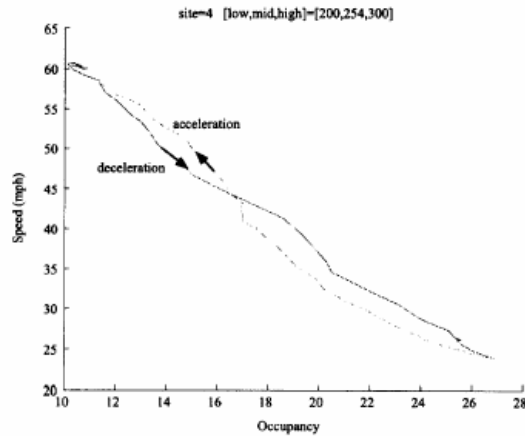
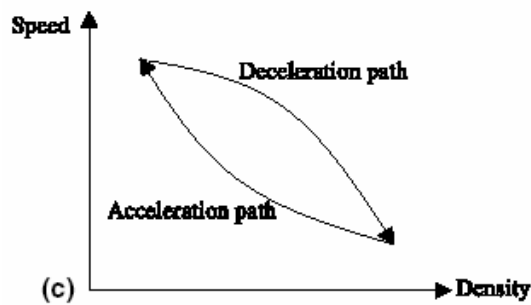


圖 2.6 加速與減速過程形成的遲滯迴圈

大致上來說，車流遲滯現象可以簡單的描述就是在車流遇到瓶頸路段時，會有一個減速的過程，隨著車流的前進，將離開瓶頸路段，車流會有一個加速的過程，不管是減速過程還是加速過程在速度與密度的關係圖上都會留下紀錄，然而加速過程並不會沿著原本減速過程的曲線，而形成了一個迴圈(loop)的現象，就是車流遲滯現象。簡單的車流遲滯現象可以由 Treiterer 與 Myers[15]在 1974 年所發表的研究中圖 2.7 清楚的看出。



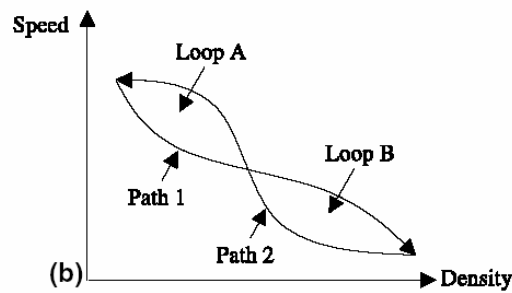


圖 2.7 Treiterer 與 Myers 在 1974 年所發表遲滯迴圈

在圖可看出，車流速度一開始的減速過程是沿著 path 1 到速度的最低點，然後加速過程卻沿著完全不同的 path 2 回到速度的最高點，且此兩條路徑形成了兩個迴圈(two loops)A 迴圈與 B 迴圈。

車流速度與密度的關係圖(speed-concentration relationship)在車流理論中非常重要，分為 equilibrium 與 non-equilibrium 兩種關係，前者 equilibrium 關係是指速度與密度的關係為“連續性”的曲線，而後者 non-equilibrium 則稱為“非連續性”曲線，如圖 2.8 所示。

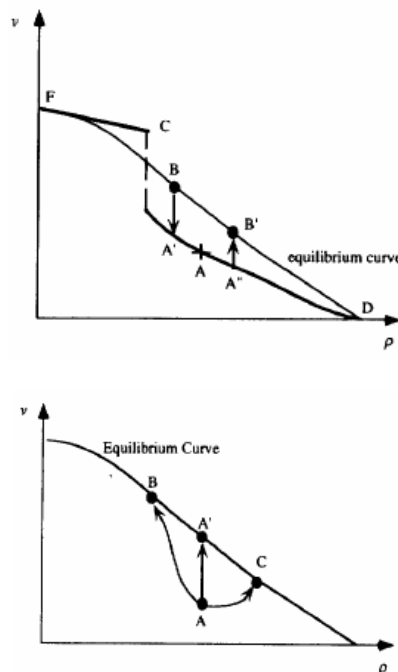


圖 2.8 均衡與非均衡的速度密度關係圖

可看出 equilibrium 曲線在速度與密度圖中為一個平滑且連續的曲線，而

non-equilibrium 曲線則是不連續的曲線，與 equilibrium 曲線之間具有明顯的差距，且在某一個速度密度值之下有一個明顯的隔閡(gap)。

1999 年 H. M. Zhang[18]在車流遲滯現象的研究中提出一個數學理論，此理論一開始有幾個假設，分別如下：

1. 駕駛人的行為是同質性。
2. 駕駛人只受到前方車流狀況的反應。
3. v_e 為駕駛人盡可能想達到的速度值。
4. 當遇到交通衝突或道路瓶頸時，駕駛人的反應由三個狀態來表示，(a)狀態 A，為期望狀態，(b)狀態 B，為介於期望與放鬆狀態之間的狀態，(c)狀態 C，為放鬆狀態。

由以上的假設條件之下，進而推導出三種駕駛的速度分別為：

$$\text{狀態 A, } \frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = v_e(\rho(x_{n+1} + \Delta, t)) \quad (2.1)$$

$$\text{狀態 B, } \frac{dx_{n+1}(t + \tau)}{dt} = v_e(\rho(x_{n+1} + \Delta, t)) \quad (2.2)$$

$$\text{狀態 C, } \frac{dx_{n+1}(t + \tau)}{dt} = v_e(\rho(x_{n+1}, t)) \quad (2.3)$$

又根據 1997 年 H.M. Zhang 的非均衡交通車流理論中推導出最後的速度為

$$\frac{dv(x, t)}{dt} = -\frac{1}{T}(v(x, t) - v_e(\rho(x, t))) + \frac{\Delta}{T} v_e'(\rho(x, t)) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \quad (2.4)$$

三個狀態的速度分別為：

$$\text{狀態 A, } v = v_e - \tau \rho(v_e'(\rho))^2 \rho_x \quad (2.5)$$

$$\text{狀態 B, } v = v_e - \tau \left(\frac{dv}{dt} + \rho(v_e'(\rho))^2 \rho_x \right) \quad (2.6)$$

$$\text{狀態 C, } v = v_e - \tau \frac{dv}{dt} \quad (2.7)$$

狀態 A 時，當車流經過一個更壅塞的狀況時，也就是密度增加， $\frac{\partial \rho}{\partial x} \rightarrow +\infty$ ，

所以 $\tau \rho(v_e'(\rho))^2 \rho_x$ 為一個非負值，又速度減少，所以此時為減速狀態， $v = v_d$ ，

故可得到 $0 \leq v_d \leq v_e$ ，同理，若是密度減少，速度增加，可得到 $0 \leq v_e \leq v_a$ ，最後

的關係為 $v_d \leq v_e \leq v_a$ 。

狀態 C 時，當車流正在加速，也就是 $\frac{dv}{dt} \geq 0$ ，可得到 $v_a \leq v_e$ ，若正在減速，則 $\frac{dv}{dt} \leq 0$ ，可得到 $v_e \leq v_d$ ，最後的關係為 $v_a \leq v_e \leq v_d$ 。

狀態 B 時，可得到關係為 $v_a = v_e = v_d$ 。

最後證明並畫出速度與密度的關係圖確實有遲滯現象，如圖 2.9 所示。

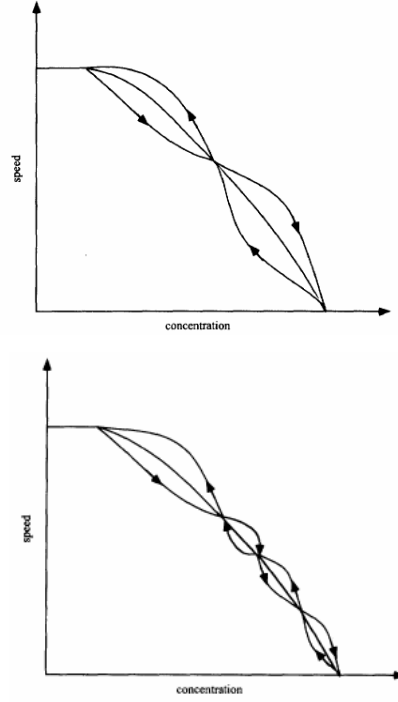


圖 2.9 1999 年 Zhang 提出的遲滯迴圈

H.M. Zhang 所提出的理論為同質性駕駛行為的理論，但是在車流經過交通衝擊或是路段瓶頸時，會有減速與加速的情形發生，而此過程中，由加速與均衡速度以及減速與均衡速度的比較可以解釋車流也具有遲滯效應的現象。

2002 年 G.C.K. Wong 與 S.C. Wong[16]提出了加入異質性駕駛行為的 LWR 理論也可以解釋車流遲滯現象，根據其研究所推導出的 LWR 模式，再由有限差分法的數值解可以得到一個速度與密度的關係圖，有限差分法的數值解如下所示：

$$k_m(i, j+1) = \frac{1}{2}(k_m(i+1, j) + k_m(i-1, j)) - \frac{Vt}{2Vx}(q_m(i+1, j) - q_m(i-1, j)) \quad (2.8)$$

$$k_m(I, j+1) = k_m(I, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q_m(I, j) - q_m(I-1, j)) \quad (2.9)$$

此研究舉出一個數值範例，並且解此範例得到速度與密度的關係圖如圖 2.10 所示，可以很明顯的看出減速過程(路徑 1)與加速過程(路徑 2)為不同路徑，且形成了一個迴圈，此結果也得到一個車流遲滯效應的現象。

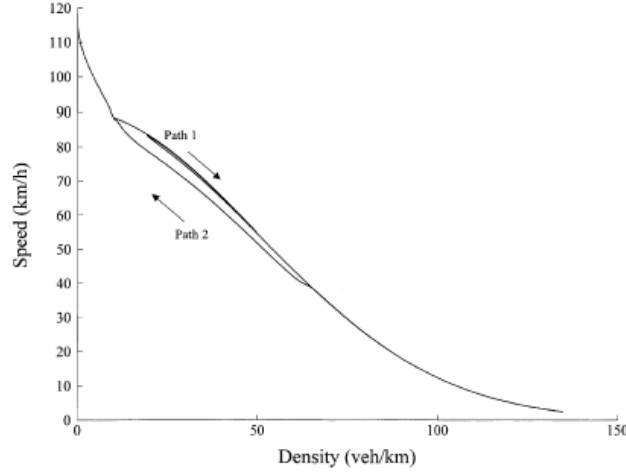


圖 2.10 2002 年 Wong 研究的異質性駕駛人遲滯現象

異質性 LWR 模式的推導如下：

假設有 m 組駕駛人，也就是有 m 種等級的駕駛人載到道路上行駛， m_1, m_2, \dots, m_m 分別代表第 m 種等級的駕駛人，其速度、密度、流量分別以 u_m, k_m, q_m 表示； $k = \sum k_m$ ，為總密度，因為行駛速度不單只是會受到同一等級駕駛人的影響，也會受到其他等級駕駛人的影響，所以速度與密度的關係可改寫為 $u_m(x, t) = U_m(k_1, k_2, k_3, \dots, k_M)$ ，簡化變成 $u_m(x, t) = U_m(k)$ ，因此，以總密度來表示車流密度 $k = \sum k_m$ 。不同等級駕駛人以自由流速度如圖 2.11 所示。

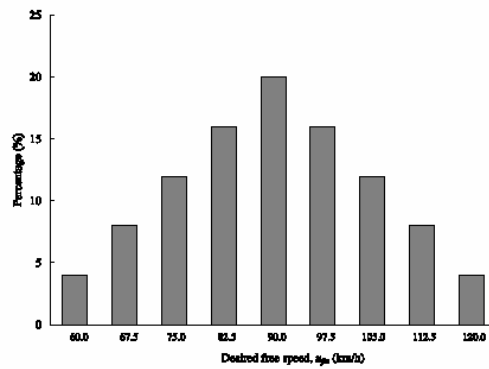


Fig. 2. Distribution of users' desired free speed in the experiments.

圖 2.11 不同等級駕駛人以自由流速度

數值範例為一地勢平緩，長度 2 公里的高速公路路段，在時間點為 1.125hour 到 1.175hour 三分鐘內，在路段的末端發生了交通事故，而車輛一直持續的從上游路段進入，因此產生了 queue 現象，此時車流密度漸漸增加而車速漸漸減少，過了一段時間之後，事故排除之後，車流才又漸漸回復到原本的狀態。

異質性 LWR 模式為：

$$\begin{cases} \frac{\partial k_m}{\partial t} + \frac{\partial q_m}{\partial t} = 0 \\ q_m = k_m \times u_m \\ u_m = u_{f_m} \times e^{-\frac{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}{2}} \end{cases} \quad (2.10)$$

其中 $\frac{\partial k_m}{\partial t} + \frac{\partial q_m}{\partial t} = 0$ 可改成：

$$\frac{\partial k_m}{\partial t} + \sum c_{mn} \frac{\partial k_n}{\partial x} = 0, \quad c_{mn} = U_{mn} \delta_{mn} + k_m \frac{\partial k_n}{\partial x} \quad (2.11)$$

其中速度與密度的關係是由 1967 年 Drake 提出的 Bell shape model，其關係式為 $u_m = U_m(k_1, k_2, \dots, k_M) = u_{f_m} \exp(-(k/k_0)^2/2)$ ， k_0 是最大車流密度， u_{f_m} 是自由車流速度， k 是總車流密度。

2003 年由 J.C. Juang 與 Y.H. Chiang[11]提出了另一個車流遲滯效應的研究，在車流狀況分成了五個程度，分別為 free, impeded, synchronized, congested and jammed，如圖 2.12 所示。

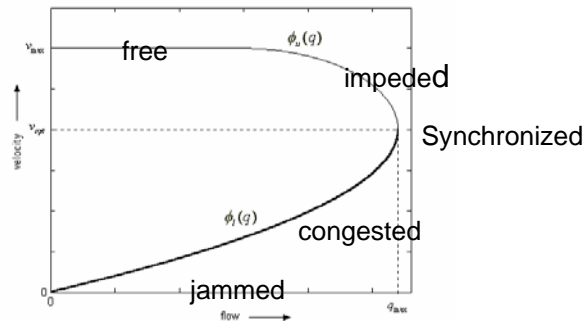
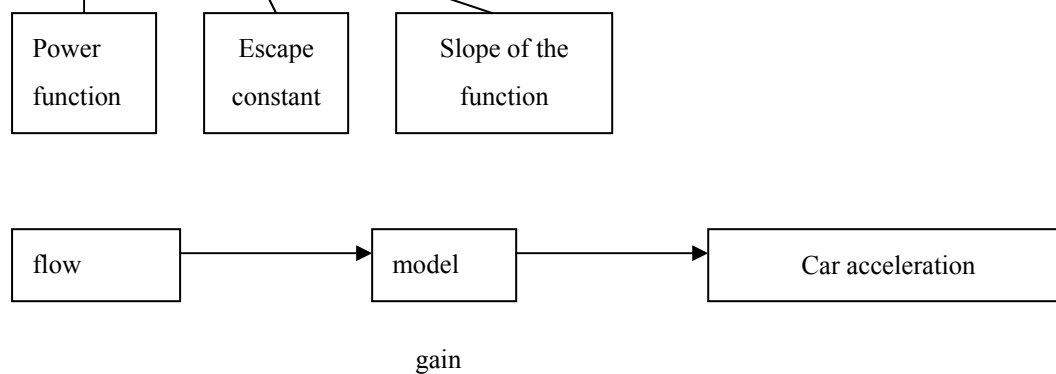


圖 2.12 車流狀況分成了五種程度

再根據 Duhem 的模式：

$$v = \begin{cases} (m_a(v - \phi_l(q))^{p_a} + s_a + \frac{d\phi_l}{dq})\phi, & \phi \geq 0 \\ (m_d(v - \phi_l(q))^{p_d} + s_d + \frac{d\phi_l}{dq})\phi, & \phi < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$



給定參數之後，再模擬出來得到的結果如圖 2.13 所示：

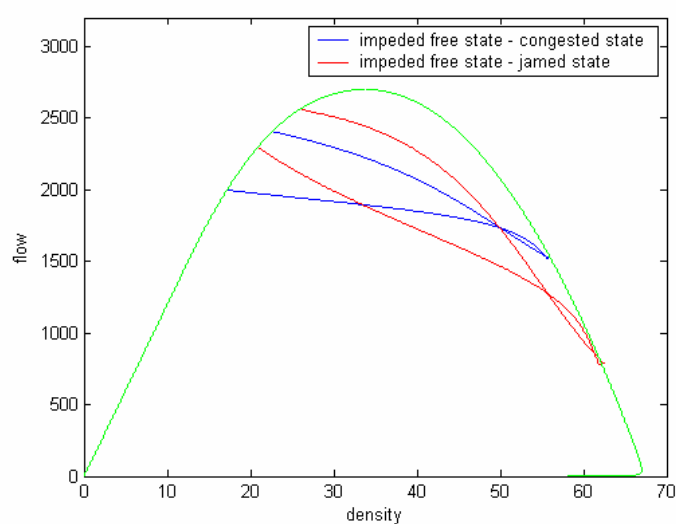


圖 2.13 2003 年 Juang 的研究中車流密度與流量的遲滯現象

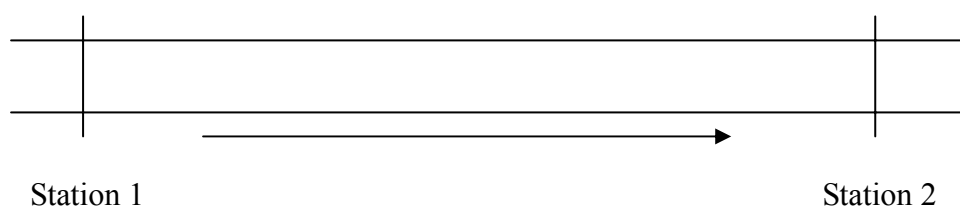
第三章 LWR 模式

3.1 LWR 理論基礎

車流的波動方程式最早是由 Lighthill 與 Whitham 在 1955 年時所提出，其理論是將流體力學中的流量守恆律應用在車流行為上。Lighthill 和 Whitham 以運動波的理論以及流量與密度間函數的關係，來解釋交通上的行為。1956 年時，Richards 也提出類似的理論，因此稱此模式為 LW 模式或 LWR 模式。三位學者在 1950 年代提出的車流理論，將流體力學的行為引用交通車流的行為，以連續方程式(continuity equation)來解釋車流行為，主要是在描述車流波的傳遞現象，連續方程式則根據：

1. 流量守恆定律，認為在某一個固定的路段當中，流出與流入此路段的車輛數要維持平衡(流出量=流入量)。
2. 流量與速度、密度之間的關係式($q = ku$)。
3. Greenshield 在 1934 年所提出的速度與密度關係式($u = u_m \left(1 - \frac{k}{k_m}\right)$)。

連續方程式(continuity equation)的推導如下：



假設 N_1 ， N_2 代表在 Δt 時間內通過 station 1 與 station 2 的車輛數， Δx 是兩站之間的距離，假設 $N_1 > N_2$ ，車流會由 station 1 趨向 station 2，let $N_1 - N_2 = \Delta N$ ， $\Delta N < 0$ ，則

$$\begin{aligned} N_1 / \Delta t &= q_1 \\ N_2 / \Delta t &= q_2 \quad \therefore \Delta N = (\Delta q)(\Delta t) \quad (a) \\ \Delta N / \Delta t &= \Delta q \end{aligned}$$

$$\text{且 } \Delta k = \frac{N_1 - N_2}{\Delta x} = \frac{-(N_2 - N_1)}{\Delta x} \quad \therefore \Delta N = (-\Delta k)(\Delta x) \quad (b)$$

由(a)、(b)二式可得到 $\therefore -(\Delta q)(\Delta t) = (\Delta k)(\Delta x)$

$$\longrightarrow \frac{\Delta q}{\Delta x} + \frac{\Delta k}{\Delta t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \therefore \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 & \longrightarrow \text{流量守恒定律—連續方程式} \\ q(x,t) = k(x,t) \times u(x,t) & \longrightarrow \text{流量與速度、密度關係式} \\ u(x,t) = u_f \times \left(1 - \frac{k}{k_b}\right) & \longrightarrow \text{Greenshield 速度與密度關係式} \end{array} \right.$$

求解上述的一階偏微分方程式即可得到 $k(x,t)$ ，以時間(t)、空間(x)為變數的車流密度函數 $k(x,t)$ 。

3.2 求解 LWR 一階偏微分方程式之有限差分法

由於偏微分方程式的求解不易，且不同的初始條件 (initial condition) 及邊界條件 (boundary condition) 皆會導致不同的解出現，在大多數的情況下，並沒有解析解的存在。國外有一些學者如 Daganzo 等人，嘗試以數值方法 (Numerical Method) 中的有限差分法 (Finite Difference Method) 來求解此一偏微分方程式的近似解。

有限差分法的基本觀念是將偏微分方程利用差分方程來近似，而將求解的定義域空間切為有限的網格，再利用初始條件、邊界條件及遞迴公式 (recursive formula) 求出網格上每一點的解值。有限差分法依求解方法不同可分為兩大類，其基本觀念是將求解的區域(Domain)切割成許多的小方格，再將格點的值逐一求出。然而在求解格點值時，因為取點原則及格點遞迴方式不同，計算方法亦不相同，此亦為顯式法與隱式法之差異所在。

顯式法在計算時間 $t+1$ 層之格點數值時，其選點的方式是利用 t 層或 t 層以下之格點數再計算，逐步遞迴，求出區域內之值。而隱式法在計算 $t+1$ 層之格點數值時，其選點的方式不但利用 t 層或 t 層以下之格點，同時還包含了 $t+1$ 層之其他格點之值來幫忙求解，也就是說，隱式法並沒有辦法透過遞迴求解的方式得到所需之解，因為各格點的數值彼此互相影響，必須透過矩陣的計算，因此較顯

示法複雜。

利用有限差分法其中之顯示法的 Lax-Friedrichs(Lax-F)來求解 LWR 之一階偏微分方程式如圖 3.1 表示：

$$k_m(i, j+1) = \frac{1}{2}(k_m(i+1, j) + k_m(i-1, j)) - \frac{Vt}{2Vx}(q_m(i+1, j) - q_m(i-1, j))$$

$$k_m(I, j+1) = k_m(I, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(q_m(I, j) - q_m(I-1, j))$$

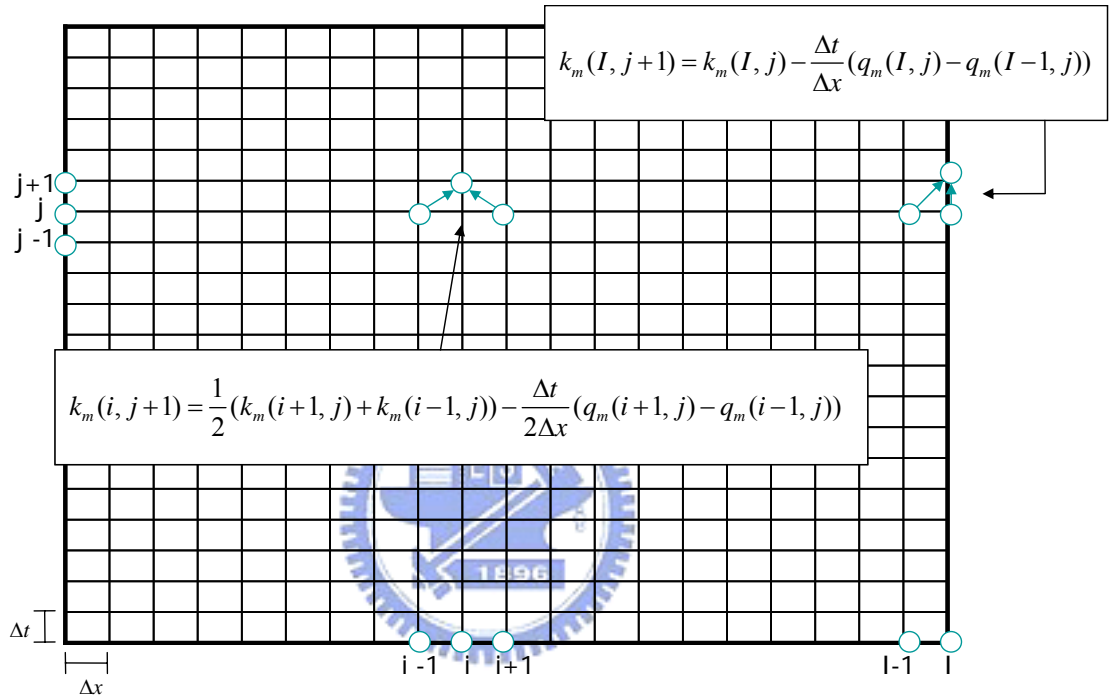


圖 3.1 利用 FDM 其中之顯示法的 Lax-F 來求解 LWR 之一階偏微分方程式

3.3 遲滯現象車流速度與密度關係圖分析

要形成遲滯現象之迴圈，則在速度與密度的關係圖中的變化情形為減速過程與加速過程不重疊，先假設車流密度分為三個層級，分別是 free, congest, jam，密度增加的過程變化由一開始的 free，漸漸增加到 congest，然後再到 jam，相反的，密度減少的過程變化則由 jam 回到 congest 再回到 free，如圖 3.2 所示。

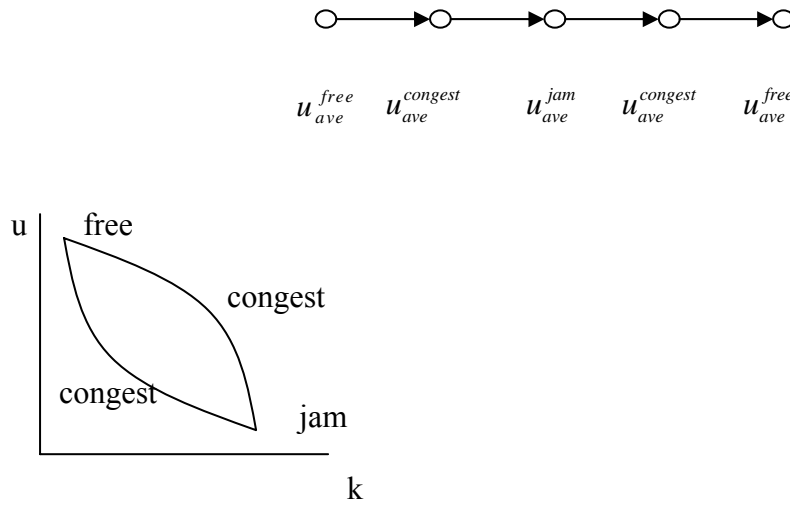


圖 3.2 密度變化的過程

3.3.1 兩種等級駕駛人的情形

車流平均速度假設為 $u_{ave} = \frac{\sum(u_i g_i)}{\sum k_i}$ ，若假設只有兩種等級駕駛人，則平均速度 $u_{ave} = \frac{u_1 g_1 + u_2 g_2}{k_1 + k_2}$ ，若速度由 congest 的狀態漸漸增加到 jam 的狀態時，

$u_{ave}^{congest} \rightarrow u_{ave}^{jam} \rightarrow u_{ave}^{congest}$

$$\begin{array}{ccc}
 \left. \frac{u_1^{con} k_1^{con} + u_2^{con} k_2^{con}}{k_1^{con} + k_2^{con}} \right| & \xrightarrow{\text{減速}} & \frac{u_1^{jam} k_1^{jam} + u_2^{jam} k_2^{jam}}{k_1^{jam} + k_2^{jam}} \xrightarrow{\text{加速}} \left. \frac{u_1^{con} k_1^{con} + u_2^{con} k_2^{con}}{k_1^{con} + k_2^{con}} \right| \\
 \text{要使得} \left. \frac{u_1^{con} k_1^{con} + u_2^{con} k_2^{con}}{k_1^{con} + k_2^{con}} \right| & \neq & \left. \frac{u_1^{con} k_1^{con} + u_2^{con} k_2^{con}}{k_1^{con} + k_2^{con}} \right| \quad \text{成立才有遲滯現象，又因} \\
 & \text{減速} & \text{加速}
 \end{array}$$

$$\text{為 } u_1^{con} = u_{f_1} \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{k_1^{con} + k_2^{con}}{k_0} \right)^2 \right] \quad \text{and} \quad u_2^{con} = u_{f_2} \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{k_1^{con} + k_2^{con}}{k_0} \right)^2 \right]$$

且要在車流密度相同的之下，

$$\begin{array}{ccc}
 \left. k_1^{con} + k_2^{con} \right| & = & \left. k_1^{con} + k_2^{con} \right| \\
 \text{減速} & & \text{加速}
 \end{array}$$

若要使得上述不等式成立，其條件為

$$\left. \begin{array}{c} k_1^{con} \\ \text{減速} \end{array} \right| \neq \left. \begin{array}{c} k_1^{con} \\ \text{加速} \end{array} \right| \quad \text{且} \quad \left. \begin{array}{c} k_2^{con} \\ \text{減速} \end{array} \right| \neq \left. \begin{array}{c} k_2^{con} \\ \text{加速} \end{array} \right|$$

3.3.2 有限差分法求解之分析

已知道要形成遲滯現象的條件為何，在有限差分法求解的過程中，減速過程的車流密度與加速過程的車流密度可由圖 3.3 看出：

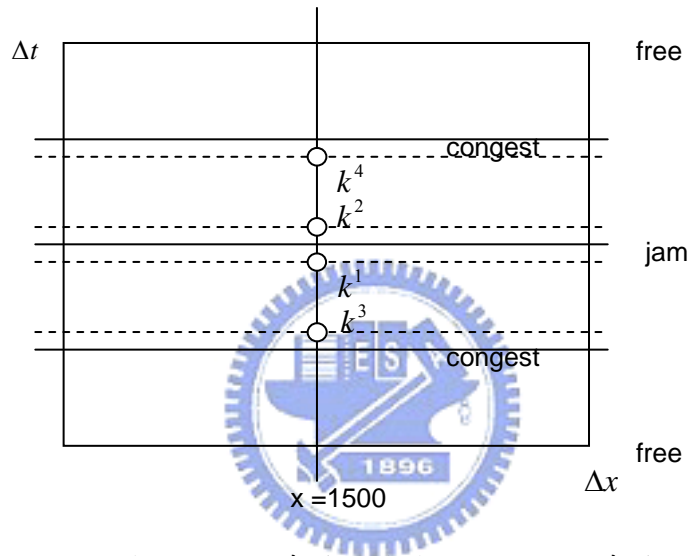


圖 3.3 減速過程的車流密度與加速過程的車流密度

k^1 、 k^2 、 k^3 、 k^4 分別代表的密度如下：

k^1 ：減速過程中密度 k^{jam} 為的前一個時間點的密度。

k^2 ：加速過程中密度為 k^{jam} 的後一個時間點的密度。

k^3 ：減速過程中密度為 k^{con} 後一個時間點的密度。

k^4 ：加速過程中密度為 k^{con} 前一個時間點的密度。

$$\left. \begin{array}{c} k^{con} \\ \text{減速} \end{array} \right| \neq \left. \begin{array}{c} k^{con} \\ \text{加速} \end{array} \right| \quad \text{此不等式欲成立，}$$

則條件為 $\begin{cases} k^1 \neq k^2 \\ k^3 \neq k^4 \end{cases}$

又 Lax-Friedrichs(Lax-F)的求解法為：

$$k_{m,x}^t = \frac{1}{2} [k_{m,x+1}^{t-1} + k_{m,x-1}^{t-1}] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [q_{m,x+1}^{t-1} - q_{m,x-1}^{t-1}] \quad (3.1)$$

所以，

$$k^3 = \frac{1}{2} [k_{x+1}^{con} + k_{x-1}^{con}] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [q_{x+1}^{con} + q_{x-1}^{con}] = k^{con} - \frac{\Delta t}{\Delta x} q^{con} \quad (3.2)$$

$$k^2 = \frac{1}{2} [k_{x+1}^{jam} + k_{x-1}^{jam}] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [q_{x+1}^{jam} + q_{x-1}^{jam}] = k^{jam} - \frac{\Delta t}{\Delta x} q^{jam} \quad (3.3)$$

$$k^1 = k^{con} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [q^{con} + q^{con+1} + q^{con+2} + \dots + q^{con+(n-1)}] \quad (3.4)$$

$$k^4 = k^{jam} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [q^{jam} + q^{jam+1} + q^{jam+2} + \dots + q^{jam+(n-1)}] \quad (3.5)$$

條件為

$$1. \quad k^1 \neq k^2$$

$$\longrightarrow k^{con} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [q^{con} + q^{con+1} + q^{con+2} + \dots + q^{con+(n-1)}] \neq k^{jam} - \frac{\Delta t}{\Delta x} q^{jam} \quad (3.6)$$

$$2. \quad k^3 \neq k^4$$

$$\longrightarrow k^{con} - \frac{\Delta t}{\Delta x} q^{con} \neq k^{jam} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [q^{jam} + q^{jam+1} + q^{jam+2} + \dots + q^{jam+(n-1)}] \quad (3.7)$$

3.3.3 駕駛行為異質特性之分析

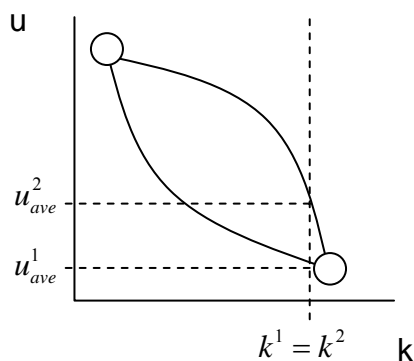


圖 3.4 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖

$$\begin{aligned} \text{其中 } \sum k^1 &= k_1^1 + k_2^1 \\ \sum k^2 &= k_1^2 + k_2^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} u_{ave}^1 &= \frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1}{k_1^1 + k_2^1} \\ u_{ave}^2 &= \frac{u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \end{aligned}$$

欲使得 $u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$ 不等式成立的條件為：

$$\frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1}{k_1^1 + k_2^1} \neq \frac{u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$$

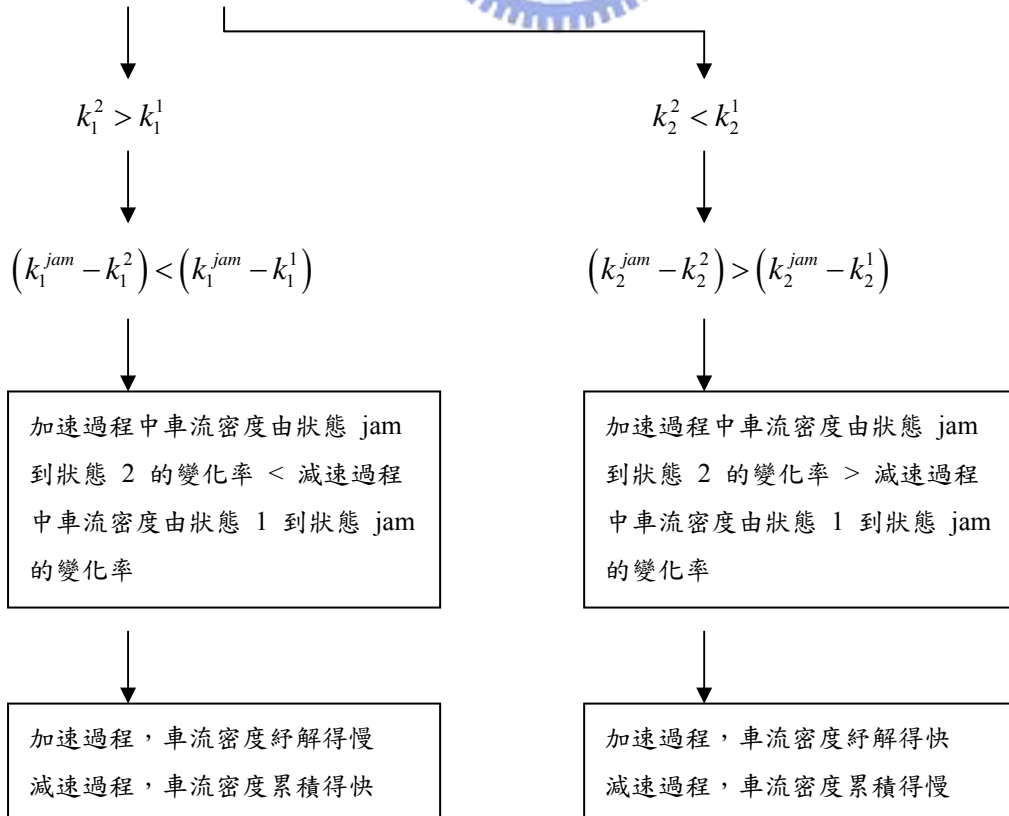
又因為 $k_1^1 + k_2^1 = k_1^2 + k_2^2$ 為已知條件，所以

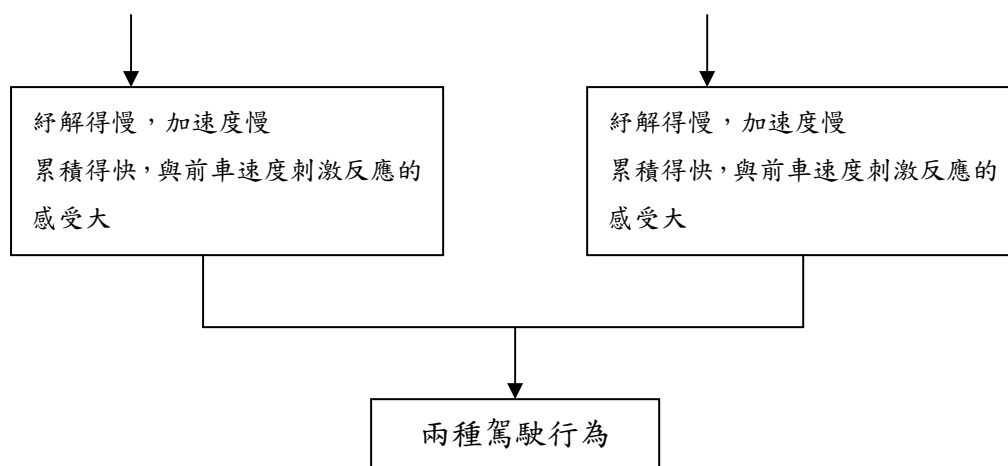
$$\text{只要 } \begin{cases} k_1^1 + k_2^1 = k_1^2 + k_2^2 \\ k_1^1 \neq k_1^2 \end{cases} \quad \text{或是 } \begin{cases} k_1^1 + k_2^1 = k_1^2 + k_2^2 \\ k_2^1 \neq k_2^2 \end{cases} \text{ 成立，}$$

即可證明 $u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$ 得證。

因此 $\begin{cases} k_1^1 + k_2^1 = k_1^2 + k_2^2 \\ k_1^1 \neq k_1^2 \end{cases}$ 有兩種情況：

情況一：若 $k_1^2 > k_1^1, k_2^2 < k_2^1$





情況二：若 $k_1^2 < k_1^1, k_2^2 > k_2^1$ ，同理分析。

將本分析過程反證，即可得到形成車流遲滯現象之證明。

3.3.4 加入異質特性之車流遲滯現象

已知條件為道路上有兩種速度等級之駕駛行為，各速度等級之車流速度分別為 u_1, u_2 ，車流總密度為 $k = k_1 + k_2$ ，車流平均速度為 $u_{ave} = \frac{u_1 k_1 + u_2 k_2}{k_1 + k_2}$ ，情況一：若第一種速度等級的駕駛行為為 1. 加速度慢 2. 與前車速度變化刺激反應的感受大，第二種速度等級的駕駛行為與第一種相反，分別為 1. 加速度快 2. 與前車速度變化刺激反應的感受小；則當車隊通過瓶頸路段時，第一種速度等級的車流密度累積得快，第二種速度等級的車流密度累積得慢，相反的，當車隊離開瓶頸路段時，第一種速度等級的車流密度紓解得慢，第二種速度等級的車流密度紓解得快；因此可以由下面的數學式表示：

$$\text{第一種速度等級的駕駛行為：} (k_1^{jam} - k_1^2) < (k_1^{jam} - k_1^1)$$

$$\text{第二種速度等級的駕駛行為：} (k_2^{jam} - k_2^2) > (k_2^{jam} - k_2^1)$$

整理後得到 $(k_1^2 > k_1^1)$ 與 $(k_2^2 < k_2^1)$ ，也就是 $k_1^2 \neq k_1^1$ 的條件成立。

情況二：同理可得到 $(k_1^2 < k_1^1)$ 與 $(k_2^2 > k_2^1)$ ，也得到 $k_1^2 \neq k_1^1$ 的條件成立。

又經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖如圖 3.5 所示

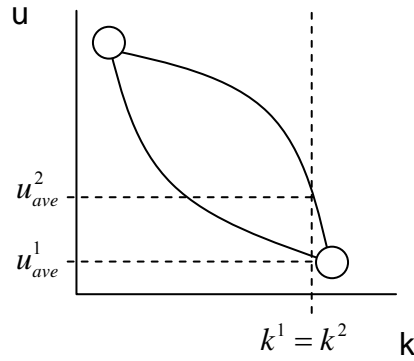


圖 3.5 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖

其中 u_{ave}^1, k^1 表示進入瓶頸路段之前的車隊平均速度與車流總密度， u_{ave}^2, k^2 表示離開瓶頸路段之後的車隊平均速度與車流總密度，當 $k^1 = k^2$ 時，也就是 $k_1^1 + k_2^1 = k_1^2 + k_2^2$ ，進入瓶頸路段與離開瓶頸路段的車流總密度相同時，此為第二個條件。

由第一、第二個條件分別為 $k_1^2 \neq k_1^1$ 與 $k_1^1 + k_2^1 = k_1^2 + k_2^2$ ，帶入車隊的平均速度為 $u_{ave}^1 = \frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1}{k_1^1 + k_2^1}$ 與 $u_{ave}^2 = \frac{u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$ ，可得到 $u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$ 成立，得證。

$$\Delta u_{ave} = (u_{ave}^1 - u_{ave}^2) = \frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1 - u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2}{k_1^1 + k_2^1} = \frac{(u_1^1 - u_2^1)g(k_1^2 - k_1^1)}{k_1^1 + k_2^1}。$$

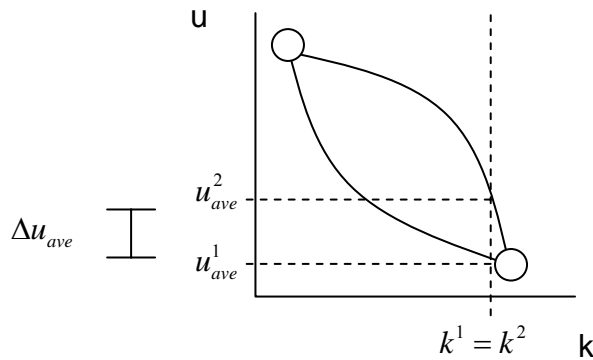


圖 3.6 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖

3.3.5 三種等級駕駛人的情形

三種速度等級駕駛時，車流平均速度為 $u_{ave} = \frac{u_1 g k_1 + u_2 g k_2 + u_3 g k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$ ，欲使得 $u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$

不等式成立的條件為：

$$u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$$

$$\frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1 + u_3^1 g k_3^1}{k_1^1 + k_2^1 + k_3^1} \neq \frac{u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2 + u_3^2 g k_3^2}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

$$\begin{cases} u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1 + u_3^1 g k_3^1 \neq u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2 + u_3^2 g k_3^2 \\ k_1^1 + k_2^1 + k_3^1 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{from(3.8), } u_1^1 g(k_1^1 - k_1^2) + u_2^1 g(k_2^1 - k_2^2) + u_3^1 g(k_3^1 - k_3^2) \neq 0 \quad (3.10)$$

$$\text{from(3.9), } (k_1^1 - k_1^2) + (k_2^1 - k_2^2) + (k_3^1 - k_3^2) = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{from(3.11), } (k_1^1 - k_1^2) = -(k_2^1 - k_2^2) - (k_3^1 - k_3^2) \text{ 代入(3.10)}$$

$$\Rightarrow (k_2^1 - k_2^2)(u_2^1 - u_1^1) + (k_3^1 - k_3^2)(u_3^1 - u_1^1) \neq 0 \quad (3.12)$$

又因為 $u_2^1 \neq u_1^1$ ， $u_3^1 \neq u_1^1$

滿足的條件為 $k_2^1 - k_2^2 \neq 0$ or $k_3^1 - k_3^2 \neq 0$

結論：三種速度等級只要其中兩種速度等級的車流密度在減速過程與加速過程不同即可。

$$\frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1 + u_3^1 g k_3^1}{k_1^1 + k_2^1 + k_3^1} \neq \frac{u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2 + u_3^2 g k_3^2}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \Rightarrow u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$$

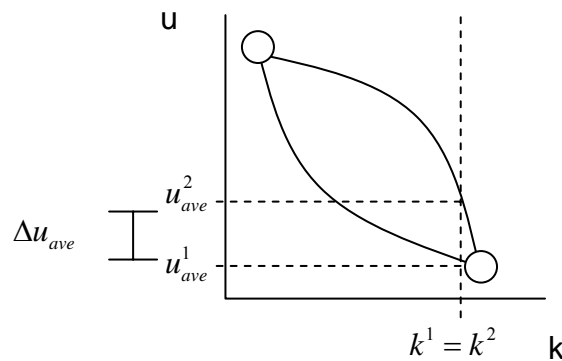


圖 3.7 經過瓶頸路段時密度與速度的關係圖

3.3.6 n 種等級駕駛人的情形

n 種速度等級駕駛時，車流平均速度為 $u_{ave} = \frac{u_1 g k_1 + u_2 g k_2 + \dots + u_n g k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$ ，欲使得

$u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2$ 不等式成立的條件為：

$$\begin{cases} u_{ave}^1 \neq u_{ave}^2 \\ \frac{u_1^1 g k_1^1 + u_2^1 g k_2^1 + \dots + u_n^1 g k_n^1}{k_1^1 + k_2^1 + \dots + k_n^1} \neq \frac{u_1^2 g k_1^2 + u_2^2 g k_2^2 + \dots + u_n^2 g k_n^2}{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2} \end{cases}$$

同理可推論如下：

$$(k_2^1 - k_2^2)(u_2^1 - u_1^1) + (k_3^1 - k_3^2)(u_3^1 - u_1^1) + \dots + (k_n^1 - k_n^2)(u_n^1 - u_1^1) \neq 0$$

又因為 $u_2^1 \neq u_1^1$ ， $u_3^1 \neq u_1^1$ ， \dots ， $u_n^1 \neq u_1^1$

故滿足的條件為：在 n 種速度等級中至少兩種速度等級的車流密度在減速過程與加速過程不同即可。



第四章 Car-following 理論的遲滯現象

4.1 同質性 car-following 理論之車流現象

觀察一車隊，車隊中總共有 n 輛車，每部車皆相鄰於前、後車之間，道路為單一車道，因此沒有超車行為，其中每輛車均視為相同駕駛人與駕駛行為，一開始的行駛速度為 u ，此車隊通過一路段，中央有一瓶頸路段，車輛進入到瓶頸路段時減速為 u' ；每部車輛與前方車輛保持一車間距為 h ，當車輛進入到瓶頸路段時，車間距縮短為 h' ，因此，整個車隊的長度為 ngh ，如圖 4.1 所示。

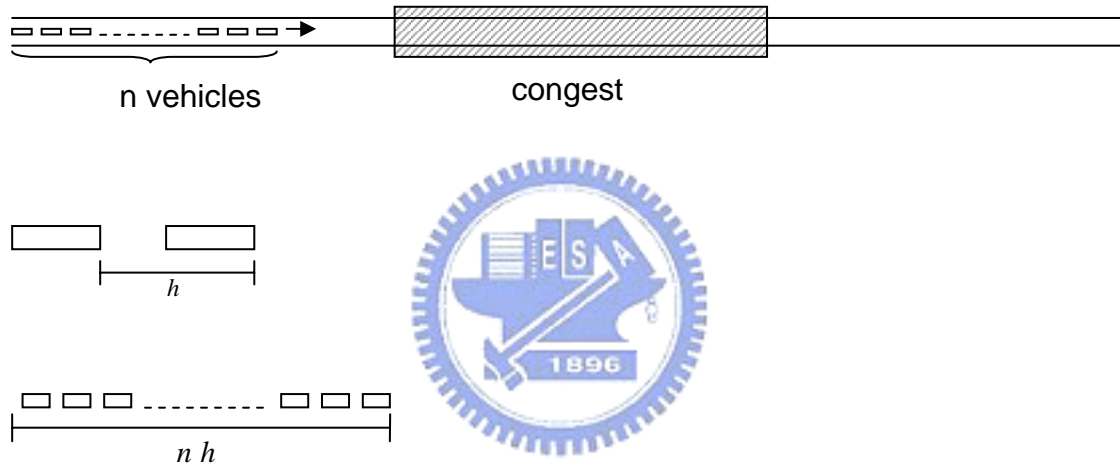


圖 4.1 一車隊 n 部車，每部車間距為 h

4.1.1 車隊通過瓶頸路段過程

狀態一：當車隊中所有車輛均尚未進入到瓶頸路段時，所有車輛的速度均為 u ，平均速度為 $u_{ave} = \frac{ngu}{n} = u$ ；車間距總長為 ngh ，車流密度為 $k = \frac{n}{ngh} = \frac{1}{h}$ ，如圖 4.2 所示。

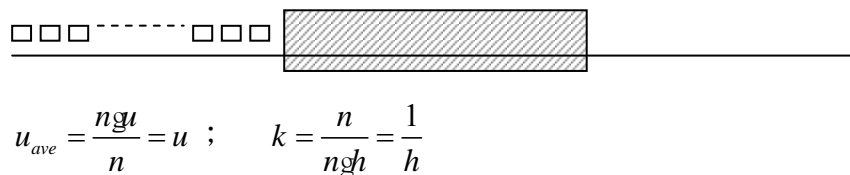


圖 4.2 車輛尚未進入瓶頸路段

狀態二：當車隊中第一輛車進入瓶頸路段時，第一部車輛速度減速為 u' ，其餘車輛均保持原來的速度 u ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{(n-1)u + u'}{n}$ ；第一部車與第二部車的車間距縮短為 h' ，其餘車輛均保持原來的車間距 h ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{(n-1)gh + h'}$ ，如圖 4.3 所示。



$$u_{ave} = \frac{(n-1)u + u'}{n} ; \quad k = \frac{n}{(n-1)gh + h'}$$

圖 4.3 車隊中第一部車進入瓶頸路段

狀態三：當車隊中前 $n-1$ 輛車進入到瓶頸路段時，前 $n-1$ 輛車速度均減速為 u' ，最後一輛車保持原來的速度 u ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{u + (n-1)u'}{n}$ ；前 $n-1$ 個車間距均縮短為 h' ，最後一輛車保持原來的車間距 h ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{h + (n-1)gh'}$ ，如圖 4.4 所示。



$$u_{ave} = \frac{u + (n-1)u'}{n} ; \quad k = \frac{n}{h + (n-1)gh'}$$

圖 4.4 車隊中前 $n-1$ 部車進入瓶頸路段

狀態四：當車隊中所有車輛均進入到瓶頸路段，所有車輛均減速到 u' ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{ng u'}{n} = u'$ ；車間距總長為 ngh' ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{ngh'} = \frac{1}{h'}$ ，如圖 4.5 所示。



$$u_{ave} = \frac{ngu'}{n} = u' ; \quad k = \frac{n}{ngh'} = \frac{1}{h'}$$

圖 4.5 車隊中所有車輛均進入瓶頸路段

狀態五：當車隊中第一輛車離開瓶頸路段時，第一部車輛速度加速為 u ，其餘車輛均保持原來的減速速度 u' ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{(n-1)gu' + u}{n}$ ；第一部車與第二部車的車間距增長為 h ，其餘車輛車間距均保持原來縮短的長度 h' ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{(n-1)gh' + h}$ ，如圖 4.6 所示。



$$u_{ave} = \frac{(n-1)gu' + u}{n} ; \quad k = \frac{n}{(n-1)gh' + h}$$

圖 4.6 車隊中第一部車離開瓶頸路段

狀態六：當車隊中前 $n-1$ 輛車離開到瓶頸路段時，前 $n-1$ 輛車速度均加速為 u ，最後一輛車保持原來的減速速度 u' ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{u' + (n-1)u}{n}$ ；前 $n-1$ 個車間距均縮短為 h' ，最後一輛車保持原來的車間距 h ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{h' + (n-1)gh}$ ，如圖 4.7 所示。



$$u_{ave} = \frac{u' + (n-1)u}{n} ; \quad k = \frac{n}{h' + (n-1)gh}$$

圖 4.7 車隊中前 $n-1$ 部車離開瓶頸路段

狀態七：當車隊中所有車輛均離開瓶頸路段時，所有車輛的速度均加速為 u ，平均速度為 $u_{ave} = \frac{ngt}{n} = u$ ；車間距總長為 ngh ，車流密度為 $k = \frac{n}{ngh} = \frac{1}{h}$ ，如圖 4.8 所示。



$$u_{ave} = \frac{ngt}{n} = u ; \quad k = \frac{n}{ngh} = \frac{1}{h}$$

圖 4.8 車隊中所有車輛均離開瓶頸路段

4.1.2 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車時的狀態

當進入 j 輛車時，車隊中尚有車輛未進入瓶頸路段，整個車隊是在減速的階段，此時車隊平均速度為 $u_{ave} = \frac{(n-j)gt + jgt'}{n}$ ，車流密度為 $k = \frac{n}{(n-j)gh + jgh'}$ ；一直到所有車輛均進入瓶頸路段之後，車隊開始有車輛離開，當離開 $n-j$ 輛車時，整個車隊是在加速的階段，此時車隊的平均速度為 $u_{ave} = \frac{jgt' + (n-j)gt}{n}$ ，車流密度為 $k = \frac{n}{jgh' + (n-j)gh}$ 。

4.1.3 車隊通過過程之狀態分析

狀態一與狀態七為車隊中所有車輛均不在瓶頸路段的狀態，車隊平均速度與車流密度分別 u 與 $\frac{1}{h}$ ，在車流速度與密度的關係圖表示為速度最快與密度最小的點；狀態四則為車隊中所有車輛均在瓶頸路段的狀態，車隊的平均速度與車流密度分別為 u' 與 $\frac{1}{h'}$ ，在速度與密度的關係圖表示為速度最低與密度最大的點，分別如圖 4.9 所示。

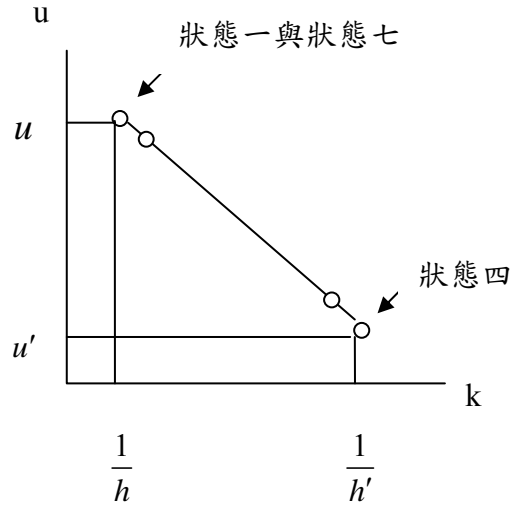


圖 4.9 狀態一、狀態七與狀態四的速度與密度關係圖

狀態二為車隊中只有第一輛車進入瓶頸路段，車流開始進入擁擠狀態，密度增加且速度減少，此時的車隊平均速度與車流密度分別為 $u_{ave} = \frac{(n-1)u + u'}{n}$ 與 $k = \frac{n}{(n-1)gh + h'}$ ，狀態二為車隊遇到瓶頸路段時的減速階段；狀態六為前 $n-1$ 輛車離開瓶頸路段，車流越來越紓解，密度減少且速度增加，此時的車隊平均速度與車流密度分別為 $u_{ave} = \frac{u' + (n-1)u}{n}$ 與 $k = \frac{n}{h' + (n-1)gh}$ ，狀態六為車隊離開瓶頸路段時的加速過程，如圖 4.10 所示。

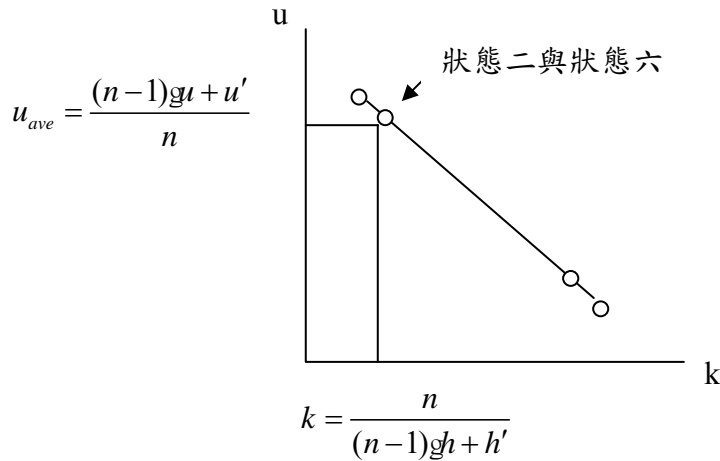


圖 4.10 狀態二與狀態六的速度與密度關係圖

狀態三為車隊中前 $n-1$ 輛車進入到瓶頸路段，車流越來越擁擠，密度增加且速度減少，此時的車隊平均速度與車流密度分別為 $u_{ave} = \frac{u + (n-1)u'}{n}$ 與

$k = \frac{n}{h + (n-1)gh'}$ ，狀態三為車隊遇到瓶頸路段時的減速階段；狀態五為車隊中第一輛車離開瓶頸路段，車流開始進入紓解過程，密度減少且速度增加，此時的車隊平均速度與車流密度分別為 $u_{ave} = \frac{(n-1)gu' + u}{n}$ 與 $k = \frac{n}{(n-1)gh' + h}$ ，狀態五為車隊離開瓶頸路段時的加速過程，如圖 4.11 所示。

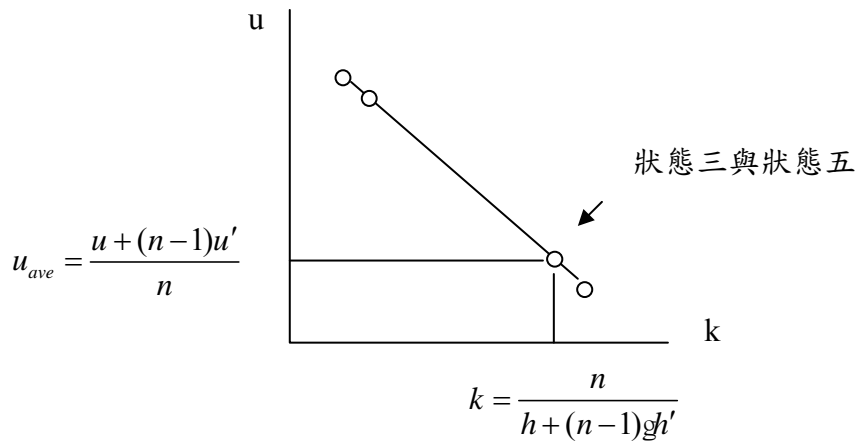


圖 4.11 狀態三與狀態五的速度與密度關係圖

4.1.4 小結

同質性駕駛人的 car-following 理論，在一車隊通過一瓶頸路段時，隨著車隊中進入的車輛數增加，車流密度增加而車隊平均速度減少，到了所有車輛均進入到瓶頸路段時，車流密度最大且車隊平均速度最小，如狀態四，此過程在速度與密度的關係圖可畫出一條線性的關係；而當車隊開始離開瓶頸路段時，車流密度減少且車隊平均速度增加，此時速度與密度的關係圖恰好會延著原來的線性關係返回，也就是狀態一與狀態七、狀態二與狀態六、狀態三與狀態五的速度、密度均相同，在速度與密度的關係圖中看不到“遲滯”現象，因此，同質性駕駛人在 car-following 理論中不會有遲滯反應的現象。

4.2 異質性 car-following 理論之車流現象

觀察一車隊，車隊中總共有 n 輛車，每部車皆相鄰於前、後車之間，道路為單一車道，因此沒有超車行為，其中每輛車視為不同駕駛人與駕駛行為，一開始

的行駛速度分別為 u_1, u_2, \dots, u_n ，此車隊通過一路段，中央有一瓶頸路段，車輛進入到瓶頸路段時分別減速為 u'_1, u'_2, \dots, u'_n ；每輛車與前方車輛保持一車間距分別為 h_1, h_2, \dots, h_n ，當車輛進入到瓶頸路段時，車間距縮短為 h'_1, h'_2, \dots, h'_n ，如圖 4.12 所示。

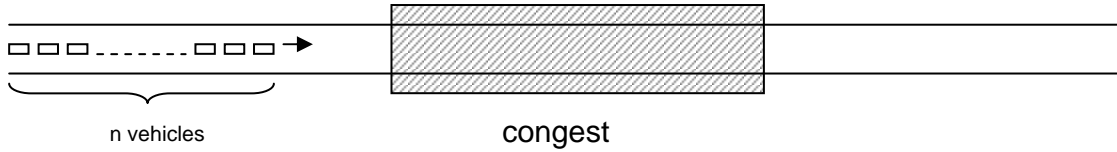


圖 4.12 一車隊 n 部車，每部車間距為 h

假設一：每輛車進入瓶頸路段時減速的速度為原本速度的 α 倍，也就是

$$u'_i = \alpha u_i, \text{ 所以 } u_i - u'_i = (1 - \alpha)u_i。$$

假設二：每輛車進入瓶頸路段時車間距縮短為 h'_i ，且每輛車車間距縮短的差距均相同，也就是 $h_i - h'_i = \Delta h_i, \Delta h_1 = \Delta h_2 = \dots = \Delta h_n$ 。

4.2.1 車隊通過瓶頸路段過程

狀態一：當車隊中所有車輛均尚未進入到瓶頸路段時， n 輛車的速度分別為

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \text{ 平均速度為 } u_{ave} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i; \text{ 車間距總長為 } \sum_{i=1}^n h_i, \text{ 車}$$

$$\text{流密度為 } k = \frac{n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n h_i}, \text{ 如圖 4.13 所示。}$$



$$u_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i; \quad k = \frac{n}{\sum_{i=1}^n h_i}$$

圖 4.13 車隊尚未進入瓶頸路段

狀態二：當車隊中第一輛車進入瓶頸路段時，第一部車輛速度減速為 u_1' ，

其餘車輛均保持原來的速度 u_2, u_3, \dots, u_n ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{u_1' + \sum_{i=2}^n u_i}{n}$ ；第

一部車與第二部車的車間距縮短為 h_1' ，其餘車輛均保持原來的車間距

h_2, h_3, \dots, h_n ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{h_1' + \sum_{i=2}^n h_i}$ ，如圖 4.14 所示。



$$u_{ave} = \frac{u_1' + \sum_{i=2}^n u_i}{n} ; \quad k = \frac{n}{h_1' + \sum_{i=2}^n h_i}$$

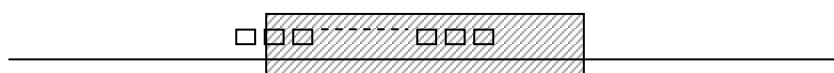
圖 4.14 車隊中第一輛車進瓶頸路段

狀態三：當車隊中前 $n-1$ 輛車進入到瓶頸路段時，前 $n-1$ 輛車速度均減速為

$u_1', u_2', \dots, u_{n-1}'$ ，最後一輛車保持原來的速度 u_n ，此時的平均速度為

$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i' + u_n}{n}$ ；前 $n-1$ 個車間距均縮短為 $h_1', h_2', \dots, h_{n-1}'$ ，最後一輛車保持原來

的車間距 h_n ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} h_i + h_n}$ ，如圖 4.15 所示。



$$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i' + u_n}{n} ; \quad k = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} h_i + h_n}$$

圖 4.15 車隊中第 $n-1$ 部車進入瓶頸路段

狀態四：當車隊中所有車輛均進入到瓶頸路段，所有車輛均減速到 u_i' ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ ；車間距總長為 $\sum_{i=1}^n h_i'$ ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{\sum_{i=1}^n h_i'}$ ，如圖 4.16 所示。



$$u_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i ; \quad k = \frac{n}{\sum_{i=1}^n h_i'}$$

圖 4.16 車隊所有車輛進入瓶頸路段

狀態五：當車隊中第一輛車離開瓶頸路段時，第一部車輛速度加速為 u_1 ，其餘車輛均保持原來的減速速度 u_2', u_3', \dots, u_n' ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{u_1 + \sum_{i=2}^n u_i'}{n}$ ；第一部車與第二部車的車間距增長為 h_1 ，其餘車輛車間距均保持原來縮短的長度 h_2', h_3', \dots, h_n' ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{h_1 + \sum_{i=2}^n h_i'}$ ，如圖 4.17 所示。



$$u_{ave} = \frac{u_1 + \sum_{i=2}^n u_i'}{n} ; \quad k = \frac{n}{h_1 + \sum_{i=2}^n h_i'}$$

圖 4.17 車隊中第一輛車離開瓶頸路段

狀態六：當車隊中前 $n-1$ 輛車離開到瓶頸路段時，前 $n-1$ 輛車速度均加速為 u_1, u_2, \dots, u_{n-1} ，最後一輛車保持原來的減速速度 u_n' ，此時的平均速度為 $u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i + u_n'}{n}$ ；前 $n-1$ 個車間距均縮短為 h_1, h_2, \dots, h_{n-1} ，最後一輛車保持原來的

車間距 h_n' ，此時的車流密度為 $k = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} h_i + h_n'}$ ，如圖 4.18 所示。

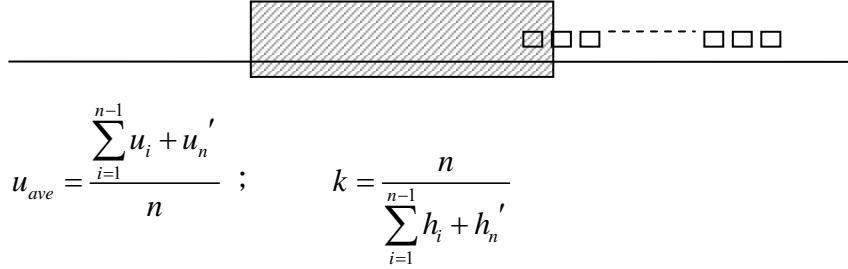


圖 4.18 車隊中第 $n-1$ 部車離開瓶頸路段

狀態七：當車隊中所有車輛均離開瓶頸路段時，所有車輛的速度均加速為 u_i ，平均速度為 $u_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ ；車間距總長為 $\sum_{i=1}^n h_i$ ，車流密度為 $k = \frac{n}{\sum_{i=1}^n h_i}$ ，如圖

4.19 所示。

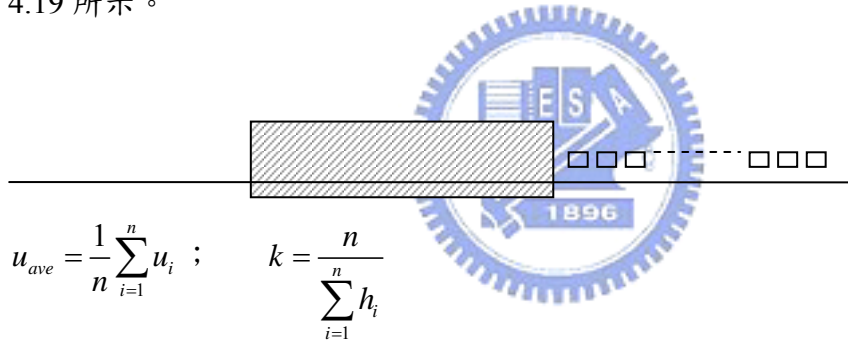


圖 4.19 車隊所有車輛離開瓶頸路段

4.2.2 進入 j 輛車與離開 $n-j$ 輛車時的狀態

當進入 j 輛車時，車隊中尚有車輛未進入瓶頸路段，整個車隊是在減速的階段，此時車隊平均速度為 $u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^j u_i' + \sum_{i=j+1}^n u_i}{n}$ ，車流密度為 $k = \frac{n}{\sum_{i=1}^j h_i' + \sum_{i=j+1}^n h_i}$ ；一

直到所有車輛均進入瓶頸路段之後，車隊開始有車輛離開，當離開 $n-j$ 輛車時，

整個車隊是在加速的階段，此時車隊的平均速度為 $u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} u_i + \sum_{i=n-j+1}^n u_i'}{n}$ ，車流密

度為 $k = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-j} h_i + \sum_{i=n-j+1}^n h'_i}$ 。

整理如表 4.1 所示：

表 4.1 進入 j 輛車與離該 n-j 輛車的平均速度與車流密度

	進入 j 輛車(減速狀態)	離開 n-j 輛車(加速狀態)
平均速度	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^j u'_i + \sum_{i=j+1}^n u_i}{n}$	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} u_i + \sum_{i=n-j+1}^n u'_i}{n}$
車流密度	$k = \frac{n}{\sum_{i=1}^j h'_i + \sum_{i=j+1}^n h_i}$	$k = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-j} h_i + \sum_{i=n-j+1}^n h'_i}$

4.2.3 進入 j 輛車與離開 n-j 輛車之車流密度

	進入 j 輛車(減速狀態)	離開 n-j 輛車(加速狀態)
車間距	$\sum_{i=1}^j h'_i + \sum_{i=j+1}^n h_i$	$\sum_{i=1}^{n-j} h_i + \sum_{i=n-j+1}^n h'_i$

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= \left[\left(\sum_{i=1}^j h'_i - \sum_{i=1}^{n-j} h_i \right) + \left(\sum_{i=j+1}^n h_i - \sum_{i=n-j+1}^n h'_i \right) \right] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^{n-j} (h'_i - h_i) + \sum_{i=j+1}^n (h_i - h'_i) \right] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^{n-j} (-\Delta h_i) + \sum_{i=j+1}^n (\Delta h_i) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

因為車間距相同，所以

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^j h'_i + \sum_{i=j+1}^n h_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-j} h_i + \sum_{i=n-j+1}^n h'_i} \longrightarrow k \Big|_{\text{減速}} = k \Big|_{\text{加速}}$$

得到的結果為：減速時的車流密度與加速時的車流密度相同，所以不管進入幾輛車，在相同狀態之下所得到的車流密度也會相同。

4.2.4 進入 j 輛車與離開 n-j 輛車之平均速度

	進入 j 輛車(減速狀態)	離開 n-j 輛車(加速狀態)
車流速度	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^j u_i' + \sum_{i=j+1}^n u_i}{n}$	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} u_i + \sum_{i=n-j+1}^n u_i'}{n}$

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{ave} &= \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^j u_i' - \sum_{i=1}^{n-j} u_i \right) + \left(\sum_{i=j+1}^n u_i - \sum_{i=n-j+1}^n u_i' \right) \right] \\
 &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n-j} (u_i' - u_i) + \sum_{i=j+1}^n (u_i - u_i') \right] \\
 &= \frac{1}{n} (1-\alpha) \left[\sum_{i=j+1}^n u_i - \sum_{i=1}^{n-j} u_i \right]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

得到的結果為：減速時的平均速度與加速時的平均速度有一個 Δu_{ave} ，當 $j=1$ 時， $\Delta u_{ave} \neq 0$ ，進入一輛車或離開 $n-1$ 輛車時，減速時的平均速度與加速時的平均速度不同，當 $j>1$ 時，要使 $\Delta u_{ave} \neq 0$ 成立的條件為 $\sum_{i=j+1}^n u_i \neq \sum_{i=1}^{n-j} u_i$ 。

4.2.5 範例證明

一車隊有 10 輛車，速度分別為

$u_1 = 60, u_2 = 58, u_3 = 56, u_4 = 54, u_5 = 52, u_6 = 50, u_7 = 48, u_8 = 45, u_9 = 42, u_{10} = 40$ ，單

位為 km/h，則進入 1 輛車與離開 9 輛車的平均速度與車流密度值如表 4.2 所示。

表 4.2 進入 1 輛車與離開 9 輛車的平均速度與車流密度

	進入 1 輛車(減速狀態)	離開 9 輛車(加速狀態)
平均速度	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^1 u_i' + \sum_{i=2}^{10} u_i}{10}$	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^9 u_i + \sum_{i=10}^{10} u_i'}{10}$
車流密度	$k = \frac{10}{\sum_{i=1}^1 h_i' + \sum_{i=2}^{10} h_i}$	$k = \frac{10}{\sum_{i=1}^9 h_i + \sum_{i=10}^{10} h_i'}$

進入 j 輛車與離開 n-j 輛車之車間距如表 4.3 所示

表 4.3 進入 j 輛車與離開 n-j 輛車之車間距

	進入 1 輛車(減速狀態)	離開 9 輛車(加速狀態)
車間距	$\sum_{i=1}^1 h'_i + \sum_{i=2}^{10} h_i$	$\sum_{i=1}^9 h_i + \sum_{i=10}^{10} h'_i$

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= \left[\left(\sum_{i=1}^1 h'_i - \sum_{i=1}^9 h_i \right) + \left(\sum_{i=2}^{10} h_i - \sum_{i=10}^{10} h'_i \right) \right] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^9 (h'_i - h_i) + \sum_{i=2}^{10} (h_i - h'_i) \right] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^9 (-\Delta h_i) + \sum_{i=2}^{10} (\Delta h_i) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$k = \frac{10}{\sum_{i=1}^1 h'_i + \sum_{i=2}^{10} h_i} = k = \frac{10}{\sum_{i=1}^9 h_i + \sum_{i=10}^{10} h'_i} \longrightarrow k \left| \begin{array}{l} \text{減速} \\ \text{加速} \end{array} \right. = k \left| \begin{array}{l} \text{減速} \\ \text{加速} \end{array} \right.$$

進入 j 輛車與離開 n-j 輛車之平均速度如表 4.4 所示

表 4.4 進入 j 輛車與離開 n-j 輛車之平均速度

	進入 1 輛車(減速狀態)	離開 9 輛車(加速狀態)
平均速度	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^1 u'_i + \sum_{i=2}^{10} u_i}{10}$	$u_{ave} = \frac{\sum_{i=1}^9 u_i + \sum_{i=10}^{10} u'_i}{10}$

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{ave} &= \frac{1}{10} \left[\left(\sum_{i=1}^1 u'_i - \sum_{i=1}^9 u_i \right) + \left(\sum_{i=2}^{10} u_i - \sum_{i=10}^{10} u'_i \right) \right] \\
 &= \frac{1}{10} \left[\sum_{i=1}^9 (u'_i - u_i) + \sum_{i=2}^{10} (u_i - u'_i) \right] \\
 &= \frac{1}{10} (1-\alpha) \left[\sum_{i=2}^{10} u_i - \sum_{i=1}^9 u_i \right] = \frac{1}{10} (1-\alpha) [u_{10} - u_1] = \frac{20}{10} (1-\alpha)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Δu_{ave} 如圖 4.20 所示。

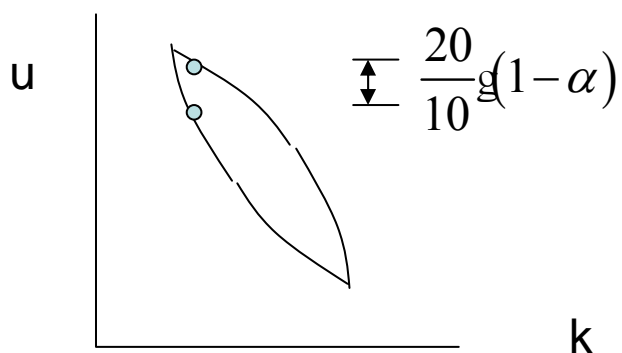


圖 4.20 進入 1 輛車與離開 9 輛車的車隊平均速度差值

同理，進入 2, 3, ..., 9 輛車的 Δu_{ave} 分別如表 4.5 所示。

表 4.5 進入 2, 3, ..., 9 輛車的 Δu_{ave}

	平均速度差值 Δu_{ave}
進入 2 輛車(離開 8 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{36}{10}g(1-\alpha)$
進入 3 輛車(離開 7 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{47}{10}g(1-\alpha)$
進入 4 輛車(離開 6 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{53}{10}g(1-\alpha)$
進入 5 輛車(離開 5 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{55}{10}g(1-\alpha)$
進入 6 輛車(離開 4 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{53}{10}g(1-\alpha)$
進入 7 輛車(離開 3 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{47}{10}g(1-\alpha)$
進入 8 輛車(離開 2 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{36}{10}g(1-\alpha)$
進入 9 輛車(離開 1 輛車)	$\Delta u_{ave} = \frac{20}{10}g(1-\alpha)$

可繪出速度與密度的關係如圖 4.21 所示

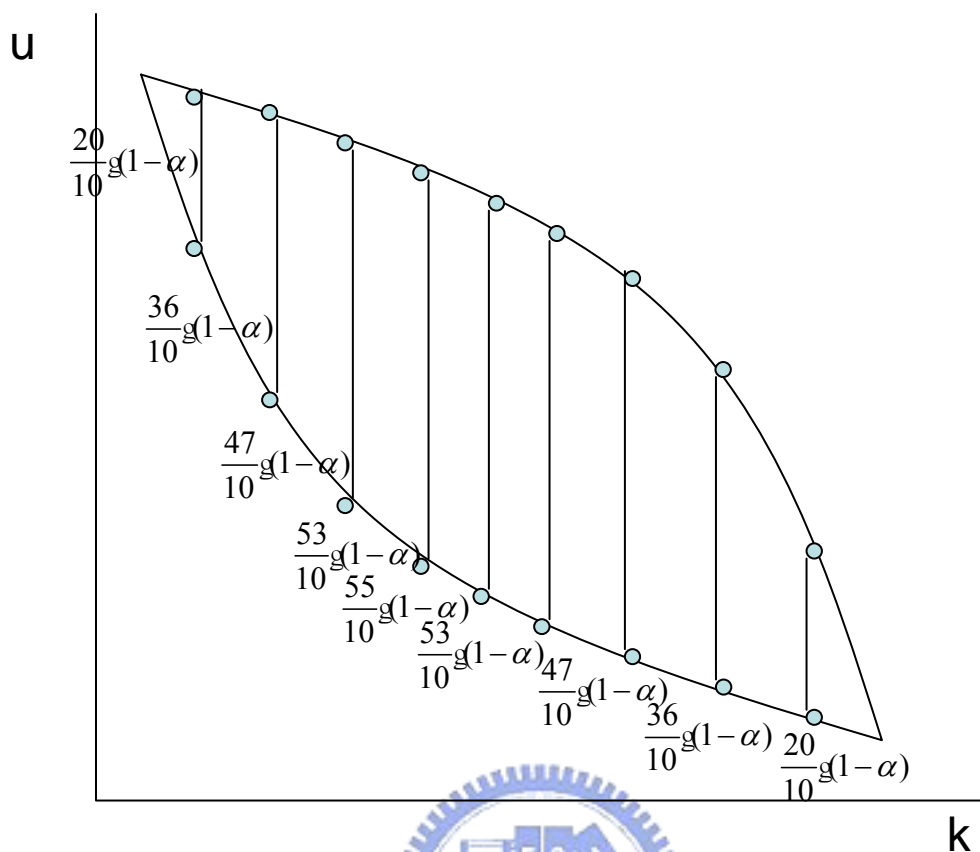


圖 4.21 進入 2,3,...,9 輛車與離開 8,7,...,1 輛車的平均速度差值

4.3 小結

當一個車隊經過一瓶頸路段時，每一輛車的速度會因為進入到瓶頸路段而有減速的動作，導致車隊的平均速度減少，而每一輛車與前車的車間距也會縮短，導致車隊的車流密度增加；相反的離開瓶頸路段之後，車隊的平均速度漸漸增加，而車流密度也漸漸減少，由微觀來看整個車隊在進入然後又離開瓶頸路段的過程，可得到車隊平均速度與車流密度的變化情形。

若在同質性駕駛人行為之下，每一輛車的速度與減速度都相同，由微觀的分析之下可證明車隊的平均速度與車流密度的關係是一對一(one-to-one)線性的關係，不管在減速過程亦或是加速過程，只要在車流密度相同之下，其車隊平均速度也會相同，不會形成“遲滯”的現象；若在異質性駕駛人行為之下，每一輛車的速度均不相同，當進入瓶頸路段之後車隊採取的減速過程在速度與密度關係圖的曲線，與離開瓶頸路段所採取的加速過程在速度與密度的關係圖的曲線並不相

同，證明的結果顯示在減速過程與加速過程中的車流密度相同處，其車隊平均速度會有一個差值 Δu_{ave} ，且 Δu_{ave} 在範例證明之圖中可看出有明顯的迴圈(loop)的現象，可證明在加入異質性駕駛行為特性下，微觀的車隊經過瓶頸路段的過程具有“遲滯”現象，且每一輛車之間的駕駛行為差異越大，則遲滯的現象越明顯。



第五章 數值範例

5.1 Car-following 理論基礎

Car-following 理論即是在與前車保持某一空間間距下，駕駛者會以某一速率行駛，當前車具有一個加速或減速的動作，產生了一個刺激(stimuli)，乘上駕駛者本身的感受(sensitivity)，即是駕駛者做出來的反應(responsibility)，其反應則為駕駛者的加速或減速的動作。

5.1.1 GM model 取 $m=0, l=0$

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{\alpha(l, m) [\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.1)$$

取 $M=0, L=0$ ，則

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta t) = \alpha [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.2)$$

5.1.2 車隊通過瓶頸路段過程

在一車隊通過一瓶頸路段時，每輛車的駕駛人的感受不同，分別為 α_i 表示，



表 5.1 Vehicle n 的初始速度與感受程度

	Initial speed	Sensitivity
Vehicle 1	U	α_1
Vehicle 2	U	α_2
.....
.....
.....
Vehicle $n-1$	U	α_{n-1}
Vehicle n	U	α_n

$$h_i = \alpha_i g \left(\frac{u_i}{10} \right) \quad (5.3)$$

狀態一：所有車輛均尚未進入瓶頸路段，速度、車間距不變。



$$u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = u_n = u ; \quad u_{ave} = \frac{1}{n} [u + u + \dots + u] = u \quad (5.4)$$

$$k = \frac{n}{\alpha_1 g \frac{u_1}{10} + \alpha_2 g \frac{u_2}{10} + \dots + \alpha_n g \frac{u_n}{10}} = \frac{10n}{\alpha_1 g u_1 + \alpha_2 g u_2 + \dots + \alpha_n g u_n} \quad (5.5)$$

狀態二：第一輛車進入瓶頸路段，開始減速、車間距縮短，其餘車輛速度、車間距不變。



$$u_1 = u g (1 - \beta) ; \quad u_2 = u_3 = \dots = u_n = u$$

$$k = \frac{10n}{\alpha_1 g u_1 + \alpha_2 g u_2 + \dots + \alpha_n g u_n} = \frac{10n}{u g (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - u g \alpha_1 g \beta} \quad (5.6)$$

由於第一輛車速度改變，產生了一個刺激給第二輛車，因此會產生一個減速度

$\ddot{x}_2(t + \Delta t) = -u g \alpha_2 g \beta$ ，因此在下一個時間點第二輛車減速至

$$u_2(t + \Delta t) = u_2(t) + \ddot{x}_2(t + \Delta t) g \Delta t = u(1 - \alpha_2 g \beta g \Delta t) \quad (5.7)$$

狀態三：第一輛車與第二輛車進入瓶頸路段，開始減速、車間距縮短，其餘車輛速度、車間距不變。



$$u_1 = u(1 - \beta), u_2 = u(1 - \alpha_2 g \beta g \Delta t) ; \quad u_3 = u_4 = \dots = u_n = u$$

$$u_{ave} = \frac{1}{n} [u(1 - \beta) + u(1 - \alpha_2 g \beta g \Delta t) + u + \dots + u] = u \left[1 - \frac{\beta}{n} (1 + \alpha_2 g \Delta t) \right] \quad (5.8)$$

$$k = \frac{10n}{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n} = \frac{10n}{u(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - u\beta(\alpha_1 + \alpha_2^2 \Delta t)} \quad (5.9)$$

第二輛車因為第一輛車的速度而產生一個減速度 $\ddot{x}_2(t + \Delta t) = \alpha_2 \beta u [\alpha_2 \Delta t - 1]$ ，因此在下一個時間點第二輛車減速至

$$u_2(t + \Delta t) = u_2(t) + \ddot{x}_2(t + \Delta t) \Delta t = u [1 - 2\alpha_2 \beta \Delta t - \beta \alpha_2^2 \Delta t^2] \quad (5.10)$$

第三輛車因為第二輛車減速而產生了一個減速度 $\ddot{x}_3(t + \Delta t) = -u \alpha_2 \alpha_3 \beta \Delta t$ ，因此在下一個時間點第三輛車減速至

$$u_3(t + \Delta t) = u_3(t) + \ddot{x}_3(t + \Delta t) \Delta t = u [1 - \alpha_2 \alpha_3 \beta \Delta t^2] \quad (5.11)$$

進入 3 輛車、4 輛車、.....、n-1 輛車、n 輛車的狀態同理類推。

5.1.3 數值範例

一車隊 10 輛車，經過一瓶頸路段，初始速度均為 10(m/s)，每輛車駕駛人的感程度不一樣，分別為 $\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = 0.9, \dots, \alpha_{10} = 0.1$ ，且駕駛行為受到前車的影響，滿足 Car-following 理論。

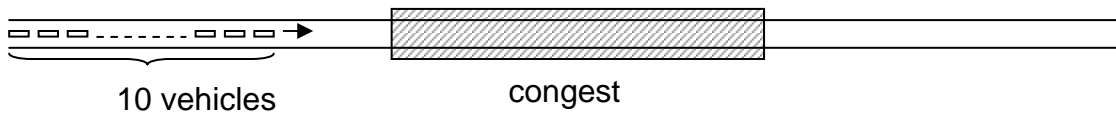


表 5.2 Vehicle1~9 的初始速度與感受程度

	Initial speed	Sensitivity
Vehicle 1	10	$\alpha_1 = 1.0$
Vehicle 2	10	$\alpha_2 = 0.9$
.....
.....
Vehicle 9	10	$\alpha_9 = 0.2$
Vehicle 10	10	$\alpha_{10} = 0.1$

5.1.4 模擬結果

表 5.3 進入 n 輛車與離開 n-j 輛車的平均速度，n=1~10(單位 m/s)

減速狀態	加速狀態	備註
10	9.684019	進入 0 良車與離開 10 輛車
8.901935	9.639779	進入 1 輛車與離開 9 輛車
8.502903	9.587541	進入 2 輛車與離開 8 輛車
8.241978	9.525157	進入 3 輛車與離開 7 輛車
8.050107	9.449561	進入 4 輛車與離開 6 輛車
7.900425	9.356172	進入 5 輛車與離開 5 輛車
7.779501	9.23767	進入 6 輛車與離開 4 輛車
7.67953	9.081206	進入 7 輛車與離開 3 輛車
7.595522	8.860624	進入 8 輛車與離開 2 輛車
7.524069	8.507742	進入 9 輛車與離開 1 輛車
7.462727	7.462727	進入 10 輛車與離開 0 輛車

表 5.4 進入 n 輛車與離開 n-j 輛車的車流密度 n=1~10(單位 veh/m)

減速狀態	加速狀態	備註
0.060386	0.062093	進入 0 良車與離開 10 輛車
0.06489	0.062339	進入 1 輛車與離開 9 輛車
0.067403	0.062633	進入 2 輛車與離開 8 輛車
0.069154	0.062987	進入 3 輛車與離開 7 輛車
0.070501	0.063422	進入 4 輛車與離開 6 輛車
0.071589	0.063968	進入 5 輛車與離開 5 輛車
0.072493	0.064674	進入 6 輛車與離開 4 輛車
0.073257	0.06563	進入 7 輛車與離開 3 輛車
0.073912	0.067027	進入 8 輛車與離開 2 輛車
0.074479	0.069391	進入 9 輛車與離開 1 輛車
0.074972	0.074972	進入 10 輛車與離開 0 輛車

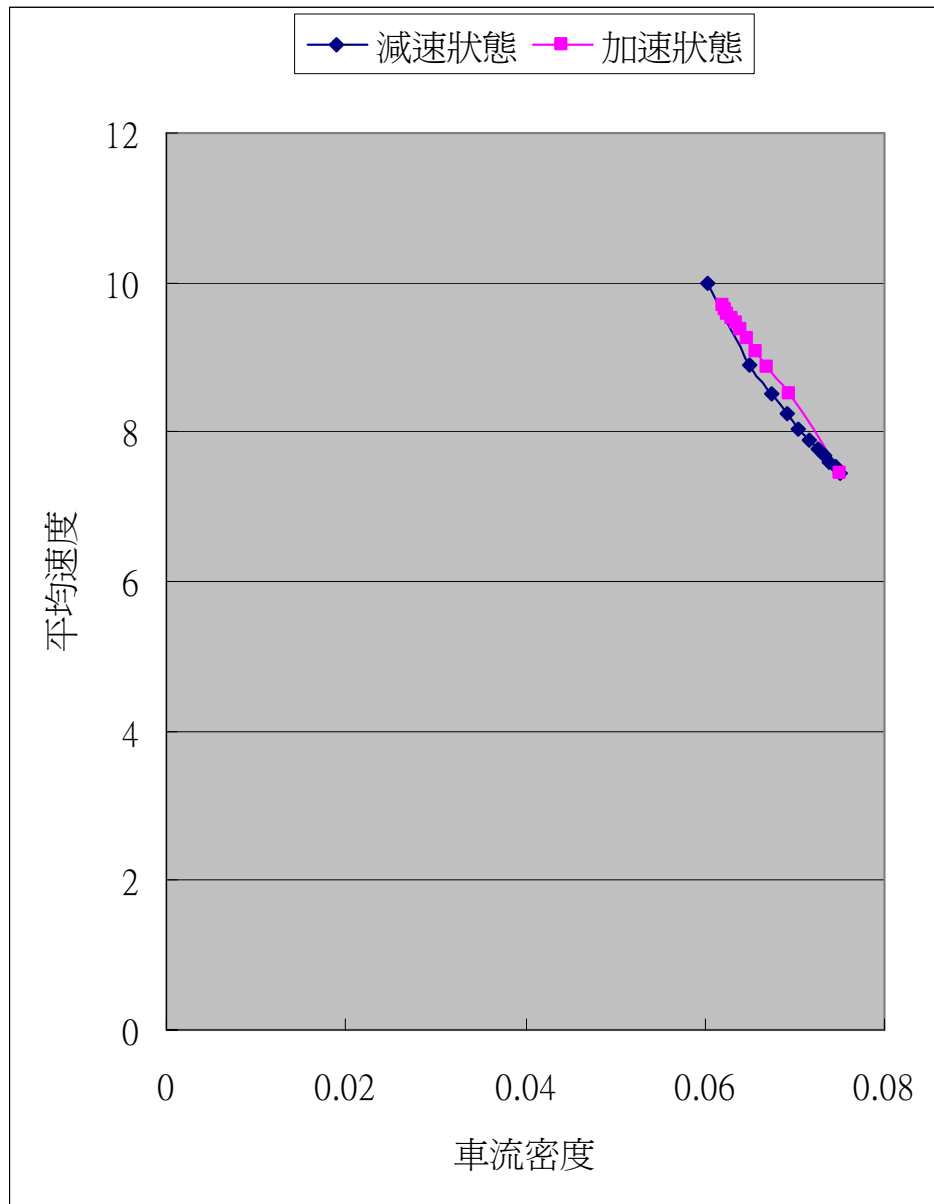


圖 5.1 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=0, l=0$)

如果為同質性駕駛人，則 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{10} = 0.8$

模擬結果之速度與密度關係圖為

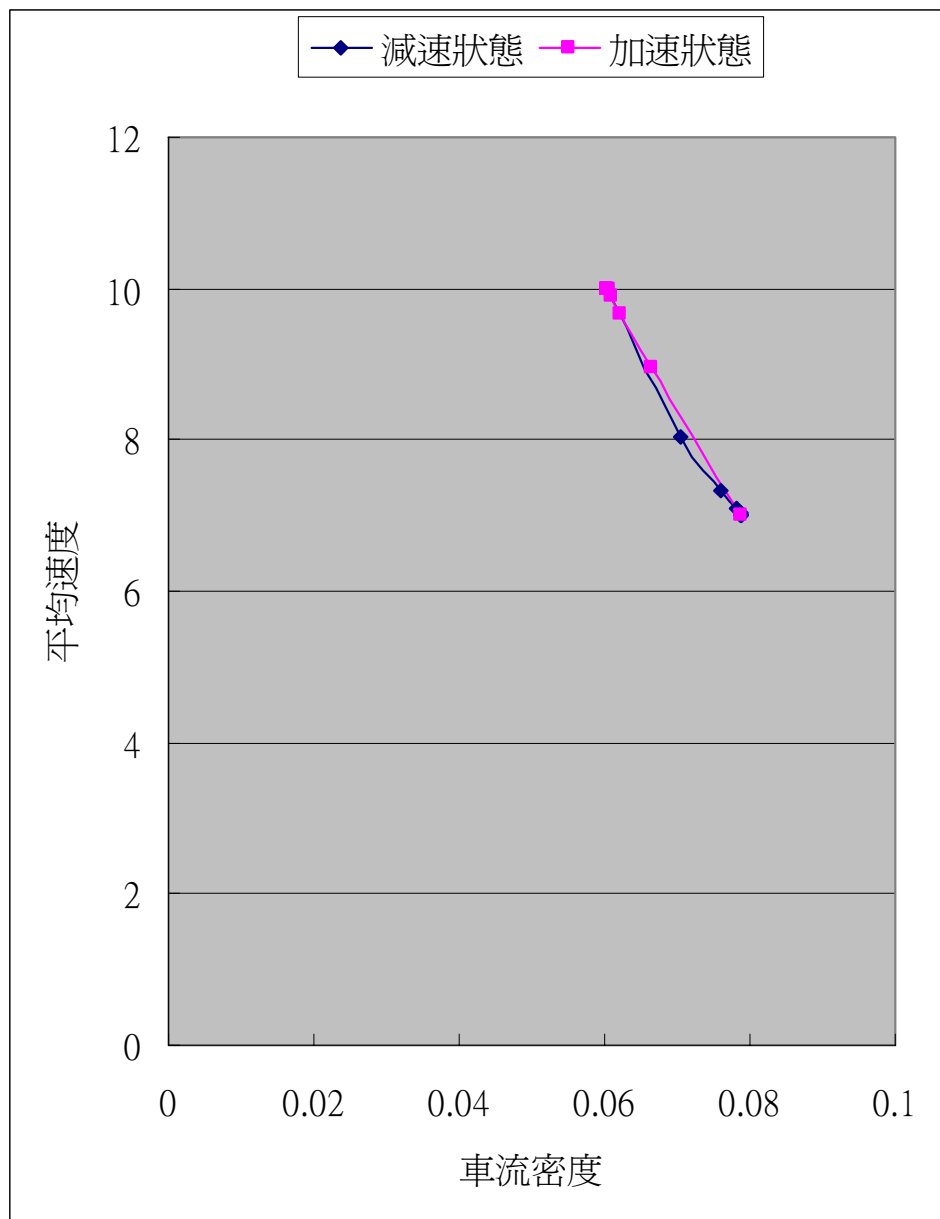


圖 5.2 同質性駕駛人的速度與密度關係圖(m=0, l=0)

5.2.1 GM model 取 $m=0, l=1$

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha(l, m) [\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t)]^m}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l} [\ddot{x}_n(t) - \ddot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.12)$$

取 $M=0, L=1$ ，則

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))} [\ddot{x}_n(t) - \ddot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.13)$$

表 5.5 Vehicle1~9 的初始速度與感受程度

	Initial speed	Sensitivity
Vehicle 1	10	$\alpha_1=10$
Vehicle 2	10	$\alpha_2=9$
.....
.....
Vehicle 9	10	$\alpha_9=2$
Vehicle 10	10	$\alpha_{10}=1$

5.2.2 模擬結果

表 5.6 進入 n 輛車與離開 n-j 輛車的平均速度，n=1~10(單位 m/s)

減速狀態	加速狀態	備註
10	9.492234	進入 0 良車與離開 10 輛車
9.454572	9.447397	進入 1 輛車與離開 9 輛車
9.218551	9.396803	進入 2 輛車與離開 8 輛車
9.007039	9.339273	進入 3 輛車與離開 7 輛車
8.82154	9.273249	進入 4 輛車與離開 6 輛車
8.658962	9.196604	進入 5 輛車與離開 5 輛車
8.515743	9.106312	進入 6 輛車與離開 4 輛車
8.388793	8.997781	進入 7 輛車與離開 3 輛車
8.275586	8.863267	進入 8 輛車與離開 2 輛車
8.174084	8.686379	進入 9 輛車與離開 1 輛車
8.082641	8.082641	進入 10 輛車與離開 0 輛車

表 5.7 進入 n 輛車與離開 n-j 輛車的車流密度 n=1~10(單位 veh/m)

減速狀態	加速狀態	備註
0.060386	0.063176	進入 0 良車與離開 10 輛車
0.061703	0.063435	進入 1 輛車與離開 9 輛車
0.063025	0.063729	進入 2 輛車與離開 8 輛車
0.064259	0.064067	進入 3 輛車與離開 7 輛車
0.065381	0.06446	進入 4 輛車與離開 6 輛車
0.066397	0.064922	進入 5 輛車與離開 5 輛車
0.067319	0.065475	進入 6 輛車與離開 4 輛車
0.068158	0.066152	進入 7 輛車與離開 3 輛車
0.068923	0.06701	進入 8 輛車與離開 2 輛車
0.069625	0.068174	進入 9 輛車與離開 1 輛車
0.070269	0.070269	進入 10 輛車與離開 0 輛車

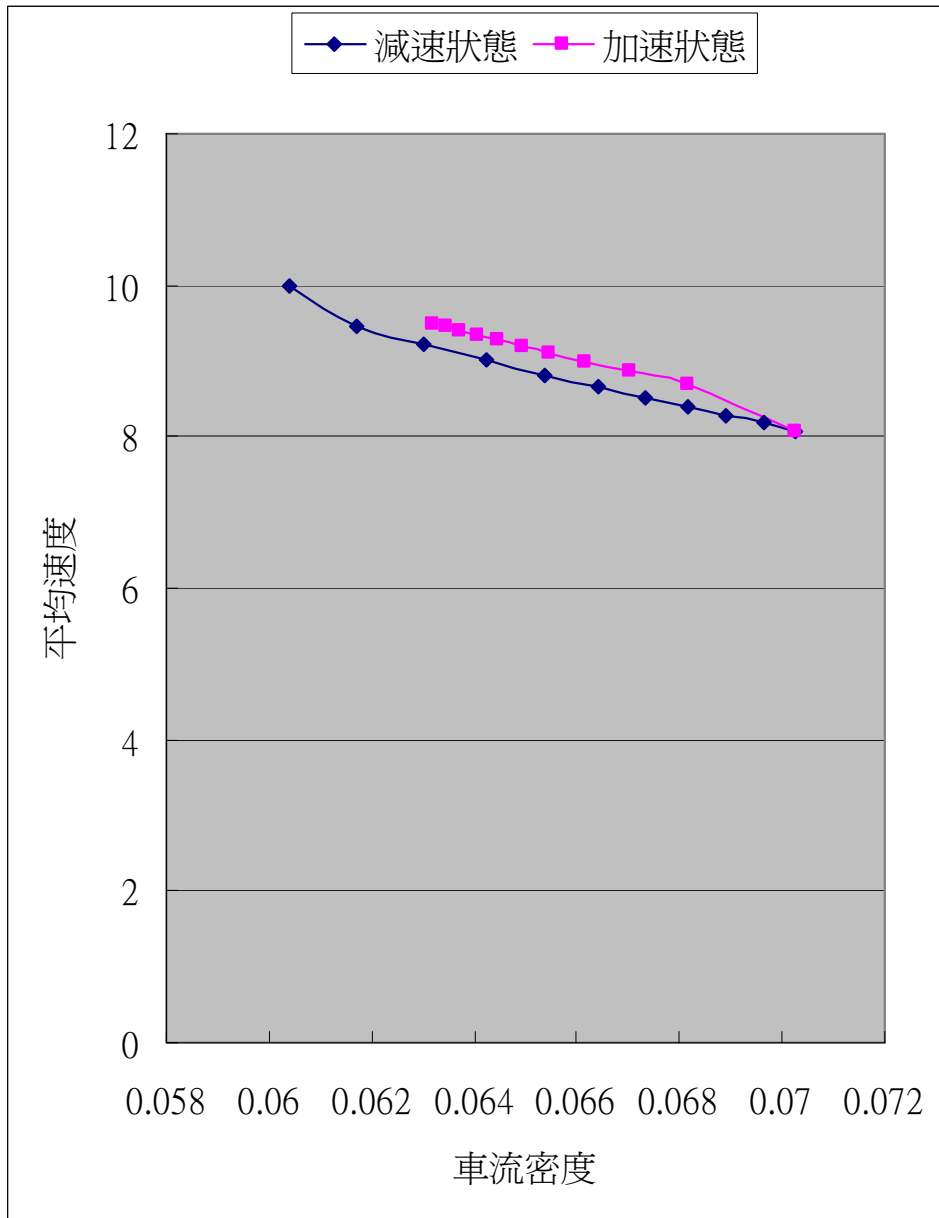


圖 5.3 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=0, l=1$)

如果為同質性駕駛人，則 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{10} = 13$

模擬結果之速度與密度關係圖為

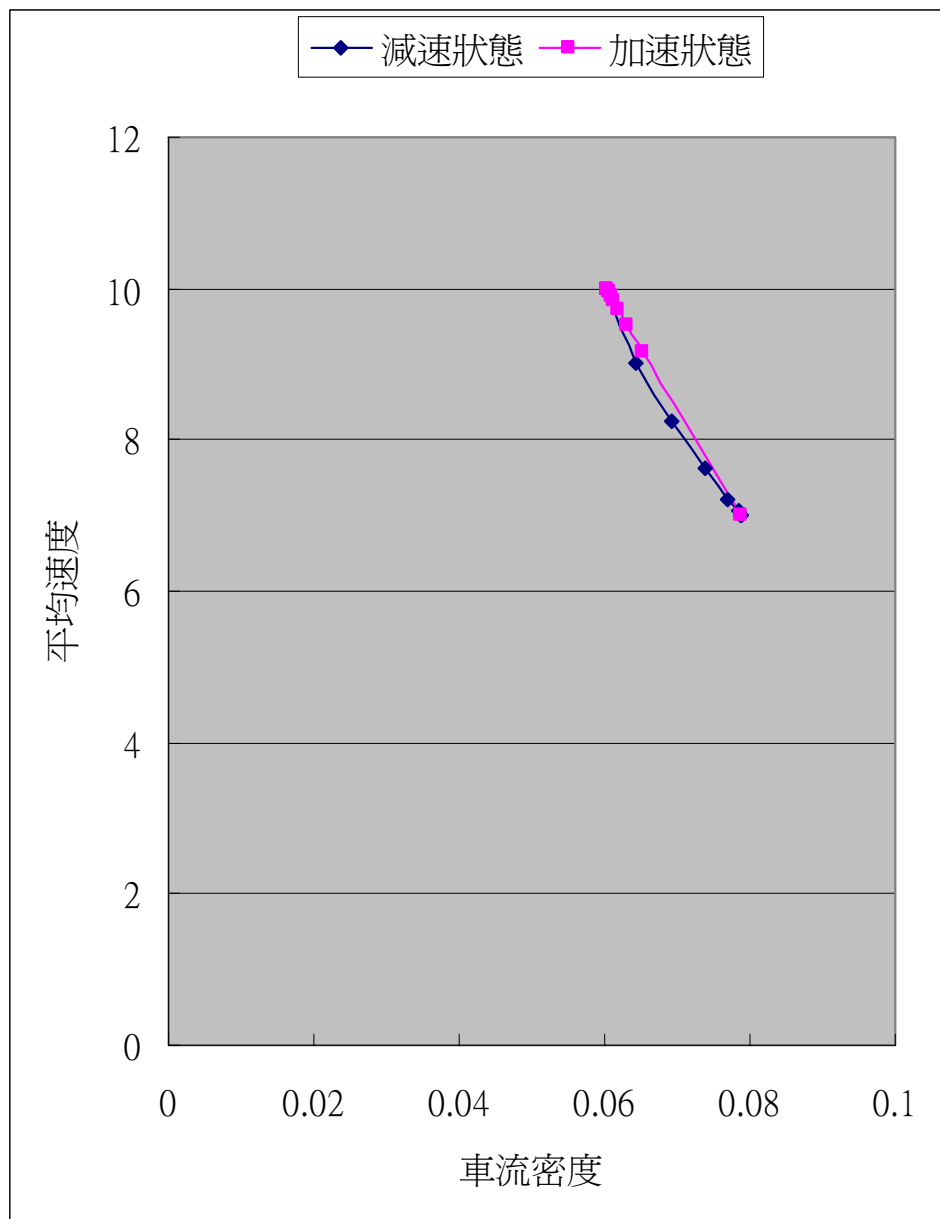


圖 5.4 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=0, l=1$)

5.3.1 GM model 取 $m=1, l=0$

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha(l, m) [\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t)]^m}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l} [\ddot{x}_n(t) - \ddot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.14)$$

取 $M=1, L=0$ ，則

$$\ddot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \alpha [\ddot{x}_{n+1}(t)] [\ddot{x}_n(t) - \ddot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.15)$$

表 5.8 Vehicle1~9 的初始速度與感受程度

	Initial speed	Sensitivity
Vehicle 1	10	$\alpha_1=0.1$
Vehicle 2	10	$\alpha_2=0.09$
.....
.....
Vehicle 9	10	$\alpha_9=0.02$
Vehicle 10	10	$\alpha_{10}=0.01$

5.3.2 模擬結果

表 5.9 進入 n 輛車與離開 n-j 輛車的平均速度，n=1~10(單位 m/s)

減速狀態	加速狀態	備註
10	9.550271	進入 0 良車與離開 10 輛車
8.901935	9.491091	進入 1 輛車與離開 9 輛車
8.596964	9.422017	進入 2 輛車與離開 8 輛車
8.374331	9.34061	進入 3 輛車與離開 7 輛車
8.199358	9.243478	進入 4 輛車與離開 6 輛車
8.056524	9.125699	進入 5 輛車與離開 5 輛車
7.937101	8.979757	進入 6 輛車與離開 4 輛車
7.835571	8.793444	進入 7 輛車與離開 3 輛車
7.748179	8.546711	進入 8 輛車與離開 2 輛車
7.672237	8.226744	進入 9 輛車與離開 1 輛車
7.605744	7.605744	進入 10 輛車與離開 0 輛車

表 5.10 進入 n 輛車與離開 n-j 輛車的車流密度 n=1~10(單位 veh/m)

減速狀態	加速狀態	備註
0.060386	0.062844	進入 0 良車與離開 10 輛車
0.06489	0.063182	進入 1 輛車與離開 9 輛車
0.066793	0.063582	進入 2 輛車與離開 8 輛車
0.068255	0.06406	進入 3 輛車與離開 7 輛車
0.069449	0.064639	進入 4 輛車與離開 6 輛車
0.070455	0.065355	進入 5 輛車與離開 5 輛車
0.071319	0.066265	進入 6 輛車與離開 4 輛車
0.072071	0.067465	進入 7 輛車與離開 3 輛車
0.072731	0.069122	進入 8 輛車與離開 2 輛車
0.073314	0.071395	進入 9 輛車與離開 1 輛車
0.073832	0.073832	進入 10 輛車與離開 0 輛車

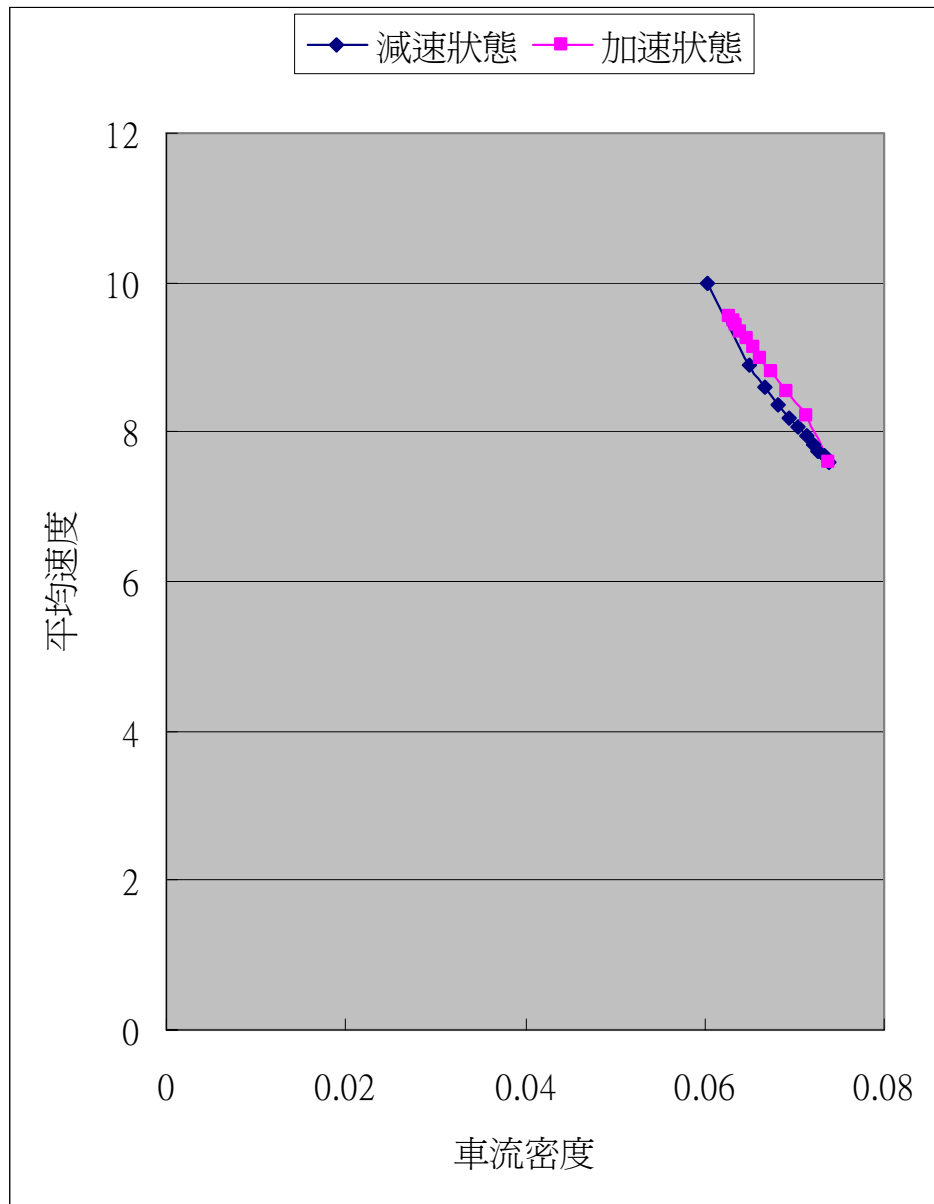


圖 5.5 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=1, l=0$)

如果為同質性駕駛人，則 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{10} = 0.09$

模擬結果之速度與密度關係圖為

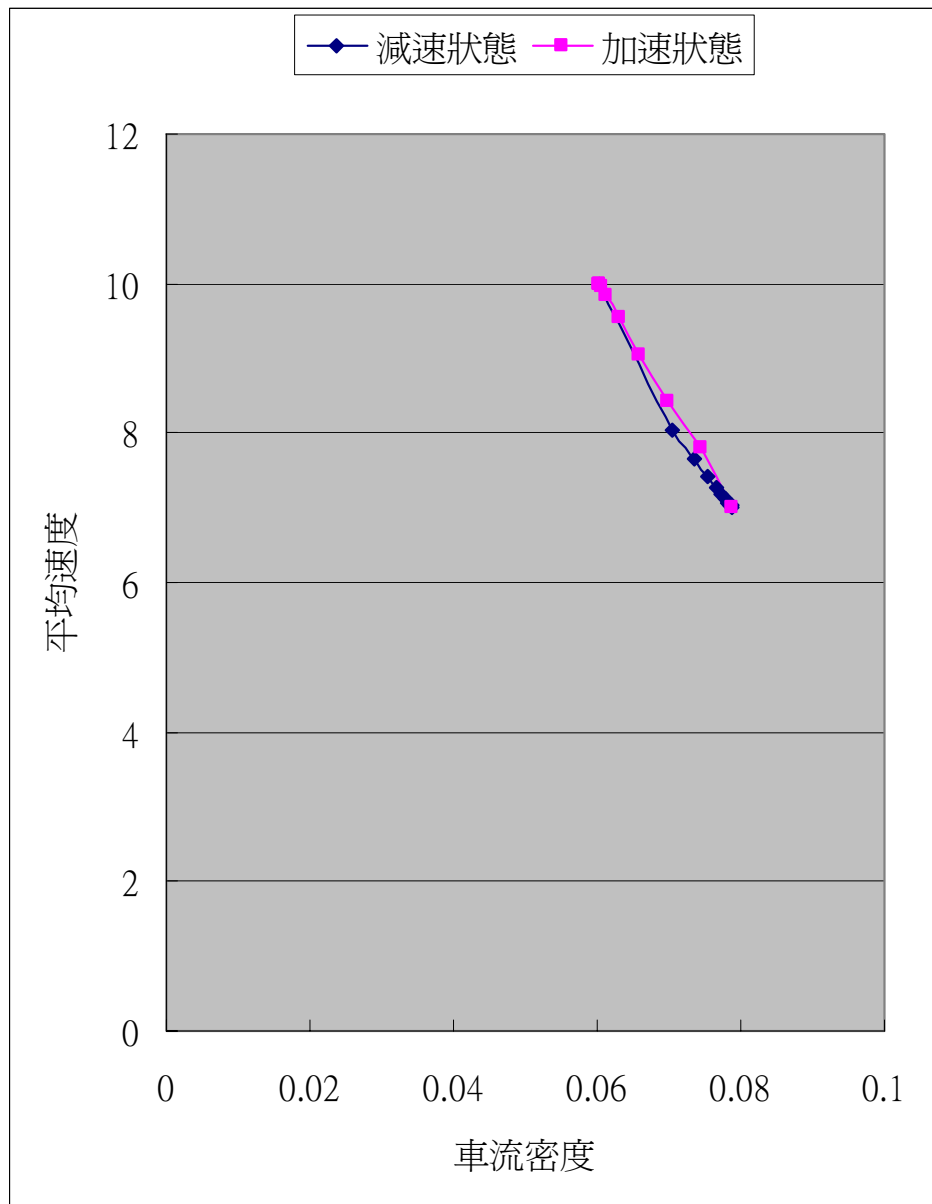


圖 5.6 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=1, l=0$)

5.4.1 GM model 取 $m=1, l=1$

$$\dot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha(l, m) [\dot{x}_{n+1}(t+\Delta t)]^m}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.16)$$

取 $M=1, L=1$ ，則

$$\dot{x}_{n+1}(t+\Delta t) = \frac{\alpha [\dot{x}_{n+1}(t)]}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (5.17)$$

表 5.11 Vehicle1~9 的初始速度與感受程度

	Initial speed	Sensitivity
Vehicle 1	10	$\alpha_1=1.0$
Vehicle 2	10	$\alpha_2=0.9$
.....
.....
Vehicle 9	10	$\alpha_9=0.2$
Vehicle 10	10	$\alpha_{10}=0.1$

5.4.2 模擬結果

表 5.12 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的平均速度， $n=1\sim10$ (單位 m/s)

減速狀態	加速狀態	備註
10	9.398497	進入 0 良車與離開 10 輛車
9.454572	9.349794	進入 1 輛車與離開 9 輛車
9.248558	9.295777	進入 2 輛車與離開 8 輛車
9.06957	9.235624	進入 3 輛車與離開 7 輛車
8.911471	9.168339	進入 4 輛車與離開 6 輛車
8.770382	9.092724	進入 5 輛車與離開 5 輛車
8.643528	9.007341	進入 6 輛車與離開 4 輛車
8.528794	8.910513	進入 7 輛車與離開 3 輛車
8.424513	8.800481	進入 8 輛車與離開 2 輛車
8.329341	8.67627	進入 9 輛車與離開 1 輛車
8.242172	8.242172	進入 10 輛車與離開 0 輛車

表 5.13 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的車流密度 $n=1\sim10$ (單位 veh/m)

減速狀態	加速狀態	備註
0.060386	0.063719	進入 0 良車與離開 10 輛車
0.061703	0.064005	進入 1 輛車與離開 9 輛車
0.062854	0.064326	進入 2 輛車與離開 8 輛車
0.063889	0.064686	進入 3 輛車與離開 7 輛車
0.064832	0.065094	進入 4 輛車與離開 6 輛車
0.065697	0.065559	進入 5 輛車與離開 5 輛車
0.066495	0.066091	進入 6 輛車與離開 4 輛車
0.067234	0.066706	進入 7 輛車與離開 3 輛車
0.06792	0.067419	進入 8 輛車與離開 2 輛車
0.068558	0.068242	進入 9 輛車與離開 1 輛車
0.069153	0.069153	進入 10 輛車與離開 0 輛車

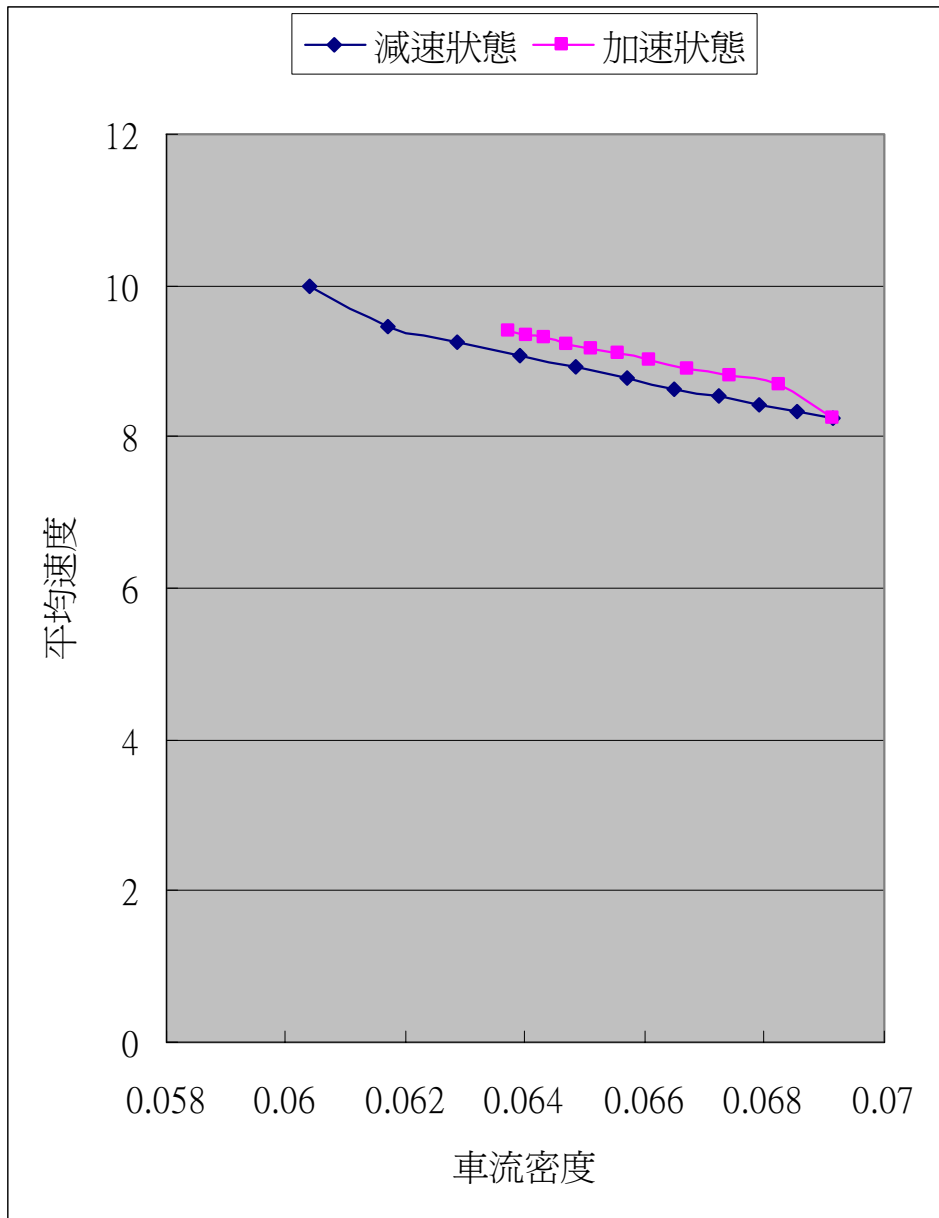


圖 5.7 進入 n 輛車與離開 $n-j$ 輛車的速度與密度關係圖($m=1, l=1$)

如果為同質性駕駛人，則 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{10} = 1.5$

模擬結果之速度與密度關係圖為

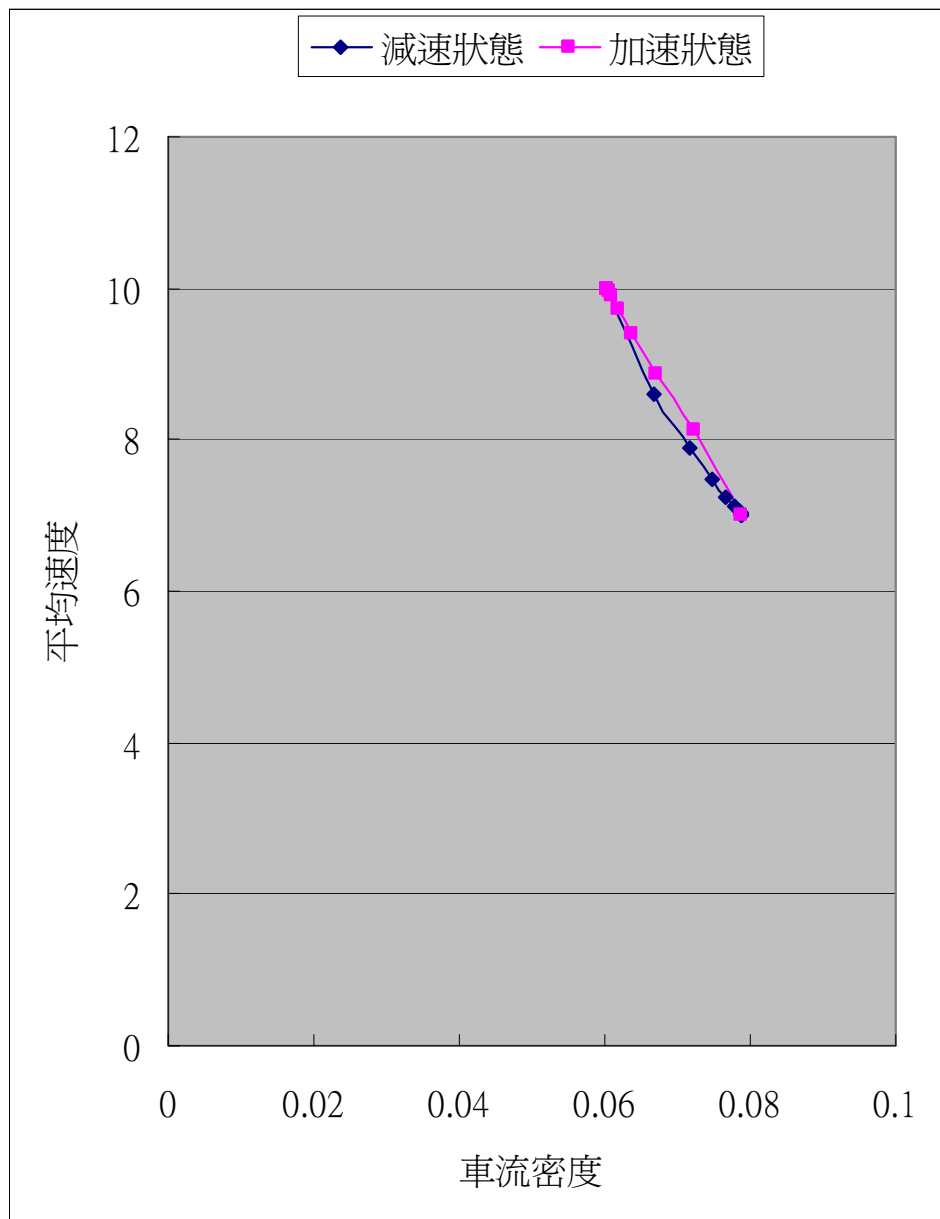


圖 5.8 同質性駕駛人的速度與密度關係圖($m=1, l=1$)

5.5 小結

範例結果顯示加入異質性駕駛人特性($\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_{10}$)之後，且駕駛行為滿足微觀 Car-following 理論之下，模擬出來的結果如圖可明顯看出當車隊遇到瓶頸路段時所採取的“減速過程”，與離開瓶頸路段之後的“加速過程”為兩個不同之路徑，形成一個迴圈(loop)，因此具有“遲滯”現象；而相反的，在加入同質性駕駛人特性($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{10}$)之下，模擬出來的結果如圖可看出減速過程與加速過程為兩條重疊的線性關係，也就是車隊遇到瓶頸路段時所採取減速過程，當車隊離開瓶頸路段然後加速的過程，是沿著原本的減速過程的曲線回去，不會形成迴圈(loop)，也就沒有遲滯現象。



第六章 結論與建議

6.1 結論

1. 本研究以巨觀之 LWR 模式與微觀之 Car-following 理論來探討異質性駕駛人行為之車流遲滯現象，不論是 LWR 或 Car-following 理論在加入了異質性駕駛行為之特性之後，所得到的車流速度與密度的關係圖都具有“遲滯”的現象。
2. 巨觀之 LWR 模式的遲滯現象，是以有限差分法求解過程分析來得到遲滯效應的結果，其結果顯示在只有兩種速度等級駕駛人的情況之下，相同的車流密度對應到兩種不同的速度，分別為減速過程與加速過程的車隊平均速度，因此，可證明異質性駕駛行為在巨觀之 LWR 模式中具有遲滯現象。
3. 微觀之 Car-following 理論在同質性的駕駛行為下，只要減速過程與加速過程有相同的車流密度值，其對應的車隊平均速度也會相同，也就是減速過程與加速過程在速度與密度關係圖中式兩條相同且恰好重疊的曲線，因此，可證明同質性駕駛行為在微觀之 Car-following 理論中沒有遲滯現象。
4. 微觀之 Car-following 理論的遲滯現象，是以觀察一車隊經過瓶頸路段時，車隊中的車輛會有個別的減速再加速的過程，因此，車隊平均速度也會有減速再加速的過程，在減速過程與加速過程中具有相同的車流密度值，對應到減速過程與加速過程的車隊平均速度具有一個差值為 Δu_{ave} ，當 $\Delta u_{ave} \neq 0$ 時，則表示對應到的車隊平均速度不同，因此，可證明異質性駕駛行為在微觀之 Car-following 理論中具有遲滯現象。
5. 由數值範例中顯示，只要駕駛人的感受(sensitivity)不同，在速度與密度關係圖中可明顯看出遲滯效應的現象；反之則不會有遲滯現象。

6.2 建議

1. 本研究分成兩部份探討遲滯現象，分別為巨觀之 LWR 模式與微觀之 Car-following 理論，在巨觀之 LWR 模式之分析中，車流速度與密度的觀察者(observer)是在一固定的地點觀察，與微觀之 Car-following 理論之分析中，車流速度與密度的觀察者(observer)會隨著車隊移動而改變觀察地點，因此，此二理論的分析方法也不同。
2. 巨觀之 LWR 模式中的車隊“平均速度”的定義有很多種，本研究只針對其中一種來探討，未來可改變車隊平均速度的定義，進而探討不同的平均速度定義是否還具有遲滯效應的現象。
3. 微觀之 Car-following 理論中的後車速度受到前車影響的根據由 Car-following 理論中刺激與反應的關係式中得到，本研究取式中的 $m=0, l=0$ ，簡化了刺激與反應的關係式，未來可改變 m 與 l 的值，使得關係式更加複雜、更切合於實際車流現象，並進而探討不同的刺激與反應的關係式是否還具有遲滯效應的現象。
4. 在數值範例中，若改變不同的駕駛人感受(sensitivity)，得到的速度與密度的關係圖中的遲滯迴圈則不相同，未來可研究不同的感受與不同的遲滯迴圈之間的關係，並增加駕駛行為的等級數以更接近真實車流現象，再得到速度與密度的關係圖，與實際車流現象所偵測到的關係圖作比較，並分析之。

Reference:

1. 盧金辰，車流方程式數值解之研究—以 LWR 及其包含擴散項之模式為例，交通大學運輸科技與管理研究所碩士論文，民國八十九年六月。
2. 林崇儒，有限差分法與有限元素法在車流波方程模式數值解之應用與比較研究，交通大學運輸科技與管理研究所碩士論文，民國九十年六月。
3. A. Visintin, "Models of hysteresis", Longman Scientific & Technical, 1993.
4. A. Visintin, "Differential Models of Hysteresis", Springer-Verlag, 1994.
5. Brokate, Martin, Sprekels.J, "Phase transitions and hysteresis", Springer-Verlag, 1994.
6. Brokate, Martin, Sprekels.J, "Hysteresis and phase transitions", Springer-Verlag, 1996.
7. Daganzo, C. F., "A Finite Difference Approximation of The Kinematics Wave Model of Traffic Flow", Transportation Research B, Vol.29B, No.4, pp.261-276,1995.
8. Drake, J.S., Schofer, J.L., May, A.D.,1967. A statistical analysis of speed density hypothesis. Highway Research Record 154, 53-87.
9. Greenberg, H., 1959. An analysis of traffic flow. Operations Research 7(1), 79-85.
10. Greenshields, B.D., 1934. A study of traffic capacity. Proceedings of the Highway Research Board 14, 448-477.
11. Juang J. C., Chiang Y. H., "Predictive Control of a Hysteretic Model – with Applications to Intelligent Transportation System", 2003 IEEE.
12. Lighthill, M.J., Whitham, G.B., 1955. On kinematics waves: II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Proceedings of the Royal Society, London, Series A 229(1178), 317-345.
13. Mayergoyz. I. D., "Mathematical models of hysteresis", Springer-Verlag, 1991.
14. Richards, P.I., 1956. Shock waves on highway. Operations Research 4, 42-51.
15. Treiterer, J., Myers, J.A.,1974. The hysteresis phenomenon in traffic flow. In: Buckley, J.J.(Ed.), Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp.13-38.
16. Wong G. C. K., Wong S. C. "A multi-class traffic flow model – an extension of LWR model with heterogeneous drivers", Transportation Research A, Vol.36, pp.827-841.
17. Zhang H. M., "A theory of nonequilibrium traffic flow", Transportation Research, B, Vol.32, pp. 485-498.
18. Zhang H. M., "A mathematical theory of traffic hysteresis", Transportation Research B, Vol.33, pp. 1-23.