

第四章、模式理論與架構

4.1 個體選擇模式

本研究擬採用個體選擇模式作為研究的方法。以下將介紹近年來所發展出的一些個體選擇模式及其優缺點與限制。

多項羅吉特模式(Multinomial Logit Model ,MNL)為其中最被廣泛使用的,因為其具有簡單的數學架構及容易校估的優勢,卻因模式中的基本假設:方案間的獨立性(Independence of Irrelevant Alternatives ,IIA),而限制了它的應用。

巢式羅吉特模式(Nested Logit Model ,NL)是最常被使用的多項羅吉特模式的變形,此模式由 McFadden 的一般化極值模式(Generalized Extreme Value model ,GEV)所導出,模式中允許同一群組內的方案之效用是不獨立的,但是卻仍受限於同一群組中的方案間具有同等相關性的假設,此點可能與現實的狀況不符合。

其他多項羅吉特模式的延伸變化模式,例如:順序性一般化極值模式(Ordered Generalized Extreme Value ,OGEV)、成對組合羅吉特模式(Paired Combinatorial Logit ,PCL)、交叉巢式羅吉特模式(Cross-Nested Logit ,CNL)及異質性一般化極值模式(Heteroscedastic Extreme Value ,HEV)。順序性一般化極值模式(OGEV)是指我們在選擇時會有順序性地做抉擇,可是在唯一的文獻中(Small,1987)所做出的結果不如巢式羅吉特模式(NL),且與多項羅吉特模式無顯著差異;成對組合羅吉特模式(PCL)允許方案間具有不同的相關程度,可是在方案較多時有不易校估的問題存在。交叉巢式羅吉特模式(CNL)及異質性一般化極值模式(HEV),同樣具有校估困難的問題。從理論上來看這些模式都是比較符合真實的情形。然而,這些模式卻將帶來計算上十分大的負擔,而且在替選方案較多時不易校估。所以本研究擬採取多項羅吉特模式及巢式羅吉特模式來作為分析的方法。

4.2 都會區運具選擇模式

4.2.1 多項羅吉特

個體選擇模式假設決策者從一些互斥方案中選擇效用最大之方案。每一方案的效用函數 U_{in} 可寫成下式：

$$U_{in} = V_{in} + V_{in} \quad (1)$$

其中

U_{in} ：決策者 n 選擇方案 i 之總效用，

V_{in} ：決策者 n 選擇方案 i 之可衡量效用，

V_{in} ：決策者 n 選擇方案 i 之不可衡量的誤差項；

可衡量效用部分包含方案與決策者特性。以運具選擇為例，如旅行成本、旅行時間、所得及性別等。可衡量的效用通常假設為線性函數（ $V_{in} = \sum_k X_{ikn} S_{ik}$ ）， X_{ikn} 為決策者 n 方案 i 的變數 k ， S_{ik} 為方案 i 的變數 k 的參數。

若對誤差項做不同的分配假設，則可推導出不同的個體選擇模式。最常被使用的羅吉特模式係假設誤差項間為獨立且具有相同的第一型極值（Type I Extreme Value）或岡勃（Gumbel）分配。羅吉特模式之決策者 n 選擇方案 i 的機率 P_{in} 可表示為：

$$P_{in} = \frac{e^{V_{in}}}{\sum_{j=1}^J e^{V_{jn}}} \quad (2)$$

當 J 為方案個數。

多項羅吉特模式為封閉型式，容易校估。其主要的缺點是模式具有不相關替選方案獨立特性。此特性隱含方案 i 與 j 被選擇的機率比只與方案 i 與 j 的效用有關，而與其他方案的效用無關，因此當引入新運具或改善現有運具會對所有其它運具產生相同的影響。方案 i 與 j 被選擇的機率比如下式：

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{e^{V_i}}{e^{V_j}} \quad (3)$$

例如：某甲在台北有兩種運具可供選擇，一為機車，一為公車，其選擇機率各為二分之一，現有捷運加入，其屬性與公車相同，則根據替選方案獨立之特性及各替選方案選擇機率比不變的原則，可計算出機車、公車與捷運的選擇機率各為三分之一。但是事實上公車、捷運間具有高度相關，非獨立

的替選方案，合理結果應為機車的選擇機率仍為二分之一，公車與捷運的選擇機率和佔二分之一。因此當建立多項羅吉特時，須先確認各替選方案的獨立性，否則所推導的結果會不符合決策者的行為。

個體選擇模式可探討某一方案之變數值改變後對自身及其他方案的影響。方案 i 的變數值 k 改變後對自身選擇機率的影響之直接彈性如下式

$$E_{X_{ik}}^{P_i} = (1 - P_i) X_{ik} S_k \quad (4)$$

交叉彈性為某一方案變數值改變後對其他方案選擇機率的影響。

$E_{X_{ik}}^{P_j} = -P_i X_{ik} S_k$ 為方案 i 變數值 k 改變後對方案 j 選擇機率的影響。由於多項羅吉特模式的不相關替選方案獨立特性，導致方案 i 屬性 k 變動後對所有其它運具之交叉彈性皆相同。

4.2.2 巢式羅吉特

McFadden (1973) 所推導的巢式羅吉特模式是最常被用來克服不相關替選方案獨立特性的模式。巢式羅吉特係將相似的方案置於同一巢，可考慮巢內方案間的相關性。巢式羅吉特模式將方案的選擇分成許多層級，如主要運具與捷運接駁運具的選擇，如圖 4.1。

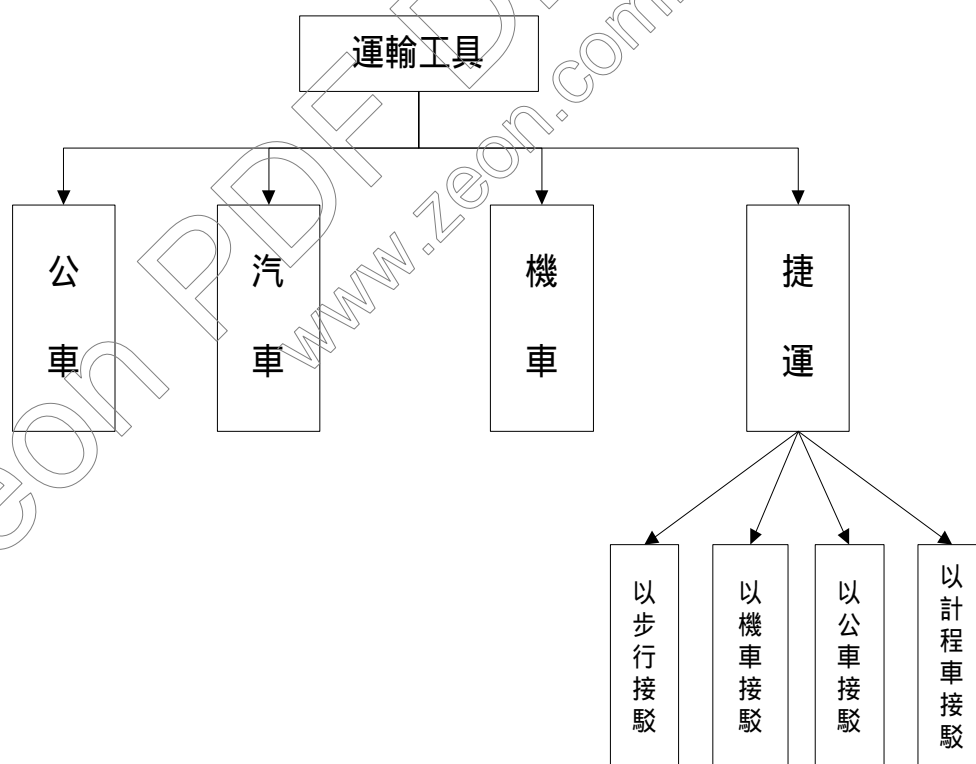


圖4.1 巢式架構說明圖

本文以兩層巢式模式為例說明，擴大到兩層以上的情況亦雷同。假設一兩層巢式羅吉特模式有 M 個巢，巢 m 有 N_m 個方案，方案 i 在巢 m 被選到的機率為

$$P_i = P_{i|m} \times P_m \quad (5)$$

$$P_{i|m} = \frac{e^{V_i / \sim_m}}{\sum_{j \in N_m} e^{V_j / \sim_m}} \quad (6)$$

$$P_m = \frac{e^{\sim_m \Gamma_m}}{\sum_k e^{\sim_k \Gamma_k}} \quad (7)$$

$$\Gamma_m = \ln \sum_{j \in N_m} e^{V_j / \sim_m} \quad (8)$$

$P_{i|m}$ 為巢 m 之方案 i 被選到的機率， P_m 為巢 m 的選擇機率， \sim_m 為巢 m 的包容值參數， Γ_m 為巢 m 的包容值變數。 $f_m = 1 - \sim_m$ 為衡量巢 m 內方案間的相似性指標。

\sim_m 須介於 0 與 1 之間，則巢式羅吉特模式才滿足效用最大原則。當 \sim_m 等於 1 時，巢式模式即成為多項羅吉特模式。 \sim_m 值愈接近 0 時，則方案間的相關性愈高。

巢式羅吉特模式的交叉彈性與各方案是否在同一巢或不同巢有關。若各方案是在不同巢，則彈性公式與多項羅吉特相同。若是在同一巢，則方案 i 的屬性 k 變動後對巢內其它運具 j 之交叉彈性為

$$-\left[P_i + \left(\frac{1}{\sim_m} - 1 \right) P_{i|m} \right] S_k X_{ik} \quad (9)$$

當包容值參數介於 0 與 1 之間，在巢內方案間的交叉彈性將大於不在同一巢內方案間之交叉彈性，而包容值參數愈接近 0 則交叉彈性愈大。當包容值參數等於 1 時，方案間的交叉彈性與多項羅吉特相同。

巢式模式的直接彈性與方案是否與其它方案同在一巢有關。直接彈性如下：

$$\left[(1 - P_m) P_{i|m} + \left(\frac{1}{\sim_m} - 1 \right) (1 - P_{i|m}) \right] S_k X_{ik} \quad (10)$$

當包容值介於 0 與 1 之間，則方案的直接彈性大於多項羅吉特的直接彈性。

巢式羅吉特模式雖然允許同一巢內的方案效用之誤差項不獨立，仍受限於同一巢內的方案間具有同等相關性的假設。此點與決策者的實際選擇行為可能不一定符合。此外，巢式羅吉特模式無法同時考慮方案間兩兩的相關性。

4.3 由選擇彈性推論需求彈性

Taplin (1982) 認為由個體選擇模式推算出的選擇彈性與經濟學上的需求彈性兩者是不同的。並提出選擇彈性加上衍生彈性等於需求彈性的公式。本節將引用 Taplin (1982) 的文章，將此概念及相關公式做一介紹。

需求彈性 (ordinary elasticities)：是指當某運具的價格改變時，使其運量變化的比率。而這一些變化的運量可能在原先的運具市場集合之內、或是在運具市場集合之外。

選擇彈性 (choice elasticities)：假設總旅次數是固定的，某運具價格的變化會使其運量隨之改變，但總旅次數還是固定的，並沒有市場進出情形。此基本假設與現實生活不符。

衍生彈性 (generation elasticities)：是用來衡量當運具屬性變動時，所造成乘客進出市場的影響，即指新生旅次與消失旅次，此彈性於實證上很難獲得。

4.3.1 彈性調整公式的推導

令 E 是一個 $n \times n$ 的需求彈性矩陣 (包含直接彈性與交叉彈性)；矩陣中的元素 e_{ij} 是旅次需求的彈性； T_i 為第 i 種運具的旅次數； p_j 為第 j 種運具的價格或費率。

$$e_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{T_i} \quad (11)$$

令 M 是相對應的一個 $n \times n$ 的選擇彈性矩陣 (包含直接彈性與交叉彈性)，矩陣中的元素 m_{ij} 是指選擇彈性。

$$m_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{s_i}, \text{ 其中 } s_i = \frac{T_i}{T_1 + T_2 + \dots + T_n} \quad (12)$$

令 S 為一個 $n \times n$ 的運具市場佔有率矩陣，由列向量 s_1, s_2, \dots, s_n 重複 n 次所構成。

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \bullet & \bullet & s_n \\ s_1 & s_2 & \bullet & \bullet & s_n \\ \bullet & \bullet & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \bullet \\ s_1 & s_2 & \bullet & \bullet & s_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

可以將 $I-S$ 表示成 (I 亦為一個 $n \times n$ 的單位矩陣)

$$I-S = \begin{bmatrix} 1-s_1 & -s_2 & \bullet & \bullet & -s_n \\ -s_1 & 1-s_2 & \bullet & \bullet & -s_n \\ \bullet & \bullet & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \bullet \\ -s_1 & -s_2 & \bullet & \bullet & 1-s_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

而 M 及 E 的關係可以表示為： $M = (I-S)E$ ，此方程式為不可逆，因為 (I-S) 為奇異矩陣。兩者的差

$E-M = E-(I-S)E = SE$ ，對矩陣中的第 ij 項來說，

$(E-M)_{ij} = (SE)_{ij} = \sum_{k=1}^n S_{ik}E_{kj} = \sum_{k=1}^n S_{ik}E_{kj}$ (因為 S 的每一列是重複的) = $\sum_{k=1}^n S_{ik}E_{kj}$ 對每一個 i,j
此 $\sum_{k=1}^n S_{ik}E_{kj}$ 即稱為衍生彈性

$$\sum_{k=1}^n S_{ik}E_{kj} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial p_j} + \dots + \frac{\partial T_n}{\partial p_j} \right) \left(\frac{p_j}{T_1 + \dots + T_n} \right) = \frac{\partial T}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{T} \quad (15)$$

當總旅次數是固定時，總旅次數並不會因個別運具的價格變動而改變，此時 $\frac{\partial T_1}{\partial p_j} = \frac{\partial T_2}{\partial p_j} = \dots = \frac{\partial T_n}{\partial p_j} = 0$ ，且需求彈性矩陣 (E) = 選擇彈性矩陣 (M)。由此特殊的例子指出，唯有當總旅次數是趨向於固定時，如：極短期的工作旅次，才能將選擇彈性視為需求彈性來看待。但長期則無法接受此假設。

4.3.2 如何由選擇彈性修正成需求彈性

因為衍生彈性求得十分不易，於短期時總旅次數是固定的，衍生彈性幾乎為零，故此時選擇彈性會近似於需求彈性。我們發現此時的需求彈性矩陣應符合以下兩個重要特性：對稱性(symmetry)、及欄位加權平均和為零(zero share weighted column sums)。所以必須將選擇彈性經過一些調整的過程來達成此兩個特性以符合真實情形。此兩個特性及調整公式說明如下：

(1) 對稱性

$$W_i V_{ij} = W_j V_{ji} \quad (16)$$

W_i =Spending share (搭乘 i 運具成本佔總支出的百分比)

V_{ij} =運具 i 與運具 j 之間的交叉彈性

《證明》：

$$\left| \frac{\partial x}{\partial c_i} \right| = \left| \frac{\partial x_j}{\partial c_i} \right| \quad (17)$$

x_i 、 x_j ：消費量

c_i 、 c_j ：對應成本

$$\frac{\partial x_i}{\partial c_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial Y} = \frac{\partial x_j}{\partial c_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial Y} \quad (\text{the Slutsky effect}) \quad (18)$$

Y：所得

η_{ij} ：成本 C_j 對 X_i 的需求彈性

η_{iy} ：所得 Y 對 X_i 的需求彈性

$$\eta_{ij} \frac{x_i}{c_j} + x_j \frac{\eta_{iy} x_i}{Y} = \eta_{ji} \frac{x_j}{c_i} + x_i \frac{\eta_{jy} x_j}{Y} \quad (19)$$

左右同乘以 $\frac{Y}{x_i x_j}$ ，並令 $W_i = \frac{C_i X_i}{Y}$ 、 $W_j = \frac{C_j X_j}{Y}$

$$\frac{1}{W_j} \eta_{ij} + \eta_{iy} = \frac{1}{W_i} \eta_{ji} + \eta_{jy} \quad (20)$$

$$\eta_{ij} = \frac{W_j}{W_i} \eta_{ji} + W_j (\eta_{iy} - \eta_{jy}) \quad (21)$$

通常運具花費的成本通常佔所得的固定比率，所得彈性值約等於一，故

$\eta_{iy} = \eta_{jy}$ ，所以 $W_j (\eta_{iy} - \eta_{jy})$ 近似於零可以忽略，所以可推導出

$W_i \eta_{ij} = W_j \eta_{ji}$ 的對稱性公式

(2) 欄位加權平均和為零 (zero Share weighted column sums)

$$\sum_{i=1}^J s_i k_{ij} = 0 \quad (22)$$

s_i ：運具 i 的市場佔有率

這表示當 i 運具的價格變動時，將使得搭乘者轉而搭乘其他的運具，但總搭乘者數量並無改變。此方程式短期必定成立。

(3) 調整公式

$$f = \text{Min} \left[\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \frac{(k_{ij} - v_{ij})^2}{s d_i} \mid \sum_{i=1}^J s_i v_{ij} = 0; w_i v_{ij} = w_j v_{ji}; v_{ij} \geq 0; i \neq j; \forall i, j \in J \right] \quad (23)$$

k_{ij} ：運具 i 對運具 j 最初的選擇彈性

$s d_i$ ：第 i 個方案不可觀察屬性的標準差

利用牛頓法來求出所需要之最小變化值。

4.4 模式估計與檢定

多項及巢式羅吉特模式參數的校估方法將採全部資訊最大概似法(Full Information Maximum Likelihood Method 簡稱 FIML 法)：

此種方法乃對所有可供選擇的集合中之每一元素加以組合，將每種組合視為一替選方案，然後找出使對數概似函數值為極大之參數值。

模式之檢定可分為模式參數檢定、模式結構檢定、漸進 t 檢定與非巢式結構假設檢定四種方法：

(1) 模式參數檢定

針對模式中所有參數做檢定，包含檢定參數之正負號是否符合先驗知識之邏輯，並檢定在某種信賴水準下是否拒絕參數值為 0 之 t 檢定。

(2) 模式結構檢定

分成概似比指標 (Likelihood-Ratio Index) 檢定與概似比統計量 (Likelihood-Ratio Statistics) 二種，說明如下：

a. 概似比指標檢定

$$\chi^2 = \frac{\ln L(s) - \ln L(0)}{\ln L(SS) - \ln L(0)} \quad (24)$$

其中

$\ln L(s)$ ：參數推估值為 s 之概似函數對數值，

$\ln L(0)$ ：等市場佔有率 (Equal Share) 模式之概似函數對數值，

$$\text{因此，} \chi^2 = 1 - \frac{\ln L(s)}{\ln L(0)} \quad (25)$$

$$\chi_m^2 = 1 - \frac{\ln L(s)}{\ln L(m)} \quad (26)$$

$\ln L(m)$ ：市場佔有率 (Market Share) 模式之概似函數對數值。

另一種概似比指標為調整後概似比指標，可定義為：

$$\chi^2 = 1 - \frac{\ln L(s) - K}{\ln L(0)} \quad (27)$$

其中 K 為模式校估之參數個數。

b. 概似比統計量

即以概似比檢定為基礎，檢定所有參數是否顯著。概似比定義如下：

$$-2 \ln J = -2[\ln L(0) - \ln L(s)] \quad (28)$$

上式為一卡方 (χ^2) 分配，故以卡方檢定檢定之，其自由度為所有估計模式中所有參數之總數。

(3) 漸進 t 檢定

概似比檢定乃針對整個模式之所有參數做檢定；而漸進 t 檢定則是對每一個參數個別做檢定。對數概似函數的二次導函數乘以-1 的反函數即為各參數之變異共變異矩陣，對角線開根號即為各參數之標準差。檢定各參數之顯著程度，檢定式如下：

$$t_{\hat{\beta}_k} = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_k)} \quad (29)$$

(4) 非巢式結構假設檢定 (Test of Non-nested Hypotheses)

非巢式結構之假設檢定乃針對某一模式並非另一種模式之特例，比較二種模式之解釋能力是否有顯著之差異，檢定式如下：

$$P(\bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2 > z) \leq \Phi\{-[-2zLL(0) + (K_2 - K_1)]^{0.5}\}, z > 0 \quad (30)$$

其中

\bar{r}_i^2 為模式 i 之調整後概似比指標，

K_i 為模式 i 校估之參數個數，

Φ 為標準常態分配之累積密度函數。

模式 1 與模式 2 之決定取決於調整後概似比指標的大小，模式 2 之解釋能力應高於模式 1。若檢定結果拒絕虛無假設，表示模式 2 顯著優於模式 1，則應採用模式 2。