

附錄一

為了證明航空公司利潤函數是有極大值存在，因此分別對於服務品質及票價變數進行二次微分，並檢查是否其值小於 0，若在對於航空公司的利潤函數對服務品質及票價變數進行二次微分小於 0，則可證明其利潤函數是最大。其證明如下：

1.服務品質之證明：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \pi^a}{(\partial Q_n^a)^2} &= \frac{1}{\partial Q_n^a} \left[T P^a \left\{ Z_n^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - \ell^a \right\} \right] \\ &= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ Z_n^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - \ell^a \right\} \\ &\quad + T P^a (1 - P^a) \left\{ -Z_n^a Z_n^a P^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] + Z_n^a (1 - P^a) (-\ell^a) \right\} \\ &= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ Z_n^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - \ell^a - \ell^a - Z_n^a P^a (W^a - \ell^a Q_n^a) \right\} \\ &= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ Z_n^a (1 - 2P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - 2\ell^a \right\} \dots\dots\dots (1) \\ \therefore \quad \frac{\partial \pi^a}{\partial Q_n^a} &= T P^a \left\{ Z_n^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - \ell^a \right\} = 0\end{aligned}$$

而由於 $T > 0$, $1 > P^a > 0$

$$\Rightarrow \quad \left\{ Z_n^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - \ell^a \right\} = 0$$

$$\therefore \quad (W^a - \ell^a Q_n^a) = \frac{\ell^a}{Z_n^a (1 - P^a)} \text{ 代入 (1) }$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \pi^a}{(\partial Q_n^a)^2} &= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ Z_n^a (1 - 2P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] - 2\ell^a \right\} \\ &= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ Z_n^a (1 - 2P^a) \frac{\ell^a}{Z_n^a (1 - P^a)} - 2\ell^a \right\} \\ &= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ \ell^a \left[2 - \frac{1}{(1 - P^a)} \right] - 2\ell^a \right\}\end{aligned}$$

$$= Z_n^a T P^a (1 - P^a) \left\{ -\ell^a \frac{1}{(1 - P^a)} \right\} < 0$$

由上式可知，航空公司的利潤函數對服務品質變數進行二次微分小於 0，可證明其利潤函數是最大。

2. 票價之證明：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi^a}{(\partial W^a)^2} &= \frac{1}{\partial W^a} \left[E^a P^a \{ Z_n^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] + 1 \} \right] \\ &= E^a T P^a (1 - P^a) \{ E^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] + 1 \} \\ &\quad + T P^a \{ E^a (1 - E^a P^a (1 - P^a)) [W^a - \ell^a Q_n^a] + E^a (1 - P^a) \} \\ &= E^a T P^a \{ [W^a - \ell^a Q_n^a] \{ E^a (1 - P^a)^2 - E^a P^a (1 - P^a) + 1 \} + 2 \} \dots\dots\dots (2) \\ \therefore \quad \frac{\partial \pi^a}{\partial W^a} &= T P^a \{ E^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] + 1 \} = 0 \end{aligned}$$

而由於 $T > 0$ ， $1 > P^a > 0$

$$\Rightarrow \quad \{ E^a (1 - P^a) [W^a - \ell^a Q_n^a] + 1 \} = 0$$

$$\therefore \quad (W^a - \ell^a Q_n^a) = \frac{-1}{E^a (1 - P^a)} \text{ 代入 (2) }$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \pi^a}{(\partial W^a)^2} &= E^a T P^a \{ [W^a - \ell^a Q_n^a] \{ E^a (1 - P^a)^2 - E^a P^a (1 - P^a) + 1 \} + 2 \} \\ &= E^a T P^a \left\{ \left\{ \frac{-1}{E^a (1 - P^a)} \right\} (E^a (1 - P^a)^2 - E^a P^a (1 - P^a) + 1) + 2 \right\} < 0 \end{aligned}$$

由上式可知，航空公司的利潤函數對票價變數進行二次微分小於 0，可證明其利潤函數是最大。