

二、 文獻回顧

本研究主要探討單一航段航空公司訂位艙等規劃；係從旅客的客位需求、時間價值，與航空公司所制定訂位艙等各票價產品之時間限制、票價間之關係為基礎，構建訂位艙等規劃模式，以分析航班客位需求並進行訂位艙等規劃。為說明本研究在航空公司訂位艙等規劃與生益管理中的定位與重要性，本研究將回顧相關課題之文獻，俾對於過去文獻中關於航空公司艙位規劃與生益管理之研究方法能有一完整之認識。

本研究將回顧之文獻分成四部分加以說明：(一)票價產品規劃；(二)產品需求預測；(三)座位庫存管理；(四)超額訂位控制。以下將對這些相關主題之文獻作一介紹。

2.1 票價產品規劃

票價產品規劃須進行市場分析調查，瞭解不同旅客對相同資源所願償付之價格水準，實施差別訂價以刺激航空旅客需求，並規劃產品區隔以防止原屬高價求之旅客轉而購買低價產品。票價產品規劃包括：訂價管理 (price management) 與產品區隔 (product differentiation) 設計。

設計產品基本價格需考量營運目標、價格與銷售量關係與成本等三項因素，Weatherford (1992) 將具有固定單位數量、可對價格敏感旅客進行區隔、及逾期使用期限將完全喪失價值等特性之產品稱為易毀壞資產，並提出易毀壞資產營收管理 (Perishable-Asset Revenue Management) 之名詞，定義其為「藉由差別訂價管理獲得易毀壞資產最佳營收」之過程，以擴大生益管理應用之行業與產品類別。一般公司營運目標種類包括：利潤/貢獻最大、容量使用率最大、平均顧客營收最大、營收最大、最小顧客不滿意度、淨現值最大、每個顧客實際接受價格最大等，在航空公司生益管理系統中，其目標函數特別強調座位資源總營收為最大。

由於生益管理之概念是起源於差別訂價 (price discrimination)，差別訂價是以相同資源在邊際成本之上，對不同旅客收取不同之票價以吸取消費者剩餘。在經濟學方面研究中[21]，差別訂價共分有三種型態，其中第一

程度之差別訂價假設航空公司能完全分辨並區隔每一位潛在之旅客，迫使其對產品付出之價值等於其最大願意付出之金額，因此使航空公司獲得最大利潤並且無任何消費者剩餘存在，由於必須對不同旅客收取不同費率，故實務上並不可行，其分析僅能代表航空公司所能獲得利潤之上限。第二程度之差別訂價又稱為自我選擇（self-selecting），經由旅客購票行為來分辨其願意付出之金額，為目前航空業界最主要之產品規劃方法，其常用之機制包括：事先購票、無法退票、來回票等，其實施成效則在於航空公司是否有能力掌握旅客間相對敏感度，設計及實施不同票價產品結構強迫旅客按其願付之金額進行區隔，在實務運用上以此類方法最為有效。

第三程度之差別訂價同時又稱為指標分類（index sorting），以外在旅客特性來分辨旅客償付意願並據以進行事前之區隔，由於這些分類多屬於概略性、原則性之事先分類，在應用上過於粗略，且為考量旅運者之目的及所得水準等特性，因此若規劃不當常會造成航空公司收益之減少。由於第二、三程度差別訂價間彼此並不衝突，在產品規劃上常合併使用，借助產品區隔來設定藩籬，防止原屬高票價旅客轉而使用次等級票價產品，以減少單純使用第三程度差別訂價所可能產生之負面影響。

以營收之觀點，座位資源應優先分配給價值最高之旅客，而旅客之價值則要從飛航服務對旅客所產生之效用來分析。飛航服務對旅客所產生之效用，在產品部分來自於機票價格、使用期限及航空公司服務品質，若將旅客認知之價值差別轉換為價格區別之概念，建立獨占市場之旅客自我選擇分類模型，則經由飛航服務對旅客所產生之效用分析，航空公司可運用產品區別來進行市場區隔，所謂產品區別（product differentiation）是指依旅客特性及選擇行為，規劃設計不同之票價產品，以進行第二、三程度之差別訂價並防止旅客發生垂直移轉之購票行為，因此其必須要將能自動區分旅客特性之機制，以限制條件方式附加於不同之票價產品結構中。然不同之限制條件會造成旅客之旅行成本增加，產生降級的效果。Botimer（1999）[15]將降級成本整合入票價產品模式，並考量旅客轉移（diversion）與訂位限額之效應，提出一般化成本模式—聯合價格水準最佳化模式內容討論如下：

假設不同票價產品間之需求獨立，對 N 種票價產品而言，其需求數隨限制條件之增加而減少，故理論上 N 個獨立市場需求函數必須具有下列特性：

$$f_N(P) \leq f_{i+1}(P) \leq f_i(P) \wedge \leq f_1(P) \quad (2.1.1)$$

其中， i 為票價產品之種類，共有 N 種票價產品，而票價產品 N 為限制條件最多之票價產品； P 表為票價產品之費率。

因此任一產品 i 之旅客需求為：

$$Q_i = f_i(P_i) - \sum_{j < i} Q_j \quad (2.1.2)$$

由於該研究假設各票價產品於市場上具有其獨立之市場需求，因此購買票價產品 i 之旅客需求等於願意以票價產品 P_i 之價格購買票價產品 i 之需求，減去願意以較高價格購買限制條件較少之票價產品之旅客需求。

由於增加購票限制將會增加旅客降級成本，該成本函數 $c_k(\cdot)$ 與價格 P_i 一樣會影響旅客需求，因此需求函數可重新整合成：

$$Q_i = f_i(P_i, c_k(\cdot) \forall k \leq i) \geq 0 \quad (2.1.3)$$

則在航空公司最大化收益之目標下，其模式為

$$\text{Max} \quad R = \sum_{i=1}^N P_i Q_i \quad (2.1.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^N Q_i \leq \text{Cap} \quad (2.1.5)$$

$$Q_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1.6)$$

其中， R 為總收益， Q_i 為配置給票價產品 i 之座位數， P_i 為票價產品 i 之費率， N 為總票價產品數， Cap 為總班機訂位容量， c_k 為接受票價產品附加限制條件所衍生之成本。其目標式在求所有票價產品總收益最大，並受限於飛機容量與需求水準非負限制。此外因旅客需求需滿足式 (2.1.1)，將之代入目標式後可利用非線性最佳化方法求解 N 種票價產品情形，得到各票價產品之最佳價格水準及期望購票之旅客數。

2.1.1 小結

理論上產品區隔的越細，越能達到差別訂價之目的，惟實際上分辨及區隔旅客之機制常不完全，且價格變化在國內可能會受到航空主管機關之管制，即使是一般放寬管制之航空市場為避免發生價格戰爭，趨使業者在營運

上會採取配合主要業者費率產品之策略，因此無法單獨達到吸引對手需求提高市場佔有率之目的，意即航空公司在競爭激烈的市場當中，採取降低價格之策略將很難達成其收益最大之企業目標，並且會造成市場上價格的紊亂。

本研究探討航空公司之票價產品規劃，包含：票價、機票效期、開票時間限制對個別旅客選擇票價產品之影響。由於過去研究僅以企業的角度來探討差別訂價對航空公司收益之影響，而未慮及票價產品之時間限制對旅客所造成之時間成本負擔與感受之不便成本，進而轉移至其他航空公司或取消訂位，對航空公司而言即為一種損失。因此，本研究以個體的角度來探討航空公司之票價產品規劃，檢視航空公司所制定之票價與時間限制對旅客選擇票價產品之影響。

2.2 產品需求預測

所謂產品需求預測即為經由外在環境趨勢評估與歷史資料之統計分析，準確預測航空網路各起迄市場之航班在各開放訂位時段之特定票價旅客需求數及可能之變動。航空公司旅客需求預測主要分成總體需求預測、旅客選擇模式、訂位需求預測等三種。Lee（1990）研究顯示在高需求航班中，生益管理系統之需求預測能力增加 10%，將改善 0.5%至 3.0%之期望營收，因此旅客需求預測亦是生益管理成功關鍵之一。

總體需求預測部分多運用於長期之營運管理，如機隊數量、飛航班表等之規劃，對生益管理之影響較少；Kanafani(1983)[5]討論以旅客目的、起迄、旅程長度、服務型態等特性，分階層量測各種航空活動如：乘客量、航機運轉及乘客哩程營收數之總計量，並簡單說明運用票價型態進行預測之可能性。

旅客選擇模型應用在旅客需於多服務方案中進行選擇時，Kanafani(1983)研究空運市場所發生之選擇型態類別包括：路線、機場、航空公司、票價型態，並以多項 Logit 模式評估旅客選擇模型。Morrison and Winston(1986)以旅行時間、轉機延滯、票價、服務頻次、航機型式及旅程型態（如直飛、中途停站與轉接）等向量，定義特定航空公司在特定路線所提供之服務特性，且假設旅客在起迄市場，選擇航空公司特定路線之機率為

Logit 模式。

而在航空公司之訂位需求預測方面，Littlewood(1972)[6]曾以單一航班不同起飛時間之歷史資料，建立簡單預測總訂位數之模式；Ben-Akiva 以使用訂位資料之特性提出前瞻性、歷史性及整合性模式，其中前瞻型模式利用航班開始接受訂位後的前期訂位資料來推估訂位曲線，並以迴歸方式來推算訂位需求，歷史型模式則利用時間序列分析由歷史訂位資料推算訂位需求，整合型則為前兩者之綜合；Lee(1993)[7]為能清楚描述訂位需求特性，運用隨機過程建立訂位需求累計量與旅客出現訂位或取消訂位之關係式，並利用時間序列迴歸分析預測任何時點的訂位需求，過程中除考慮訂位容量對需求之影響，並整合前期及歷史資料。

國內石豐宇及黃瑞財君之研究[22]，引用非均值 Poisson 分佈，針對不同旅客到達率，以反映實際訂位需求動態變化情形，設 $I_k(t)$ 為在時段 t 內，第 k 個票價等級之訂位到達率， D_t 為時段 t 之長度。則在時段內第 k 個票價等級共有 x_{kt} 個訂位需求之機率，依 Poisson 分佈其機率型式為：

$$P_k(t, x_{kt}) = \frac{[I_k(t) \times D_t]^{x_{kt}} \times e^{-I_k(t) \times D_t}}{x_{kt}!} \quad x_{kt} = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

由式 (2.2.1) 中可顯示 Poisson 到達率依時段及票價等級而有不同，此情形較能描述票價產品差異，對旅客訂位行為所產生之影響。

2.2.1 小結

特定起迄、航班不同票價等級產品之訂位需求預測，是規劃座位庫存管理與超額訂位所需基本資料，對生益管理系統而言，其重要性遠大於其他需求預測，為使座位庫存管理模式之基本假設能與實際數據之趨勢相符，航空公司不僅需要得到需求預測之平均數與標準差，同時亦要瞭解訂位發生的過程。在訂位需求預測中所使用之需求分配必須配合座位庫存管理系統之需要與假設，基本上，個別旅客出現要求訂位發生之機率屬於離散型態且彼此間不相關，因此接近 Poisson 分配，若以整個訂位期間之需求為對象時，根據 Belobaba (1985) 研究所得結論印證，則應屬 Normal 分配。

實際上需求預測方法與資料更新週期，需配合訂位控制方法與設備限

制，目前各航空公司對於市場需求多以歷史資料與主觀判斷進行預測，無法充分且準確反應目前及未來之旅客需求情形，且在歷史訂位資料過程中，旅客因旅次目的的不同產生極多行程組合，若逐一紀錄分析會發生起迄行程票價組合之數量過大之問題，而其平均需求數甚低且不確定性大，為克服此問題航空公司通常會使用風險集中方式，先將同類起迄行程價格需求加總處理，以縮減問題規模並降低預測變異性，惟亦使預測與旅客實際訂位間產生誤差，因此需求預測能力不足，亦常會限制各種複雜管理方法之應用。

2.3 座位庫存管理

所謂座位庫存管理即為航空公司善用各航班中飛機座位資源，分配及控制開放訂位期間各起迄不同票價產品間之銷售數，使航空公司能獲得最大之收益，因此可分為最佳座位配置與動態訂位控制兩部分。由前述票價產品規劃可知，座位配置問題除具有一般運輸問題特性外，並具有：旅客需求具隨機性、多重票價結構、高低票價旅客訂位習慣不同、營運趨向轉運網路結構等特性，因此可歸類為具有隨機需求、固定容量、多重費率及網路結構之資源配置問題。訂位控制則是以事前進行最佳化座位分配結果，參酌開放訂位期間旅客之實際訂位情形，以簡單之控制機制進行接受或拒絕訂位之決策，使航空公司長期平均座位銷售報酬為最大，其除了屬於最佳化控制問題之外，尚具有多階段決策、網路資源等特性。

由以上分析可知，航空公司訂位管理問題為具有隨機需求、固定容量、多重費率及單純網路資源的多階段決策問題，在隨機及動態部分，訂位管理人員根據歷史資料分析所得需求預測，決定最佳座位銷售分配作為決定是否接受旅客訂位要求之依據，當至下一個預測更新時點時，再觀察新的需求資料重新進行最佳座位分配，並據以進行至訂位控制直到訂位截止。

座位配置問題以往之研究可概分為兩類，第一類依據假設限制條件，發展簡單易行之啟發式解法，第二類方法則利用數學規劃與網路模型來解決相關問題。自 1972 年 Littlewood[6] 以期望邊際報酬觀念，用各航段座位潛在銷售機率與其費率之乘積，決定接受或拒絕航段訂位要求以來，後續相關研究均以潛在銷售座位之期望報酬處理需求不確定性問題，假設某分級將售出 s_i 個座位，因此潛在銷售 S_i 位之機率應大於或等於要求 S_i 個訂位之機率，

$$P_i[r_i \geq S_i] = \int_{S_i}^{\infty} P_i(r_i) dr_i = 1 - F_i(S_i) \quad (2.3.1)$$

其中， $F_i(S_i)$ 是等於或小於 S_i 訂位要求之累積密度函數，而座位之期望邊際報酬則為：

$$EMSR(S_i) = f_i \times P_i[r_i \geq S_i] \quad (2.3.2)$$

Buhr (1982) [8][22] 探討單一費率情況下，中途停靠一站(A-B-C)之航班艙位規劃問題，由於單一費率假設的緣故，此時的艙位規劃問題只在於求解不同 OD 間的艙位數量分配。Buhr 推導出在此情境下，不同 OD 間的最佳艙位數量分派應滿足：

$$E_{ac}(S_{ac}) = E_{ab}(S_{ab}) + E_{bc}(S_{bc}) \quad (2.3.3)$$

其中， E_{ac} 代表增售一 AC 航段艙位的期望收益， S_{ab} 、 S_{bc} 、 S_{ac} 分別代表 AB、BC、AC 航段分配所得之艙位容量。

Wang(1983)[9] 將 Buhr 的模式推廣到多重費率與多地停靠的情境，應用期望邊際收益的方法，將艙位逐一指派給產生最大期望收益的費率與 OD 組合，並據以加總而得各個 OD 之下，各費率等級之非巢化最佳配置數量。

Belobaba (1987) [2] 將 Littlewood 所提兩費率等級下之最佳化決策條件拓展到多重費率的情況，稱之為「期望邊際艙位收益」(Expected Marginal Seat Revenue, EMSR) 模式。其方法則是以比較某一費率與其他較高費率等級之「保護水準」(protected level，即艙位保留數)，並以全部可供訂位容量減去該費率相對於其他較高費率之保留艙位數總和而得該費率等級之訂位上限。但由於在求取 EMSR 過程中，Belobaba 對於機率值的描述不盡正確，使得其 EMSR 模式所得之單一航班總期望收益並非最大，而僅是近似最佳化的結果。

大多數探討多地停靠的艙位規劃研究，對於不同行程間艙位數量的分配多採「固定配置」(full-assignment) 方式，即各行程間分配所得之艙位數量為一固定值，加總即為各區段之訂位容量限制。為了考量不同行程間需求的不確定性，Wong(1990)[13] 提出「彈性配置」(flexible-assignment) 方式，其方法是對於同一區段下之可供訂位容量，除分別配置給各行程外，另有一部份的容量劃歸為「開放席次」，待某一行程之固定配額銷售完畢，該

行程即可取用這些開放席次以供訂位。Wong 並在單一費率之下，將其推廣至飛航多重區段與空運中心經營型態之航班的艙位規劃問題上。

過去的研究大多將訂位過程視為一單一時段，而將各費率等級在此一時段中之總需求數當作各個單一的變數，亦即僅考慮某一費率等級在訂位結束前之可能累計總訂位數。事實上，這樣的作法忽略了不同費率等級間，潛藏著需求抵達模式之不確定性。由於在巢式費率結構下，高低票價費率等級間存在可共通使用的容量部分，因此，儘管在相同的巢式配置及相同的各費率等級之個別總訂位數下，高低票價出現要求訂位的順序不同，仍會造成總收益上的不同，例如：低票價之訂位要求較早出現將可能使總收益較低，而高票價之訂位要求較早出現則可能提升整體之總收益。Lee and Hersh (1993) [7]有鑑於過去研究將訂位過程視為單一時段，而忽略不同費率等級間，潛藏著訂位需求抵達模式之不確定性。因此把訂位期間切割成符合旅客抵達過程為 Poisson Process 之假設之多個決策時段，在描述最大期望收益函數時，將巢化方式處理之可供訂位容量納入遞迴方程式，此模式之優點為考慮了訂位過程之動態特性，允許各費率間在動態過程中相互競爭，改善靜態巢式之缺失，不只可得到單席訂位不同決策時期可接受之數量，且可擴展至多席訂位情形。國內石豐宇、郭維杰君 (1999) [22]延續此法將之擴展至多重行程動態座位配置問題。

2.3.1 小結

當控制對象擴及網路型態時，除問題規模及複雜度相對增加許多外，由於考量網路中航段需求差異特性，各行程費率等級之真實價值無法立即判斷，因此如何代入巢化觀念以整理最佳座位配置結果，並設定以整體網路考量之訂位限額供庫存座位控制之用，為目前相關研究之重點。

2.4 超額訂位控制

所謂超額訂位控制即為處理旅客訂位後可能無法登機之不確定性問題，根據過去歷史預測資料與處理超額旅客之成本方案，預設超額訂位接受訂位之比例，降低航空公司可能之收益損失。航空公司處理超額訂位問題主要是在飛機旅客票價收益與拒絕已訂位旅客登機成本間進行取捨，以決定超額訂位之比例或訂位水準。航空公司在超額訂位部分，一般侷限於單一費率

(Thompson, Rothstein 和 Stone, Rothstein, Shlifer 和 Vardi, Bodily 和 Pfeifer) 之超額訂位問題上, 對於多費率 (Belobaba) 問題則甚少研究, 而且對於影響取消訂位和未報到 (no-show) 機率因素, 也並未作完整之探討。此外, 絕大部分僅考慮單一超賣成本值, 未考慮超賣成本函數, 與航空公司實際作業有相當的出入。

然而, 當航空公司採用超額訂位策略時, 可能會發生於飛機起飛前旅客報到的數目大於座位容量的情形, 此時, 某些已訂位之旅客可能無法搭上其所欲搭乘之班機。因此, 航空公司必須建立其訂位數量上限值, 以避免上述情形發生。

訂位系統的好壞與否, 對航空公司有很重大的影響, 因為它會影響航班的承載率 (即航空公司之收益面); 此外, 若訂位系統運作不佳因而發生已訂位旅客報到時遭拒登機, 將會對航空公司的服務品質及名聲造成負面影響。因此, 發展完善的訂位系統對於航空公司來說是很重要的。Rothstein 曾表示: 『每增加 1% 的平均旅客承載率, 將可為航空公司增加約百萬元的利潤』。

目前, 航空公司的訂位系統, 由於機票費率多元化之緣故, 已演變成系統結構較複雜。航空公司為吸引不同背景及偏好之旅客, 常將同一班機之艙位依其提供之服務等級與舒適程度劃分不同層級 (如: 頭等艙、商務艙、經濟艙等等)。一般而言, 低票價之訂位要求往往會較高票價之訂位要求要來得早出現, 如此將會產生高票價之訂位要求訂不到機位的情形, 亦會降低航空公司之收益, 因而有艙位競爭的問題產生。因此, 訂位系統如何劃分各個費率等級之座位保留數亦是相當重要, 將會影響到航空公司的營收與利潤。

過去在航空公司訂位系統方面的研究不勝枚舉, 在航空公司為滿足自己本身經濟方面的要求, 以及為提供旅客良好的服務品質的前提下, 以下將針對各種條件限制下, 介紹已發展之航空公司超額訂位模式。[14]

2.4.1 直飛、單一費率之最佳訂位數上限值

如同之前所述, 目前之空運市場中, 使用一般票價產品旅客通常可隨意取消訂位而不必負擔損失, 即使是訂位後未出現搭機之乘客亦不需賠償航空

公司損失，這種可退票策略增加需求變化及使座位價值消失之可能性，因此航空業者通常會接受超過其容量之訂位需求，以減少起飛時可能之空位數。曾有航空公司使用候補名單的方式來處理複雜之旅客取消訂位問題，航空公司先預設訂位水準（大於或等於座位數），如果達到設定之訂位水準時，將後續要求訂位之乘客放入等候名單，如有取消訂位產生時，則依序遞補，惟此種方式實際運用上有其缺失，因為訂位狀況之改變很難通知等候旅客，且候補名單中之旅客亦有可能屆時不會出現於機場，因此，引用候補名單方式，並不能完全解決旅客取消訂位問題。航空公司處理超額訂位問題主要是在旅客票價收益與拒絕已訂位旅客登機成本間進行取捨，以決定超額訂位之比例或訂位水準。

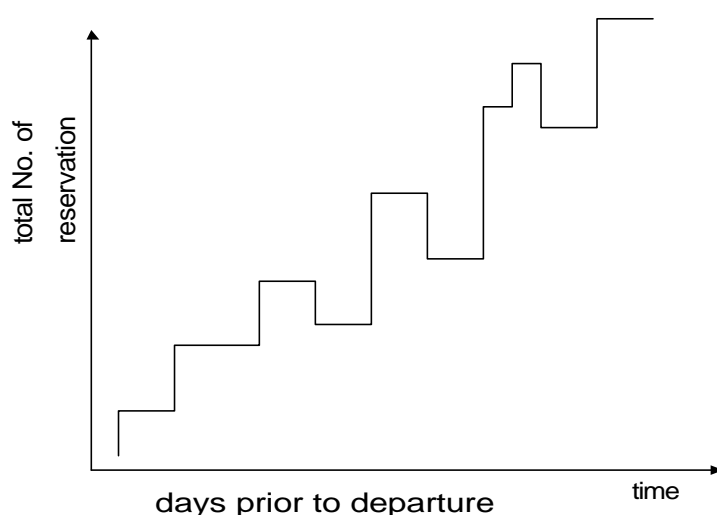


圖 2.1 飛機起飛前旅客訂位情形示意圖

資料來源：[14]

圖 2.1 為飛機起飛前旅客訂位情形之示意圖，圖中訂位數減少之情形代表旅客取消訂位，由圖 2.1 可以得知，其總訂位數會隨著時間越迫近飛機起飛之時點而增加。若航空公司預定之訂位數越多，則發生已訂位旅客遭拒登機的機率越大；但若航空公司預定之訂位數越少，則發生航班空位起飛的機率亦越高。因此，航空公司在追求利潤最大化的情形下，須同時考慮由搭機旅客所獲得之收益與補償已訂位旅客遭拒登機之超賣成本，以求得該航班的最佳訂位數上限值。以下將介紹 Gerbracht 所發展的模式；首先，模式當中假設未報到旅客數與航空公司的訂位數量上限值相互獨立(較不符合現實情況)，之後再討論不相互獨立的情形。其變數定義如下所示：

n : 航班座位容量
 C : 平均票價費率
 P : 賠償已訂位旅客登機遭拒的平均成本
 L : 航班訂位數上限值
 $P(k)$: k 位旅客於飛機起飛前未報到之機率

若 $L \leq n$ (訂位數量上限值小於或等於航班座位容量), 則不會有超額訂位之情形發生。旅客於飛機起飛前未報到之數目為 k , 且 $0 \leq k \leq L$, 當所有已訂位旅客均報到, 則航空公司的收益為 $L \cdot C$; 若有一位已訂位旅客未報到, 則航空公司之收益為 $(L-1) \cdot C$, 依此類推。而旅客未報到數為一隨機變數, 因此航空公司之收益亦為一隨機變數。由於收益為訂位數量上限值 L 之函數, 定義其為 $R(L)$, 其平均收益等於

$$\bar{R}(L) = \sum_{k=0}^L (L-k) \cdot C \cdot P(k) \quad (2.4.1)$$

整理上式可得

$$\bar{R}(L) = C(L - \bar{K}) \quad (2.4.2)$$

因此, 當 $L \leq n$, 若訂位數量上限值 L 越大, 其收益將會越大。

現考慮 $L > n$ 之情形, 即訂位數量上限值大於座位容量的情況下, 當所有已訂位旅客於飛機起飛前報到, 則會有 $(L-n)$ 位旅客無法登機, 且航空公司需支付這些旅客每人賠償成本 P , 即航空公司所獲得之收益為 $n \cdot C - (L-n) \cdot P$; 若一位旅客未報到, 其收益則為 $n \cdot C - (L-n-1) \cdot P$; 而當有 $(L-n)$ 位旅客未報到, 航空公司無須支付任何賠償成本, 其收益則為 $n \cdot C$; 但若有 $(L-n-1)$ 位旅客未報到, 其收益將減少為 $(n-1) \cdot C$, 依此類推。因此, 當 $L > n$ 時 (訂位數量上限值大於座位容量), 航空公司之平均收益為

$$\bar{R}(L) = \sum_{k=0}^{L-n} [nC - (L-n-k) \cdot P] \cdot p(k) + \sum_{k=L-n-1}^L (L-k)C \cdot p(k) \quad (2.4.3)$$

整理上式可得

$$\bar{R}(L) = (L - \bar{k})C - (C + P) \sum_{k=0}^{L-n} (L-n-k)p(k) \quad (2.4.4)$$

航空公司之目標為追求利潤最大化之下, 決定最佳訂位數上限值 L 。首先, 觀察當 L 增加時, 平均收益 $\bar{R}(L)$ 之變化情形, 其結果如下所示:

$$\begin{aligned}\bar{R}(L+1) - \bar{R}(L) &= (L+1-\bar{k})C - (C+P) \sum_{k=0}^{L+1-n} (L+1-n-k)p(k) \\ &\quad - (L-\bar{k})C + (C+P) \sum_{k=0}^{L-n} (L-n-k)p(k)\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

整理上式可得

$$\bar{R}(L+1) - \bar{R}(L) = C - (C+P) \sum_{k=0}^{L-n} p(k) \quad (2.4.6)$$

則當 $\bar{R}(L+1) - \bar{R}(L) > 0$ 時，則航空公司應增加其訂位數量上限值 L ，而最佳之訂位數量上限值為當 $\bar{R}(L+1) - \bar{R}(L) \leq 0$ 時所求得 L 之最小值，意即求解 $C - (C+P) \sum_{k=0}^{L-n} p(k) \leq 0$ ，可得最佳解 L^* 。因此，當最佳訂位數量上限值為 L^* 時，可得

$$\sum_{k=0}^{L^*-n} p(k) \geq \frac{C}{C+P} = \frac{1}{1 + \frac{P}{C}} \quad (2.4.7)$$

旅客於飛機起飛前未報到之數 k 為介於 0 和 L 之間的隨機變數，令 $F(Z)$ 為此隨機變數之機率密度函數，即 $F(Z) = \sum_{k=0}^Z P(k)$ ；則最佳訂位數量上限值 L^* 可表示為：

$$F(L^* - n) \geq \frac{1}{1 + \frac{P}{C}} \quad (2.4.8)$$

然而已訂位旅客登機遭拒之數亦為一隨機變數，當所有已訂位旅客均報到將有 $(L-n)$ 位旅客無法登機；若有一位未報到，則有 $(L-n-1)$ 位無法登機，依此類推。因此，無法登機之平均旅客數 $\bar{Q}(L)$ 如下所示：

$$\begin{aligned}\bar{Q}(L) &= (L-n) \cdot p(0) + (L-n-1) \cdot p(1) + (L-n-2) \cdot p(2) + \dots + 1 \cdot p(L-n-1) + 0 \cdot p(L-n) \\ &= \sum_{k=0}^{L-n} (L-n-k) \cdot p(k)\end{aligned}\quad (2.4.9)$$

因此，未報到旅客之分配對於最佳訂位數上限值與已訂位旅客遭拒登機之平均數將有很大的影響，則對於未報到旅客之調查資料必須詳盡收集。

之前所討論均假設未報到之旅客數與訂位數量上限值之間相互獨立，然而，以實際情形考慮，兩者之間具有相關性；當訂位數量上限值越多，其未報到之旅客數亦越多。首先，考慮當 $L \leq n$ 之情形，即訂位數上限值小於航班

座位容量時，其平均收益為：

$$\bar{R}(L) = \sum_{k=0}^L (L - k) \cdot Cp(k) \quad (2.4.10)$$

令 X 代表未報到旅客數佔訂位數上限值之比例，即 $k = x \cdot L$ （其中 $0 \leq X \leq 1$ ）；令隨機變數 X 之機率密度函數為 $f(X)$ ，則

$$\bar{R}(L) = \int_0^1 (L - xL) Cf(x) dx = LC \int_0^1 (1 - x) f(x) dx \quad (2.4.11)$$

整理上式可得

$$\bar{R}(L) = LC(1 - \bar{x}) = C(L - \bar{k}) \quad (2.4.12)$$

因此，當 $L \leq n$ 時（訂位數量上限值小於航班座位容量），則訂位數量上限值 L 越大，航空公司之收益亦越大。

而當 $L > n$ 時，即訂位數量上限值大於航班座位容量，則某一部份已訂位旅客將無法登機，且航空公司需支付這些旅客賠償成本 P ，由（2.4.4）式可知 $\bar{R}(L) = (L - \bar{k})C - (C + P) \sum_{k=0}^{L-n} (L - n - k)p(k)$ ，且 $k = x \cdot L$ ，則航空公司之平均收益為

$$\begin{aligned} \bar{R}(L) &= C(L - \bar{k}) - (C + P) \int_0^{1-\frac{n}{L}} (L - n - xL) f(x) dx \\ &= CL(1 - \bar{x}) - (C + P) \int_0^{1-\frac{n}{L}} [L(1 - x) - n] f(x) dx \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

將上式做一次微分，且令 $\frac{d[\bar{R}(L)]}{dL} = 0$ ，可得

$$\frac{d[\bar{R}(L)]}{dL} = C(1 - \bar{x}) - (C + P) \int_0^{1-\frac{n}{L}} (1 - x) f(x) dx = 0 \quad (2.4.14)$$

$$\text{則 } \int_0^{1-\frac{n}{L}} (1 - x) f(x) dx = \frac{1 - \bar{x}}{1 + \frac{P}{C}} \quad (2.4.15)$$

因此，經由（2.4.15）可得最佳訂位數量上限值 L^* 。由（2.4.9）得知已訂位旅客登機遭拒之平均數為 $\bar{Q}(L) = \sum_{k=0}^{L-n} (L - n - k) \cdot p(k)$ ，且 $k = x \cdot L$ ，則

$$\bar{Q}(L) = \int_0^{1-\frac{n}{L}} [L(1 - x) - n] f(x) dx \quad (2.4.16)$$

因此，由 (2.4.15) (2.4.16) 即可得知航空公司在追求利潤最大化之下，其最佳訂位上限值 L ，與已訂位旅客登機遭拒之平均數。

2.4.2 直飛、單一費率之最佳訂位數上限值 - 以時間為函數

前一節所討論之情形是在不考慮距航班起飛之時間的前提下，所求得的最佳訂位數上限值。而在航空公司開放訂位後，其總訂位數並非為定值，其值會隨著時間越迫近飛機起飛之時點而增加（如圖 2.1）；因此，最佳訂位數上限值應以時間為函數。而由於旅客總訂位數會隨著時間而增加，則訂位數之上限相對地會減少，如圖 2.2 所示。

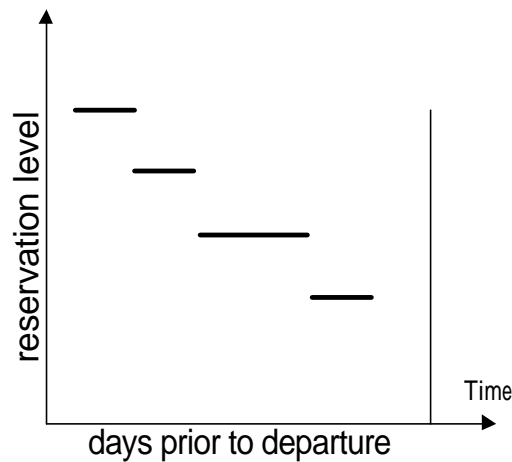


圖 2.2 座位預留數與時間關係圖

資料來源：[14]

Shlifer 與 Vardi[19]所發展之模式即為在考慮時間之因素下，求解最佳訂位數上限值，其模式之基本假設為旅客取消訂位之機率與其訂位之時間相互獨立，並透過大量之調查資料來觀察旅客於訂位期間的特性。其模式中變數之定義如下所示：

$S(t)$ ：飛機起飛前 t 時間時的旅客訂位數

X ：旅客於飛機起飛前之報到數，為一隨機變數

根據調查資料顯示，隨機變數 X 呈常態分配，且其平均數為 $S(t)a(t)$ ，變異數為 $\sqrt{S(t)b(t)}$ ，即 $X \sim N(S(t)a(t), \sqrt{S(t)b(t)})$ ，其中 $a(t)$ 、 $b(t)$ 為透過調查資料所得之參數；其調查之方法為選定某一航線，於一時段內收集 m 航班資料，令 $S_1(t)$ 為在第一航班之飛機起飛前 t 天之旅客訂位數， x_1 為

此航班之旅客報到數； $S_2(t)$ 為在第二航班之飛機起飛前 t 天之旅客訂位數， x_2 為此航班之旅客報到數，依此類推。則參數 $a(t)$ 、 $b(t)$ 之值如下所示：

$$a(t) = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sum_{i=1}^m S_i(t)} \quad (2.4.17)$$

$$b(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{[X_i - a(t) \cdot S_i(t)]^2}{S_i(t)} \quad (2.4.18)$$

令 P^* 為該航班之旅客報到數大於座位容量之最大機率， n 為航班之座位容量。因此，旅客報到數大於座位容量數 n 之機率必定小於或等於 P^* ，則飛機起飛時之旅客報到數大於 n 之機率如下所示：

$$\begin{aligned} P(X > n) &= P(n < X < \infty) = P\left[\frac{n - S(t)a(t)}{\sqrt{S(t)b(t)}} < \frac{X - S(t)a(t)}{\sqrt{S(t)b(t)}} < \infty\right] \\ &= \Phi(\infty) - \Phi\left[\frac{n - S(t)a(t)}{\sqrt{S(t)b(t)}}\right] \\ &= 0.5 + \Phi\left[\frac{S(t)a(t) - n}{\sqrt{S(t)b(t)}}\right] = P^* \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

令 r^* 為已訂位旅客遭拒登機數佔飛機起飛前之旅客報到數之最大比例，此數值即代表已訂位旅客無法搭乘原訂位班機之比例。令 $T[S(t)]$ 為於飛機起飛前時間 t 且訂位數為 $S(t)$ 時，有 $T[S(t)]$ 個已訂位旅客登機遭拒。其公式如下：

$$T[S(t)] = \int_n^{\infty} (x - n) f(x) dx \quad (2.4.20)$$

其中 $f(x)$ 為隨機變數 X 之機率密度函數，代表 X 位旅客於飛機起飛前之報到數。即 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{S(t)b(t)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - S(t)a(t)]^2}{2S(t)b(t)}}$ ，代入 (2.4.20) 式，

可得：

$$\begin{aligned} T[S(t)] &= \int_n^{\infty} (x - n) \frac{1}{\sqrt{S(t)b(t)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - S(t)a(t)]^2}{2S(t)b(t)}} dx \\ &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[n - S(t)a(t)]^2}{2S(t)b(t)}} + [S(t)a(t) - n] \left\{ 0.5 + \Phi\left[\frac{S(t)a(t) - n}{\sqrt{S(t)b(t)}}\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

則已訂位旅客登機遭拒佔旅客報到數之期望值之最大比率如下所示：

$$r^* = \frac{T[S(t)]}{S(t)a(t)} \quad (2.4.22)$$

由上式 (2.4.22)，則可求得當已訂位旅客遭拒登機數佔飛機起飛前之旅客報到數之最大比例為 r^* 時，最佳訂位數上限值為 $S_{r^*}(t)$ 。

因此，經由 (2.4.19) (2.4.22) 即可求得最後之最佳訂位數上限值；意即透過當報到旅客數大於座位容量之最大機率，與已訂位旅客遭拒登機佔旅客報到數之期望值之最大比例，以決定最佳訂位數上限值。此外，假設航空公司每接受一位旅客報到時，可獲得 C_1 之利潤，而當拒絕一位旅客會損失 C_2 ；在航空公司追求收益最大化之情形下，首先令飛機於起飛時平均每航班所搭載之旅客為 $Y[S(t)]$ ，且飛機於起飛時旅客之平均報到數為平均每航班所搭載之旅客數，加上以訂位旅客登機遭拒之平均數，即

$$S(t)a(t) = Y[S(t)] + T[S(t)] \quad (2.4.23)$$

則航空公司之平均收益為

$$\bar{R}[S(t)] = C_1 \cdot Y[S(t)] - C_2 \cdot T[S(t)] \quad (2.4.24)$$

令 q^* 為每航班損失一位旅客之成本 C_2 佔搭載一位旅客所獲得之利潤 C_1 之比例，即 $q^* = \frac{C_2}{C_1}$ 。則最佳訂位數上限值 $S(t)$ 為求平均利益 $\bar{R}[S(t)]$ 最大化時，必須滿足：

$$\frac{d \{\bar{R}[S(t)]\}}{d [S(t)]} = 0 \quad (2.4.25)$$

因此，整理 (2.4.24) (2.4.25)，可得：

$$\frac{\frac{d \{Y[S(t)]\}}{d [S(t)]}}{\frac{d \{T[S(t)]\}}{d [S(t)]}} = q \quad (2.4.26)$$

Shifler 與 Vardi [19] 同時考慮當飛機起飛時之旅客數大於座位容量之最大機率，與當飛機起飛時已訂位旅客登機遭拒數佔旅客報到數之最大比例，即最佳訂位數上限值 $S^*(t)$ 於時間 t 為：

$$S^*(t) = \min \{S_{p^*}(t), S_{r^*}(t), S_{q^*}(t)\} \quad (2.4.27)$$

2.4.3 兩航段、單一費率之訂位數上限值-以時間為函數

上一節所介紹之模式為直飛、單一費率之情形。現考慮兩航段、單一費率，假設一航線如圖 2.3 所示。令 X_1 為希望由機場 A 到機場 B 之旅客數， X_2 為希望由機場 A 到機場 C 之旅客數， X_3 為希望由機場 B 到機場 C 之旅客數，而 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$ 、 $S_3(t)$ 分別為時間 t 之旅客訂位數，且如同直飛之情形，其分配為呈常態分配：

$$X_1 \sim N\left(S_1(t)a(t), \sqrt{S_1(t)b_1(t)}\right)$$

$$X_2 \sim N\left(S_2(t)a(t), \sqrt{S_2(t)b_2(t)}\right)$$

$$X_3 \sim N\left(S_3(t)a(t), \sqrt{S_3(t)b_3(t)}\right)$$

其中， $a_i(t)$ 、 $b_i(t)$ ($i=1,2,3$) 分別為其參數。

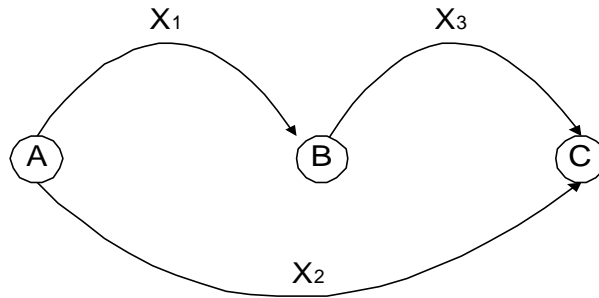


圖 2.3 兩航段、單一費率示意圖
資料來源：[14]

當於機場 A 且（或）機場 B 之旅客數大於座位容量數 n 時，即當 $X_1 + X_2 > n$ 、 $X_2 + X_3 > n$ 時，其最佳訂位數上限值將需有所限制，航空公司可以追求旅客遭拒登機數最小化，意即各航段承載率最大化，因此有下列三種情形：

a、 $X_1 + X_2 \leq n, X_2 + X_3 > n$

於機場 B 之旅客數大於座位容量時，為求各航段搭載數最大化，其各航段之旅客數如表 2.1 所示：

表 2.1 機場 B 之旅客數大於座位容量

航段	欲搭乘之旅客數	可搭乘之旅客數	遭拒登機之旅客數
A-B	X_1	X_1	0
A-C	X_2	X_2	0
B-C	X_3	$n - X_2$	$X_2 + X_3 - n$

b、 $X_1 + X_2 > n, X_2 + X_3 \leq n$

於機場 A 之旅客數大於座位容量時，為求各航段搭載數最大化，其各航段之旅客數如表 2.2 所示：

表 2.2 機場 A 之旅客數大於座位容量

航段	欲搭乘之旅客數	可搭乘之旅客數	遭拒登機之旅客數
A-B	X_1	$n - X_2$	$X_1 + X_2 - n$
A-C	X_2	X_2	0
B-C	X_3	X_3	0

c、 $X_1 + X_2 > n, X_2 + X_3 > n$

於此種情形，將有下列八種可能的情形：

表 2.3 兩航段之總需求大於座位數

航段		
A-B	A-C	B-C
$X_1 > n$	$X_2 > n$	$X_3 > n$
$X_1 > n$	$X_2 > n$	$X_3 \leq n$
$X_1 > n$	$X_2 \leq n$	$X_3 > n$
$X_1 > n$	$X_2 \leq n$	$X_3 \leq n$
$X_1 \leq n$	$X_2 > n$	$X_3 > n$
$X_1 \leq n$	$X_2 > n$	$X_3 \leq n$
$X_1 \leq n$	$X_2 \leq n$	$X_3 > n$
$X_1 \leq n$	$X_2 \leq n$	$X_3 \leq n$

於 case1、3 之情形下，無法提供航段 A-C 之旅客座位，因為每提供航線 A-C 之旅客一個座位時，將會使得兩位旅客（A-B、B-C）沒有座位；相反地，若提供 A-B 或 B-C 之旅客座位時，僅 A-C 之旅客無法獲得座位；而於 case2、4 之情形下，航段 A-C 之旅客僅能有 $n - X_3$ 個座位數；於 case5、7 之

情形下，A-C 僅有 $n - X_1$ 個座位數；最後，於 case6、8 之情形下，A-C 之旅客若當 $n - X_1 > n - X_3$ 時，可有 $n - X_1$ 個座位數，而當 $n - X_3 > n - X_1$ 時則有 $n - X_3$ 個座位數。因此，提供航段 A-C 之旅客數 X_2 之座位數 W_2 如下所示：

$$W_2 = \max \{0, n - X_1, n - X_3\} \quad (2.4.28)$$

而於此航段無法獲得座位之旅客數 R_2 為：

$$R_2 = X_2 - \max \{0, n - X_1, n - X_3\} \quad (2.4.29)$$

於機場 A，航段 A-B 與 A-C 之旅客為相互競爭，即座位容量 n 提供予 $X_1 + X_2$ 位旅客。因此，航段 A-B 之搭乘旅客數 W_1 為：

$$W_1 = n - \max \{0, n - X_1, n - X_3\} \quad (2.4.30)$$

而於此航段無法獲得座位數之旅客數 R_1 為：

$$R_1 = X_1 - n + \max \{0, n - X_1, n - X_3\} \quad (2.4.31)$$

因此，於航段 B-C 之搭乘旅客數與無法獲得座位之旅客數分別為：

$$W_3 = n - \max \{0, n - X_1, n - X_3\} \quad (2.4.32)$$

$$R_3 = X_3 - n + \max \{0, n - X_1, n - X_3\} \quad (2.4.33)$$

於機場 A，旅客數大於座位容量數 n 之機率為：

$$P(X_1 + X_2 > n) = 0.5 + \Phi \left[\frac{S_1(t)a_1(t) + S_2(t)a_2(t) - n}{\sqrt{S_1(t)b_1(t) + S_2(t)b_2(t)}} \right] \quad (2.4.34)$$

其中 $a_1(t)$ 、 $b_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $b_2(t)$ 為相對應之參數。

於機場 B，旅客數大於座位容量數 n 之機率為：

$$P(X_2 + X_3 > n) = 0.5 + \Phi \left[\frac{S_2(t)a_2(t) + S_3(t)a_3(t) - n}{\sqrt{S_2(t)b_2(t) + S_3(t)b_3(t)}} \right] \quad (2.4.35)$$

其中 $a_2(t)$ 、 $b_2(t)$ 、 $a_3(t)$ 、 $b_3(t)$ 為相對應之參數。

令 P_A^* 為於機場 A 之旅客數大於座位容量數之最大機率， P_B^* 為於機場 B 之旅客數大於座位容量數之最大機率，且 $S_1^{(P_A^*, P_B^*)}(t)$ 、 $S_2^{(P_A^*, P_B^*)}(t)$ 、 $S_3^{(P_A^*, P_B^*)}(t)$ 分別代表各航段之最佳訂位數上限值，其中 P_A^* 、 P_B^* 必須滿足 (2.4.34) 及 (2.4.35)。

而最佳訂位數上限值亦可透過分別於機場 A、B 已訂位旅客遭拒登機數佔報到旅客數之最大比例 r_A^* 、 r_B^* 來求得。令 $T_A[S_1(t), S_2(t)]$ 、 $T_B[S_1(t), S_2(t)]$ 分別為機場 A、B 之旅客遭拒登機數，則最佳訂位數上限值 $S_1^{(r_A^*, r_B^*)}(t)$ 、 $S_2^{(r_A^*, r_B^*)}(t)$ 、 $S_3^{(r_A^*, r_B^*)}(t)$ 經由之前所導之公式即可求出；其中， r_A^* 、 r_B^* 之公式如下所示：

$$\frac{T_A[S_1(t), S_2(t)]}{S_1(t)a_1(t) + S_2(t)a_2(t)} = r_A^* \quad (2.4.36)$$

$$\frac{T_B[S_2(t), S_3(t)]}{S_2(t)a_2(t) + S_3(t)a_3(t)} = r_B^* \quad (2.4.37)$$

2.4.4 直飛、二費率之艙位配置

通常，航空公司為提高承載率，會有多種機票費率折扣方案；一般而言，支付低票價之旅客較支付高票價之旅客要來得早訂位，如：商務旅客通常會購買較高價之機票（如商務艙），且由於工作之緣故，其訂位時間通常僅在飛機起飛前幾天，較其他乘客（如：休閒旅客）要來得晚。因此，若航空公司採取【先到先購票】之原則，可能會使得一些支付高票價之旅客無法搭乘其欲搭之班機，如此對航空公司而言會降低其收入與利潤。在此，我們假設僅有兩種票價費率（低、高），在二費率之競爭下，航空公司於有限之座位容量下，分配其座位數以獲得最大之營收。首先，基本變數之定義如下所示：

n：座位容量數

L：低費率旅客之最佳訂位數上限值

P：支付高費率之旅客，無法獲得座位之機率

由圖 2.4 可知，當變數 L 越大，則機率 P 亦越大。圖 2.4 代表支付高費率旅客數之機率密度函數 $f(x)$ 平均數為 μ ，當支付低費率旅客之座位數越大（即 L 越大），則支付高費率旅客之座位數越少（ $n-L$ 越小），即當 $n-L$ 越小，則支付高票價之旅客在欲搭之班機上找到座位之機率越小。因此，其機率 P 如圖 2.4 所示。

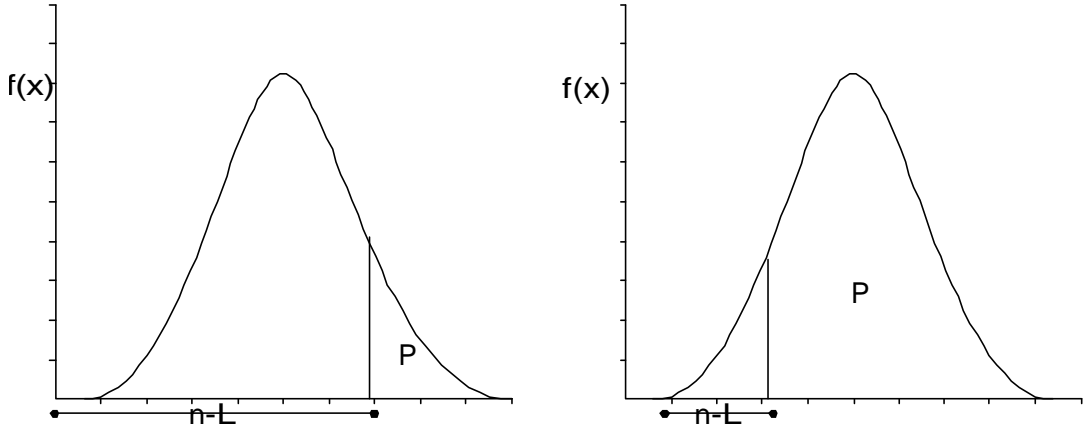


圖 2.4 高票價費率旅客無法登機之機率示意圖

資料來源：[14]

Littlewood[6]曾推導出模式以決定支付低費率旅客之最佳訂位數上限值。其變數定義如下所示：

C_1 為由支付低費率旅客所獲得之收益

C_2 為由支付高費率旅客所獲得之收益

L 為留給低費率旅客之座位數

因此，每個低費率座位之平均收益為 $1 \cdot C_1$ ；而每個高費率座位之平均收益為 $(1-P) \cdot C_2$ 。則接受低費率旅客訂位之範圍為 $C_1 \geq (1-P)C_2$ ，意即：

$$(1-P) \leq \frac{C_1}{C_2} \quad (2.4.38)$$

因此，最佳訂位數上限值 L 可由下式決定：

$$1 - \int_{n-L}^{\infty} f(x) dx \leq \frac{C_1}{C_2}$$

$$1 - \int_{n-L}^{\infty} f(x) dx = 1 - \Phi(\infty) + \Phi\left(\frac{n-L-u}{s}\right) \leq \frac{C_1}{C_2}$$

$$\Phi\left(\frac{n-L-u}{s}\right) \leq \frac{C_1}{C_2} - 0.5 \quad (2.4.39)$$

而上式 $f(x)$ 為經由過去資料調查所觀察之支付高費率旅客之機率密度函數。所以， L 之值越小，表示開放給支付低費率之旅客的訂位時間越短，則支付高費率之旅客能得到較好的服務品質；但隨著 L 之值越大，將能使得支付低費率之旅客所得到之服務越好。

此外，Mayer[20]亦發展出在以時間為考慮之下，決定低費率旅客之最佳訂位數上限值之模式，其假設為支付低費率之旅客為團體訂位，而其他單席訂位之旅客則為支付高費率之旅客；並且假設沒有取消訂位之情形，意即已訂位之旅客一定會搭乘預訂之班機，且能為航空公司帶來利益。此外，若以訂位之旅客無法於班機上找到座位時，其將不會搭乘另一班機，意即對航空公司而言是一種損失。

假設時段 T 為航般之訂位時段，而 T 可分為 1、2、3... t ... n 個時段。且 Mayer 亦假設於各個小時段 1、2... n 當中，支付低費率之旅客（多席訂位）較支付高費率之旅客要來得早訂位，且各時段之間的訂位需求相互獨立。令時段 1 為飛機起飛前之時段，時段 n 為開始訂位之時段。模式中變數之定義如下所示：

t ：飛機起飛前之時段（ $t=1、2、...n$ ）

n ：座位容量

C_1 ：航空公司由支付低費率之旅客所得之收益

C_2 ：航空公司由支付高費率之旅客所得之收益

$P_j(t)$ ： j 位旅客於時段 t ，欲以低費率訂位之機率

$q_j(t)$ ： j 位旅客於時段 t ，欲以高費率訂位之機率

$S_c(t)$ ：於 t 時段內，在 C 個可用座位數下，支付低費率旅客之座位數

$S_c^*(t)$ ：於 t 時段內，在 C 個可用座位數下，支付低費率旅客之最佳座位數

$R_c(t)$ ：於 t 時段內，在 C 個可用座位數下，航空公司所能獲得之最大營收

令 $t=1$ 時為距飛機起飛前最近之時段，而於此時段之開始時，支付低費率旅客所能獲得之座位數為 0、1、2、... n ，即 $S_c(t)=0、1、2、...n$ ；而於 $t=1$ 之時段可能有 1、2、3、...之旅客欲支付低費率搭乘該班機，而最多有 $S_c(1)$ 位旅客能於此航班得到座位。因此，支付低費率且能於此航班找到座位之旅客平均數為：

$$\sum_{i=0}^{S_c(1)} iP_i(1) + S_c(1) \sum_{i=S_c(1)+1}^{\infty} P_i(1)$$

其平均收入為：

$$R_1[S_c(1)] = C_1 \sum_{i=0}^{S_c(1)} iP_i(1) + C_1 S_c(1) \sum_{i=S_c(1)+1}^{\infty} P_i(1) \quad (2.4.40)$$

於 $t=1$ 之時段，航空公司預留 $S_c(1)$ 個座位給支付低費率之旅客。另外，

考慮於 $t=1$ 之時段時，有 $i < S_c(1)$ 個座位售予支付低費率之旅客，則此機率為：

$$\sum_{i=0}^{S_c(1)-1} P_i(1)$$

而由支付高費率旅客所獲得之平均收益 $R_2[S_c(1)]$ 為：

$$R_2[S_c(1)] = \sum_{i=0}^{S_c(1)-1} P_i(1) \left[\sum_{j=0}^{c-i-1} j q_j(1) + (c-i) \sum_{j=c-i}^{\infty} q_j(1) \right] C_2 \quad (2.4.41)$$

若航空公司售予 $S_c(1)$ 個座位給支付低費率之旅客，意即至少 $S_c(1)$ 個旅客欲搭乘此班機，則此發生之機率為：

$$\sum_{i=S_c(1)}^{\infty} P_i(1)$$

當 $S_c(1)$ 個座位售予支付低費率之旅客，表示由支付高費率之旅客所得之收益為：

$$R_3[S_c(1)] = \sum_{i=S_c(1)}^{\infty} P_i(1) \left[\sum_{j=0}^{c-S_c(1)-1} j q_j(1) + (c-S_c(1)) \sum_{j=c-S_c(1)}^{\infty} q_j(1) \right] C_2 \quad (2.4.42)$$

因此，於 $t=1$ 之時段，在 C 個可利用之座位的情形下，航空公司所獲得之收益與預留給支付低費率旅客之座位數有直接關係，而此模式是在追求最大收益下以求得 $S_c(1)$ 之值，意即：

$$R_c(1) = \max_{S_c(1)=0,1,2,\dots,c} \{R_1[S_c(1)] + R_2[S_c(1)] + R_3[S_c(1)]\} \quad (2.4.43)$$

因此，於時段 t ， C 個可利用之座位數，航空公司所能獲得之最大收益 $R_c(t)$ 可表示如下：

$$R_c(t) = \max_{S_c(t)=0,1,2,\dots,c} \left\{ \begin{aligned} & c_1 \sum_{i=0}^{S_c(t)} i P_i(t) + c_1 S_c(t) \cdot \sum_{i=S_c(t)+1}^{\infty} P_i(t) \\ & \left[\sum_{j=0}^{c-i-1} q_j(t) \cdot (j c_2 + R_{c-i-j}(t-1)) + (c-i) \sum_{j=c-i}^{\infty} q_j(t) c_2 \right] \\ & \sum_{i=S_c(t)}^{\infty} P_i(t) \cdot \left[\sum_{j=0}^{c-S_c(t)-1} q_j(t) \cdot (j c_2 + R_{c-S_c(t)-j}(t-1)) + (c-S_c(t)) \cdot \sum_{j=c-S_c(t)}^{\infty} q_j(t) c_2 \right] \end{aligned} \right\}$$

其中，上式之第一項為於時段 t 有 $S_c(t)$ 個預留座位數時，由支付低費率之旅客所獲得之收益；第二項為於時段 t 之後（含）之各時段，當於時段 t 有 $S_c(t)$ 個座位預留給支付低費率之旅客，且當 $i < S_i(t)$ 個座位已售予支付低費率之旅客時，航空公司由支付高費率之旅客所獲得之收益；第三項表於時段 t 之後（含）之各時段，當於時段 t 有 $S_c(t)$ 個座位數已售予支付低費率之旅客時，航空公司由支付高費率之旅客所獲得之收益。

令 S_c^* 為由 $S_c(t)$ 之集合所求之最大值，即最大收益。求解上式，可得 $R_c(t)$ 、 S_c^* 之值，其中 S_c^* 為於時段 t 時，為求收益最大化，必須有 S_c^* 個座位提供支付低費率之旅客，剩餘之座位 $n - S_c^*$ 則售予支付高費率之旅客，且其值越大對航空公司之收益越佳。以上之模式，其最主要的資料為旅客報到（訂位）之分配型態（機率），為求算出這些機率，其統計資料必須事先調查，以建立各特定之時段、不同族群之旅客需求型態。Mayer 亦探討取消訂位之情形，在此情況下，支付低費率旅客之座位數必須先求出，剩餘提供給支付高費率旅客之座位數應視為座位容量數，再計算其最佳訂位數上限值。

2.4.5 多航段、多費率之艙位配置

當一航線有多航段，艙位配置之問題將會變得更複雜，圖 2.5 表一航線有二航段。通常，A-C 之平均費率 $\overline{C_{AC}}$ 小於航段 A-B 與航段 B-C 之平均費率之和，即 $\overline{C_{AC}} < \overline{C_{AB}} + \overline{C_{BC}}$ ，且 $\overline{C_{AC}} > \overline{C_{AB}}$ 、 $\overline{C_{AC}} > \overline{C_{BC}}$ 。假設當座位已售予航段 A-C 之旅客，若有旅客欲購買航段 A-B 或 B-C 之座位時，則航空公司無法達到最大收益（ $\because \overline{C_{AC}} < \overline{C_{AB}} + \overline{C_{BC}}$ ）；因此，航空公司可能將座位售予航段 A-B 之旅客，而期望有另一旅客欲購買航段 B-C 之座位，但搭乘航段 B-C 之旅客可能會出現，但亦可能不會。因此，艙位配置問題當於各航段有不同之費率時，將會變得更為複雜。

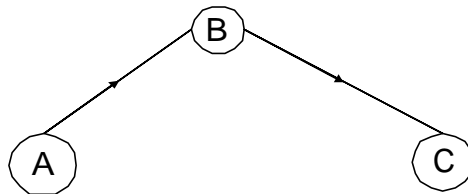


圖 2.5 多航段、多費率示意圖

資料來源：[14]

為解決這類的問題，應收集各城市對之間旅次需求的統計資料，經由這些資料與已知之航班座位容量，即可得知運輸旅次需求之分配。令 $X_{i,j}$ 為旅客欲支付費率 j 搭乘起迄對 i 之航班之數值，為一隨機變數。Wang (1983) [9] 曾發展一模式，在各個不同城市對、各個不同費率下，配置其座位。假設僅有兩種費率（高、低），三個城市 A、B、C，則有三個航段 A-B、B-C、A-C；因此，各個座位之配售有下列之方式：

1. 由 A-C 之旅客支付高費率，其中令旅客數為 X_{11} （隨機變數），而費率為 C_{11}
2. 由 A-C 之旅客支付低費率，其中令旅客數為 X_{12} （隨機變數），而費率為 C_{12}
3. 由 A-B 之旅客支付高費率，其中令旅客數為 X_{21} （隨機變數），而費率為 C_{21} ，且 B-C 之旅客支付高費率，其中令旅客數為 X_{31} （隨機變數），而費率為 C_{31} 。
4. 由 A-B 之旅客支付高費率，其中令旅客數為 X_{21} （隨機變數），而費率為 C_{21} ，且 B-C 之旅客支付低費率，其中令旅客數為 X_{32} （隨機變數），而費率為 C_{32} 。
5. 由 A-B 之旅客支付低費率，其中令旅客數為 X_{22} （隨機變數），而費率為 C_{22} ，且 B-C 之旅客支付高費率，其中令旅客數為 X_{31} （隨機變數），而費率為 C_{31} 。
6. 由 A-B 之旅客支付低費率，其中令旅客數為 X_{22} （隨機變數），而費率為 C_{22} ，且 B-C 之旅客支付低費率，其中令旅客數為 X_{32} （隨機變數），而費率為 C_{32} 。

而透過統計資料即可得知隨機變數 X_{11} 、 X_{12} 、 X_{21} 、 X_{22} 、 X_{31} 、 X_{32} 之機率密度函數。令 S_{ij} 為起迄對 j 之間，售予支付費率 i 旅客之座位數。則若利用第一種銷售方式時，其平均收益 R_1 如下所示：

$$\begin{aligned}
 R_1 = & P(X_{11} > S_{11})c_{11} + P(X_{12} > S_{12})c_{12} + P(X_{21} > S_{21})c_{21} + P(X_{31} > S_{31})c_{31} + \\
 & P(X_{31} > S_{21})c_{21} + P(X_{32} > S_{32})c_{32} + P(X_{22} > S_{22})c_{22} + P(X_{31} > S_{31})c_{31} + \\
 & P(X_{22} > S_{22})c_{22} + P(X_{32} > S_{32})c_{32}
 \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

同理，可以得知 R_2 、 R_3 、...，而在航空公司追求利潤最大化之下，即可得知其利潤 R 為：

$$R = \max\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\} \quad (2.4.45)$$