

線性及非線性跟車模式漸近安定性 之模擬分析

A SIMULATION ANALYSIS ON THE ASYMPTOTIC STABILITY OF LINEAR AND NONLINEAR CAR-FOLLOWING MODELS

許書耕 Shu-Keng Hsu¹
邱裕鈞 Yu-Chiun Chiou²

(102 年 12 月 23 日收稿，103 年 5 月 27 日第 1 次修改，
103 年 8 月 5 日第 2 次修改，104 年 6 月 5 日定稿)

摘 要

微觀跟車模式可描述個別車輛駕駛在車流中的行為，惟其數學組成相當複雜，對於模式的安定性，多年來相關研究只完成線性模式的分析，非線性模式的安定性分析一直闕如。本研究以系統模擬的方式分析跟車模式的安定性。對於線性跟車模式，模擬結果除驗證過去理論分析結果外，另發現只要滿足 $C \leq 1/2$ 的漸近安定性條件，線性跟車模式模擬的最大允許加減速率絕對值會隨車密度(k)增加而減少，但並不受跟車反應時間(T)的影響。對於非線性跟車模式，模擬結果顯示在符合漸近安定性的條件下，模擬的最大允許加減速率絕對值不但隨車密度的增加而降低，亦隨跟車反應時間的增加而降低。更重大的發現是，非線性跟車模式漸近安定性的條件亦為 $C \leq 1/2$ ，與線性跟車模式同。以 Greenshields 模式為例，在恰為安定的條件下 ($C = 1/2$)，可據以推得不同車流狀態 (車密度) 下適用的最大允許反應時間 $T_{max} = k_j / (2u_k^2)$ ，其與高階連續流模式鬆弛時間的定式非常相似，值

-
1. 中原大學土木系兼任副教授，交通部運輸研究所運輸工程組組長 (聯絡地址：臺北市敦化北路 240 號 9 樓 交通部運輸研究所運輸工程組；電話：02-2349-6820；E-mail：keng@iot.gov.tw)。
 2. 國立交通大學運輸與物流管理學系教授。

得後續研究繼續加以探討。

關鍵詞：跟車模式；安定性分析；漸近安定性；反應時間；鬆弛時間

ABSTRACT

Microscopic car-following models can accurately describe individual driving behaviors within traffic flows. However, due to their complicated model formulation, only linear car-following models have been established for stability analysis, and non-linear models have always been a lackluster. This paper aimed to analyze the stability of car-following models by simulation. Simulation results showed that under the condition of $C \leq 1/2$ ($C = \text{sensitivity} \times \text{response time}$), linear models became asymptotically stable and the maximum allowed acceleration for remaining asymptotically stable decreased concurrently with the increased traffic density (k), but is irrelevant to the response time (T) of the vehicle. By contrast, the maximum allowed acceleration of the non-linear models decreased concurrently with increased traffic density and response time. Notably, the researchers found that the condition for the asymptotic stability of non-linear models was consistent to that of linear models (i.e. $C \leq 1/2$). Using Greenshields model as an example, the maximum allowed response time under various traffic densities can be expressed as $T_{\max} = k_j / (2u_j k^2)$, which is closely similar to the relaxation time equation of the high order continuum model. This similarity should be further examined.

Key Words: Car following models; Stability analysis; Asymptotic stability; Response time; Relaxation time.

一、緒 論

車流理論自 Greenshields^[1] 提出一巨觀車流模式 (stream model) 以來, 已有 70 多年的歷史, 並已發展出許多類比水流、氣體的巨觀模式, 亦有基於個別車輛跟車行為的微觀跟車模式 (car-following models), 在研發的歷程中, 不同模化途徑曾有交會與整合, 亦有分歧與爭議。

任何模式在實際應用之前, 均須通過兩個層次的檢驗, 一為模式合理性驗證 (verification), 另一為模式代表性確認 (validation)。前者係檢驗模式本身的數學特性, 後者則在檢驗模式對所模化真實系統的代表性。跟車模式的安定性分析 (stability analysis) 係屬模式的驗證工作。針對此一課題, 數十年來相關研究只完成線性跟車模式安定性的數值分析, 至於非線性跟車模式因其數學組成複雜, 甚難進行數值分析, 故其有關安定性方面的相關研究一直闕如。

微觀跟車模式另一重要特性, 係在車流達到均衡 (equilibrium) 或穩定狀態 (steady state) 下, 與巨觀車流模式有一對一對應的關係。惟在推導其對應巨觀車流模式的過程中,

跟車模式的反應時間在均衡狀態的假設下被忽略，導致推導而得的巨觀車流模式中並無此項參數，直到發展出高階連續流模式，其定式中的鬆弛項 (τ) 常被類比成駕駛者的反應時間 (T)，此一被忽略的參數方重見天日，惟其二者間到底存在何種關係，相關研究亦未有定論。

本研究旨在以系統模擬方式分析非線性跟車模式的安定性條件，以彌補跟車模式在合理性驗證的研究空缺。值得說明的是，車流模式的安定性 (stability) 與車流的穩定狀態 (steady-state)，意義不同，但中譯卻常混用，為避免不必要的混淆困擾，本研究特定義此二名詞如下：

1. Stability：譯為「安定性」，係指車流模式定式應具備的數學特性。任何車流模式均須經數學或其他方式證實具有安定性後，方能加以應用；
2. Steady-state (equilibrium)：譯為「穩定(均衡)」，指受干擾經一段時間後，整條車流不再有加減速的變化，而一直維持等速運行的狀態。車流巨觀的 $q-k-u$ 關係即係建立在此一穩定狀態 (steady-state) 的基礎上。

二、文獻回顧

2.1 車流巨觀與微觀模式的對應關係與問題

依 May 與 Keller^[2] 的回顧，車流巨觀車流模式 (stream models) 的發展最早可回溯到 1934 年，Greenshields^[1] 在分析一組車流速率－密度調查資料後，假設該兩參數成線性關係：

$$u = u_f \left[1 - \frac{k}{k_j} \right] \quad (1)$$

其中， u_f = 自由流車速； k_j = 壅塞密度； u = 空間平均速率； k = 密度。

依 May 與 Keller^[2] 的回顧，車流微觀模式最早係由 Reuschel^[3] 與 Pipes^[4] 所提出，並在之後美國通用汽車實驗室一連串的研究下達成熟。該實驗室由 Robert Herman 領軍，所屬研究團隊曾於 1958 年提出跟車行為的刺激－反應關係式^[5]，其線性模式的數學式如下：

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \lambda[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (2)$$

其中，公式右側的 $[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$ 為前後兩車的速率差，反映後車跟隨前車不斷接收到的刺激， λ 則為後車駕駛對前車行為的敏感項 (sensitivity)，線性模式將之設定為常數；左側係一加速率，代表後車受刺激後的反應行為， T 則係反應的延遲時間，一般設為常數。

上示公式經 Herman 研究團隊不斷的實車驗證與修改，終於 1961 年由 Gazis 等人^[6] 提出微觀跟車模式的通式：

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \alpha \frac{\dot{x}_{n+1}^m(t+T)}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^l} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (3)$$

上式中，敏感項改由 $\alpha \frac{\dot{x}_{n+1}^m(t+T)}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^l}$ 組成， α 為敏感度常數； $[x_n(t) - x_{n+1}(t)]$ 為前後兩車的車間程 (spacing)，其倒數即為密度； $\dot{x}_{n+1}$ 為後車的車速； l, m 則為敏感項指數係數，會決定跟車模式的定式與特性。

Gazis 等人^[6]指出，給予式 (3) 不同的 l, m 值，透過以下程序，可由微觀模式導出對應的各種巨觀車流模式：

1. 假設車流達均衡狀態，忽略(剔除)跟車模式中的反應時間 T ；
2. 將跟車模式積分，並代入必要的邊界條件，如 u_f, k_j ，以解出積分常數。可導出過去相關研究曾提出的各種巨觀車流模式。

以 Greenshields^[1] 車流模式為例，只要令 $l=2, m=0$ ，並在積分過程中代入 u_f, k_j 邊界條件，即可由微觀跟車模式推導而得對應的車流模式： $q = u_f k (1 - k/k_j)$ ，且微觀跟車模式的敏感度常數亦與巨觀車流模式的參數對應： $\alpha = u_f/k_j$ 。從微觀跟車模式推導巨觀車流模式的過程可以發現：

1. 巨觀車流模式沒有反應時間 T 。由微觀模式推導巨觀模式時，在均衡狀態的假設下， T 遭剔除，致巨觀車流模式中完全看不到反應時間參數；
2. 微觀跟車模式設有常數型的反應時間 T 。事實上加入反應時間 T 係跟車模式發展上相當重要的突破，惟基於數學上的簡化，在定出通式 ($l-m$ 模式) 時，反應時間 T 僅以常數來設定，亦即跟車時不論車速如何、與前車相距的遠近，其跟車反應時間均假設為相同，模化上並未進一步處理跟車反應時間在不同車速 (密度) 狀況下應有所不同的問題。

微觀跟車模式雖與巨觀車流模式有對應關係，惟微觀跟車模式本身係一加速率公式，可以模化車流均衡或非均衡的運動行為，但巨觀車流模式根本不會動，只是用以描述車流在均衡狀態下，其 3 個巨觀參數—流率、密度、速率間的關係式，換言之，它只是一靜態的模式。事實上，巨觀車流模式一直到發展出高階連續流模式 (high-order continuum models) 後，才在模式中出現類似反應時間的參數。以 Payne^[7] 高階連續流模式的動量公式為例：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e(k) - u}{\tau} - \frac{\mu}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (4)$$

上式中的 τ 一般稱為鬆弛時間 (relaxation time)，相關文獻通常將之類比為駕駛者的反應時間 (許多研究甚而直接寫成 T)。為與微觀模式有所區分，以下本研究均將之以 τ 表之。

相關研究雖提出不同的高階連續流模式，但 τ 多設為常數，與微觀跟車模式將反應時間 T 設為常數的狀況相似。只有少數研究採不同的方式來加以模化，例如，Michalopoulos

等人^[8]將 τ 模化成密度 (k) 的函數：

$$\tau(k) = t_0 \left[1 + \frac{rk}{k_j - rk} \right] \quad (5)$$

其中， r 為常數， $0 \leq r < 1$ 。

Castillo 等人^[9]仔細研究 Payne^[7]的原始高階模式，發現其有一不符實際的缺點，即行駛中的車輛會受後方車流狀況的影響。為克服此一缺點，該研究建議鬆弛時間 τ 為密度的函數：

$$\tau(k) = -\frac{1}{2k^2 u_e'} \exp\left(-\frac{u - u_e}{a}\right) \quad (6)$$

其中， a 為常數， $u_e' = du_e / dk$ ，通常為負值。

比較式 (5)、(6) 可發現，兩研究均認為整體車流由非均衡狀態調適成均衡狀態所需的時間應與當時的車流密度有關，惟其值的大小二者的認定恰相反－密度愈高時，Michalopoulos 等人^[8]認為 τ 應愈大，而 Castillo 等人^[9]卻認為應愈小。前者可能係在模式恆為安定的前提下，認為交通愈壅塞，車流受擾動至恢復穩定的需時愈長；後者可能係從探討模式安定性條件的角度上，認為交通愈壅塞，跟車反應時間須愈短，車流方會安定。

2.2 線性跟車模式安定性的數學分析

分析跟車模式安定性的目的有二：一係針對特定模式（參數已知），判定其模化下的車流行為是否安定（車流內部發生的擾動會沉寂，或有限、無限傳遞及擴大），據以瞭解模式的適用範圍；另一則係用以界定出安全的跟車原則。

Herman 等人^[10]將跟車模式安定性的檢驗分為下列兩種：

1. 局部安定性 (local stability)：只考慮前後兩輛車，前車改變行動下，後車跟隨前車所作反應的振盪狀況；
2. 漸近安定性 (asymptotic stability)：係考慮一串車輛組成的車隊，其頭車行動的變化在後續各車間振盪的擴散情形。

對式 (2) 的線性跟車模式，Herman 等人^[10]以數值分析證明其局部安定性條件為：

1. $0 \leq C (= \lambda T) < 1/e (\approx 0.368)$ ：非振盪 (non-oscillatory)，並指數型沉寂 (exponential damping)；
2. $1/e \leq C (= \lambda T) < \pi/2 (\approx 1.571)$ ：振盪 (oscillatory)，但會沉寂；
3. $C (= \lambda T) = \pi/2$ ：振盪，且有固定振幅 (constant amplitude)；
4. $C (= \lambda T) > \pi/2$ ：振盪，且振幅逐漸擴大 (increasing amplitude)。

如考慮一車隊，假設其各車均遵循式 (2) 跟車，則 Herman 等人^[10]以數值分析證明其

漸近安定性條件為：

1. $C = \lambda T < 1/2$ ：車隊會漸近安定；
2. $C = \lambda T = 1/2$ ：車隊內連續兩兩車輛間的車間程會振盪，但係以指數型式迅速沉寂，而頭車行動產生的振盪會以 λ^{-1} 秒／車的速率向後續各車傳遞，與反應時間 T 無關；
3. 當 $C = \lambda T > 1/2$ ：車隊內連續兩兩車輛間的車間程會振盪，且振幅會擴大，最終在車隊的某處必會發生前後車的碰撞。

由以上回顧知，跟車模式的漸近安定性條件比局部安定性條件嚴格，滿足漸近安定性，必能滿足局部安定性。基此，為節省篇幅，本研究後續僅進行漸近安定性之研析。

三、線性跟車模式的漸近安定性模擬分析

本節以模擬的方式，分析式 (2) 的線性跟車模式在各種 (λ, T) 組合下的漸近安定性條件，除用以驗證前節相關研究以數學分析獲得的結果外，主要目的是建立跟車模擬的標準作業程序，以作為後續模擬非線性跟車模式時的準據。

除模擬測試式 (2) 線性跟車模式的車隊漸近安定性條件外，本研究亦模擬分析反應時間 T 及最大允許加速率絕對值對後車及整體車流的影響。以下模擬均假設是在不能變換車道的單車道路段進行，含頭車前後共 20 輛車參與跟車。基本上，在模擬跟車行為時，頭車的加減速行為必須預先設定，以對追隨其後各車製造出輕微的擾動。為便於說明，以下僅列出本研究多次模擬測試所選用的實驗設計之一，其他實驗設計甚多，囿於篇幅無法一一列舉。惟只要維持頭車的車速非負（即令起始車速 v 、加減速率 a 及減速延時 t 滿足 $v \geq at$ 條件）均可獲得一致的結果。本研究設定頭車的行動均係先維持等速行駛 1 秒鐘，然後等減速行駛 4 秒鐘，接著等速行駛 1 秒鐘後，再以等加速行駛 4 秒鐘，加減速率的絕對值及時間相同。此外，本研究旨在探討跟車模式本身的數學特性，並不探討在不同道路交通條件下之車流行為變化。惟為提供參考基準以易於閱讀，特以符合一般公路的交通條件來設定模擬環境。實際應用時，可依實際道路狀況，進行模式邊界條件之調整與設定。值得說明的是，無論是頭車的加減速行為及巨觀車流的邊界條件設定，均只會影響車隊之運行軌跡及車流之運行效率，與模式之安定性分析無關。

3.1 漸近安定性理論條件的驗證

本模擬的設定如表 1 所示。其中，依據 2011 年臺灣公路容量手冊^[11]有關多車道郊區公路快車道之容量依其空間平均自由速率 50 ~ 90 公里／小時，可對應每車道容量自 1,700 ~ 2,100 公里／小時不等，故本文設定 $q_{\max} = 1800$ 車／小時、 $k_j = 140$ 車／公里，以設定式 (2) 對應的巨觀車流模式 ($q = q_{\max}(1 - k/k_j)$)。而壅塞密度 $k_j = 140$ 車／公里相當於車間程為 7.14 公尺，符合國內駕駛行為。本模擬旨在探討各種模式之安定性，故係以一確定性方式進行模擬，其模擬平台以簡單的電腦試算軟體（例如，Excel）即可完成。

至於車流起始值是先設定 $k=40$ 車／公里，依指定的巨觀車流模式換算出 $u_e (=32.1$ 公里／小時)，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程 $s (=25$ 公尺) 與車速 $v (=8.9$ 公尺／秒)。此外，線性微觀跟車模式的敏感度參數 λ 設為固定的 0.5，以對應固定的 $q_{\max} (\lambda=q_{\max}/3600)$ ，跟車的反應時間 T 以 0.1 秒為增量，分別模擬 0.8 ~ 1.2 秒，可得 $C=\lambda T=0.4 \sim 0.6$ 各種狀態，頭車的加速率 a 設為 ± 2 公尺／秒²，俾利模式安定性之測試。本模擬平台係以 time-scan 的方式，每 0.1 秒更新車隊位置及速率。如反應時間設為 $T=0.8$ 秒時，後車的行動除基於本身的速率、位置外，尚要參考前車 0.8 秒 (8 個時間單元) 前的速率、位置。

表 1 線性跟車模式漸近安定性模擬的各項設定

項目	對應的巨觀車流模式		線性微觀跟車模式	
參數設定	$q_{\max}=1800$	車／小時	$\lambda=0.5$	1／秒
	$k_j=140$	車／公里	反應時間 $T=0.8 \sim 1.2$	秒
起始設定	$k=40$	車／公里	車間程 $s=25$	公尺
	$q=1286$	車／小時	車速 $v=8.9$	公尺／秒
	$u_e=32.1$	公里／小時	加速率 $a=\pm 2$	公尺／秒 ²

圖 1 所示者為線性微觀跟車模式車流漸近安定性的部分模擬結果 (僅列出 $C=0.4$ 、0.5、0.6，分別代表安定與不安定；同理，若 $C=0.45$ 、0.50、0.55，也可得到和前述設定狀況相同的安定性測試結果，惟囿於篇幅不一列出)。與前節 Herman 等人^[10]數學理論分析結果比較知，模擬結果與之完全相符，茲說明如下：

- (1) $C=\lambda T=0.4<1/2$ 時，車隊內各車的加速率與速率變化幅度，在由前車傳遞至後車的過程係逐漸縮小，同一輛車跟隨前車加速率與速率的振盪則係迅速沈寂；而由各車的車行時空軌跡可看出，頭車的些微擾動 (先減速再加速)，在向後傳遞 10 輛車後就幾乎消失，整體車流很快就恢復安定；
- (2) $C=\lambda T=0.5=1/2$ 時，車隊內各車的加速率與速率變化幅度，在由前車傳遞至後車的過程中振幅只略為縮小，大致維持不變，惟同一輛車跟車反應的振盪則仍係迅速沈寂；而由各車的時空軌跡可看出，頭車的些微擾動向後傳遞至第 20 輛車仍未消失，惟整體車流很快就恢復安定；
- (3) $C=\lambda T=0.6>1/2$ 時，車隊內各車的加速率與速率變化幅度，在由前車傳遞至後車的過程中有明顯擴大，導致傳至第 8 輛車以後的車速已出現不合理負值的問題，惟同一輛車跟車反應的振盪則仍係快速遞減 (要在 $C>\pi/2=1.57$ 時才會無限擴大)；而由各車

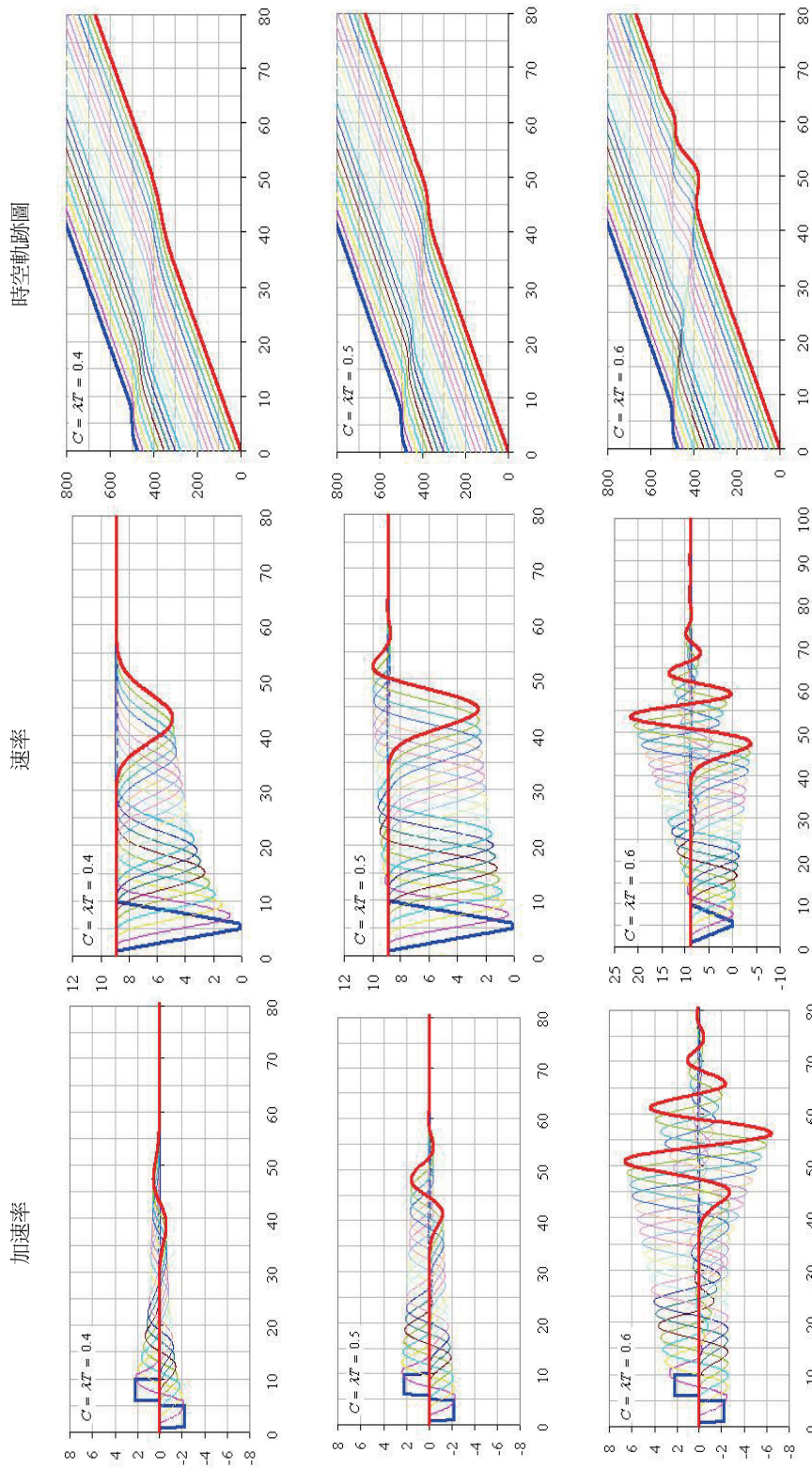


圖 1 線性跟車模式漸近安定性模擬結果

車行時空軌跡可看出，頭車的些微擾動向後傳遞至第 20 輛車時不但未見消失，反而是更加擴大，且最後幾輛車的車行軌跡明顯出現向後退（車速為負）的不合理結果。

3.2 反應時間 T 及最大允許加速率對車流的影響

本模擬的設定如表 2 所示，同樣係以參數 $q_{\max}=1800$ 車／小時、 $k_j=140$ 車／公里設定式 (2) 對應的巨觀車流模式 ($q=q_{\max}(1-k/k_j)$)。起始值是先設定 $k=10, 40, 70, 100, 130$ 車／公里 ($s=1000/k$)，依指定的巨觀車流模式換算出分別對應的 u_c ，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程 s 與車速 v 。此外，線性微觀跟車模式的參數 λ 同樣設為固定的 0.5，以對應固定的 $q_{\max}(\lambda=q_{\max}/3600)$ ，跟車的反應時間則以 0.1 為增量設為 0.1 ~ 2.0 秒，可得 $C=\lambda T=0.05 \sim 1.0$ 等各種狀態。

各模擬中，頭車的加速率值（含加速與減速，模擬時其絕對值相同）未知，藉本次模擬會找出其最大允許值，在該最大值下，頭車可以減速至完全停止，但不出會出現負速率，且後車在跟車的過程中亦不會撞上頭車。

表 2 線性跟車模式受 T 及最大允許加速率影響的各項模擬設定

項目	對應的巨觀車流模式	線性微觀跟車模式
參數設定	$q_{\max}=1,800$ 車／小時	$\lambda=0.5$ 1／秒
	$k_j=140$ 車／公里	反應時間 $T=0.1 \sim 2.0$ 秒
起始設定	$k=10, 40, 70, 100, 130$ 車／公里	車間程 $s=100, 25, 14.3, 10, 7.7$ 公尺

茲列出部分模擬結果 ($T=0.1, 0.5, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 2.0$ 等 7 種狀況) 如表 3 所示，分析說明如下：

1. 當 $C=\lambda T \leq 1/2$ 時，車隊是安定的。頭車最大允許加速率隨跟車間程（車密度）的減小（增加）而降低，與後車跟車反應時間 T 無關，亦即相同 k (或 s) 值下， $T=0.1$ 至 $T=1.0$ (當 $T>1.0$ 時， $C>1/2$ ，為不安定)，其最大允許加速率均相同。事實上，表中最大允許加速率 a 值恰為跟車起始車速 v 值的 4 倍，其間隱含一運動公式： $v - a \times t = 0$ 。其中， t 為模擬設定的頭車減速延時（固定為 4 秒）。換言之，在車流處於安定的前提下，頭車最大允許加速率只受起始車速及頭車減速延時的制約，以維持車速為非負值；
2. 當 $C=\lambda T > 1/2$ 時，車隊是不安定的。頭車最大允許加速率隨跟車反應時間 T 的加長而明顯縮短，甚而降為 0。值得說明者，表中所示的最大允許加速率僅反應 20 輛車的擾動傳遞結果（傳至第 20 輛車的車速、車間程均仍能保持正值），事實上整條車隊的加速率及速率的振幅均隨向後傳遞車次數不斷擴大，即便將加速率降低至接近 0，例如 $T=1.2$ ， $k=10$ 的狀況，將其最大允許加速率由 7.98 降為 0.000000001，其不安定狀態並不會改變。簡言之，當模擬的車輛數增多，在 $C=\lambda T > 1/2$ 下將找不到最大允許加速率（即均須為 0）。

表 3 線性跟車模式各種密度 (k) 下的最大允許加速率絕對值

k	s	v	T=0.1	T=0.5	T=0.8	T=0.9	T=1.0	T=1.2	T=2.0
			C=0.05	C=0.25	C=0.4	C=0.45	C=0.5	C=0.6	C=1
10	100.0	46.4	11.61	11.61	11.61	11.61	11.61	7.98	0.000142
40	25.0	8.9	2.23	2.23	2.23	2.23	2.23	1.54	0.000027
70	14.3	3.6	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.61	0.000011
100	10.0	1.4	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.25	0.000004
130	7.7	0.3	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.05	0.000001

註：1. 單位：加速率為「公尺／秒²」； k 為「車／公里」； s 為「公尺」； v 為「公尺／秒」； T 為「秒」。

2. T 為跟車反應時間。

本研究經上述模擬分析，獲得以下重要的結果：

1. 線性跟車模式的安定性，模擬分析結果與相關研究的數值分析結果完全相符。其中，多車跟車具備漸近安定性的條件是 $C (= \lambda T) \leq 1/2$ ，在此條件下，後續各車因應頭車些微擾動所作的加減速反應與車速的變化，其振盪幅度會隨由頭車向後傳遞的車次數逐次縮減，而所有後車本身的車速振盪，因均符合局部安定性條件 ($C < \pi/2$)，故均會很快的沉寂；
2. 微觀跟車模擬，除起始條件必須審慎設定外，擾動的設計亦須有一定的規範，否則將出現與實務不符的狀況。最常見的是加減速率的大小及加減速時間的長短，在不當設計下很容易出現負車速（車輛倒車後退）的結果。惟由線性跟車模式的微觀跟車模擬結果知，只要滿足 $C \leq 1/2$ 的漸近安定性條件，且維持頭車的車速非負（即令起始車速 v 、加減速率 a 及減速延時 t 滿足 $v \geq at$ 條件），則模擬的最大允許加速率 a （指絕對值，含加、減速率）即不受跟車反應時間 T 的影響，此一重大的發現，可作為後續非線性跟車模式模擬分析安定性的參考。

由以上分析知，後續進行非線性跟車模式的安定性分析時，須同時檢查頭車的車速是否維持非負（確保模擬設計的合理），以及擾動向後傳遞的振盪規模是否會遞減（安定性條件）。

四、非線性微觀跟車模式安定性的模擬分析

本節以 Greenshields^[1] 巨觀車流模式對應的非線性跟車模式，以模擬的方式找出其漸近安定性的條件。選擇 Greenshields^[1] 模式的主要原因是該模式數學上雖最為簡單，但實際上已具備非線性車流模式的基本特性。

4.1 非線性跟車模式的漸近安定性

Greenshields^[1] 巨觀車流模式及其對應的非線性微觀跟車模式定式如下：

$$\text{巨觀車流模式：} q = u_f k \left[1 - \frac{k}{k_j} \right] \quad (7)$$

$$\text{微觀跟車模式：} \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\alpha}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (8)$$

$$\text{其中，} \alpha = u_f / k_j \quad (9)$$

本模擬的設定如表 4 所示。模擬是假設在不能變換車道的單車道路段進行，含頭車前後共 20 輛車參與跟車。對應的巨觀車流模式固定，參數仍設為 $u_f = 80$ 車／小時、 $k_j = 140$ 車／公里。起始值是先設定 k (如 10, 40, 70, 100, 130 車／公里)，依指定的巨觀車流模式換算出分別對應的 $u_e = u_f(1 - k/k_j)$ ，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程 s 與車速 v 。此外，其對應微觀跟車模式的敏感度常數 $\alpha (= u_f/k_j)$ ，依代入參數值設為固定的 158.7 公尺²／秒，跟車的反應時間 T 係以 0.1 秒為增量，設定為 0.1 ~ 3.0 秒等各種狀態。

各模擬中，頭車的行動比照線性跟車模式的設定，均係先維持等速 1 秒鐘，然後等減速 4 秒鐘，維持等速 1 秒鐘後，再等加速 4 秒鐘，等加減速率絕對值 a 相等。模擬欲尋求最大允許加減速率值，在該最大值下，車流處於安定，且前後共 20 輛車的速率在模擬中能保持正值，不出會出現倒車後退的負速率。

表 4 非線性跟車模式漸近安定性模擬的各項設定

項目	對應的巨觀車流模式	非線性微觀跟車模式
參數設定	$u_f = 80$ 公里／小時	$\alpha = 158.7$ 公尺 ² ／秒
	$k_j = 140$ 車／公里	$T = 0.1 \sim 3$ 秒
起始設定	k 車／公里	$s = 1000/k$ 公尺
	$u_e = u_f(1 - k/k_j)$ 公里／小時	$v = u_e \times 1000/3600$ 公尺／秒

前節分析線性跟車模式的漸近安定性時，發現結果只有兩種情形，即 $C = \lambda T \leq 1/2$ 者安定， $C = \lambda T > 1/2$ 者不安定，特性簡單。非線性跟車模式的漸近安定性就相當複雜，部分模擬結果如圖 2 所示，其至少出現 3 種結果，茲分析說明如下：

1. 狀況 1 (安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在頭車，然後隨向後傳遞的車次依序縮減；
2. 狀況 2 (不安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在 20 輛車的中間 (頭車以後，尾車之前)，過後再隨向後傳遞的車次依序縮減；

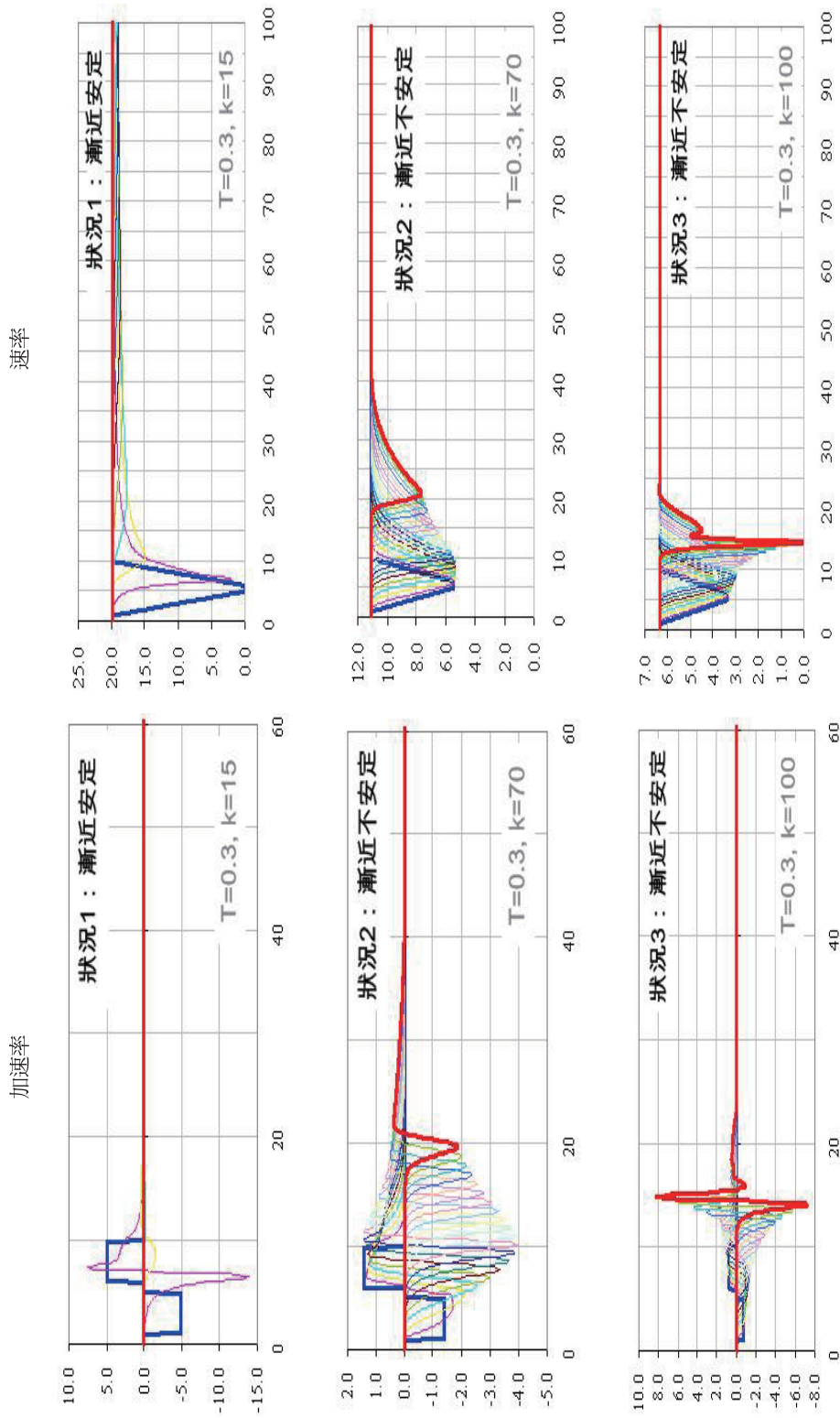


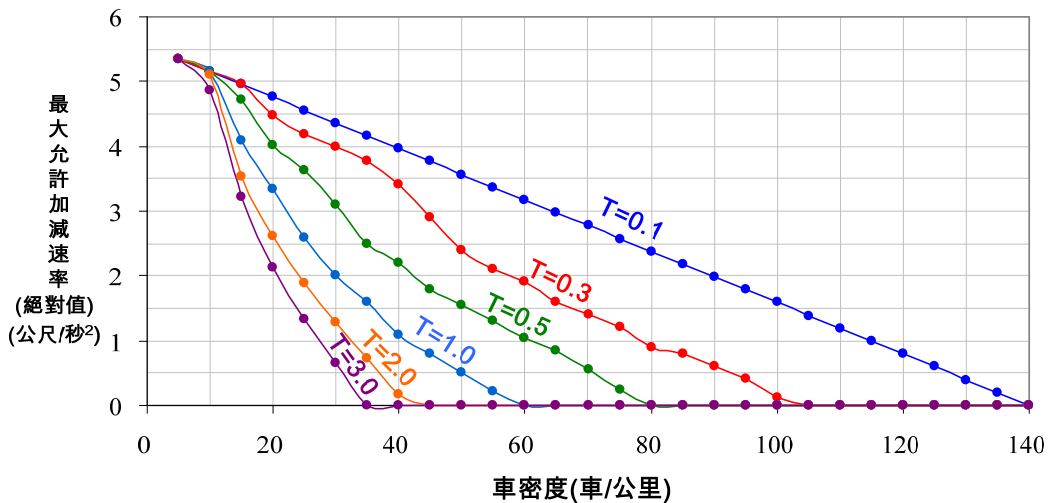
圖 2 非線性跟車模式漸近安定性的部分模擬結果

3. 狀況 3 (不安定)：車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序擴大，以本模擬設定的車隊規模，其振盪的最大幅度是發生在第 20 輛車。

由於上述除狀況 1 之外，其餘兩種狀況均會發生頭車稍作加減速即導致後車 (某輛) 追撞前車，或者後車的車速因劇烈加減速而出現負值的不合理結果，亦即整條車流行為是不安定的。但經模擬分析發現，只要縮小頭車加減速的規模 (亦即縮小車流內部擾動的規模)，原屬狀況 2 與狀況 3 的不安定，卻有可能變為安定。換言之，非線性跟車模式的安定性，會受頭車加減速規模的影響，其允許最大加減速規模除係隨車間程的減小而降低外，且會依反應時間 T 的大小而不同，這是與線性跟車模式最大的不同。由此亦可理解，非線性跟車模式相當複雜，的確很難以數值分析直接推導出其漸近安定性的條件。

原屬狀況 2、3 不安定者，經將其頭車加減速規模縮小後，再模擬找出符合漸近安定性條件的加減速率，部分模擬結果如圖 3 與表 5 所示，茲分析說明如下：

1. 非線性跟車模式在符合漸近安定性的條件下，其模擬的最大允許加減速規模不但隨密度的增加而降低，亦隨反應時間 T 的增加而降低；
2. 反應時間 T 愈小，符合漸近安定性條件適用的 k 值範圍就愈大，例如 $T=0.1$ 秒可適用各種密度 (跟車間程) 的狀況，而隨 T 值愈增大，符合漸近安定性的適用範圍變得愈小，至 $T=3.0$ 秒時，密度 $k > 35$ 車／公里以上者均不適用，均找不到輕微擾動下而仍能保持安定的加減速率值 (即 $\pm a$ 須為 0)；
3. 對應 Greenshields^[1] 車流模式的非線性跟車模式，其敏感度項為非線性 ($\lambda = \alpha/s^2$)，由表 5 的右半部各欄 ($C = (\alpha/s^2) \times T$) 知，符合漸近安定性條件者，不論 T 值為何，其 C 值均是 $C = (\alpha/s^2) \times T \leq 1/2$ ，與線性跟車模式 $C = \lambda \times T \leq 1/2$ 的安定性條件相同。找出非線性跟車模式的漸近安定性條件，是本研究重大的發現。



註：圖中 T 為跟車反應時間，單位為「秒」。

圖 3 非線性跟車模式符合漸近安定性條件的最大允許加減速規模

表 5 非線性跟車模式符合漸近安定性的條件

密度 (k)	最大允許加減速率 (絕對值)						$C=(\alpha/s^2)\times T$					
	$T=0.1$	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	$T=0.1$	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
0	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.35	5.35	5.35	5.35	5.35	5.35	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.012
10	5.15	5.15	5.15	5.15	5.10	4.87	0.002	0.005	0.008	0.016	0.032	0.048
15	4.96	4.96	4.72	4.09	3.52	3.21	0.004	0.011	0.018	0.036	0.071	0.107
20	4.76	4.47	4.01	3.34	2.61	2.13	0.006	0.019	0.032	0.063	0.127	0.190
25	4.56	4.18	3.63	2.60	1.88	1.33	0.010	0.030	0.050	0.099	0.198	0.298
30	4.36	3.99	3.10	2.00	1.27	0.66	0.014	0.043	0.071	0.143	0.286	0.429
35	4.16	3.77	2.50	1.60	0.73	0.00	0.019	0.058	0.097	0.194	0.389	0.583
40	3.96	3.40	2.20	1.10	0.18	0.00	0.025	0.076	0.127	0.254	0.499	0.762
45	3.77	2.90	1.80	0.80	0.00	0.00	0.032	0.096	0.161	0.321	0.643	0.964
50	3.57	2.40	1.55	0.50	0.00	0.00	0.040	0.119	0.198	0.397	0.794	1.190
55	3.37	2.10	1.30	0.22	0.00	0.00	0.048	0.144	0.240	0.480	0.960	1.440
60	3.17	1.90	1.05	0.00	0.00	0.00	0.057	0.171	0.286	0.571	1.143	1.714
65	2.97	1.60	0.85	0.00	0.00	0.00	0.067	0.201	0.335	0.671	1.341	2.012
70	2.77	1.40	0.55	0.00	0.00	0.00	0.078	0.233	0.389	0.778	1.556	2.333
75	2.58	1.20	0.25	0.00	0.00	0.00	0.089	0.268	0.446	0.893	1.786	2.679
80	2.38	0.90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.102	0.305	0.508	1.016	2.032	3.048
85	2.18	0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.115	0.344	0.573	1.147	2.294	3.440
90	1.98	0.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.129	0.386	0.643	1.286	2.571	3.857
95	1.78	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.143	0.430	0.716	1.433	2.865	4.298
100	1.59	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.159	0.476	0.794	1.587	3.175	4.762
105	1.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.175	0.525	0.875	1.750	3.500	5.250
110	1.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.192	0.576	0.960	1.921	3.841	5.762
115	0.99	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.210	0.630	1.050	2.099	4.198	6.298
120	0.79	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.229	0.686	1.143	2.286	4.571	6.857
125	0.59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.248	0.744	1.240	2.480	4.960	7.440
130	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.268	0.805	1.341	2.683	5.365	8.048
135	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.289	0.868	1.446	2.893	5.786	8.679
140	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.311	0.933	1.556	3.111	6.222	9.333

註：1. 單位： k 為「車／公里」；最大允許加減速率為「公尺／秒²」； T 為「秒」； s 為「公尺」； α 為「公尺²／秒」。

2. 表中數字，有灰色網底者表找不到安定的狀況；其他無網底者表具安定性，即其車速變化的振盪是隨向後傳遞的車次而依序縮減。

3. 表中 T 為跟車反應時間， α 為跟車模式敏感常數， s 為前後兩車的車間程。

4.2 非線性跟車模式符合漸近安定性條件的 T - k 關係

由前節的模擬分析知，非線性跟車模式的漸近安定性條件仍係 $C \leq 1/2$ ，與線性跟車模式安定性的條件同。惟以 Greenshields^[1] 巨觀模式為例，其對應非線性微觀跟車模式的 $C = (\alpha/s^2) \times T = \alpha \times k^2 \times T = (u_f/k_j) \times k^2 \times T$ ，很明顯的， T 的最大值須隨 k 的不同而變，方能令模式在各種交通狀態下維持安定。圖 4 即為 $C = 1/2$ (恰符合漸近安定性條件) 下的 T - k 分布圖，其 $T = f(k)$ 的定式可寫成：

$$T = \frac{1}{2\alpha k^2} = \frac{k_j}{2u_f k^2} \quad (10)$$

比較 Castillo 等人^[9] 提出的式(6)可發現，其 τ 公式中的 $u'_e = du_e/dk$ ，以 Greenshields^[1] 模式之 $u'_e = -\frac{u_f}{k_j}$ ，代入式(6)可得：

$$\tau(k) = \frac{k_j}{2u_f k^2} \exp\left(-\frac{u - u_e}{a}\right) \quad (11)$$

由以上分析知，本研究以 Greenshields^[1] 巨觀車流模式模擬微觀跟車模式的安定性條件，獲得跟車反應時間 T 應為密度的函數的結果，而其定式與 Castillo 等人^[9] 巨觀高階連續流模式的鬆弛時間 τ 非常相像，微觀跟車模式的反應時間與巨觀連續流模式的鬆弛時間首次出現如此緊密的對應關係，值得相關研究持續地加以關注與分析。

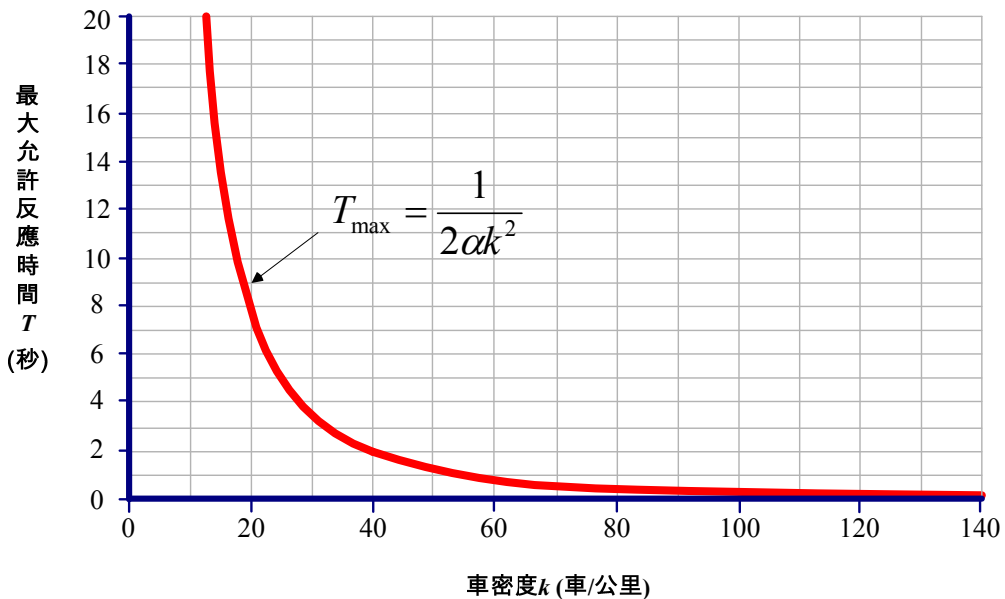


圖 4 非線性跟車模式符合漸近安定性條件的 k - T 分布圖

五、結論與建議

微觀跟車模式的漸近安定性分析，一直是跟車模式是否合理的重要檢驗特性之一。囿於跟車模式的複雜數學方程式，難以透過數學解析方法檢驗其漸近安定性。基此，本文透過系統模擬技術，分別針對線性及非線性跟車模式在不同車流環境、加減速率、反應時間等之漸近安定性進行分析。

由模擬結果知，線性跟車模式的漸近安定性只分成 $C = \lambda T \leq 1/2$ 者安定， $C = \lambda T > 1/2$ 者不安定兩種情況。而且，只要滿足 $C \leq 1/2$ 的漸近安定性條件，最大允許加減速率雖隨車流密度 k 提高而降低，但不受跟車反應時間 T 的影響。至於非線性跟車模式之漸近安定性相對複雜，出現以下 3 種模擬結果：

1. 狀況 1 (安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在頭車，然後隨向後傳遞的車次依序縮減；
2. 狀況 2 (不安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在車隊的的中間 (頭車以後，尾車之前)；
3. 狀況 3 (不安定)：車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序擴大，即振盪的最大幅度是發生在最後一輛車。

另外，從非線性模式的模擬結果亦發現，當反應時間 T 愈小，模式適用的交通狀況範圍就愈大。例如， $T=0.1$ 秒可適用各種密度狀況 ($k=0 \sim k_j$)，當 $T=3.0$ 秒時，密度 $k > 35$ 車／公里以上均找不到車流能保持安定的加減速率值。此外，Greenshields^[1] 模式對應的非線性模式的敏感度項為 (α/s^2) ，模擬結果發現，其漸近安定性的條件為 $C = (\alpha/s^2) \times T \leq 1/2$ ，與線性跟車模式的漸近安定性條件相同，此為本研究一大發現。

巨觀高階連續流模式的鬆弛時間 τ 常被類比成微觀跟車模式的反應時間 T ，惟其巨、微觀間的關係則一直未明。由本研究獲得的非線性微觀跟車模式符合漸近安定性的條件知，不同車流狀態 (車密度) 下適用的最大允許反應時間 T 並不同，以 Greenshields^[1] 模式為例，其數學式為 $T_{\max} = k_j / (2u_f k^2)$ ，此與 Castillo 等人^[9] 高階連續流模式鬆弛時間的定式： $\tau(k) = \frac{k_j}{2u_f k^2} \exp\left(-\frac{u - u_e}{a}\right)$ 非常相似。微觀跟車模式的反應時間與巨觀連續流模式的鬆弛時間首次有如此緊密的對應關係，實為本研究另一項重大發現。建議後續研究，不論從微觀或巨觀角度，可針對此關聯性繼續深入探討。

參考文獻

1. Greenshields, B. D., "A Study of Highway Capacity", Proceedings of the Highway Research Board, Vol.14, Transportation Research Board, 1935, pp. 448-477.

2. May, A. D. JR. and Keller, H. E. M., “Non-integer Car-following Models”, *Highway Research Record*, No. 199, 1967, pp. 19-32.
3. Reuschel, A., “Fahrzeugbewegungen in der Kolonne”, *Oesterr. Ingr. Arch.* 4, 1950, pp. 193-215.
4. Pipes, L. A., “An Operational Analysis of Traffic Dynamics”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 24, 1953, pp. 271-281.
5. Chandler, R. E., Herman, R., and Montroll, E. W., “Traffic Dynamic Studies in Car Following”, *Operations Research*, Vol. 6, No. 2, 1958, pp.165-184.
6. Gazis, D. C., Herman, R., and Rothery, R., “Nonlinear Follow-the-leader Models of Traffic Flow”, *Operations Research*, Vol. 9, No. 4, 1961, pp.545-567.
7. Payne, H. J., “Models of Freeway Traffic and Control”, *Simulation Council Proc.*, Vol. 1, 1971, pp. 51-61.
8. Michalopoulos, P. G., Yi, P., and Lyrintzis, A. S., “Development of an Improved High Order Continuum Traffic Flow Model”, *Transportation Research Record*, No. 1365, 1992, pp.125-132.
9. Castillo, J. M. D., Pintado, P., and Benitez, F. G., “The Reaction Time of Drivers and the Stability of Traffic Flow”, *Transportation Research*, Vol. 28B, 1994, pp. 35-60.
10. Herman, R., Montroll, E. W., Potts, R. B., and Rothery, R. W., “Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car Following”, *Operations Research*, Vol. 7, 1959, pp. 86-106.
11. 交通部運輸研究所，2011 年臺灣公路容量手冊，民國 100 年。

