運輸計劃季刊
第四十四卷 第一期
民國一〇四年三月
頁 69 ～頁 98

Transportation Planning Journal
Vo1. 44 No. 1
March 2015
PP. 69 ～ 98

連續流車流模式的有限差分近似解法

ON THE APPROXIMATION OF FINITE DIFFERENCE METHODS FOR CONTINUUM TRAFFIC FLOW MODELS

許書耕 Shu-Keng Hsu [1]
邱裕鈞 Yu-Chiun Chiou [2]

(103 年 1 月 8 日收稿，103 年 8 月 5 日第 1 次修改，104 年 3 月 15 日定稿)

摘　要

連續流車流模式屬雙曲線型偏微分方程式，求解不易，因此，一般多藉由有限差分法加以近似求解。本研究以均勻到達車流碰上停等車隊產生向上游回溯衝擊波，以及停等車隊起動向下游疏解等兩個嚴苛的交通狀況為例，進行多種有限差分方法在不同階等連續流模式的適用性評比。結果發現，Lax-F 有限差分法無論是針對一階準線性連續流模式 (即 LWR 模式) 或高階連續流模式，均能獲致與解析解最為相近的近似解，而且安定性與收斂性亦佳，適用性最佳。此與以往國內外研究略有不同，主要係因以往研究所研析的交通案例均侷限於非壅塞交通狀態及 Payne 模式本身缺陷所致。

關鍵詞： 連續流模式；LWR 模式；雙曲線型偏微分方程式；有限差分法

ABSTRACT

Because continuum traffic flow models are described by hyperbolic partial differential equations and the exact solutions to the models are difficult to derive analytically, finite difference methods are commonly used to approximate the

1. 中原大學土木系兼任副教授，交通部運輸研究所運輸工程組組長 (地址：臺北市敦化北路 240 號 9 樓 交通部運輸研究所；E-mail：keng@iot.gov.tw；Tel：(02)2349-6820)。
2. 國立交通大學運輸與物流管理學系教授。

solutions. In this paper, the fitness of several finite difference methods under different continuum flow models is assessed in two extreme traffic conditions, a backward shock wave formed by a uniform arrival flow encountering a stopped flow and a forward shock wave formed by a discharging flow. The results show that the Lax-F method can obtain good approximations for both the first-order quasi-linear continuum model (i.e., the LWR model) and the high-order continuum flow model with good stability and convergence. This finding is different from previous domestic and foreign studies primarily because past studies examined only traffic cases with uncongested traffic conditions and because of the drawbacks of the Payne model itself.

Key Words: *Continuum traffic flow models; LWR model; Hyperbolic partial differential equations; Finite difference methods.*

一、前　言

連續流車流模式 (continuum traffic flow model)，不論是簡單 (一階準線性) 連續流模式 (simple continuum model; first order model; LWR model) 或高階連續流模式 (high order model)，均屬雙曲線型 (hyperbolic type) 偏微分式 (partial differential equations, PDE)，只有少數狀況下方可獲得解析解 (exact analytic solutions)，其他則必須藉由有限差分式 (finite difference equations, FDE) 加以近似求解，方能進行模式特性或個案應用之評析。

國內外相關研究曾列舉出可用於連續流模式的多種有限差分法，並用以解析各種交通案例。惟所採用的有限差分法大多不適用於近似求解高階連續流模式，而且所設計的交通案例亦多有問題，例如，所探討的交通狀況過於侷限 (僅限於非壅塞車流)，以及所設定的車流狀況為數學上可能但實務上不允許 (例如允許車流向後退) 等，均需要再予以審慎評析檢驗。

由於簡單連續流模式為高階連續流模式的一種特例，因此，適用於近似求解高階連續流的有限差分法，必須先通過簡單連續流模式的適用性檢驗。基此，本研究乃按由簡至繁之順序，透過嚴苛的交通案例設計，先回顧評析適用一階線性與準線性 (簡單) 連續流模式的差分方法，再針對適用於簡單連續流模式的有限差分法，評析其對高階連續流模式的適用性。

二、有限差分方法重點回顧

2.1　差分原理與有效差分的條件

LeVeque [1] 以一簡例說明有限差分如何近似求解微分方程式，亦藉以說明近似解的準確性 (the order of accuracy)。

令 $u(x)$表一個可微分的單變數函數，x_0 為一特定點。現欲以有限差分法，以 x_0 週邊有限點的 u 值來近似求解 $u'(x_0)$，則可選擇下列方式：

$$D_+u(x_0) \equiv \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} \tag{1}$$

其中，h 表一極小值。值得注意的是，$D_+u(x_0)$ 實際上係 $u(x)$ 曲線上連接 x_0 與 x_0+h 兩點的弦線斜率，如圖 1 所示。

式(1)只評估了 $x \geq x_0$ 的部分，係對 $u'(x_0)$ 的單邊近似 (one-sided approximation)。同理，亦可採用另一種單邊近似方式：

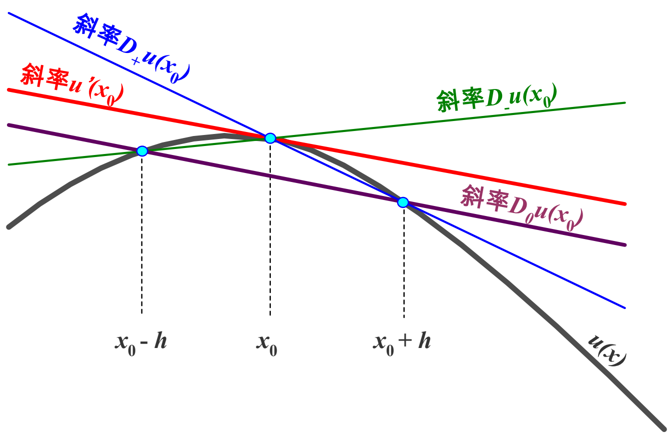
$$D\_u(x_0) \equiv \frac{u(x_0)-u(x_0-h)}{h} \tag{2}$$

上述這兩種近似方式對 $u'(x_0)$ 均僅有一階準確 (a first order accurate)，其誤差約與 h 的大小成比例。

另一種是所謂的中心近似 (centered approximation)，即：

$$D_0u(x_0) \equiv \frac{u(x_0+h)-u(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(D_+u(x_0)+D\_u(x_0)\right) \tag{3}$$

式(3)係 $u(x)$ 曲線上連接 x_0-h 與 x_0+h 兩點弦線的斜率，亦係前述兩種單邊近似的平均。而由圖 1 可看出，中心近似的斜率更接近 $u'(x_0)$，較任何一種單邊近似要來得精確。事實上，這種方式有二階準確 (a second order accurate)，其誤差約與 h^2 的大小成比例，當 h 很小時，二階的誤差會較一階小很多。



資料來源：LeVeque[1]。

圖 1　單變數函數差分近似範例

連續流模式係包含時間與空間兩變數的偏微分方程式，其設定變數微量值的作法係將微分解的時空離散化，一般係切割成網格狀，如圖 2 所示。惟在求解連續流模式時，並非只是將變數及其導函數轉換成離散型即可，對於雙曲線型者特別是如此，這類模式即便起始資料很平順，亦可能產生不連續解，甚或產生衝擊波 (波方向甚而可能與車流方向相反)，而衝擊波的存在，尤其當網格切割得愈來愈細時，對發展有效的有限差分近似解將是一大挑戰。

Zhang [2] 指出，任何有效的數值近似均應滿足以下 3 個條件：

(1) 一致性 (consistency)：*h, b* 愈細，有限差分式就愈接近原始偏微分式；

(2) 安定性 (stability)：有限差分產生的誤差，不會隨時間增加而增加；

(3) 收斂性 (convergence)：*h, b* 愈趨近 0，有限差分的極限解會愈趨近原始偏微分式的正確值。

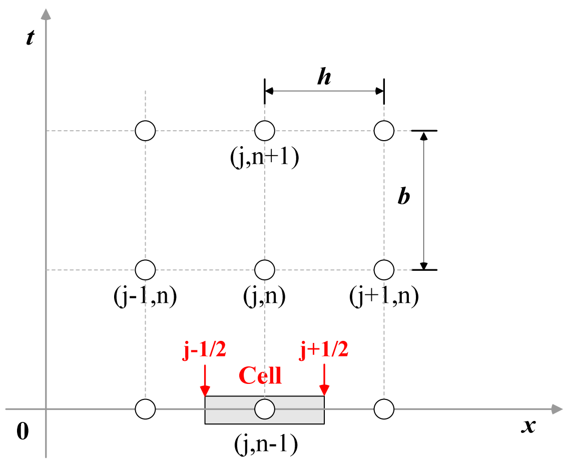


圖 2　有限差分的時空座標網格狀切割

Zhang [2] 說明，有一種特殊的雙曲線偏微分方程式，稱為守恆型 (conservation form)，其有限差分式特別能符合上述 3 個條件。此種特殊的守恆型，可寫成：

$$U_t + F(U)_x = R(U) \tag{4}$$

如為一階連續流模式的黎曼問題 (Riemann problem)，則上式可進一步寫成 $U_t+F(U)_x=0$。這種守恆型雙曲線偏微分式可以發展出具守恆性的有限差分近似法，其優點是可以確保衝擊波速的計算正確。而一個有限差分式能具守恆性，須能寫成：

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t}+\frac{\widetilde{F}(U_{j+1}^n,U_j^n)-\widetilde{F}(U_j^n,U_{j-1}^n)}{\Delta x}=\widetilde{R}(U_{j+1}^n,U_j^n,U_{j-1}^n) \tag{5}$$

其中，$\widetilde{F}$ 稱為數值通量 (numerical flux)，而對車流而言，如 U 表密度，且流量係密度的函數，則上式所謂的數值通量 $\widetilde{F}$ ，即係車流的流率 (flow rate)。$\widetilde{R}$ 為車流產生項，適用於有進出孔道的路段，如係封閉路段，該項可剔除 (等式右側為 0)。

當一有限差分式係守恆型式時，其一致性的條件就特別簡單，只要其數值通量函數滿足下式：

$$\widetilde{F}(U,U) = F(U) \tag{6}$$

亦即原由兩不同位置的 U 值 (例如 U_{j+1}, U_j，或 U_j, U_{j-1}) 來決定的數值通量 $\widetilde{F}$ ，如代入同一位置 (即代入 U_j, U_j)，其值會等於該位置 (U_j) 的原理論通量 F。

一個具一致性的有限差分式，如滿足某特定的安定性條件，且係線性時 (大部分非線性者亦同)，必滿足收斂性 (LeVeque [1])。此安定性條件係由 Courant、Friedrichs 與 Lewy 等 3 人所提出，一般稱為 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 條件，定義如下：

CFL 條件： 一數值分析法只有當其數值解的應變數值域 (numerical domain of dependence) 包含偏微分式應變數的真值域 (the true domain of dependence of the PDE)，方會收斂 (LeVeque [1])。

CFL 條件中所謂偏微分式應變數的值域，對一階連續流模式而言即是指其特性根曲線的軌跡，即其車波與衝擊波在單位時間傳遞的長度；而數值解的應變數值域則是指利用有限差分法所選取網格 (grid) 單位的大小。由條件內涵知，滿足 CFL 條件實際的作法係對時空座標做適當的切割 (LeVeque [1])，而對於具守恆型的連續流模式而言，其須滿足的 CFL 條件係時空格位前進的速度 (cell advance speed)，亦即$\Delta x/\Delta t=h/b$，須不小於最大特性根速λ的絕對值，即：

$$\max\left|\frac{b}{h}\lambda_i\right| \le 1,\ i = 1,\ \ldots,\ n \tag{7}$$

雖然上述安定性條件並未證明亦適用於非線性系統，惟由實際應用經驗得知，許多非線性系統確亦適用。

由以上說明知，欲求得連續流模式有效的數值近似，必須找出能符合一致性、安定性與收斂性條件的數值通量函數 (numerical flux function)。

2.2 有限差分法

在實務應用上，有限差分法可分為顯式法 (explicit method) 、隱式法 (implicit method) 及克雷格－尼克森法 (Crank-Nicolson methods) 三大類。顯式有限差分法在計算 $t+1$ 時間某空間點的密度值時，可參考 t 或 t 之前的密度值加以逐步推算 (backward difference)，直到整個定義域的值都求得為止，其方法類似遞迴的觀念，較為簡單易懂。隱式法則是參考 t +1 或 t+1 之後的密度值加以逐步推算 (forward difference)。克雷格－尼克森法則取顯式

法及隱式法的平均。由於雙曲線型偏微分式一般多以顯式法求解，故本研究僅針對顯式法來討論。

在顯式法中，各種數值通量函數依所取網格點的不同，係分為 FTFS (forward in time-forward in space)、FTBS (forward in time-backward in space)、FTCS (forward in time-centered in space)、Lax-Friedrichs (簡稱 Lax-F)、Lax-Wendroff (簡稱 Lax-W)、Leapfrog，以及 Beam-Warming 等方法 (周志忠 [3])。

考慮一階準線性連續流模式，如下所示：

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}+\frac{dQ(k)}{dk}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}=0 \tag{8}$$

上式可改寫為 FTFS 有限差分式，其步驟如下：

Forward in time ： $\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\approx\frac{k(x,t+\Delta t)-k(x,t)}{\Delta t}$ (9)

Forward in space： $\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\approx\frac{k(x+\Delta x,t)-k(x,t)}{\Delta x}$ (10)

將上二式代入式(8)中，則可得到 FTFS 差分式 (其他差分式同理可得)：

$$\frac{k(x,t+\Delta t)-k(x,t)}{\Delta t}+\frac{dQ(k)}{dk}\frac{k(x+\Delta x,t)-k(x,t)}{\Delta x}=0 \tag{11}$$

接下來係切割解空間，選取$\Delta t=b$，$\Delta x=h$，並定義每個格點為：

$$x_j=jh,\qquad j=0,1,2,\ldots$$
$$t_n=nb,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

則上式的 FTFS 差分式可改寫為：

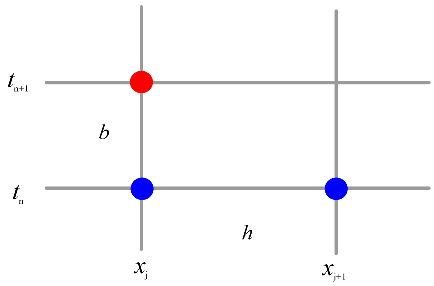
$$\frac{k(x_j,t_{n+1})-k(x_j,t_n)}{b}+\frac{dQ(k)}{dk}\frac{k(x_{j+1},t_n)-k(x_j,t_n)}{h}=0 \tag{12}$$

再定義$k_j^n=k(x_j,t_n)$，化簡整理式(12)，可得 FTFS 有限差分法之遞迴公式，如式(13)：

$$k_j^{n+1}=k_j^n-\frac{b}{h}\frac{dQ(k)}{dk}\cdot\left(k_{j+1}^n-k_j^n\right) \tag{13}$$

透過此一遞迴公式及模式的起始條件 (initial conditions) 與邊界條件 (boundary conditions)，便可以一層層地計算出任何時間與地點的密度值。

由式(13)不難看出，FTFS 有限差分在計算k_j^{n+1}的值時必須參考k_{j+1}^n及k_j^n，其參考格點的選取如圖 3 所示。

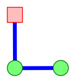
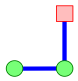
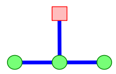
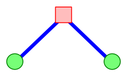
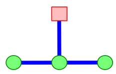
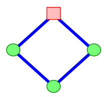
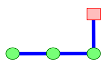


資料來源：周志忠[3]。

圖 3　FTFS 有限差分法的格點選取

如係一階線性連續流模式，可令 dQ/dk=A (A 為常數)，則依前述方法可推導得一階線性連續流模式之各種顯式有限差分方法 (周志忠[3])。FTFS、FTBS、FTCS、Lax-F、Lax-W、Leapfrog，以及 Beam-Warming 等之格點選擇、有限差分式及其收斂條件，如表 1 所示。

表 1　一階線性連續流模式各顯式有限差分式及其收斂條件

有限差分法	格點選擇	有限差分式	CFL 收斂條件
FTFS		$k_j^{n+1}=k_j^n-A\cdot\dfrac{b}{h}\left(k_{j+1}^n-k_j^n\right)$	$A<0,\quad \left\lvert\dfrac{b}{h}A\right\rvert\le 1$
FTBS		$k_j^{n+1}=k_j^n-A\cdot\dfrac{b}{h}\left(k_j^n-k_{j-1}^n\right)$	$A>0,\quad \left\lvert\dfrac{b}{h}A\right\rvert\le 1$
FTCS		$k_j^{n+1}=k_j^n-A\cdot\dfrac{b}{2h}\left(k_{j+1}^n-k_{j-1}^n\right)$	unstable
Lax-F		$k_j^{n+1}=\left(k_{j+1}^n+k_{j-1}^n\right)/2-A\cdot\dfrac{b}{2h}\left(k_{j+1}^n-k_{j-1}^n\right)$	$\left\lvert\dfrac{b}{h}A\right\rvert\le 1$
Lax-W		$k_j^{n+1}=k_j^n-A\cdot\dfrac{b}{2h}\left(k_{j+1}^n-k_{j-1}^n\right)+\dfrac{A^2}{2}\dfrac{b^2}{h^2}\left(k_{j+1}^n-2k_j^n+k_{j-1}^n\right)$	$\left\lvert\dfrac{b}{h}A\right\rvert\le 1$
Leapfrog		$k_j^{n+1}=k_j^{n-1}-A\cdot\dfrac{b}{h}\left(k_{j+1}^n-k_{j-1}^n\right)$	$\left\lvert\dfrac{b}{h}A\right\rvert\le 1$
Beam-Warming		$k_j^{n+1}=k_j^n-A\cdot\dfrac{b}{2h}\left(3k_j^n-4k_{j-1}^n+k_{j-2}^n\right)+\dfrac{A^2}{2}\dfrac{b^2}{h^2}\left(k_j^n-2k_{j-1}^n+k_{j-2}^n\right)$	$0\le\dfrac{b}{h}A\le 2$

資料來源：周志忠[3]。

由於線性連續流模式的特性根曲線斜率固定為 A，故每一時空的 CFL 收斂條件均應為

$\left|\frac{b}{h}A\right|\leq 1$，惟部分差分法另有外加的特殊條件方會收斂。

三、一階連續流模式有限差分法之應用與評析

周志忠 [3] 曾針對一階線性與準線性連續流模式，在不同車流起始條件與邊界條件下，以各種有限差分法求其近似解，再與解析解比較，從而選出較好的有限差分法。該研究將起始條件分為連續與不連續兩種狀況，本研究僅回顧評析其中較具挑戰性的、不連續的狀況。

3.1　一階線性連續流模式之有限差分模擬

周志忠 [3] 假設一階線性連續流模式的波速 A 固定為 30 公里／小時，起始條件為一不連續函數，邊界條件則為連續函數，其方程式如下 (參閱圖 4)：

一階線性連續流模式：$\dfrac{\partial k(x,t)}{\partial t}+30\dfrac{\partial k(x,t)}{\partial x}=0$

起始條件：$k(x,0)=\begin{cases}70 & (\text{車／公里});\quad \text{當}\quad 0\leq x\leq 15\quad (\text{公里})\\ 0 & (\text{車／公里});\quad \text{當}\quad 15< x\leq 30\quad (\text{公里})\end{cases}$

邊界條件：$k(0,t)=100-30\exp(t)$

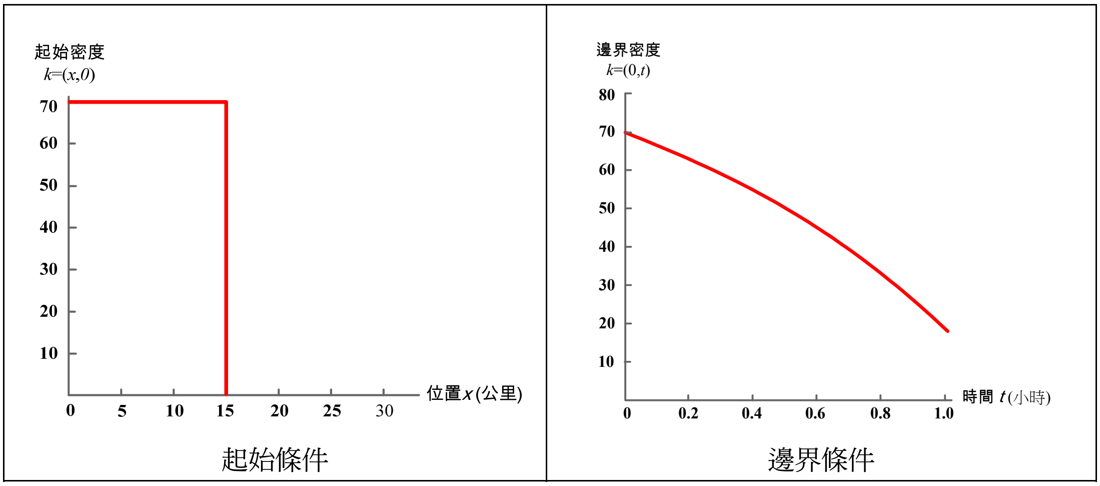


圖 4　一階線性連續流問題起始條件不連續範例

值得說明者，上式的起始條件規範 $t=0$ 時位於 0~15 公里有一停等車隊，其前方 (下

游) 無車。$t > 0$ 以後，車隊將向下游疏解，連續流模式將可展現類似號誌控制交岔路口綠燈始亮時車隊的起動疏解狀況；邊界條件則規範位於車隊尾部 ($x = 0$) 的密度在 $t > 0$ 以後係隨時間而降低，此相當於令車隊尾部在 $t > 0$ 以後係向上游倒車後退，數學上雖可以如此設定，但實務上並不允許發生。

解析解：

周志忠[3] 由特性根曲線的斜率 (=A=30 公里／小時) 即為波速，求算出解析解如下所示：

當 $x\text{-}30 \times t < 0$ 時， $k(x, t) = 100 - 30\times\exp(t\text{-}x/30)$ 車／公里

當 $0 \leq x\text{-}30 \times t \leq 15$ 時， $k(x, t) = 70$ 車／公里

當 $15 < x\text{-}30 \times t \leq 30$ 時， $k(x, t) = 0$ 車／公里

數值近似解：

為瞭解各差分法與 CFL 收斂條件間的關係，周志忠[3] 以下列不同時空切割比來分析比較其與解析解間的誤差：(A = 30 公里／小時；單位：Δx 為公里；Δt 為小時)

切割比小於 A：$(\Delta t/\Delta x) \times A = 0.50$， $\Delta x = 0.6$， $\Delta t = 0.010$ ($\Delta x/\Delta t = 60$ 公里／小時)

切割比等於 A：$(\Delta t/\Delta x) \times A = 1.00$， $\Delta x = 0.6$， $\Delta t = 0.020$ ($\Delta x/\Delta t = 30$ 公里／小時)

切割比大於 A：$(\Delta t/\Delta x) \times A = 1.25$， $\Delta x = 0.6$， $\Delta t = 0.025$ ($\Delta x/\Delta t = 24$ 公里／小時)

切割比小於、等於及大於 A 的 3 種模擬結果與解析解的誤差評比如表 2 所示。由表可以看出，在求解起始條件為不連續函數的線性偏微分式，各類有限差分法只要滿足 CFL 條件，其數值解都會收斂、安定且與解析解十分近似。惟各個有限差分法在不同的切割比下，會產生下列模擬結果：

1. 當切割比恰等於 A (即$\Delta x/\Delta t = A$)，即恰滿足 CFL 條件時，其模擬結果最近似解析解；
2. 當切割比大於 A 時($\Delta x/\Delta t < A$)，不滿足 CFL 條件，誤差會隨時間增加而擴大；
3. 當切割比小於 A 時($\Delta x/\Delta t > A$)，雖滿足 CFL 條件，但數值解在密度不連續的地方會有震盪的情形發生，致誤差反較恰為相等時大。例如 A=30 公里／小時，則$\Delta x = 0.6$ 公里，$\Delta t = 0.02$ 小時 ($\Delta x/\Delta t = 30$ 公里／小時) 恰符合 CFL 條件，而$\Delta x = 0.6$ 公里，$\Delta t = 0.01$ 小時 ($\Delta x/\Delta = 60$ 公里／小時) 亦符合 CFL 條件且時空切割比前者更細，但其近似解的精確度反而不如前者。

表 2　起始條件為不連續函數各有限差分法的誤差評比

切割比	差分方法	密度最大誤差	密度平均誤差	收斂	條件
小於 *A*	1.FTFS	3.9×10^{30}	7.6×10^{27}	A<0,│(b/h)×A│≤1	不滿足
	2.FTBS	35.000027	1.475966	A>0,│(b/h)×A│≤1	滿足
	3.FTCS	374477.4375	12434.767578	unstable	不滿足
	4.Leapfrog	52.500004	4.269337	│(b/h)×A│≤1	滿足
	5.Lax-F	40.468750	2.753543	│(b/h)×A│≤1	滿足
	6.Lax-W	45.530106	1.424144	│(b/h)×A│≤1	滿足
	7.Beam-Warming	38.381233	1.025928	0≤ (b/h)×A≤2	滿足
等於 *A*	1.FTFS	3.0×10^{24}	1.4×10^{22}	A<0,│(b/h)×A│≤1	不滿足
	2.FTBS	0.000198	0.000001	A>0,│(b/h)×A│≤1	滿足
	3.FTCS	205847344	3406368.50	unstable	不滿足
	4.Leapfrog	0.000202	0.000080	│(b/h)×A│≤1	滿足
	5.Lax-F	0.000008	0.000001	│(b/h)×A│≤1	滿足
	6.Lax-W	0.000389	0.000003	│(b/h)×A│≤1	滿足
	7.Beam-Warming	0.000175	0.000015	0≤ (b/h)×A≤2	滿足
大於 *A*	1.FTFS	2.7×10^{22}	1.4×10^{20}	A<0,│(b/h)×A│≤1	不滿足
	2.FTBS	2474090.0	26358.465	A>0,│(b/h)×A│≤1	不滿足
	3.FTCS	1.0×10^{9}	13715596	unstable	不滿足
	4.Leapfrog	2.5×10^{12}	3.7×10^{10}	│(b/h)×A│≤1	不滿足
	5.Lax-F	14066.5	324.57	│(b/h)×A│≤1	不滿足
	6.Lax-W	4.4×10^{14}	2.9×10^{11}	│(b/h)×A│≤1	不滿足
	7.Beam-Warming	59.062500	1.026638	0≤ (b/h)×A≤2	滿足

資料來源：周志忠 [3]。

基於表 2 的分析結果，周志忠 [3] 確定 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 這 3 個差分法較佳，可供後續一階準線性連續流模式的求解之用。FTBS 法雖然其求得的結果亦十分理想，惟其 CFL 收斂條件另有波速為正的要求，而一階準線性連續流模式的波可能向前傳遞 (波速為正) 亦可能向後傳遞 (波速為負)，致 FTBS 對其並不適用。此外，Beam-Warming 法的近似結果並不比 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 法差，然未被周志忠 [3] 建議選用，該研究亦未說明其原因。事實上，周志忠 [3] 未說明的是 Beam-Warming 法的收斂條件為 $0 \le (b/h) \times A \le 2$，因 b/h 均正，所以 A 須大於 0，亦即與 FTBS 法 CFL 收斂條件的額外要求相同，均有波速須為正的限制，只是周志忠 [3] 的範例其波速恰為正，致 Beam-Warming 法在表 2 中為滿足收斂條件。簡言之，Beam-Warming 法亦不適用後續一階準線性連續流模式的近似求解，其原因與 FTBS 法同。

3.2 一階準線性連續流模式之有限差分模擬

經上述分析比較後，周志忠[3] 選出 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 個差分法，進行一階準線性模式的有限差分模擬並作比較，本研究加以回顧評析之。所謂的一階準線性連續流模式即是一般所稱的 LWR (Lighthill-Whitham-Richards) 模式。

1. 一階準線性連續流模式之有限差分式

一階準線性連續流(LWR)模式係由流體守恆式與表現車流特性的$q = ku$關係式等兩公式組成。其流體守恆式如式 (14) 所示：

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}=0 \tag{14}$$

上式中的流量 $q(x,t)$ 與密度 $k(x,t)$ 間不是線性關係，例如周志忠[3] 以 Greenshields 車流模式設定 $q = ku$ 關係式，如式 (15) 所示，式中的 u_f 表自由流速度 (free flow speed)，而為免與差分式下標混淆，原壅塞密度 (jam density) k_j 特改寫成 k_{jam}。

$$q(k)=u_f\times\left(1-\frac{k}{k_{jam}}\right)\times k \tag{15}$$

將式 (15) 的 q-k 關係式代入式 (14)中，可得到滿足 Greenshields 車流模式的一階準線性連續流模式，如式 (16) 所示。

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}+u_f\left(1-\frac{2k}{k_{jam}}\right)\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}=0 \tag{16}$$

在已知 $q = ku$ 關係下，求解式 (16) 一個式子，即可同時求得任一時間與空間的 q, k, u 值，這是 LWR 模式被稱為簡單連續流模式的原因。

欲近似求解上述 LWR 模式，可將之轉換成有限差分式。而以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 差分法來模擬式 (16) 時，其 CFL 收斂條件皆為：

$$\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\times\left[u_f\times\left(1-\frac{2k}{k_{jam}}\right)\right]\right|\le 1 \tag{17}$$

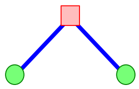
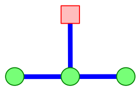
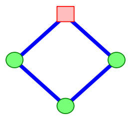
在式 (17) 中，密度值 (k) 係隨時間、位置而不同，致其 CFL 收斂條件會隨之改變，這會對有限差分法切割比的選取造成困擾。因此，實務上通常將式 (17) 改為一個跟密度值無關的收斂條件，如式(18)所示。

$$\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\times u_f\right| \le 1 \tag{18}$$

式 (18) 的由來，主要係因 ($1-2k/k_{jam}$) 的絕對值小於等於 1 (對 Greenshields 模式而言)，故所有滿足式 (18) 的切割比$\Delta t/\Delta x$，必滿足式 (17) 的收斂條件。事實上，對以 Greenshields 車流模式建立的一階準線性連續流模式而言，其最大波速，不論是車波或衝擊波，均小於等於 u_f，因而滿足式 (18)，其連續流車波在Δt 的行駛距離必落在在Δx 內。

周志忠 [3] 依前述方法，推導得 LWR 模式適用的 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 種差分法，其格點選擇及有限差分式如表 3 所示。

表 3　3 種顯式有限差分法求解 LWR 連續流模式之方程式

有限差分法	格點選擇	有限差分式
Lax-F		$k_j^{n+1} = \frac{(k_{j+1}^n + k_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_f \times \left(1-\frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j+1}^n - u_f \times \left(1-\frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j-1}^n\right)$
Lax-W		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_f\left(1-\frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j+1}^n - u_f\left(1-\frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j-1}^n\right)$ $+\frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(u_f\left(1-\frac{2k_j^n}{k_{jam}}\right)\right)\times\left\{u_f\left(1-\frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j+1}^n - 2u_f\left(1-\frac{k_j^n}{k_{jam}}\right)\times k_j^n + u_f\left(1-\frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j-1}^n\right\}$
Leapfrog		$k_j^{n+1} = k_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_f \times \left(1-\frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j+1}^n - u_f \times \left(1-\frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}}\right)\times k_{j-1}^n\right)$

資料來源：周志忠 [3]。

2. 起始條件為不連續函數的模擬

周志忠 [3] 採與前例相同的條件 (起始與邊界條件如圖 4 所示)，以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 種差分法來進行 LWR 模式的有限差分模擬。其設定自由車流速度 $u_f = 120$ 公里／小時，壅塞密度 $k_{jam} = 200$ 車／公里，並將 x 軸以$\Delta x = 1$ 公里切割，將 t 軸以$\Delta t = 1/120$ 小時切割，即$\Delta x/\Delta t = 120$ 公里／小時= u_f，使其切割比恰滿足 CFL 收斂條件。

周志忠 [3] 對所設計案例並未求得 LWR 模式的解析解，其近似解獲得的模擬結果，Lax-F 法密度的變化與事前的預測十分吻合，且明顯較為平滑；但 Lax-W 法在部分路段密度會先增後減，並發生最高密度值超過起始值的不合理狀況 (前方無車，密度應漸減)；Leapfrog 法則有震盪、不安定的情形發生，且最高密度亦超過起始值，結果更無法令人滿意。

3.3 一階準線性連續流模式的嚴苛交通案例模擬分析

由前節的回顧知，周志忠[3] 針對一階線性連續流模式，以各有限差分法進行模擬比較，從中評定出 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 種差分法較佳。其後針對一階準線性連續流模式 (即 LWR 模式)，以該 3 種較佳的差分法進行模擬分析，獲得 Lax-F 法最佳、Lax-W 法會發生局部不合理狀況、Leapfrog 法會發生不當震盪情形等的成果，殊屬難得。惟該研究所模擬的車流情境並不符實際 (允許停止車隊倒車後退)，亦未接受逆向衝擊波案例的嚴苛考驗，研析上略嫌不足。

基於以上考量，本研究針對 LWR 模式，以均勻到達流碰上停等車隊產生向上游回溯衝擊波，及長停等車隊起動向下游疏解等兩嚴苛的交通案例，進行補充分析，並儘可能求出解析解。至於採用的差分法，則援用周志忠[3] 的研究成果，僅考慮 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 種。

模擬的各項設定統一說明如下：LWR 模式係採用 Greenshields 的 $q = ku$ 關係式，其參數亦以接近實際交通狀況的方式設定，分別為自由流速度 $u_f = 80$ 公里／小時，壅塞密度 $k_{jam} = 120$ 車／公里 ($q_{max} = 2400$ 車／小時)。有限差分的時空切割，則均係將 x 軸以Δx=1 公里切割，將 t 軸以$\Delta t = 1/80$ 小時切割，即$\Delta x/\Delta t = 80$ 公里／小時$= u_f$，使其切割比恰滿足 CFL 收斂條件，由周志忠[3] 的分析知，此種切割方式可獲得最精確的近似結果。值得說明的是，周志忠[3] 設定$\Delta t = 1/120$ 小時、自由流速度 120 公里／小時，似較符合高速公路車流行為。而本文在設計測試案例時，旨在探討號誌控制下，車輛停等及疏解之車流行為，故令$\Delta t = 1/80$ 小時、自由流速度＝80 公里／小時，以符合平面道路 (郊區公路) 之行駛條件。因此，若研究者希望能搭配號誌時制，進行車流模擬，以避免在同一時階中發生時相轉移之情形，則等比例調降Δx 及Δt 即可。例如，可設定$\Delta x = 1/3$ 公里及$\Delta t = 1/240$ 小時＝15 秒，則自由流速度仍是 80 公里／小時，亦仍符合 CFL 收斂條件。

1. 產生向上游回溯衝擊波的有限差分模擬

考慮一均勻到達流碰上停等車隊產生向上游回溯衝擊波的問題。LWR 連續流模式，及不連續的起始條件與連續的邊界條件(如圖 5 所示)，分別設定如下：

LWR 連續流模式：$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f\left(1 - \frac{2k}{k_{jam}}\right)\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

起始條件：$$k(x,0) = \begin{cases} 30 \quad (\text{車／公里}); \quad 當 \quad 0 \le x \le 30 \quad (\text{公里}) \\ 120 \quad (\text{車/公里}); \quad 當 \quad 30 < x \le 40 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

邊界條件：$k(0,t) = 30$ 車／公里，$k(40,t) = 120$ 車／公里

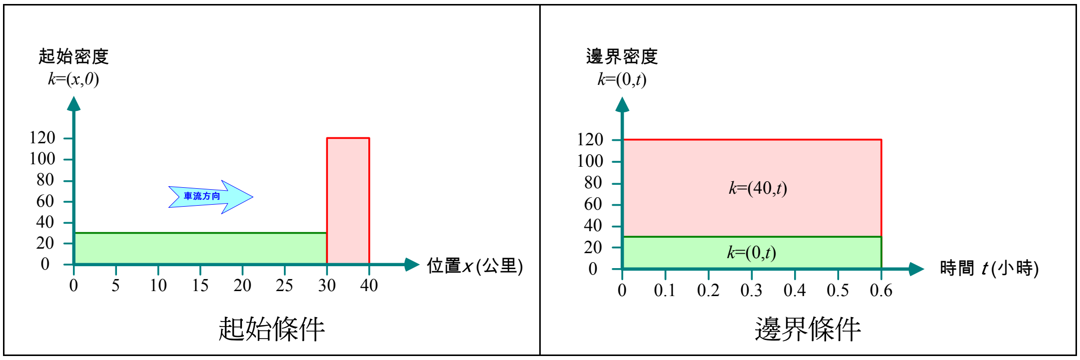


圖 5　LWR 連續流模式產生向上游回溯衝擊波的起始與邊界條件

解析解：

Greenshields 車流模式：$q = ku = u_f k\left(1 - \dfrac{k}{k_{jam}}\right)$

代入 $k = 30$，得 $q = 80 \times 30\left(1 - \dfrac{30}{120}\right) = 1800$；代入 $k = 120$，得 $q = 0$。依 Lighthill 與 Whitman [4] 的衝擊波公式，可得向上游回溯的衝擊波速為：

$$c_{lr} = \frac{q(k_r) - q(k_l)}{k_r - k_l} = \frac{0 - 1800}{120 - 30} = -20 \text{ 公里／小時}$$

亦即，解析解為：

$k(x,t) = 120, \quad x \geq 30-20t$

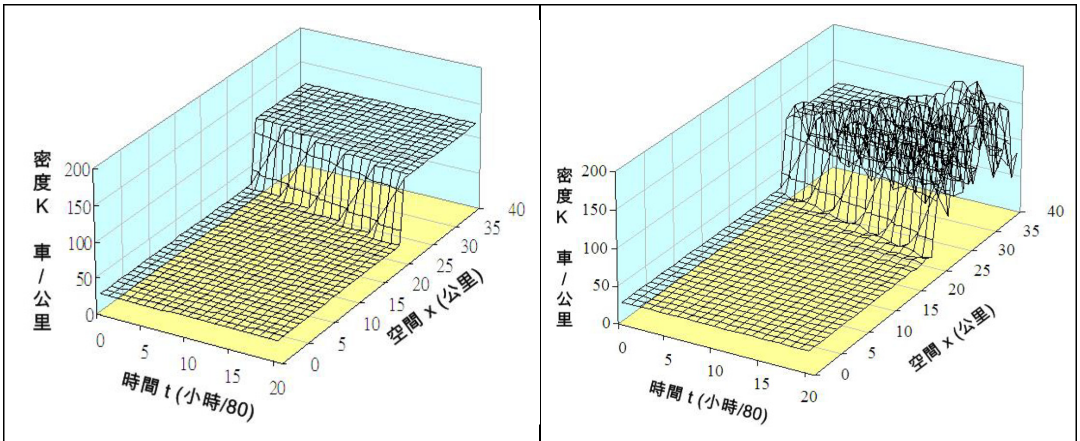
$k(x,t) = 30, \quad x < 30-20t$

數值近似解：

Leapfrog 法模擬結果如圖 6 所示。其在模擬不久即出現振盪，且隨時間增加而愈來愈大，呈現不安定的狀態。亦因為振盪不斷擴大，因此圖 6 僅呈現模擬 0~20/80 小時以內的狀況。

Lax-W 及 Lax-F 等 2 種有限差分法所模擬的密度在時空上的變化情形如圖 7 所示，由圖知：

(1) Lax-W 及 Lax-F 兩法均能模擬出向上游回溯衝擊波。與解析解比較知，Lax-W 法的衝擊波速明顯過小 (參閱鳥瞰圖)。例如經 1 小時 ($t = 80$)，Lax-W 法模擬的衝擊波尾端僅由第 30 公里處向上游回溯至第 20 公里處，而由解析解知，此種狀態下的向上游回溯衝擊波，其波速為 –20 公里／小時，亦即經 1 小時，衝擊波的尾端應向上游回溯至第 10 公里處，Lax-W 法模擬出來的衝擊波速只有解析解的一半；



解析解　　Leapfrog 有限差分解

圖 6　Leapfrog 模擬 LWR 模式向後衝擊波的結果 (側面圖)

(2) Lax-F 法模擬結果與解析解一致。經 1 小時模擬，其向上游回溯衝擊波尾端亦由第 30 公里處向上游回溯至第 10 公里處，與解析解同。而由鳥瞰圖進一步比較 Lax-F 法與解析解的模擬結果知，二者明顯不同的是解析解的衝擊波沒有寬度，而 Lax-F 法則有寬度。惟必須說明者，並非 Lax-F 法比 LWR 理論模式更能反映駕駛者接近停等車隊的減速行為，使整體車流在衝擊波處呈現較符實際的漸變狀態，而是Δx、Δt 切割不夠精細，致衝擊波行至某時空格位時，其密度需在Δx 內平均而被平滑化所致。簡言之，任何有限差分法均不可能改良或改變原偏微分式的物理意義，有限差分法能作到的，最多只是儘可能的相似，如此而已。

2. 長停等車隊起動疏解的有限差分模擬

可以測試 LWR 連續流模式特性的另一個嚴苛的交通案例，即長停等車隊起動向下游疏解的行為。Zhang[2] 指出 LWR 模式的解析解不是衝擊波 (shock wave)，便是稀釋波 (rarefaction wave)。本案例即是模擬極端的稀釋波狀況，相當於號誌路口停等車隊在燈號由紅燈變為綠燈時瞬間起動向下游疏解的現象。

本問題的起始條件與邊界條件如圖 8 所示，設定如下：

LWR 連續流模式：$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}+u_f\left(1-\frac{2k}{k_{jam}}\right)\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}=0$$

起始條件：$$k(x,0)=\begin{cases}120 & (\text{車／公里}); \quad \text{當} \quad 0\le x\le 20 \quad (\text{公里})\\ 0 & (\text{車公／公里}); \quad \text{當} \quad 20< x\le 40 \quad (\text{公里})\end{cases}$$

邊界條件：$k(0,t)=120$ 車／公里 (壅塞密度)

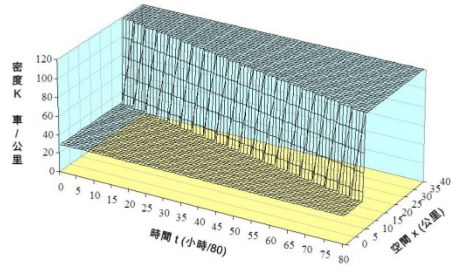
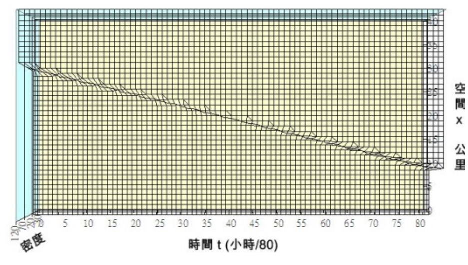
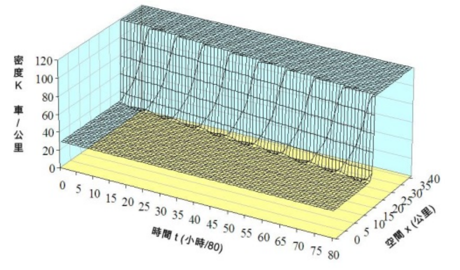
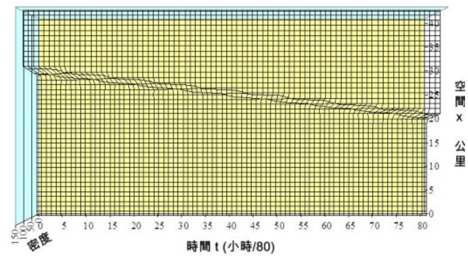
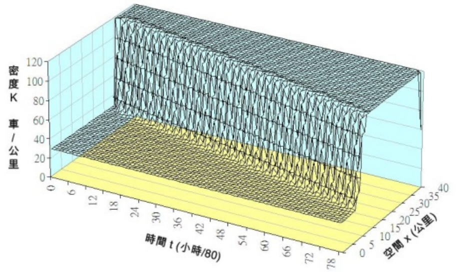
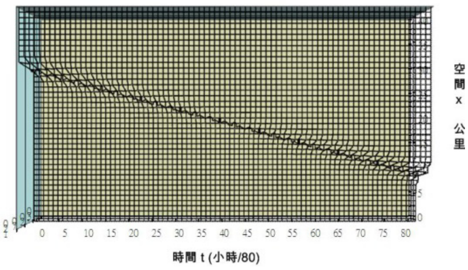
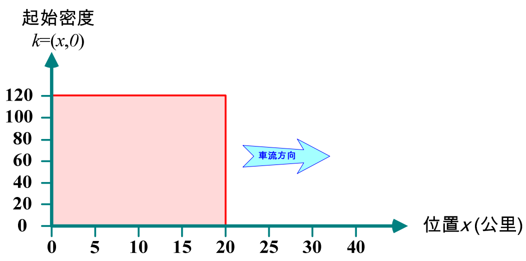
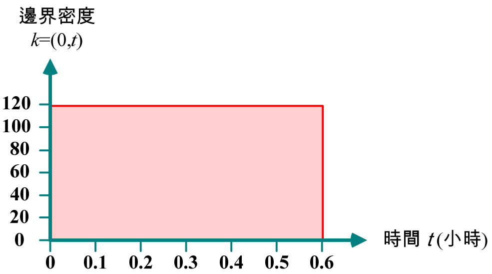
方法	側面圖	鳥瞰圖
解析解		
Lax-W 差分		
Lax-F 差分		

圖 7　Lax-W 及 Lax-F 法模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波的結果



起始條件



邊界條件

圖 8　LWR 連續流模式產生向前稀釋波的起始與邊界條件

值得說明者，本研究設計的案例與前述周志忠[3] 所舉的案例有相似的地方，亦有不同。相似處係起始條件的設定 (均為停止的等候車隊)，不同處則在於邊界條件的設定，本研究係令 x=0 處恆維持壅塞密度，因密度不變，因此車隊尾部不會為降低密度而產生向上游倒車後退的狀況，符合實際。

解析解：

本案例周志忠[3] 並未求得解析解。如依 Lighthill 與 Whitman[4] 的衝擊波理論，要求得 LWR 模式稀釋波的解析解會相當困難。惟依 $q = ku$ 關係式並採用 Greenshields 車流模式，則其解析解將與 Richards[5] 的紙上剪力圖法所獲得者會完全相同。基此，本研究以 Richards[5] 的紙上剪力圖法來求算稀釋波的解析解，如圖 9 所示。圖中顯示 $t = 0$ 時，明渠因水閘門阻檔已達滿水位 ($d = 1$)，$t > 0$ 瞬間 (水閘門打開瞬間)，明渠水流會以自由流的速度 (圖中 $e = u_f$) 同時向前及向後發出起動波 (圖中斜虛線)，而在原水閘門處 (相當於號誌路口停等車隊前緣的停止線處)，其水位恆維持為 $d = 1/2$ (相當於密度= $k_{jam}/2$)，表示該處在水流向下游宣洩時係以最大流率 q_{max} 流動 (直到車隊尾端經過)。亦即，其解析解為：

$k(x,t)= [1-(x-20) /(u_f \times t)] \times k_{jam}/2$,　$u_f \times t\text{-}20 \le x \le u_f \times t+20$

$k(x,t)=120$,　$x < u_f \times t\text{-}20$

$k(x,t)= 0$,　$u_f \times t+20 < x$

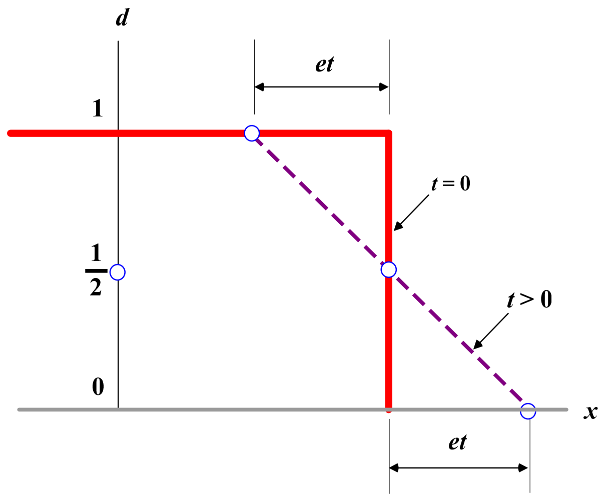
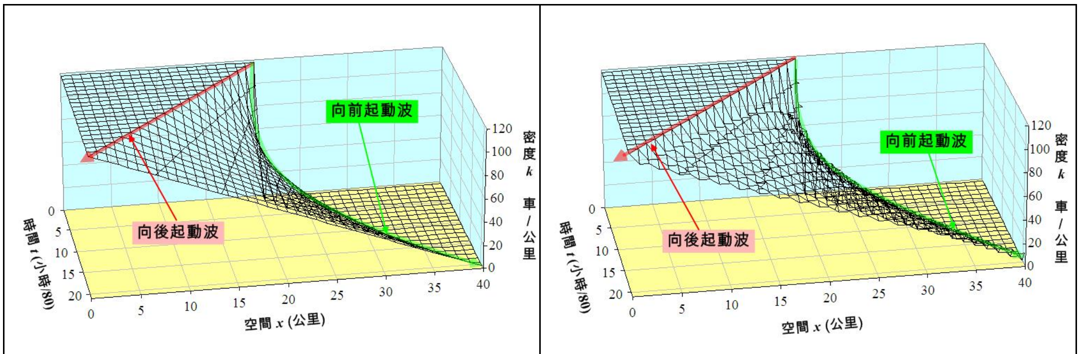


圖 9　Richards 紙上剪力圖的起動模化

數值近似解：

本案例經模擬發現，Leapfrog 及 Lax-W 兩種有限差分法的模擬結果不是誤差過大，便

是不安定，與周志忠[3] 的案例分析結果類似，故不再討論。Lax-F 有限差分法的模擬結果，密度在時空上的變化情形如圖 10 所示。由圖知，Lax-F 有限差分法對稀釋波的近似解與解析解相符，確可作為一階準線性連續流模式的近似解法，甚而可推廣用於高階連續流模式的近似解。



解析解　　Lax-F 有限差分解

圖 10　Lax-F 模擬 LWR 模式向前起動稀釋波的模擬結果

四、高階連續流模式有限差分法之評析與發展

周志忠[3] 與莊國欽[6] 均曾提出用於高階連續流模式的有限差分方法，經本研究比較發現二者均係直接援用 Payne [7] 對其高階連續流模式 (Payne [8]) 提出的有限差分式，僅內容稍有不同，本研究加以回顧評析之，並提出適用於高階連續流模式的有限差分式。為求簡化，本節各公式中，$q(x,t)$, $k(x,t)$, $u(x,t)$, $u_e(x,t)$ 均寫成 q, k, u, u_e。

4.1　Payne 高階連續流模式與有限差分式

連續流模式在 Lighthill 與 Whitham [4] 提出一階準線性連續流模式後，一直未有新的發展，直到 Payne 於 1971 年提出高階連續流模式[8]，1979 年更提出該模式的有限差分式[7]，方開啟其後數 10 年的大量研究。國內對此課題亦有相關研究，本節一併回顧並評析之。

1.　Payne 高階連續流模式

Payne [8] 高階連續流模式如式(19)所示：

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{19a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_e-u}{\tau}-\frac{\mu}{\tau k}\frac{\partial k}{\partial x} \tag{19b}$$

$$q=k\times u \tag{19c}$$

其中：$u_e = u_e(k)$ 表均衡車速 (為 k 的函數)；τ 為鬆弛時間；μ 為預期係數，公式為：

$$\mu=-\frac{1}{2}\frac{du_e}{dk} \tag{19d}$$

由式 (19) 知，高階連續流模式係由流體守恆式、加速度公式及車流模式 ($q = ku$) 聯立組成。其中，加速度公式一般稱為動量公式 (momentum equations)。經差分近似與整理後，上述 3 式可以密度、速度、流率等 3 個差分式展現。

值得說明者，LWR 模式係由密度及流率兩公式聯立組成，惟其兩公式中的速度皆須為均衡速度 ($u = u_e(k)$)，高階連續流模式的速度則不然 ($u \neq u_e(k)$)。除此不同外，LWR 模式代入 $q = ku_e$ 後，聯立式可整合成一個公式，只需求解一個密度變數，即可解得速度 ($u = u_e(k)$) 與流率 ($q = ku_e(k)$)；高階連續流模式則至少須聯立解出密度與速度兩式 (其 $u \neq u_e(k)$，為非均衡值)，流率則可藉恆等式 $q = ku$ 決定。

2. Payne 高階連續流模式的有限差分式

周志忠[3] 與莊國欽[6] 均援用 Payne[7] 高階連續流模式的有限差分式，以模擬分析其案例，本節摘述如下：

(1) 周志忠[3]

Payne[7] 提出的差分方程組如下，周志忠[3] 係直接援用之：

$$\begin{cases} k_j^{n+1}=k_j^n+\dfrac{\Delta t}{l_j\Delta x_j}\left(l_{j-1}q_j^{n+1}-l_jq_{j+1}^{n+1}+f_j^{ON,n+1}-f_j^{OFF,n+1}\right) \\ u_j^{n+1}=u_j^n-\Delta t\left\{u_j^n\left[\dfrac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x_j}\right]+\dfrac{1}{\tau_j}\left[u_j^n-u_e\left(k_j^n\right)+\dfrac{\mu_j}{k_j^n}\dfrac{k_{j+1}^n-k_j^n}{\Delta x_j}\right]\right\} \\ q_{j+1}^{n+1}=k_j^n u_j^n \end{cases} \tag{20}$$

其中：
- l_j ：表在路段上第 j 區的車道數目
- Δx_j ：表路段上第 j 區的道路長度
- k_j^n ：表當時間為 $t_0+n\Delta t$ 時，路段上第 j 區的平均密度
- u_j^n ：表當時間為 $t_0+n\Delta t$ 時，路段上第 j 區的空間平均速度
- q_j^n ：表在$[t_0+(n-1)\Delta t, t_0+n\Delta t]$時間區間內，通過 x_j 點的流量

$f_j^{ON,n}$　：表在$[t_0+(n\text{-}1)\Delta t, t_0+n\Delta t]$時間區間內，車輛在 x_j 點的上匝道流量

$f_j^{OFF,n}$　：表在$[t_0+(n\text{-}1)\Delta t, t_0+n\Delta t]$時間區間內，車輛在 x_j 點的下匝道流量

如令為單車道路段，所有空間的切割寬度均同，即$\Delta x = \Delta x_j$，且無流入與流出源 (為封閉路段，$f^{\mathrm{ON}}, f^{\mathrm{OFF}} = 0$)，各 x_j 的τ、μ 均同 (為常數)，並將流量 $q = ku$ 代入密度公式，則上式可改寫成：

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(k_{j-1}^n u_{j-1}^n - k_j^n u_j^n\right) \tag{21a}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[u_j^n(u_j^n - u_{j-1}^n)\right] - \frac{\Delta t}{\tau}\left[u_j^n - u_e(k_j^n)\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\mu}{\tau}\frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{k_j^n} \tag{21b}$$

$$q_j^{n+1} = k_{j-1}^n \times u_{j-1}^n \tag{21c}$$

(2) 莊國欽 [6]

莊國欽[6] 對高階連續流模式所採用的有限差分式為：

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \Delta t\frac{q_j^{n+1} - q_{j+1}^{n+1}}{n_j(x_{j+1} - x_j)} + \Delta t\frac{r_j^{n+1} - s_j^{n+1}}{n_j(x_{j+1} - x_j)} \tag{22a}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t\frac{u_j^n(u_j^n - u_{j-1}^n)}{(x_{j+1} - x_{j-1})/2} - \frac{\Delta t}{\tau}\left[u_j^n - u_e(k_j^n)\right] - \mu\frac{\Delta t}{\tau}\frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{k_j^n(x_{j+2} - x_j)} \tag{22b}$$

$$q_j^{n+1} = n_{j-1} \times k_{j-1}^n \times u_{j-1}^n \tag{22c}$$

其中：n_j=路段上第 j 區的車道數，其餘變數與式 (20) 同

同樣的，如令為無流入與流出源 ($r, s = 0$) 的單車道路段 ($n_j = 1$)，所有空間的切割寬度均同，即$\Delta x = (x_{j+2}\text{-}x_j)/2 = (x_{j+1}\text{-}x_{j-1})/2 = x_{j+1}\text{-}x_j$，並將式 (22c) 代入式 (22a)，則式 (22) 可改寫成：

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j-1}^n k_{j-1}^n - u_j^n k_j^n\right) \tag{23a}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[u_j^n(u_j^n - u_{j-1}^n)\right] - \frac{\Delta t}{\tau}\left[u_j^n - u_e(k_j^n)\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\mu}{2\tau}\frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{k_j^n} \tag{23b}$$

$$q_j^{n+1} = k_{j-1}^n \times u_{j-1}^n \tag{23c}$$

3. 評論

比較周志忠 [3] 與莊國欽 [6] 的有限差分式可發現，該兩研究均係直接援用 Payne [7] 的有限差分式。例如密度、流率公式二者完全相同；速度公式除右側最後一項的分母二者不同外，其餘亦均相同。莊國欽 [6] 的有限差分式在該項多除以 2 而周志忠 [2] 則無，惟查式 (19b) 原 Payne [8] 高階連續流模式，該項看不出有多除以 2 的理由。將多除以 2 的作法取消後，二者的速度公式即完全相同。

了解 Payne [7]、周志忠 [3] 與莊國欽 [6] 三研究的有限差分式係完全相同後，如再進一步分析，可發現該有限差分法有嚴重的問題。比較表 1 知，式 (21a) 及式 (23a) 的密度差分式係屬 FTBS 法 (k_j^{n+1} 參考 k_j^n, k^n_{j-1})，速度差分式係屬 FTCS 法 (u_j^{n+1} 參考 $u^n_{j+1}, u^n_j, u^n_{j-1}$)，流率公式則類似 FTBS 法但更為簡化 ($q_j^{n+1}$ 參考 q^n_{j-1})。而由前節周志忠 [3] 的分析說明與模擬結果知，FTCS 法根本就不安定，FTBS 法須滿足波速為正的條件方會收斂，而 LWR 連續流模式的車波可能向前傳遞 (波速為正) 亦可能向後傳遞 (波速為負)，致 FTBS 不適用。

為能確定 FTBS 法不適用連續流的差分近似，本研究特再針對 LWR 模式產生向上游回溯衝擊波的狀況，以 FTBS 法進行模擬，結果模擬僅進行少數個Δt，在車隊尾端 (衝擊波界面) 所經之處即發生嚴重且振幅甚大的振盪，可確定 FTBS 法對 LWR 模式不適用。

由於高階連續流模式包含 LWR 模式，因此一個不適用於 LWR 模式的有限差分法，竟能用於高階模式而不發生任何問題，實在不合理。本研究推測，這恐係相關研究在應用時設定的模擬環境根本不會產生車波為負或衝擊波所致。經查周志忠 [3] 的研究，在採 Greenshields 車流模式，並設 k_{jam} 為 200 車／公里下，其模擬的兩種狀態均設定起始密度為 50 車／公里；再查莊國欽 [6] 的研究，其分析中山高速公路臺北都會區路段及建國南北路 4 種情境，所設定的密度均低於其定義的每車道 $k_{jam} = 120$ 車／公里的一半。此兩研究模擬的車流均係處於車波均為正的低密度狀況，致其有限差分式採用 FTBS 法並沒有出現問題。

經由以上的分析知，FTBS 及 FTCS 兩有限差分法對 LWR 模式不適用，而高階連續流模式均包含 LWR 模式，當然亦不適合採用 FTBS 及 FTCS 法。國內相關研究一時不查，逕援用過去 Payne [7] 的錯誤作法，實有待改進。

4.2 高階連續流模式的 Lax-F 有限差分式

由 4.1 節的分析知，高階連續流模式不能採 FTBS 及 FTCS 有限差分法；由 3.3 節的分析知，本研究已確認 Lax-F 有限差分法對 LWR 模式有甚佳的表現。基此，本研究以 Lax-F 法取代過去誤用的 FTBS、FTCS 法來近似求解高階連續流模式。

由於高階連續流模式過於複雜，甚難獲得解析解，故僅能藉有限差分的近似解來加以評析，惟此種結果混合了高階連續流模式與有限差分式二者的特性，致案例分析如出現不

合理的現象，可能並非採用的有限差分法不適用，而係原連續流模式本身的缺陷使然。基此，對於有限差分法近似的對象，本研究除沿用 Payne [8] 高階連續流模式外，特加入 Zhang [9] 模式來加以對比。

高階連續流模式的差分式係包含密度、速度與流率等三式的聯立式。由於各種高階連續流模式的密度公式與流率公式均相同，故本研究僅在速度公式時才區分 Payne [8] 及 Zhang [9] 模式。茲分述如下：

密度：

流體守恆式：$\dfrac{\partial k}{\partial t}+\dfrac{\partial q}{\partial x}=0$ (24a)

Lax-F 差分式：$k_j^{n+1}=\dfrac{\left(k_{j+1}^n+k_{j-1}^n\right)}{2}-\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n k_{j+1}^n-u_{j-1}^n k_{j-1}^n\right)$ (24b)

流率：

車流模式：$q=k\times u$ (25a)

Lax-F 差分式：$q_j^{n+1}=u_j^{n+1}\times k_j^{n+1}$ (25b)

速度:

Payne [8] 模式（即將式 (19d) 代入 (19b)）與 Zhang [9] 模式分別如下式：

Payne [8] 模式：$\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u_e-u}{\tau}-\dfrac{1}{\tau k}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{du_e(k)}{dk}\right)\dfrac{\partial k}{\partial x}$ (26a)

Zhang [9] 模式：$\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u_e-u}{\tau}-k\left(\dfrac{du_e(k)}{dk}\right)^2\dfrac{\partial k}{\partial x}$ (26b)

Payne [8] 模式與 Zhang [9] 模式的速度差分式如下：

Payne [8] 模式的 Lax-F 速度差分式：

$$u_j^{n+1}=\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n}{2}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n}{2}\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2}$$

$$+\frac{\Delta t}{\tau}\left[\frac{u_e(k_{j+1}^n)+u_e(k_{j-1}^n)}{2}-\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n}{2}\right]$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{(-w)}{2\tau}\frac{2}{k_{j+1}^{n}+k_{j-1}^{n}}\frac{k_{j+1}^{n}-k_{j-1}^{n}}{2} \tag{27a}$$

Zhang [9] 模式的 Lax-F 速度差分式：

$$u_j^{n+1}=\frac{u_{j+1}^{n}+u_{j-1}^{n}}{2}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{u_{j+1}^{n}+u_{j-1}^{n}}{2}\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2}$$

$$+\frac{\Delta t}{\tau}\left[\frac{u_e(k_{j+1}^{n})+u_e(k_{j-1}^{n})}{2}-\frac{u_{j+1}^{n}+u_{j-1}^{n}}{2}\right]$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\times w^2\times\frac{k_{j+1}^{n}+k_{j-1}^{n}}{2}\frac{k_{j+1}^{n}-k_{j-1}^{n}}{2} \tag{27b}$$

其中，u_e 表均衡車速，u_f表自由流車速，τ為鬆弛時間，$w = du_e/dk$。

值得說明者，式 (24b) 與表 3 中 LWR 模式的 Lax-F 有限差分式並不相同，式 (24b) 右側第二項中的 u (含 u_{j+1} 與 u_{j-1})，在表 3 中係直接代入 $u_e = u_f(1-k/k_{jam})$，而對高階連續流模式而言，其模化的車流一般係處於非均衡狀態，達均衡反而是特例，致速度通常不是均衡速度，因而式 (24b) 係代入非均衡速度 u。事實上，高階連續流每一時空格位的速度與密度值，係分由式 (24b) 的 u 與式 (27a,b) 的 k 兩公式相互參考求取，無法如 LWR 模式般，一個公式即可求得所有 q, k, u 值。

比較式 (24) 至式 (27) 與式 (19) 知，採 Lax-F 有限差分 (暫忽略時間上標 n)，本研究係建議原偏微分式中，凡 k、u、q 均分別近似成$(k_{j+1}+k_{j-1})/2$、$(u_{j+1}+u_{j-1})/2$、$(u_{j+1}k_{j+1}+u_{j-1}k_{j-1})/2$，凡$\partial k$、$\partial u$、$\partial q$ 均分別近似成$(k_{j+1}-k_{j-1})/2$、$(u_{j+1}-u_{j-1})/2$、$(u_{j+1}k_{j+1}-u_{j-1}k_{j-1})/2$。

4.3 高階連續流模式的 Lax-F 有限差分模擬

為了解 Lax-F 有限差分法是否適用高階連續流模式的近似解，本研究依第三節的作法，分別模擬車流產生向上游回溯衝擊波的狀況，及長停等車隊起動向下游疏解的狀況，並與 LWR 模式的解析解及差分近似解作比較。

1. 參數與模擬環境設定

為利於比較，本研究統一設定各參數及模擬環境如下：

(1) 均衡車速係採 Greenshields 的模式，即 $u_e = u_f\,(1-k/k_{jam})$，其參數分別為：自由流速度速度 $u_f = 80$ 公里／小時，壅塞密度 $k_{jam} = 120$ 車／公里 (可計算得 $q_{max} = 2400$ 車／小時)；

(2) 有限差分的時空切割，均係將 x 軸以 $\Delta x = 1$ 公里切割，將 t 軸以 $\Delta t = 1/80$ 小時切割，即 $\Delta x/\Delta t = 80$ 公里／小時 $= u_f$，使其切割比滿足 CFL 收斂條件；

(3) 參數 $w = \mathrm{d}u_e/\mathrm{d}k = -u_f/k_{jam} = -80/120 = -2/3$ 公里^2／(車－小時)；

(4) 參數 τ 沿用周志忠 [3] 的作法，即 $\tau = k_\tau \Delta x$，且令 $k_\tau = 46$ 秒／公尺，相當於 78 公里／小時的倒數，本研究因設定 $u_f = 80$ 公里／小時，故令 $k_\tau = 45$ 秒／公尺，又因本研究設定 $\Delta x = 1$ 公里，故 $\tau = k_\tau \Delta x = 45$ 秒 $= 1/80$ 小時 $= \Delta t$。

依上述設定，Payne[8] 與 Zhang[9] 高階連續流模式的速度差分式可大幅簡化 (單位均以公里、小時計) 如下：

Payne [8] 模式簡化後的速度差分式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{320} + \left[\frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right] - \frac{1}{3}\frac{k_{j+1}^n - k_{j-1}^n}{k_{j+1}^n + k_{j-1}^n} \tag{28a}$$

Zhang[9] 模式簡化後的速度差分式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{320} + \left[\frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right] - \frac{(k_{j+1}^n)^2 - (k_{j-1}^n)^2}{720} \tag{28b}$$

2. 產生向上游回溯衝擊波的有限差分模擬

本問題係均勻到達車流碰上停等車隊產生向上游回溯衝擊波的狀況，其起始條件與邊界條件同圖 5，設定如下：

起始條件： $k(x,0) = \begin{cases} 120 \quad (\text{車／公里}); & \text{當} \quad x \geq 30 \quad (\text{公里}) \\ 30 \quad (\text{車／公里}); & \text{當} \quad x < 30 \quad (\text{公里}) \end{cases}$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 \quad (\text{公里／小時}); & \text{當} \quad x \geq 30 \quad (\text{公里}) \\ 60 \quad (\text{公里／小時}); & \text{當} \quad x < 30 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 \quad (\text{車／小時}); & \text{當} \quad x \geq 30 \quad (\text{公里}) \\ 1800 \quad (\text{車／小時}); & \text{當} \quad x < 30 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

邊界條件：$k(0,t) = 30$ 車／公里，$u(0,t) = 60$ 公里／小時，$q(0,t) = 1800$ 車／小時

本問題模擬 80 個Δt (1 小時)，為利比較，本研究同樣以 LWR 模式的解析解及 Lax-F 有限差分近似解為基準，比較兩高階連續流模式的 Lax-F 近似解，如圖 11 所示。由圖知，Payne [8] 模式在模化向上游回溯衝擊波的狀況時會在衝擊波界面處明顯發生振盪，模擬過程中亦發生密度與流率大於最大值，及速度出現負值等狀況；Zhang [9] 模式表現甚佳，不但沒有出現明顯振盪，與 LWR 模式差分近似的結果相當接近，最大的不同處在於車流停止範圍，包括起始前原即停止的車隊內部及之後被回溯衝擊波掃過的上游路段，Zhang [9] 模式會不斷出現些微擾動，LWR 模式則不會。

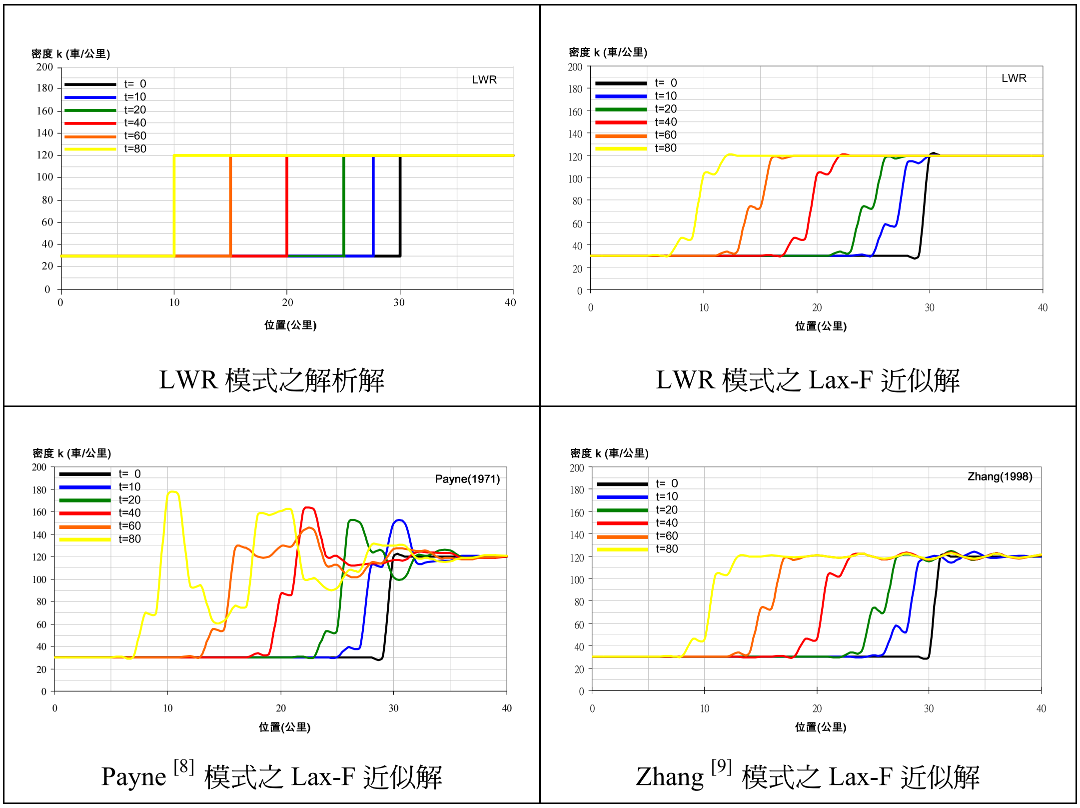


圖 11　高階連續流模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果

3. 長停等車隊起動向下游疏解的有限差分模擬

本問題係長停等車隊起動向下游疏解的狀況，其起始條件與邊界條件可參照圖 8，設定如下：

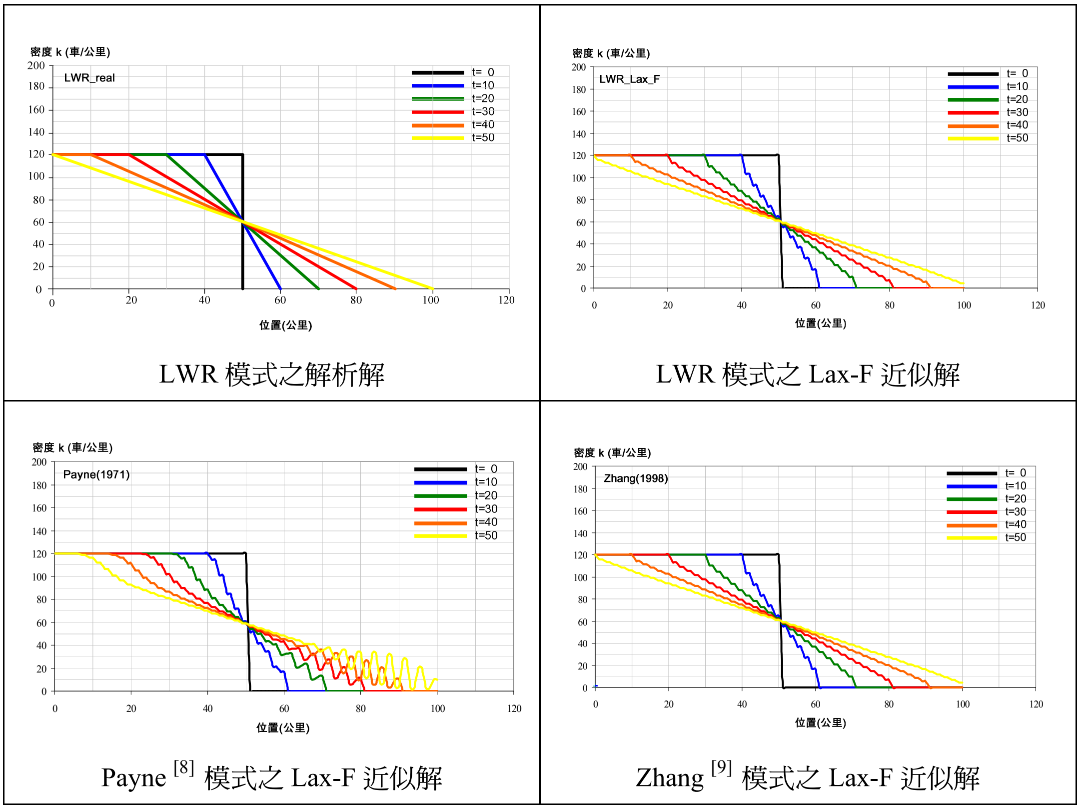
起始條件： $k(x,0)=\begin{cases}120 & (\text{車／公里});\quad \text{當}\quad x\le 50\quad (\text{公里})\\ 0 & (\text{車／公里});\quad \text{當}\quad x>50\quad (\text{公里})\end{cases}$

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & (\text{公里／小時});\quad \text{當}\quad x\le 50\quad (\text{公里})\\ 80 & (\text{公里／小時});\quad \text{當}\quad x>50\quad (\text{公里})\end{cases}$$

$$q(x,0)=\begin{cases}0 & (\text{車／小時});\quad \text{當}\quad x\le 50\quad (\text{公里})\\ 0 & (\text{車／小時});\quad \text{當}\quad x>50\quad (\text{公里})\end{cases}$$

邊界條件：$k(0,t)=120$ 車／公里，$u(0,t)=0$ 公里／小時，$q(0,t)=0$ 車／小時

本問題計模擬 50 個 Δt (5/8 小時)，為利比較，本研究同樣以 LWR 模式的解析解及 Lax-F 差分近似解為基準，比較兩高階連續流模式的 Lax-F 近似解，如圖 12 所示。由圖知，Payne[8] 模式在向前 (下游) 疏解時出現大幅滾動式振盪；向後起動波並非呈解析解 (紙上剪力圖) 的直線，而是曲線。惟在原停等車隊前緣處，起動後其密度維持 $k_{jam}/2$ 不變，與解析解同；



LWR 模式之解析解　LWR 模式之 Lax-F 近似解

Payne [8] 模式之 Lax-F 近似解　Zhang [9] 模式之 Lax-F 近似解

圖 12　高階連續流模式長停等車隊起動向前疏解的模擬結果

Zhang [9] 模式停等車隊起動疏解行為，差分近似的結果出乎意料的與 LWR 模式的差分近似結果完全相同 (不只圖形，連數值亦完全相同)，包括其向上下游的起動波均為直線，且在原停等車隊前緣處，起動後其密度亦維持 $k_{jam}/2$ 不變等。Zhang [9] 雖曾說明該模式在車流達均衡時可完全退化成 LWR 模式，惟並未提及該模式的停等車隊起動疏解行為會與 LWR 模式完全相同，此為本研究的重大發現，亦充份說明本研究提出 Lax-F 差分法，確適用高階連續流模式。

五、結論與建議

連續流車流模式係雙曲線型偏微分方程式，應用上一般係藉有限差分法以近似求解之，其顯式有限差分法計有 FTFS、FTBS、FTCS、Lax-F、Lax-W、Leapfrog 及 Beam-Warming 等。周志忠 [3] 以各種差分法對一階線性連續流模式進行模擬評析，結果發現只有 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 法較佳。FTBS 法與 Beam-Warming 法雖在個案模擬上表現尚佳，惟因須滿足波速為正的 CFL 收斂條件，故對車波可能向前或向後傳遞 (波速為正或負) 的一階準線性連續流模式(LWR 模式)並不適用。本研究延續此方面的研究，進行各種有限差分方法在一階及高階連續流模式的適用性比較，分別獲致以下結論：

(一) 一階準線性連續流

本研究以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等 3 種差分方法，以會產生向上游回溯衝擊波及長停等車隊起動向下游疏解等嚴苛的交通案例，針對一階準線性連續流 (LWR) 模式進行深入分析，結果發現 Lax-W 及 Leapfrog 兩種有限差分法不是誤差過大就是不安定，並不適用；而 Lax-F 有限差分法與解析解相當吻合，其差分近似結果，衝擊波尾端向上游回溯與解析解幾乎完全相同，車隊起動向前疏解亦相當接近解析解，說明 Lax-F 有限差分法確實適用於 LWR 模式。

(二) 高階連續流模式

1. 國內外相關研究錯用高階連續流模式的有限差分法：國外 Payne [7] 針對其 1971 年建立的高階連續流模式曾提出有限差分式；國內周志忠 [3] 與莊國欽 [6] 曾直接援用 Payne [7] 的有限差分式進行案例分析。該三研究採用的有限差分式，其密度差分式係屬 FTBS 法，速度差分式係屬 FTCS 法，流率差分式則類似 FTBS 法但較為簡化。而經周志忠 [3] 分析已確知，FTCS 法即便是最簡單的一階線性連續流模式已不適用，更遑論一階準線性連續流模式 (即 LWR 模式)；FTBS 法因須滿足波速為正的條件方會收斂，而 LWR 模式的波速為正或負均有可能，致 FTBS 法對 LWR 模式亦不適用。亦即，FTBS 及 FTCS 有限差分法更不適用於高階連續流模式。國內相關研究在應用時因設定的模擬環境均侷限為非壅塞交通，根本不會產生波速為負或衝擊波的狀況，使模擬沒有出現明顯振盪的不安

定結果，以致一時不查，逕援用過去 Payne [7] 的錯誤作法而不自知，實宜更加謹慎。

2. 提出適用於高階連續流模式的有限差分式：以有限差分式來近似及模擬偏微分方程式，其結果同時混合二者的特性，單由模擬結果來判定有限差分法的適用與否，極可能會產生誤判。本研究採用兩種安排來避免誤判，即以 LWR 模式的解析解與其有限差分近似解作為比較基準，以及採不只一個高階連續流模式同時進行比較。經以 Lax-F 法取代過去誤用的 FTBS 及 FTCS 法，進行 Payne [8] 與 Zhang [9] 兩高階連續流模式的模擬比較，結果發現：
   (1) Payne [8] 模式以 Lax-F 有限差分式模擬向上游回溯衝擊波的狀況時會在衝擊波界面處明顯發生振盪，且會發生密度與流率大於最大值，及速度出現負值等不合理現象；模擬停等車隊起動向下游疏解時則出現大幅滾動式振盪，且向後起動波係呈曲線而非應有的直線。惟這些不合理現象均源自 Payne [8] 模式本身特性所使然，並非 Lax-F 有限差分法所造成。但如僅做此項分析，在未掌握 Payne [8] 模式特性前，可能會誤以為係有限差分法表現不佳所致。
   (2)Zhang [9] 模式以 Lax-F 有限差分式模擬向上游回溯衝擊波的狀況時沒有出現明顯振盪，與 LWR 模式的模擬結果相當接近；其停等車隊起動向下游疏解的差分模擬結果出乎意料的與 LWR 模式的差分模擬結果完全相同 (不只圖形，連數值亦完全相同)，此一特性居然連 Zhang [9] 自己亦未提及。
   (3) 高階連續流的有限差分式係一組聯立方程式，其每一時空的密度與速度值需在密度與速度兩差分式間相互對照來加以求算；LWR 模式則只需一個差分式即可求得每一時空的密度與速度值。此兩種連續流模式有限差分式的基本結構明顯不同，但 Zhang [9] 模式模擬停等車隊起動向下游疏解的結果竟完全相同，模擬向上游回溯衝擊波的結果亦相當接近，此點除說明 Zhang [9] 模式之優良特性外，更證明 Lax-F 有限差分法，確實適用於高階連續流模式的近似解方法。

本研究雖已研發出高階連續流模式有效的差分近似解法，惟限於時間，仍有許多後續工作值得繼續進行，包括：

1. 關於高階連續流模式 Lax-F 有限差分式的作法：本研究針對高階連續流模式提出 Lax-F 有限差分法，其特色是，不論密度公式或速度公式均採完全相同的 Lax-F 法架構，亦即係偏微分項者，其差分式均為 $(U_{j+1}-U_{j-1})/2$ 的型式，係變數項者，其差分式均為 $(U_{j+1}+U_{j-1})/2$ 的型式，流率公式則直接以恆等式設定 $(q^{n+1}=k^{n+1}\times u^{n+1})$。這些作法狀似微不足道，卻深深影響近似差分式的安定與合理，建議相關研究採用。
2. 關於有限差分式的參數設定：本研究對高階連續流模式鬆弛時間 τ，係沿用周志忠 [3] 的作法，再稍作修改而設定為 $\tau=\Delta t$。由於本研究在有限差分模擬時設定的 $\Delta t = 1/80$ 小時＝45 秒，如此長的鬆弛時間，是否合理，實值得再深入探究。建議後續研究嘗試改變參數 τ 的設定值，進行比較分析。

3. 關於高階連續流模式的選用：由 Payne [8] 與 Zhang [9] 兩高階連續流模式的個案模擬分析知，不同的高階連續流模式特性差異甚大。事實上高階連續流模式自 Payne [8] 首度提出後，歷經數 10 年的改良發展，已有許多不同的版本或模型。建議後續可利用 Lax-F 有限差分法，針對各種高階連續流模式，不論是原型或改良的，進行廣泛的模擬分析，以了解各模式的特性，以供相關研究擇優採用。
4. 關於交通案例的選用：為避免因交通個案設計不當 (侷限於非壅塞交通)，致誤用有限差分法，甚而誤用不良的高階連續流模式而不自知。本研究建議，任何評析車流模式特性的研究，均應包含「會產生向上游回溯衝擊波」的案例，這種會令車流由行進狀態轉變為停止狀態的嚴苛交通案例，可作為評析車流模式良窳的共通基準。
5. 差分方法之基本精神是利用自身格點及相鄰空間格點在此一時階之密度值，用以近似求解該格點下一時階之密度值。本文探討之 7 種方法中，恰僅 Lax-F 方法完全不參考自身格點，而僅參考空間前後兩格點之密度值。其表現卻又是 7 種方法中最好者。推測其原因可能是因為車流之空間連續特性所致。空間某一格點之密度值應與前後兩空間格點間具有密不可分的關係。但密度值瞬時萬變，若參考該格點此一時階之密度值，反而降低其績效。不過，真正原因為何仍有待後續研究進一步加以研析。
6. 後續研究若希望能搭配號誌時制進行車流模擬，並避免在同一時階內發生號誌時相轉移之情形，則可等比例調降Δx 及Δt，以符合當地自由流速度及 CFL 收斂條件。

參考文獻

1. LeVeque, R. J., *Finite Difference Methods for Differential Equations*, University of Washington, Washington, DC, 2005.
2. Zhang, H. M., “Continuum Flow Models”, *Revised Chapter5 in Revised Monograph on Traffic Flow Theory*, United States Department of Transportation Federal Highway Administration, 2012.
3. 周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所碩士論文，民國 86 年。
4. Lighthill, M. J. and Whitham, G. B., “On Kinematics Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Road”, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 229, 1955, pp. 317-345.
5. Richards, P. I., “Shock Waves on the Highway”, *Operations Research*, Vol. 4, No.1, 1956, pp. 42-51.
6. 莊國欽，「非線性控制於高、快速道路整合匝道儀控之研究」，國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文，民國 90 年。
7. Payne, H. J., “FREFLO：A Macroscopic Simulation Model of Freeway Traffic”, *Transportation Research Record*, No. 722, 1979, pp. 68-77.
8. Payne, H. J., “Models of Freeway Traffic and Control”, *Simulation Council Proc*. 28, Vol. 1,

1971, pp. 51-61.

9. Zhang, H. M., "A Theory of Nonequilibrium Traffic Flow", *Transportation Research Part B*, Vol. 32, No.7, 1998, pp. 485-498.