

車流動力學模式¹

KINETIC THEORY OF TRAFFIC MODELS

卓訓榮 Hsun-Jung Cho²

傅昱瑄 Yu-Hsuan Fu³

陳豐榮 Feng-Jung Chen⁴

(95 年 6 月 27 日收稿，96 年 3 月 19 日第一次修改，96 年 10 月 1 日
第二次修改，97 年 3 月 5 日定稿)

摘 要

微觀車流模式具有行為基礎，但資料不易取得，尤其在大樣本時更為困難；相反，巨觀車流模式容易取得資料，但是缺乏行為基礎；而介觀車流理論兼具以上兩種車流行為之優點，可藉由行為基礎建立速度分配函數，經過積分後得到巨觀車流資訊。介觀車流基本模式最早由 Prigogine 與 Herman 建構，本研究建構一新的車流動力學模式，以此新模式修改 Prigogine 與 Herman 模式在空間與速度瞬時變化的假設，使得可以描述減速時速度的連續變化，並且考慮到煞車的空間影響，最後推導出以連續減速模式對速度積分後，滿足流量守衡。為了使模式更容易被了解，本研究補充其有關之基本車流模式、車流速度分配模式、期望速度分配模式、駕駛者交互影響模式、駕駛者跟車行為之速度分配模式、鬆弛時間和奇異點特性分析等研究所需數學定義與模式推導之不足，並且針對 Prigogine 與 Herman 建構的介觀模式做模擬，以期可使對此理論

-
1. 本研究部分得助於國科會計畫 NSC-95-2752-E-009-0100-PAE；NSC-95-2221-E-009-347；MOE ATU Program。
 2. 國立交通大學運輸科技與管理學系教授（聯絡地址：300 新竹市大學路 1001 號綜合一館 8 樓交通大學運輸科技與管理學系；電話：03-5710657）。
 3. 國立交通大學運輸科技與管理學研究所碩士。
 4. 國立交通大學光電工程研究所博士班生。

有興趣者易於了解，甚而基於此有更深入之研究。

關鍵詞：動力學理論；微觀車流；介觀車流；巨觀車流

ABSTRACT

Microscopic traffic models show the basis for driver behavior. The behavior data is quite difficult to collect, especially when large samples are required. Macroscopic traffic models manipulate the data that is easy to collect but lack of the behavior basis of drivers. Mesoscopic traffic models take advantage of the above models; mesoscopic models can build the velocity distribution function from the behavior basis and obtain the macroscopic parameters through integration of the distribution function. Mesoscopic models are first proposed by Prigogine and Herman. We construct a new model to relax some poor assumptions of Prigogine and Herman's – lack of consideration of finite space and instantaneous velocity-changing. Therefore, our model considers a successive slowing-down process and finite baking space. This study also provides the required mathematical definition and the deduction in the proof of model from basic traffic patterns, traffic velocity distribution model, expected velocity distribution model, driver interactive impact model, driver following behavior velocity distribution model, relaxation time and singularity analysis, etc. studies. And we simulate the Prigogine and Hermann model. With these, we might assist researchers to have a better understanding of the model and thus have the ability of further research.

Key Words: Kinetic theory; Microscopic traffic; Mesoscopic traffic; Macroscopic traffic

一、前言

一般車流理論可分為三種：微觀 (microscopic)、巨觀 (macroscopic) 和介觀 (mesoscopic)；根據 Hoogendoorn 與 Bovy^[1]等學者之描述，微觀車流模式是描述在時空下個別駕駛者的駕駛行為與車輛的關係，以變數詳細描述個體的行為，如：交互影響以及變換車道等，其基本理論為跟車模式。巨觀車流模式是基於流量、速度與密度關係，以連續流體的觀點看待，在車流中的的每一車輛無法單獨判別，基本理論具有平均的概念。介觀車流模式與微觀車流模式和巨觀車流模式相關，介觀車流模式建立在微觀車流模式中連續兩車的距離以及巨觀車流模式中密度的關係，以機率分布的形式描述個體行為，其基本理論由動力學理論出發。

最早的微觀車流模式是由 Reuschel^[2]和 Pipes^[3]所提出，其主要概念在於車輛與前車間的特定距離會與車速成比例，其加速減速的行為都依據前車而定，後來從 1957 年開始，藉由 Herman 和他在 GM 研究室 (General Motors Researches Laboratories) 的合作者陸續做

了一系列跟車研究的發表，由於他們的努力使得微觀車流的發展起了源頭，而得以擴展。跟車模式可分為三類：安全與距離模式 (safe-distance models)、刺激與反應模式 (stimulus-response models) 及心理與空間模式 (psycho-spacing models)。安全與距離模式最早是由 Pipes^[3] 所提出的，相似的理論 Forbes^[4] 等亦提出，主要是考慮在跟車時應與前車保持一段安全距離，求解其安全距離。刺激與反應模式主要概念是指反映與敏感性和刺激有關，由 Chandler^[5] 等提出。心理與空間模式是為了改善只單憑速度差而反應的模式，從駕駛者知覺心理的角度與他們受刺激的知覺程度去反應 (Todosiev 和 Barbosa^[6])，Wiedemann^[7] 第一個提出心理與空間模式，他利用心理門檻將駕駛者分為受限制的與非受限制的，且在模式中考慮變換車道與超車等行為。

巨觀車流模式是描述駕駛者依據交通環境的總和行為，依據流量與密度關係—流量等於密度乘以速度，以及車輛守恒等基本原則；Lighthill 和 Whitham^[8] 及 Richards^[9] 提出最早的一階波動方程式，一般稱之為 LWR 模式，其為在單一均質車道上，利用流量為密度的函數將流量守恒與流量密度關係以一階微分方程式表示，後來有許多學者將 LWR 模式加以擴充。此外，也有學者將流體力學的觀念引入車流理論中，Payne^[10] 式最早將流體力學中的動量方程式 (momentum equation) 引入車流理論，結合 LWR 的流量守恒與流量密度關係，成為原始的高階模式，後來也有許多學者基於此模式為基礎加以改良，Papageorgiou^[11] 改善高階模式，其以 Payne 的原始高階模式的尤拉分解形式 (Euler-Like discretize form) 為基礎，再加入一些參數改善模式在電腦上的執行效率；Michalopoulos^[12] 的半黏滯性模式 (semiviscous model) 與黏滯性模式 (viscous model)，其考慮了調整速度至自由車流速度的時間延遲，以及將自由車流速度調整為隨位置變化，這些都是著名的改善模式。

介觀車流模式為描述個體行為但是並非像微觀一樣各別描述個體行為的特性，而是以一種總和的概念，以機率密度的形式描述車流理論；以下介紹三種介觀模式：車間時距分配模式 (headway distribution model)、群聚模式 (cluster model) 以及氣體動力學連續模式 (gas-kinetic continuum model)。車間時距分配主要在利用單獨車輛的車間時距分配函數來描述車流，但並不像微觀模式各別考慮或跟蹤每一輛車，例如：Buckley^[13] 的半卜瓦松模式 (semi-Poisson model) 以及 Branstetter^[14] 的一般性等候模式 (generalised queuing model) 皆是以此為基礎，另外也有學者發展混合的車間時距分配模式 (mixed headway distribution model)。群聚模式主要的特點是以一群車輛具有相同特性，此群聚車輛視為均質，其重點在決定群聚的大小尺寸以及速度，相關研究可見 Botma^[15]。

越來越多學者藉由物理的理論來解釋人類行為，其中車流行為亦是其一研究項目，而車輛就像是原子或者分子，所以許多學者試著嘗試以統計物理學來描述，其中氣體動力學可說是近代統計物理中一重要的發展，然而描述人類行為與分子或原子的行為不盡相同，而動力學連續模式最早是由 Prigogine 與 Andrews^[16] 以車輛的速度分配函數描述車流，建立車流動力學模式的雛型，後續的研究多以 Prigogine 與 Herman^[17] 所建構的模式加以擴充改進，其基於動力學理論將其應用到車流研究之中；而後續研究中其中又以 Paveri-

Fontana^[18]時相空間密度 (phase-space density; PSD) 的概念為後續主要研究的主流，諸如：Hoogendoorn 與 Bovy^[19]、Helbing^[20]等學者皆以此概念出發研究；其他的還有許多關於介觀車流模式的研究。

在車流的三種模式中，因為巨觀的行為無法捕捉，而微觀的行為又很難整合成巨觀特性，再者微觀的個體(車輛)數目又太多、不易捕捉，所以為了可描述微觀行為，而又可提供巨觀的行為資訊，則定義包含微觀的特性，而又能科學性地提供巨觀資訊的模式者，稱為介觀車流模式；介觀車流模式透過機率密度形式，可以說是將微觀車流模式與巨觀車流模式關係連接的一座橋樑。

本研究建構一新的介觀車流動力學模式，為了使讀者容易了解，加以介紹介觀車流中的動力學連續模式，而此方面研究最早且最重要的文獻為 Prigogine 與 Herman^[17]所建構的模式。然而此文獻表達很簡要，模式建立之過程及所依據之數學理論都缺乏說明，對國內運輸研究者而言並不容易瞭解，本研究擬補充其所需要之數學定義，並補充模式推導之不足；希望能藉此工作，對有興趣研究車流基本理論者有所幫助。

本研究分為九大部分，在本節回顧微觀、巨觀與介觀的車流模式發展，第二節至第七節針對 Prigogine 和 Herman^[17]之著作加以補充其所需要之定義及模式推導。第二節則在說明介觀模式中，速度分配函數與巨觀特性—流量與密度間的關係；第三節則在詳述車流速度分配模式，第四節引入期望速度分配函數，第五節則在討論駕駛者交互影響產生的交互影響項之模式，而第六節引入似跟車模式因素的調整項，第七節則討論模式的奇異點特性，第八節則是基於之前各節的描述解說，本研究建構一新的模式，用以放鬆 Prigogine 和 Herman^[17]對於空間與速度變化的不適假設；最後提出本研究之結論與建議。

二、車流基本模式

本小節主要旨在說明介觀模式中，速度分配函數與巨觀特性—流量與密度間的關係；並且說明車流流體力學與一般流體力學不同之處，流量與平均速度均為密度的函數，而且平均加速度與密度梯度間具有關係，這些性質在一般流體力學上並無這樣的關係。

假設一個可超車的高速公路，若一個給定的時間 t 且一個已知的點上 x 對於速度 v 有一個速度分配函數 $f(x, v, t)$ ；則區間車輛數 dN 在給定一時間 t 且路段間距在 x 和 $x + dx$ 之間，速度間距在 v 和 $v + dv$ 之間，可用 $f(x, v, t)$ 表示成下式：

$$dN = f(x, v, t) dx dv \quad (2.1)$$

此速度分配函數與速度函數在意義上不同，速度分配函數具有速度分配的觀念，而且由 (2.1) 式可知速度分配函數其單位亦與平均速度不相同；利用速度分配函數表示巨觀車流中重要函數—區域密度與流量函數，可表示如下：

區域密度函數

$$c(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, v, t) dv \quad (2.2)$$

區域流量函數

$$q = c\bar{v}(x, t) = \int_0^{\infty} vf(x, v, t) dv \quad (2.3)$$

其中 $\bar{v}$ 為平均速度，而速度的分散程度可用下者計算，為一重要的特性

$$\overline{c(v - \bar{v})^2} = \int_0^{\infty} (v - \bar{v})^2 f(x, v, t) dv \quad (2.4)$$

其中 $f(x, v, t)$ 、 $c(x, t)$ 和 $q(x, t)$ 皆為連續函數。由上可知，速度分配函數 $f(x, v, t)$ 在巨觀車流中扮演一重要地位，其亦是將從微觀特性導引到巨觀模式的重要因素。

假設流量為密度的函數，此點車流體力學與一般流體力學在假設上不同

$$c\bar{v} = q(c) \quad (2.5)$$

因為假設水流密度 (水質) 沒有變化，也就是平均速度與密度無關；而交通上，在此將平均速度設為密度的函數，其關係式可表如下：

$$\bar{v}(x, t) = \bar{v}[c(x, t)] \quad (2.6)$$

定義 2.1：連續方程 (continuity equation) ^[21]

若無源點或無匯點的流體以速度 $v(x, y, z, t)$ 移動，密度為 $\rho(x, y, z, t)$ ，若在單一時相 (single phase) 內沒有時相改變，或是雙時相其一增加量等於另一減少量，則可得 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$ ，稱為連續方程 (continuity equation)。

定義 2.2：散度 (divergence) ^[21,22]

若 u 為一任意之向量，若 $u(x, y, z)$ 為三維之向量， u 的散度 (divergence) 可表為：

$$\nabla \cdot u = (\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z})(u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

散度 $\nabla \cdot u$ 是量測向量 u 從一點散開的程度。(2.5) 式與 (2.6) 式為一有效假設，藉由流量與密度的關係引入連續方程 (定義 2.1)，並以散度 (定義 2.2) 表之為：

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c\bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

(2.7) 式亦可藉由 LWR 模式取得。可將 (2.7) 式談及的連續方程改寫成如下：

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

其中 $V = \frac{\partial(c\bar{v})}{\partial c}$ 。經由 (2.8)，其解可寫為：

$$c = c(x - Vt) \quad (2.9)$$

因為密度隨著空間變化，所以 (2.9) 式為一非均質之結果，而其中 V 表示動力學波速。由流量密度曲線可知 $\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \leq 0$ ，則

$$V = \bar{v} + c \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \leq \bar{v} \quad (2.10)$$

由上可知，動力學波傳遞的速度永遠比平均速度小；且由流量密度曲線亦可知當在低密度下， $V \rightarrow \bar{v}$ ，而在車流量最大的密度下， $V = \frac{\partial(c\bar{v})}{\partial c} = 0$ ，在高密度下， $V = \frac{\partial(c\bar{v})}{\partial c} < 0$ ，則動力學波 V 隨著密度增加而減小。在此所討論的車流體力學中忽略動力學波的形變（詳見 Prigogine 與 Herman^[17]），也就是不考慮非穩定性，但是非穩定性在高密度時，是一項重要的因素。

在 (2.6) 式的假設下，若針對一在平均速度 $\bar{v}$ 的車流中移動的觀察者而言，平均加速度可表為：

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \bar{v} \quad (2.11)$$

若將連續方程代入其中，則可將上式改寫如下：

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \bar{v} \\ &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \left(-\frac{\partial c\bar{v}}{\partial c} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \bar{v} \\ &= -\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \left(c \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \bar{v} \\ &= -c \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \\ &= -c \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} = \Phi \frac{\partial c}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 Φ 定義為為摩擦係數

$$\Phi = -c \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \right)^2 \leq 0 \quad (2.13)$$

由 (2.6) 式可推導出平均加速度與密度梯度間的關係，如 (2.12) 式，此性質在一般流體力學上並無此關係；且由 (2.12) 式與 (2.13) 式可知，摩擦係數為負值，當車流進入低密度區，則其平均加速度為正數，即加速，而當進入稠密區，則平均加速度為負數，即減速，與一般所知的概念相符合。

同樣地，若觀察者固定於某一點上觀察，因為沒有空間改變的因素，所以其平均加速度形式與 (2.11) 不同，其平均加速度可表為：

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} \quad (2.14)$$

若將連續方程代入其中，則可將上式改寫如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \left(-\frac{\partial c \bar{v}}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \left(-\frac{\partial c \bar{v}}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \left(\bar{v} + c \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial x} \\ &= \phi \frac{\partial c}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中 ϕ 定義為摩擦係數

$$\phi = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \frac{\partial (c \bar{v})}{\partial c} = -\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \left(\bar{v} + c \frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \right) = \Phi + \bar{v} \left(-\frac{\partial \bar{v}}{\partial c} \right) \quad (2.16)$$

由 (2.15) 式可知，在當觀察者固定於某一點上觀察，條件下平均速度與密度梯度仍具有關係，且當密度 $c < c_m$ (c_m 為在流量曲線下最大值對應下的密度)，若其密度梯度為正，可導出加速度為正；而當 $c = c_m$ 時， $\phi = 0$ ，平均加速度為零。

三、車流速度分配模式

本小節在敘述速度分配模式若用傅利葉逆轉換的型式，並且舉一範例說明當在 $t = 0$

時，速度分配函數縮減為空間座標，其分配函數假設為高斯型態表示時，最後所導得的密度函數會與初始密度無關，亦由此說明均質過程與速度分配函數有關。

若考慮在一個無限長的高速公路且低密度的交通狀況中，假設每一輛車行駛以不同的固定速度且持續維持其期望速度行駛，又在可以允許超車但是必須維持速度的條件，此時不考慮駕駛者間交互影響，且只有在車輛空間分佈改變的情況下，速度分配函數才做修正，所以不論初始密度為何，經過長時間最後可得：

$$c(x, t) = \text{Constant}, t \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

(3.1) 式表示在時間趨近無限大時，藉由自由超車而所得到的結果；此現象稱為均質化 (homogenization)。

若在駕駛者間沒有交互影響的條件下，可將連續方程 (2.7) 式改寫成：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

其中 (3.2) 式對速度積分則可變回連續方程，表示其仍滿足車輛數守恒。

將 (3.2) 式的解改成下式，可用積分證明改寫之後其性質仍不改變。

$$f(x, v, t) = f(x - vt, v, t = 0) \quad (3.3)$$

定義 3.1：傅利葉轉換 (Fourier transform) ^[23]

若函數 $f(x)$ 滿足下列條件：

- (1) 在任意有限區間上滿足連續且片段平滑 (piecewise smooth) 條件 (Dirichlet 條件)。
- (2) 若函數 $f(x)$ 在無限區間 $x \sim (-\infty, \infty)$ 內絕對可積，即 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 收斂。

傅利葉轉換法適用在範圍無窮長的問題下：

- (1) 傅利葉轉換 (Fourier transform)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

- (2) 傅利葉逆轉換 (inverse Fourier transform)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(\omega) d\omega$$

- (3) $F[f'(x)] = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = i\omega F[f(x)]$

若用傅利葉逆轉換的型式，如定義 3.1 表示 $f(x, v, 0)$ ，可得：

$$f(x, v, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \ell_k(v) dk \quad (3.4)$$

其中 k 在車流中表示密度波的波數， ℓ_k 為 f 函數的傅立葉轉換，參照 (7.3) 式與 (7.4) 式；因為 (3.3) 式，所以 $f(x, v, t)$ 可以傅利葉逆轉換型式 (定義 3.1)，表示成：

$$f(x, v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(x - vt)] \ell_k(v) dk \quad (3.5)$$

由 (3.5) 式可知當時間越大，指數震盪越嚴重，則難以積分；所以當在 $t \rightarrow \infty$ ，只有在區域 $k \rightarrow 0$ 對此積分有貢獻，在此情況下可得：

$$f(x, v, t) \rightarrow \ell_0(v), \text{ 當 } t \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

若 (3.6) 式對速度做積分，則可得到 (3.1) 式。

定義 3.2：Dirac Delta 函數 $\delta(x)$ ^[24]

Dirac Delta 函數 $\delta(x)$ 為廣義函數，具有以下性質：

$$(1) \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x - x_0 = 0 \\ 0 & x - x_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

根據 $\delta(x)$ 函數的定義，具有許多性質，例如：

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \text{ (濾波性質 (filtering property))}$$

$$(2) \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \text{ 其中 } a \text{ 為常數}$$

$$(3) \delta(x) \text{ 函數之積分定義：} \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega x} d\omega$$

考慮一個範例，當在 $t = 0$ 時，速度分配函數縮減為空間座標，如定義 3.2 所示的 Delta 函數積分形式，以及速度高斯分配函數組成，則速度分配函數 $f(x, v, 0)$ 可表示如下：

$$\begin{aligned} f(x, v, 0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \delta(x) \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right) dk \end{aligned} \quad (3.7)$$

因為 (3.3) 式，所以 $f(x, v, t)$ 可表示如下：

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \delta(x - vt) \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(x - vt)) \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right) dk \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中參數 σ 為量測速度分配的分散程度。

由 (3.8) 式對速度做積分，並利用定義 3.2 Delta 函數性質 (1) 與 (2)，可得：

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \int_0^{\infty} f(x, v, t) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \delta(x - vt) \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \delta\left(-v + \frac{x}{t}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{\sigma^2}\right) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2 t^2}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

由上可得，在此特性條件下，不論初始密度為何，其均質特性皆與初始密度無關，然而達成均質的過程與速度分配函數有關，因為密度是由速度分配函數推導所得。

四、期望速度分配模式

本小節引入期望速度分配函數與鬆弛時間，並且以鬆弛項描述車流在低密度且不考慮駕駛者交互影響下的行為。

令函數 $f_0(x, v, t)$ 為期望速度分配 (Prigogine^[25])，也就是駕駛者所欲實現的理想目標； $f_0(x, v, t) dx dv$ 為在時間 t 路段 dx ，期望速度介於 v 與 $v + dv$ 間的車輛數。然而因為受到某些因素的影響而造成微擾，例如：障礙物、天氣、其他駕駛者的互相影響，所以實際上速度分配函數 f 與期望速度分配函數 f_0 並不相同。

定義 4.1：鬆弛時間 (relaxation time)

鬆弛時間是指駕駛者由真實速度分配函數 f 達到期望速度分配函數 f_0 所需要的時間。

車流的微擾有兩種可能產生的情況：其中一個是在一段時間後微擾停止，而另一個為在任何時間持續擾動反應。若考慮第一個情況，期望當 $t > 0$ 的時候，如定義 4.1，假設鬆弛時間為 T ，速度分配函數可以達到 f_0 。一般來說，在低密度下的車流中，鬆弛過程為一很短暫的時間，然而相對地，要達到均質過程則需要長時間才有可能達成。

當 $t = 0$ 時，速度分配函數為真實速度的初始速度分配，而當 $t \rightarrow \infty$ 時，速度分配函數可變為駕駛者所期望的速度分配函數，這一概念可利用一個簡單的方程式表示：

$$f(v, t) = f_0(v) + [f(v, 0) - f_0(v)] \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad (4.1)$$

(4.1) 式為一簡化式子，鬆弛時間為一常數 T ，實際上 T 可以是指數函數或者是分配函數或者其他函數，但在此並不加以詳加討論。

定義 4.2：求解線性微分方程式^[26]

若線性微分方程式如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

則可求解得 $y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Ce^{-\int P(x)dx}$ ，其中 C 為常數。

根據定義 4.1 可知，(4.1) 式可滿足均質條件如下式 (下式又稱為鬆弛項)：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{T} \quad (4.2)$$

而由 (4.2) 式加上邊界條件而推導出 (4.1) 式，如定義 4.2 所示，推導如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{f - f_0}{T} \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{T} &= \frac{f_0}{T} \\ f &= e^{-\int \frac{1}{T} dt} \int \frac{f_0}{T} e^{\int \frac{1}{T} dt} dt + Ce^{-\int \frac{1}{T} dt} \\ &= e^{-\frac{t}{T}} \int \frac{f_0}{T} e^{\frac{t}{T}} dt + Ce^{-\frac{t}{T}} \\ &= f_0 + Ce^{-\frac{t}{T}} \end{aligned}$$

其中 $C = f(v, 0) - f_0(v)$ 。

假設每一個駕駛者其期望速度與區域密度無關 (稱為 vehicle chaos assumption), 則期望速度分配函數可表成下式:

$$f_0(x, v, t) = c(x, t) \tilde{f}_0(v) \quad (4.3)$$

其中 $\tilde{f}_0$ 是一個渴望速度機率分配, 所以可標準化 $\tilde{f}_0(v)$ 如下:

$$\int \tilde{f}_0(v) dv = 1 \quad (4.4)$$

(4.3) 式中並未包含任何跟均質有關的意義, 且 (4.3) 式此現象 (意指 vehicle chaos assumption) 只會出現在稀疏交通下, 當駕駛者間交互影響被忽略的時候。

若考慮在一條非均質且低密度的高速公路上, 不考慮駕駛者間的交互影響, 則速度分配函數將會因(3.2)式與(4.2)式而可改寫成:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f - f_0}{T} \quad (4.5)$$

五、駕駛者交互影響模式

先前所討論的式子都是在沒有考慮駕駛者間的交互影響情況下, 本小節的推導考慮將交互作用加入運動方程中, 而獲得的交互影響項, 再將其與之前所得到的模式結合, 可獲得與在氣體動力理論中基礎的波茲曼方程式相同重要的模式, 所以稱其為車流理論中的波茲曼方程式。

若以新增一個項來代表交互影響的作用, 則可將連續方程表成:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int} \quad (5.1)$$

分析 (5.1) 式各項產生的原因, 右邊第一項為鬆弛項, 產生的原因在於實際的速度分配函數與駕駛者所期望的不同, 表示如下:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel} = -\frac{f - f_0}{T} \quad (5.2)$$

(5.1) 式右邊的第二項為交互影響項, 考慮駕駛者間交互影響所產生的影響, 遵循運動學理論的觀點, 可將交互影響項寫成 (Prigogin 與 Andrews^[16]):

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{int} = \sum_j (\Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)})(1 - P) \quad (5.3)$$

其中 P 為可以超車的機率， i 車為所觀測的車輛， j 車為 i 車以外其他的車輛；在目前討論中，此 P 為一足夠大的樣本所決定的平均數，並未考慮其他因素 (例如：區域密度、速度) 與 P 的影響關係； $\Gamma_{ij}^{(+)}$ 與 $\Gamma_{ij}^{(-)}$ 是因車輛間交互影響所造成速度分配函數在一段時間 dt 的變動， $\Gamma_{ij}^{(+)}$ 表示增加而 $\Gamma_{ij}^{(-)}$ 表示減少。

(5.3) 式表示在不超車的情況下，由觀察 i 車受 j 車因為交互影響造成改變；若在速度 $v_j < v_i$ 的情況下，交互影響只會造成 $\Gamma_{ij}^{(-)}$ ，則從 i 車觀察 j 車在 x 的流量可表為 $f_j(x, v_j, t)(v_i - v_j)$ ，則 j 種車在 $dt dv_j$ 積分在 $(v_i - v_j) > 0$ 的情形下可得車輛數為：

$$\int_0^{v_i} f_j(x, v_j, t)(v_i - v_j) dt dv_j \quad (5.4)$$

(5.4) 式與 i 車在位置 x 上發生交互影響的機率為：

$$f_i(x, v_i, t) dx dv_i \quad (5.5)$$

定義 5.1：摺積 (迴旋積、旋積、卷積) (convolution) ^[24]

摺積 (convolution) 是利用積分表示當一函數 g 移動到另一函數 f 其重疊的量，混合兩個函數，亦即函數 g 與 f 乘積；摺積通常用在無限的區域。

$$f \otimes g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

由 (5.4) 式、(5.5) 式與定義 5.1 可得觀察到受 j 車影響的 i 車造成可能車輛減少為：

$$\Gamma_{ij}^{(-)} dx dv_i dt = dx dv_i dt f_i(x, v_i, t) \int_0^{v_i} f_j(x, v_j, t)(v_i - v_j) dv_j \quad (5.6)$$

反之，若時間 dt 與 j 種車以 $v_j > v_i$ 相互影響， j 車以相對速度 $(v_j - v_i) > 0$ 接近 i 車，從 i 車觀察 j 車的流量為 $f_j(x, v_j, t)(v_j - v_i)$ ， j 可能的車輛在 $dt dv_j$ 積分經過 $(v_j - v_i) > 0$ 車輛數為：

$$\int_{v_i}^{\infty} f_j(x, v_j, t)(v_j - v_i) dt dv_j \quad (5.7)$$

(5.7) 式與 i 車在位置 x 發生交互影響的機率為：

$$f_i(x, v_i, t) dx dv_i \quad (5.8)$$

所以經由定義 5.1 可得觀察到受 j 車影響的 i 車造成可能車輛增加為：

$$\Gamma_{ij}^{(+)} dx dv_i dt = dx dv_i dt f_i(x, v_i, t) \int_{v_i}^{\infty} f_j(x, v_j, t) (v_j - v_i) dv_j \quad (5.9)$$

結合 (5.6) 式與 (5.9) 式可得：

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)} &= f_i \int_{v_i}^{\infty} f_j (v_j - v_i) dv_j - f_i \int_0^{v_i} f_j (v_i - v_j) dv_j \\ &= f_i \int_0^{\infty} f_j v_j dv_j - f_i v_i \int_0^{\infty} f_j dv_j \\ &= \bar{f}_i v_j c_j - f_i v_i c_j \end{aligned} \quad (5.10)$$

根據 (5.10) 式，可將交互影響項表成：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{int}} &= \sum_j (\Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)}) (1 - P) \\ &= f_i(x, v, t_i) c(x, t) [\bar{v}(x, t) - v_i] (1 - P) \end{aligned} \quad (5.11)$$

結合 (5.2) 式與 (5.11) 式可將 (5.1) 寫成：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f - f_0}{T} + (1 - P) c(\bar{v} - v) f \quad (5.12)$$

(5.12) 式為一非線性的積分—微分方程式，其中 $\bar{v}$ 與 c 隱含與未知分配函數 f 有關，而且在此式中並不考慮車輛間的相關性。為了要確保 (5.12) 式仍遵守連續方程的概念，由 (5.12) 式對 v 做積分可得：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}c)}{\partial x} \\ &= \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} \right) dv \\ &= \int -\frac{f - f_0}{T} + (1 - P) c(\bar{v} - v) f dv \\ &= -\frac{1}{T} \int (f - f_0) dv + (1 - P) c[\bar{v} \int f dv - \int v f dv] \\ &= -\frac{1}{T} (c - c) + (1 - P) c[\bar{v}c - c\bar{v}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

由 (5.13) 式可知其仍保有流量守恆的車流特性，且由 (5.12) 式可看出當 $v > \bar{v}$ ， f 的值減少，

反之則增加，符合一般預期的結果。

若假設在均質的條件下 (密度為常數)，所以與位置無關，即不考慮 (5.12) 式左邊第二項，將 (5.12) 式乘以速度並對速度做積分可得：

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} v dv = \int \left[-\frac{f - f_0}{T} + (1 - P)c(\bar{v} - v)f \right] v dv$$

$$\frac{\partial c\bar{v}}{\partial t} = -c \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{T} + (1 - P)c^2[(\bar{v})^2 - \overline{v^2}]$$

對上式左右同除以 c 可得

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{\bar{v} - \bar{v}^0}{T} + (1 - P)c[(\bar{v}^2) - \overline{v^2}] \quad (5.14)$$

其中 $\bar{v}^0$ 為平均期望速度。

因為已經假設是在均質的條件下，因為 (2.6) 式平均速度為一密度函數，所以在此可得到一與時間獨立的穩態解。

$$\bar{v}(\infty) = \bar{v}^0 + T(1 - P)c[\bar{v}(\infty)^2 - \overline{v^2}(\infty)] \quad (5.15)$$

且因為 $\overline{(\bar{v} - v)^2} = \overline{v^2} - (\bar{v})^2 > 0$ ，我們可得與時間獨立的穩態平均速度解小於平均的渴望速度，為一合理的結果。

$$\bar{v}(\infty) < \bar{v}_0 \quad (5.16)$$

(5.12) 式可合理的被考慮在公路上，其所扮演的角色與基礎的波茲曼方程式在氣體動力理論中相同，所以稱其為車流理論中的波茲曼型態的原因。

假設系統在區域均衡的狀態下，系統特徵的量對於時間與空間的改變緩慢，所以與同質以及時間相獨立的情況相同，其中的量為區域的值；所以在一般氣體運動學理論的區域平衡解的形式可表為

$$f = f[c(x, t), \bar{v}(x, t), T(x, t), v] \quad (5.17)$$

其解在時間與空間座標中的行為受到密度、平均速度與溫度等三個要素影響，相對地，在車流中區域平衡解在時間與空間座標中的行為只受到密度的影響，其形式可表為：

$$f = f[c(x, t), v] \quad (5.18)$$

藉由 (5.18) 式，可將區域平均速度表成一密度的函數如下：

$$\bar{v}(x, t) = \frac{1}{c(x, t)} \int_0^\infty v f[c(x, t), v] dv = \bar{v}[c(x, t)] \quad (5.19)$$

由 (5.19) 式的結果顯示與先前所假設的 (2.6) 式相符合，其為談及車流體運動學中的基本假設。

以 (5.12) 式為基礎模式做模擬，本研究採用上風法 (upwind method)，此方法為一簡單基本適用於一階偏微分方程的數值方法，屬於明確的有限差分方法 (explicit finite-difference method)，依據 Helbing^[27] 中的上風法表示法與使用邊界條件 (oundary condition) 模擬 (5.12) 式，可獲得密度變化圖如下，圖 5.1、圖 5.2 與圖 5.3 表示不同角度觀看密度變化圖形。

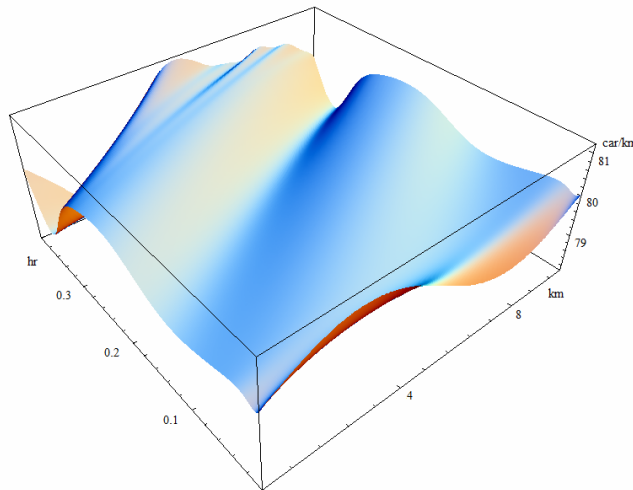


圖 5.1 密度變化圖-1

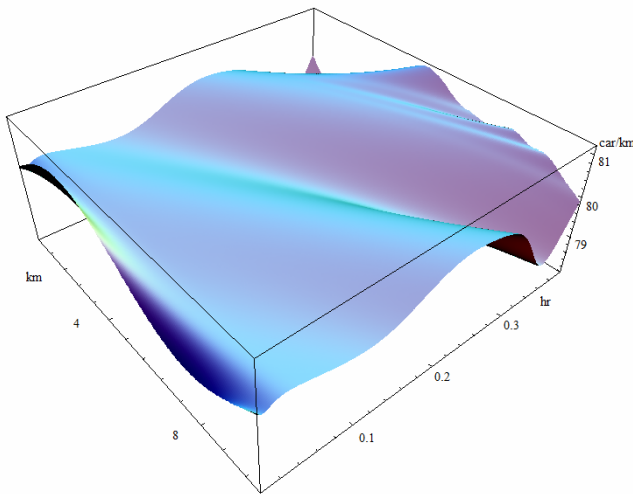


圖 5.2 密度變化圖-2

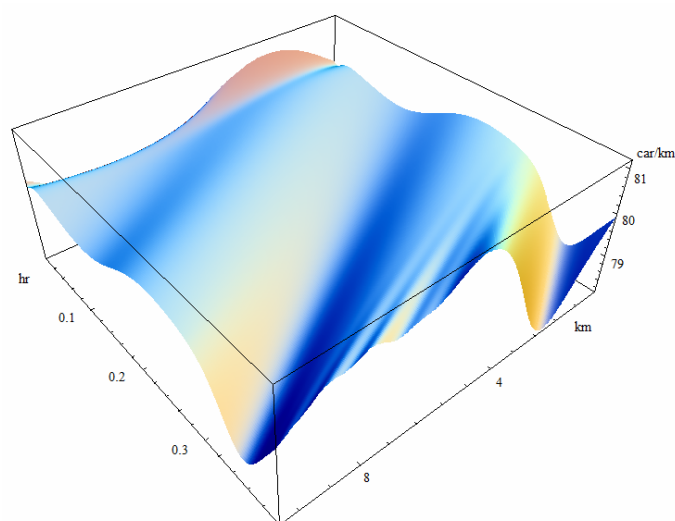


圖 5.3 密度變化圖-3

六、駕駛跟車行為之速度分配模式

因為每一個運動學方程式的修改都可能會改變分佈函數、所有的要素的發展以及穩態，本小節引入似跟車模式因素的調整項，藉由調整項說明對密度與流量的時間發展影響，以及對速度分散的影響。

除了前述之外，還有許多的交互影響因素可被考慮，例如：以跟車理論形式的影響；典型跟車理論可表為下列形式：

$$\frac{du_n}{dt} = \lambda(u_{n-1} - u_n) \quad (6.1)$$

其中 u_n 是第 n 車的速度；在(6.1)式中， λ 為第 $n-1$ 與第 n 車相關距離的函數，在這個方程式中若忽略時間延遲的影響，也就是不考慮時間因素，每個表示式皆為以下形式：

$$u_n = \xi \quad (6.2)$$

其中 ξ 為一任意與 n 無關的常數。可將 (6.1) 式加入先前所推導的運動方程式中，其主要功用是藉此調整原本運動方程式，使其趨向更小部分的速度分散程度。

一個與跟車理論相似的定性影響如下：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{adj} = \lambda(c)(1-P)c[\delta(v - \bar{v}) - f] \quad (6.3)$$

其中 $\delta(\xi)$ 表示 Dirac Delta-function，如定義 3.2 所示，而 (6.3) 式中 $\lambda(c)$ 是一個任意的密度函數，將 $\lambda(c)$ 乘以 $(1-P)$ 的意義在於符合跟車效果必須在自由超車或者 $P=1$ 的情況下消失。

(6.3) 式若對速度做積分，根據定義 3.2 則可以滿足下列條件：

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{adj} dv = \lambda(1-P) c \left[c \int_0^{\infty} \delta(v - \bar{v}) dv - c \right] = 0 \quad (6.4)$$

所以使用 (5.1) 式結合 (6.4) 式，則：

$$\frac{dc}{dt} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel} dv + \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int} dv + 0 \quad (6.5)$$

由上可知，密度的時間發展不會隨著調整項而改變；同樣地，若將調整項乘以速度再對速度做積分則：

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{adj} v dv = \lambda(1-P) c \left[c \int_0^{\infty} v \delta(v - \bar{v}) dv - \bar{v} c \right] = 0 \quad (6.6)$$

將 (6.6) 式代回連續方程，則：

$$\frac{d(c\bar{v})}{dt} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel} v dv + \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int} v dv + 0 \quad (6.7)$$

由 (6.6) 式與 (6.7) 式可知，流量的時間發展不會隨著調整項而改變；且若在同質的情況下（密度為常數），可獲得與 (5.15) 式和 (5.16) 式一致的結果－與時間獨立的穩態平均速度解小於平均的期望速度，因為平均速度受擾動而影響，所以若調整項造成擾動程序，平均速度則會因此而變小。

計算調整項對於速度分散的影響，則將 (6.3) 式乘以 $(v - \bar{v})^2$ 再對 v 做積分可得：

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{adj} (v - \bar{v})^2 dv &= \lambda(1-P) c \left[c \int_0^{\infty} (v - \bar{v})^2 \delta(v - \bar{v}) dv - \overline{(v - \bar{v})^2} \right] \\ &= -\lambda(1-P) c^2 \overline{(v - \bar{v})^2} \leq 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

由 (6.8) 式可知，此調整項可以減少速度分散，達到趨向更小的速度分散程度；這不一定是唯一的影響，因為每一個運動學方程式的修改都可能會改變分佈函數和所有的要素的發展與穩態 (Munjal 和 Pahl^[28])。

七、鬆弛時間奇異點特性分析

本小節利用傅式與拉式轉換和逆轉換以及複數性質等討論模式的奇異點特性，並藉由分析奇異點所在的位置，獲得模式適用的範圍。

定義 7.1：拉普拉式轉換 (Laplace transform) ^[23]

若函數 $f(t)$ 為定義於 $t \geq 0$ 之函數，將 $f(t)$ 乘上 e^{-st} (衰減函數)，並對 t 積分從 $t \sim (0, \infty)$ ，其中實際上 s 常表頻率， t 常表時間，則：

$$(1) \text{ 函數 } f(t) \text{ 的拉式轉換定義為 } L(f(t)) \equiv \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$(2) L[f'(t)] = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0) = s \cdot \hat{f}(s) - f(0)$$

(3) $F(s)$ 之反拉普拉斯轉換為：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{st} ds$$

定義 7.2：傅氏轉換與拉氏轉換的關係 ^[23,24]

拉氏轉換需滿足下列關係式才存在；

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty$$

而傅氏轉換需滿足下列關係式才會存在；

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

其中 α 為正實數；大部分的函數均能滿足拉式的條件關係式，而不一定能滿足傅氏的條件關係式。故若 $t < 0$ 時 $f(t) = 0$ ，並且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ ，則傅氏與拉氏轉換存在下列關係：

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = L[f(t)] \Big|_{s=i\omega} \end{aligned}$$

由於傅立葉轉換是由傅立葉積分之展開，而傅立葉積分為傅立葉級數之極限形式，可得定義 3.1，結合傅氏與拉氏可得：

$$(1) \text{ 傅氏與拉氏轉換 } F[f(t)] = L[(t)] \Big|_{s=i\omega}$$

$$(2) \text{ 傅氏與拉氏逆轉換 } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F[f(t)] d\omega \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} F[f(t)] ds$$

其中 $s = i\omega$ 。

定義 7.3：奇異點 (singular point) ^[29]

一函數 $f(z)$ 的奇異點 (singular point) 即是使 $f(z)$ 為非解析的 z 值，例如：若函數 $f(z)$ 在 $z \rightarrow z_0$ 時為有限，則此 $z = z_0$ 點稱為一般點 (ordinary point)，但是如果函數 $f(z)$ 在 $z \rightarrow z_0$ 時為發散，則此 $z = z_0$ 點稱為奇異點 (singular point)。

假設 T 為一常數的鬆弛時間，接下來將討論從初始函數 $f(x, v, t=0)$ 到某個穩態解 $f(x, v, t)$ 時間發展，所以先前所述之運動方程式中的交互影響項與調整項，因為與 T 無關，所以不考慮，則與 T 相關之運動方程式如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f - f_0}{T} \quad (7.1)$$

再將 (7.2) 式各項做傅式與拉式轉換，可表成如下：

$$-f_k(v;0) - iz \times l_k(v; z) + vik \times l_k(v; z) = -\frac{-l_k(v; z) + f_{0,k}(v, z)}{T} \quad (7.2)$$

其中 (7.2) 式各項可表成如下：

$$l_k(v; z) = \frac{f_k(v;0) + f_{0,k}(v; z)/T}{ikv - iz + T^{-1}} \quad (7.3)$$

$$f(x, v; t) = \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} l_k(v; z) \quad (7.4)$$

$$f(x, v; 0) = \int dk \cdot e^{ikx} f_k(v; 0) \quad (7.5)$$

$$f_0(x, v; t) = \frac{1}{2\pi} \int dz \cdot e^{-izt} \int dk \cdot e^{ikx} f_{0,k}(v; z) \quad (7.6)$$

這裡的轉換變數 iz 如拉普拉斯轉換的定義 7.1 中被標註為 $-s$ 。(7.3) 式可藉由將 (7.2) 式整理即可獲得，其過程如下：

$$\begin{aligned}
 -f_k(v;0) - iz \cdot l_k(v;z) + v \cdot ik \cdot l_k(v;z) &= -\frac{-l_k(v;z) + f_{0,k}(v,z)}{T} \\
 (T^{-1} \cdot iz + ikv) \cdot l_k(v;z) &= f_k(v;0) + \frac{f_{0,k}(v,z)}{T} \\
 l_k(v;z) &= \frac{f_k(v;0) + f_{0,k}(v;z)/T}{ikv - iz + T^{-1}}
 \end{aligned}$$

而 (7.4) 式與 (7.6) 式可由定義 7.2 可知，即對 (7.3) 式做逆轉換，而 (7.5) 式可藉由將 $t=0$ 代入 (7.4) 式獲得，過程如下所示：

$$\begin{aligned}
 f(x,v;0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{ikx} \cdot l_k(v;z) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot l_k(v;z) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{ikx} \cdot f_k(v;0)
 \end{aligned}$$

由 (4.3) 式引入相關於 f_0 的機率函數 $\tilde{f}_0(v)$ 如下：

$$f_0(x,v;t) = c(x,t) \tilde{f}_0(v) \quad (7.7)$$

其中同 (4.4) 式定義

$$\int_0^{\infty} \tilde{f}_0(v) dv = 1 \quad (7.8)$$

根據 (7.4) 式所示，密度函數經由傅立葉—拉普拉斯轉換可表示成：

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int dz e^{-izt} \int dk e^{ikx} v_k(z) \quad (7.9)$$

其中 $v_k(z)$ 與 $\ell_k(v;z)$ 的關係式可表成：

$$\int_0^{\infty} dv \ell_k(v;z) = v_k(z) \quad (7.10)$$

而 $c_k(0)$ 與 $f_k(v;0)$ 的關係式可表成：

$$c_k(0) = \int_0^{\infty} dv f_k(v;0) \quad (7.11)$$

所以，藉由 (7.6) 式、(7.7) 式與 (7.8) 式導出 $v_k(z)$ 如下：

$$\begin{aligned}
 v_k(z) &= \int_0^{\infty} dv \cdot l_k(v; z) \\
 &= \int_0^{\infty} dv \cdot \frac{f_k(v; 0) + f_{0,k}(v; z)/T}{ikv - iz + T^{-1}} \\
 &= \int_0^{\infty} dv \frac{f_k(v; 0) + v_k(z) \tilde{f}_0(x)/T}{ikv - iz + T^{-1}}
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

將 $v_k(z)$ 整理到式子的左邊可得如下：

$$v_k(z) = \frac{\int_0^{\infty} dv \frac{f_k(v; 0)}{ikv - iz + T^{-1}}}{1 - \frac{1}{T} \int_0^{\infty} dv \frac{\tilde{f}_0(v; 0)}{ikv - iz + T^{-1}}} \tag{7.13}$$

定義 7.4：極點 (poles) 與零點 (zeros) ^[30]

若 $T(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$ ，其中 k 為實常數而

- (1) $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是 $T(s)$ 的分母多項式之根，當 $s - p_i = 0$ 時，會使 $T(s) \rightarrow \infty$ 而發散，故稱這些根為極點 (poles)。
- (2) $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 $T(s)$ 的分子多項式之根，當 $s - z_i = 0$ 時，會使 $T(s) = 0$ ，故稱這些根為零點 (zeros)。

欲知 (7.13) 式奇異點 (如定義 7.3 所示) 會發生的位置，可藉由探討使 (7.13) 式分母為零 (定義 7.4 所示之極點) 的可能位置。假設其分母的行為如下：

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_0(v) &= \frac{1}{v_{\max}}, \quad 0 \leq v \leq v_{\max} \\
 &= 0, \quad v_{\max} < v
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

則

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{f}_0(v)}{ikv - iz + T^{-1}} &= 1 - \frac{1}{T} \int_0^{\infty} dv \frac{\frac{1}{v_{\max}}}{ikv - iz + T^{-1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{T} \int_0^{v_{\max}} dv \frac{\frac{1}{v_{\max}}}{ikv - iz + T^{-1}} = 1 - \frac{1}{ikv_{\max} T} \ln \left(\frac{ikv_{\max} - iz + T^{-1}}{-iz + T^{-1}} \right)
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

使 (7.15) 式的結果為零，可得如下：

$$\frac{kv_{\max} - z - iT^{-1}}{-z - iT^{-1}} = \exp(ikv_{\max}T) \quad (7.16)$$

將 (7.16) 式以實虛部分別表示，其中 $z = \omega + i\gamma$ ，可得解如下：

$$\omega(1 - \cos x) + \gamma \sin x = kv_{\max} - T^{-1} \sin x \quad (7.17)$$

$$-\omega \sin x + \gamma(1 - \cos x) = -T^{-1}(1 - \cos x) \quad (7.18)$$

其中 $x = kv_{\max}T$ 。

定義 7.5：克萊姆法則 (Cramer's rule) ^[31]

若一線性系統 $A\vec{x} = \vec{b}$ ，其中 A 為一可反轉 (invertible) $n \times n$ 的矩陣，則 $\vec{x}$ 的構成要素 x_i 為 $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ ，其中 A_i 為其第 i 行 (column) 替換成 $\vec{b}$ 。

利用 (7.16) 式與 (7.17) 式線性組合，使用定義 7.5 求解 ω ，可得其形式為：

$$\omega = \frac{\begin{vmatrix} (kv_{\max} - T^{-1} \sin x) & \sin x \\ -T^{-1}(1 - \cos x) & (1 - \cos x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - \cos x) & \sin x \\ -\sin x & (1 - \cos x) \end{vmatrix}} = \frac{kv_{\max}}{2} \quad (7.19)$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} (1 - \cos x) & (kv_{\max} - T^{-1} \sin x) \\ -\sin x & -T^{-1}(1 - \cos x) \end{vmatrix}}{2(1 - \cos x)} = -\frac{1}{T} + \frac{1}{2}kv_{\max} \cot \frac{x}{2} \quad (7.20)$$

定義 7.6：泰勒級數 (Taylor series) ^[32]

若 f 在 a 點可展開成冪數列，即：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R, \text{ 其中 } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$(1) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(2) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(3) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

利用 (1) 與 (2) 做長除法可得 $\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots$

$$\cot \frac{x}{2} = (\tan \frac{x}{2})^{-1} = [\frac{x}{2} - \frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3 + \dots]^{-1}$$

若將 γ 以泰勒級數的方式展現 (如定義 7.6)，又關係式 $x = kv_{\max}T$ ，則

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{T} + \frac{kv_{\max}}{2} \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots \right]^{-1} \\ &\equiv -\frac{1}{T} + \frac{kv_{\max}}{x} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{T} \left[-1 + 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{kv_{\max}}{2} \right)^2 T \end{aligned} \quad (7.21)$$

承上，若討論 γ 在很小的鬆弛時間 ($T \rightarrow 0$)，則

$$\lim_{T \rightarrow 0} \gamma = 0 \quad (7.22)$$

由前述所式可知，如同 (4.2) 式，(7.13) 式的分子可表成 $\exp(-t/T)$ 的形式，所以當 $T \rightarrow 0$ ， $v_k(z)$ 衰減的現象變得很強烈，然而因為 (7.15) 式、(7.16) 式與 (7.22) 式的關係，所以分母不產生衰減，衰減只由分子造成。

利用定義 7.6 以及 (7.13) 式，當 T 很小時，分子的零點與極點皆會消失，所以沒有衰減，其理論之驗證如下：

$$\begin{aligned} v_k(z) &= \frac{\int_0^\infty dv \frac{f_k(v;0)}{ikv - iz + T^{-1}}}{1 - \frac{1}{T} \int_0^\infty dv \frac{\tilde{f}_0(v)}{ikv - iz + T^{-1}}} \\ &= \frac{T \int_0^\infty dv f_k(v;0) \{1 - [(ikv - iz)T] + \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}}{1 - \int_0^\infty dv \tilde{f}_0(v) \{1 - [(ikv - iz)T] + \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}} \end{aligned} \quad (7.23)$$

所以當 $T \rightarrow 0$ 時，利用 (7.7) 式、(7.13) 式與 (7.23) 式可得：

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow 0} v_k(z) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{T \int_0^\infty dv f_k(v;0) \{1 - [(ikv - iz)T] + \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}}}{1 - \int_0^\infty dv \tilde{f}_0(v) \{1 - [(ikv - iz)T] + \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{T c_k(0) \{1 - [(ikv - iz)T] + \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}}{\{(ikv - iz)T - \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{c_k(0) \{1 - [(ikv - iz)T] + \frac{1}{2}[(ikv - iz)T]^2 + \dots\}}{\{(ikv - iz) - \frac{1}{2}(ikv - iz)^2 T + \dots\}} \\
 &= \frac{c_k(0)}{ikv^0 - iz}
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

由 (7.24) 式可知，當 $T \rightarrow 0$ 時， $v_k(z)$ 只有在分母為零的時候奇異點才會產生；換句話說就是指即使在鬆弛時間很短的情況下，先前所述之速度分配函數 $f(x, v, t)$ 與藉由速度分配函數所導出的密度函數 $c(x, t)$ 均仍適用。

八、建構連續減速模式

基於對先前幾節對於 Prigogine 和 Herman^[17] 深入的解說，本研究在此小結針對 Paveri-Fontana^[18] 對 Prigogine 和 Herman^[17] 模式不足的部分，以放鬆其在交互影響項原本的不適假設；其假設當後車為快車遭遇前車為慢車時，在無法超車的情況下，後車快車的車速瞬時變換為前車慢車的速度，又其假設兩車發生交互影響時，兩車之間的位置夠靠近，而假設兩車在同一位置 x 附近，而忽略車長等空間因素，本小節所建構的模式則是在放鬆此兩條件。

假設與 Prigogine 和 Herman^[17] 模式在同樣條件下，考慮在一個無限長的高速公路且低密度的交通中，假設每一輛車以不同的固定速度行駛且持續維持其期望速度，即超車後必須維持原本的速度的條件，引入 Wagner^[33] 修正 Prigogine 和 Herman^[17] 模式成可描述連續煞車速度與考慮空間影響的模式。

使用 Paveri-Fontana^[18] 所定義的機率密度函數 $g(x, v, w, t)$ ，其中 w 表示渴望速度，而 $g(x, v, w, t)$ 與 $f(x, v, t)$ 、 $f_0(x, v, t)$ 的關係式可表如下：

$$f(x, v, t) = \int_0^\infty dw g(x, v, w, t) \tag{8.1}$$

$$f_0(x, v, t) = \int_0^{\infty} dv g(x, v, w, t) \quad (8.2)$$

則根據 Paveri-Fontana^[18] 與 Wagner^[33] 修改 Prigogine 和 Herman^[17] 的模式可表如下 (8.3) 式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w-v}{T} g \right) \\ &= \iint_{0 \leq v_1 \leq v_3} dv_1 dv_3 (1-P)(v_3 - v_1) f(x + d', v_1, t) g(x, v_3, w, t) \delta(v - \Phi(v_1, v_3)) \\ & - g(x, v, w, t) \iint_{0 \leq v_1 \leq v_3} dv_1 dv_2 (1-P)(v - v_1) f(x + d'', v_1, t) \delta(v_2 - \Phi(v_1, v)) \end{aligned} \quad (8.3)$$

其中

$$d' = \tau v_3 + \frac{1}{c_{\max}} + \frac{1}{2} \frac{(v_3 - v_1)^2}{a} \quad (8.4)$$

$$d'' = \tau v + \frac{1}{c_{\max}} + \frac{1}{2} \frac{(v - v_1)^2}{a} \quad (8.5)$$

$$\Phi(v_3, v_1) = v_3 - a \times \lambda \quad (8.6)$$

$$\Phi(v, v_1) = v - a \times \lambda \quad (8.7)$$

而減速度 $a \geq 0$ ， τ 為反應時間， T 為鬆弛時間， $c_{\max}$ 最擁擠的密度， λ 為間隔時間，其表示從後車速度開始減速，每一次表示所經過的間隔時間， d' 與 d'' 表示後車與前車之間的距離， P 同前幾節定義為超車機率，所以 $(1-P)$ 為不可超車機率。

此模式與先前最大的不同在於交互影響項，交互影響項的第一項表示當後車 v_3 遭遇前車 v_1 ， $v_1 < v_3$ ，在無超車的假設下，後車 v_3 只好減速至與前車 v_1 車速相同的過程，其中利用 d' 表示兩車之間的距離，因為一般其他模式只考慮安全距離 $\tau v + \frac{1}{c_{\max}}$ ，但是這只能在瞬時變化速度下才符合安全的條件，當車速隨時間慢慢減速，則需要考慮減速經過的距離，所以前後車間距離表示如 (8.4) 式時才會發生交互影響，又車速 v 為由 v_3 減速至 v_1 間，速度可能變化經過的速度，以 (8.6) 式表示，會隨著前後車速差以及相對距離而不同，可描述連續減速對 $\frac{\partial g}{\partial t}$ 的增加變化過程。

同理，交互影響項的第二項表示當後車 v 遭遇前車 v_1 ， $v_1 < v$ ，在無法超車的情況下，後車 v 只好減速至與前車 v_1 車速相同的過程，其中利用 d'' 表示兩車之間的距離，所以前後車間距離表示如 (8.5) 式時才會發生交互影響，又車速 v_2 為由 v 減速至 v_1 間，速度可能變化經過的速度，以 (8.7) 式表示，會隨著前後車速差以及相對距離而不同，可描述連續減速

對 $\frac{\partial g}{\partial t}$ 的減少變化過程。

此模式亦可與 Prigogine 和 Herman^[17] 利用積分得到流量守恆式，因為當交互影響項對速度 v 積分時，可得到：

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} dv \iint_{0 \leq v_1 \leq v_3} dv_1 dv_3 (1-P)(v_3 - v_1) f(x+d', v_1, t) g(x, v_3, w, t) \delta(v - \Phi(v_1, v_3)) \\
 & - \int_0^{\infty} dv \iint_{0 \leq v_1 \leq v} dv_1 dv_2 (1-P)(v - v_1) f(x+d'', v_1, t) g(x, v, w, t) \delta(v_2 - \Phi(v_1, v)) \\
 & = \int_0^{\infty} dv_2 \iint_{0 \leq v_1 \leq v_3} dv_1 dv_3 (1-P)(v_3 - v_1) f(x+d', v_1, t) g(x, v_3, w, t) \delta(v_2 - \Phi(v_1, v_3)) \\
 & - \int_0^{\infty} dv_3 \iint_{0 \leq v_1 \leq v_3} dv_1 dv_2 (1-P)(v_3 - v_1) f(x+d', v_1, t) g(x, v_3, w, t) \delta(v_2 - \Phi(v_1, v_3)) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

而其他項則同 Paveri-Fontana^[18] 所示，最終可得到流量守恆，同 (2.7) 式。

九、結論與建議

越來越多學者藉由物理的理論來解釋人類行為，其中車流行為亦是其一研究項目，而車輛就像是原子或者分子，然而描述人類行為與分子或原子的行為不盡相同，所以 Prigogine 與 Herman^[17] 基於動力學理論將其應用到車流研究之中。本研究根據 Prigogine 與 Herman 等等學者研究為基礎，建構一新的模式 (8.3) 式以放鬆在 Prigogine 與 Herman^[17] 上對於有限空間以及速度變化的不適假設，並且依據上風法 (upwind method) 對此模式模擬，觀察其密度變化。

為了使後續研究者可更易了解，本研究對於介觀車流中的車流動力學模式加以介紹，在此方面最早的文獻即為 Prigogine 與 Herman^[17]，然而此文獻很簡要，模式建立之過程及所依據之數學理論都缺乏說明，所以本研究補充了連續方程 (fluid continuity equation)、散度 (divergence)、傅利葉轉換 (Fourier transform)、Dirac Delta 函數、鬆弛時間 (relaxation time)、求解線性微分方程式、摺積 (convolution)、拉普拉式轉換 (Laplace transform)、奇異點 (singular point)、極點 (poles)、克萊姆法則 (Cramer's rule) 與泰勒級數 (Taylor series) 等定義，利用以上定義可使 Prigogine 與 Herman 所建立動態車流模式之過程更容易瞭解；除此之外，對於某些式子之由來也加以詳細推導，例如：(2.12) 式、(2.15) 式、(3.9) 式、(4.1) 式、(5.13) 式、(5.14) 式、(7.3) 式、(7.5) 式、(7.12) 式、(7.15) 式、(7.19) 式與 (7.24) 式；

希冀這也將有助於對於此模式有興趣者容易瞭解，也可練習模式之推導。

介觀模式在應用上因為具有太多變數以及多維度，以至於難以校估以及無法及時求解，所以不適合應用到即時的交通控制上，但是因為可描述介觀與微觀的特性，所以適用於先利用介觀模式將微觀車流特性描述，再推導至成巨觀模式。

此外，本研究中所提到的鬆弛項 (relaxation term) 也可以考慮加入跟車行為的延滯或者其他影響鬆弛時間的因素，而推導出新的鬆弛模式；另外，超車模式也可以加以修正，例如：考慮跟車行為或超車機率等。最後，對於速度分配函數也可以考慮干擾因素或車間距分配函數等；以上都是未來可再加以研究的方向。

參考文獻

1. Hoogendoorn, S. P. and Bovy, P. H. L., "State-of-the-art of Vehicular Traffic Flow Modelling", *Special Issue on Road Traffic Modelling and Control of the Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 215, 2001, pp. 283-303.
2. Reuschel, R., "Fahrzeughwegungen in Der Kolonne Bei Gleichforming Beschleunigtem Order Verzogertem Leitfahrzeug", *Zeit. Oster. Ing. und Arch. Ver.*, Vol. 95, 1950, pp. 52-62, 73-77.
3. Pipes, L. A., "An Operational Analysis of Traffic Dynamics", *Journal of Applied Physics*, Vol. 24, Issue 1, 1953, pp. 274-287.
4. Forbes, T. W., Zagorski, H. J., Holshouser, E. L., and Deterline, W. A., "Reasurement of Driver Reactions to Tunnel Conditions", *Highway Research Board*, Vol. 37, 1958, pp. 345-357.
5. Chandler, R. E., Herman, R., and Montroll, E. W., "Traffic Dynamics: Studies in Car Following", *Operations Research*, Vol. 6, 1958, pp. 165-184.
6. Todosiev, E. P., and Barbosa, L. C., "A Proposed Model for the Driver-Vehicle System", *Traffic Engineering*, Vol. 34, 1964, pp. 17-20.
7. Wiedemann, R., "Simulation des Strassenverkehrsfluses", Technical Report, Institute for Traffic Engineering, University of Karlsruhe (in German), 1974.
8. Lighthill, M. H. and Whitham, G. B., "On Kinematic Waves: II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads", *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 1955, pp. 317-345.
9. Richards, P. I., "Shock Waves on a Highway", *Operation Researches*, Vol. 4, 1956, pp. 42-51.
10. Payne, H. J., "Models for Freeway Traffic and Control", *Mathematical Models of Public Systems*, Vol. 1, 1971, pp. 51-61.
11. Papageorgiou, M., Blosseville, J. M., and Had-Salem, H., "Macroscopic Modelling of Traffic Flow on the Boulevard Peripherique in Paris", *Transportation Research Part B*, Vol. 16, 1982, pp. 125-142.
12. Michalopoulos, P. G., "Vehicle Detection through Video Image Processing: The AUTOSCOPE System", *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, Vol. 40, Issue 1, 1991, pp. 21-29.

13. Buckley, D. J., "A Semi-Poisson Model of Traffic Flow", *Transportation Science*, Vol. 2, Issue 2, 1968, pp. 107-132.
14. Branston, D., "Models of Single Lane Time Headway Distributions", *Transportation Science*, Vol. 10, 1976, pp. 125-148.
15. Botma, H., "State-of-the-Art Report Traffic Flow Models", Research Report, in Dutch, R-78- 40, SWOV, 1978.
16. Prigogine, I. and Andrews F. C., "A Boltzmann-like Approach for Traffic Flow", *Operation Researches*, Vol. 8, 1960, pp. 789-797.
17. Prigogine, I. and Herman, R., *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, American Elsevier, New York, 1971.
18. Paveri-Fontana, S. L., "On Boltzmann-like Treatments for Traffic Flow: A Critical Review of the Basic Model and an Alternative Proposal for Dilute Traffic Analysis", *Transportation Research B*, Vol. 9, 1975, pp. 225-235.
19. Hoogendoorn, S. P. and Bovy, P. H. L., "Modeling Multiple User-class Traffic Flow", *Transportation Research B*, Vol. 34, Issue 2, 2000, pp. 123-146.
20. Helbing, D., "Gas-kinetic Derivation of Navier-Stokes-like Traffic Equations", *Physical Review E*, Vol. 53, Issue 3, 1996, pp. 2366-2381.
21. Currie, I. G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, 2nd Ed., Mc Graw Hill, New York, 2004, pp. 11-13.
22. David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Ed., Prentice Hall, N. J., 1999, pp. 17.
23. 陳自雄、陳子筠，**基礎工程數學**，儒林圖書公司，臺北，民國九十二年。
24. Bracewell, R., *The Fourier Transform and Its Applications*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1986.
25. Prigogine, I., "A Boltzmann-like Approach to the Statistical Theory of Traffic Flow", *Theory of Traffic Flow*, Vol. 10, No. 2, 1962, pp. 180-196.
26. Edwards and Penney, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, 5th ed., Prentice Hall, N. J., 2004.
27. Helbing, D. and Martin T., "Numerical Simulation of Macroscopic Traffic Equations", *Computing in Science & Engineering*, Vol. 1, No. 5, 1999, pp. 89-99.
28. Munjal, P. and Pahl J., "An Analysis of the Boltzmann-Type Statistical Models for Multi-Lane Traffic Flow", *Transportation Researches*, Vol. 3, 1969, pp. 160.
29. Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed., Academic Press, Orlando, FL, 1985.
30. 林昀、冠昱，**電子學(中冊)**，鼎茂圖書出版有限公司，臺北，民國九十二年。
31. Otto Bretscher, *Linear Algebra with Applications*, 2nd Ed., Prentice Hall, N. J., 2001.
32. James Stewart, *Calculus*, 4th Ed., BROOKS:COLE, CA, 1999.
33. Wagner, C., "Successive Deceleration in Boltzmann-like Traffic Equations", *Physical Review E*, Vol. 55, No. 6, 1997, pp. 6969-6978.

