

波浪折射淺化及繞射數學模式研究

計畫主持人

研究人員：

張	金	機
張	瀚	達
何	良	勝
蘇	青	和
江	中	權
陳	錫	奎
陳	明	宗

波浪折射淺化及繞射數學模式研究

摘要

本研究分為三部分；第一部分係以數值方法利用電腦模擬波浪由深海進入淺水區，受地形及水流交互作用所產生變形，即波高、波長及前進路線之改變現象，所謂折射及淺化現象。

第二部分是利用數值方法探討波浪通過各種不同防波堤配置，並考慮不同之防波堤反射係數港內外波浪分佈情形，即所謂波浪繞射現象。

第三部分則是配合研究結果利用電腦繪圖機繪製海底等高線及等波高線等，使整個研究成果均能快速以圖形顯現出來。

本研究由於本所電腦設備主機記憶容量不足，故僅能著重於較基本之研究，俟本所大型電腦裝置完成後再加以推展以便從事實際實題計算。

壹、波浪折射與淺化

一、前言

以往在海岸工程規劃設計波浪研究上，大部份僅考慮波浪受地形變化之影響，甚少將海上水流可能影響波浪特性加以探討，本文主要在研究波浪受地形及水流 (Current) 交互作用所產生之變形，即波高、波長之改變及前進路線之折射現象。

波浪折射在海岸工程規劃設計上為極重要之一環，以往海岸工程師均假設海岸等深線相當平滑，等深線間近似平行，利用 Snell's Law 用人工繪製波浪折射圖 (Refraction Diagram)，此法非常費人力，且只能對部份週期進行繪製，無法對全部波譜繪製。

有關波浪受地形及水流作用之理論研究方面 Longuet-Higgins and Stewart (1960, 1961) 以攝動法 (Perturbation Method) 推導波與流同向或逆向作用 (flux) 觀念推導能量方程式，以輻射應力 (Radiation Stress) 觀念解釋波浪與水流作用間之能量觀念。

Whitham (1962) 以 Stokes 二次解之波浪與水流作用之流速勢 (Velocity Potential)，推導質量動量與能量方程式後，有關波浪與水流作用之研究有更進一步之發展，而後 Jonsson et al (1971) 及黃 (1975) 分別利用 Stokes 二次及三次解以數值計算研究波浪及水流同向或逆向作用後波長與波高變化情況。

有關波浪受地形與水流三維空間作用之研究，較早有 Garrett (1967) 以敘述方式說明浪與流之波動密度 (Wave Action Density E/ω) 沿波向線 (Wave Ray) 方式保持不變，Jonsson (1978) 以 Stokes 二次解之流速勢並考慮浪與流作用之水位下降印證 Garrett

的看法，此種能量關係即波浪與水流作用後，波動密度不減方程式 (Conservation equation of Wave Action)，而 Phillips (1977) 亦以輻射應力觀念導出能量方程式與波動不減方程式獲得同樣之結果，另外 Skovgaard & Jonsson (1976) 及 Jonsson & Wang (1980) 亦導出波峯質量、動量、能量渦與地形等不減方程式，以數值法解波浪之波長、波高及折射角、與水流之流速、流向、水深等。

波浪受地形與水流作用理論解法主要有下列兩種：

(一)攝動法 (Perturbation Method)。

(二)能量通率法 (Energy Flux Method)。

本研究主要理論分析，探討合理之數學模式，求得波浪受地形及水流交互作用後之波向線、波高、波長變化情形，先着手於簡單地形印證，進而應用於實際地形上，以提供海岸工程規劃設計者省時省力之計算程式。

二、理論分析

假設流體為不可壓縮，波浪與水流為非旋性 (Irrotational)，地形與水流均為緩變形 (Slowly Varying)，流向保持不變，流速垂直方向均勻分佈，忽略海底磨擦能量損失及海底地形反射現象，茲利用攝動法及能量通率法之推導分別介紹如下：

(一)攝動法 (Perturbation Method)

流體控制方程式流速勢 ϕ 滿足 Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -h < z < 0 \quad \dots\dots\dots (1-1)$$

邊界條件為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (1-2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (1-3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \quad z = -h(x, y) \dots (1-4)$$

令 μ 為一極微小量 $\mu = 0 \quad (v h / k h) \ll 1$

$$\bar{x} = \mu x \quad \bar{y} = \mu y \quad \bar{t} = \mu t$$

則 (1-1, 3, 4)

$$\mu^2 (\phi_{\bar{x}\bar{x}} + \phi_{\bar{y}\bar{y}}) + \phi_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) < z < 0 \dots (1-5)$$

$$\mu^2 \phi_{\bar{z}\bar{z}} + g \phi_z = 0 \quad z = 0 \dots (1-6)$$

$$\phi_z = -\mu^2 (\phi_{\bar{x}} h_{\bar{x}} + \phi_{\bar{y}} h_{\bar{y}}) \quad z = -h(\bar{x}, \bar{y}) \dots (1-7)$$

將流速勢 ϕ 展開為

$$\phi = [\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + (-i\mu)^2\phi_2 + \dots] e^{is/\mu}$$

$$\text{式中 } \phi_j = \phi_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \quad S = S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$$

$$\mu^2 \phi_{\bar{z}\bar{z}} = -(i\mu)^2 \phi_{\bar{z}\bar{z}}$$

$$\begin{aligned} &= -\{S^2_{\bar{z}\bar{z}}[\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + (-i\mu)^2\phi_2 + \dots] \\ &\quad + (i\mu)[S_{\bar{z}\bar{z}}(\phi_0 + (-i\mu)^2\phi_2 + \dots)] \\ &\quad + 2S_{\bar{z}}[\phi_0_{\bar{z}} + (i\mu)\phi_{1\bar{z}} + \dots] + (i\mu)^2 \\ &\quad [\phi_0'_{\bar{z}\bar{z}} + \dots]\} e^{is/\mu} \dots (1-9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \phi &= -(-i\mu)^2 \{[\bar{\nabla}^2 \phi_0 + (-i\mu)\bar{\nabla}^2 \phi_1 + \dots] \\ &\quad + [\bar{\nabla} \phi_0 + (-i\mu)\bar{\nabla} \phi_1 + \dots] \frac{i\bar{\nabla} S}{\mu} \\ &\quad + \frac{1}{(-i\mu)} [\bar{\nabla} \phi_0 \cdot \bar{\nabla} S + (-i\mu)\bar{\nabla} \\ &\quad (\phi_1 \bar{\nabla} S) + \dots] + (\frac{i\bar{\nabla} S}{\mu})^2 [\phi_0 + (-i\mu) \\ &\quad \phi_1 + \dots]\} e^{is/\mu} \dots (1-10) \end{aligned}$$

$$\vec{K} = \bar{\nabla} S, \quad \omega = S_{\bar{t}}$$

由 (1-5) 至 (1-7) 式可得 $0(-i\mu)^0$ 為

$$\phi_{0zz} - K^2 \phi_0 = 0 \quad -h < \bar{z} < 0 \quad \dots\dots\dots (1-11)$$

$$\phi_{0zz} + \frac{\omega^2}{g} \phi_0 = 0 \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (1-12)$$

$$\phi_0 z = 0 \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (1-13)$$

由 $0(-i\mu)^1$ 為

$$\phi_{1zz} = -K^2 \phi_1 = \vec{K} \cdot \bar{\nabla} \phi_0 + \bar{\nabla} \cdot (\vec{K} \phi_0),$$

$$-h < z < 0 \quad \dots\dots\dots (1-14)$$

$$\phi_{1z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1 = -[\omega \phi_{0\bar{z}} + (\omega \phi_0)_{\bar{z}}] \quad z = 0 \quad (1-15)$$

$$\phi_{1z} = \phi_0 \vec{K} \cdot \bar{\nabla} h \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (1-16)$$

由 $0(-i\mu)^0$ 可解得

$$\phi_0 = \frac{igA}{\omega} \frac{\text{Cosh } k(z+h)}{\text{Cosh } kh} \quad \dots\dots\dots (1-17)$$

$$\text{式中 } \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = gk \tanh kh$$

利用 Green's formula 及 Leibniz's Rule 由 ϕ_0 求得 ϕ_1

$$\int_{-h}^0 dz [\phi_0 (\phi_{1zz} - K^2 \phi_1) - \phi_1 (\phi_{0zz} - K^2 \phi_0)]$$

$$= [\phi_0 \phi_{1z} - \phi_1 \phi_{0z}]_{-h}^0 \quad \dots\dots\dots (1-18)$$

$$\int_{-h}^0 dz \phi^2 [(\vec{K} \cdot \bar{\nabla} \phi_0) + \bar{\nabla} \cdot (\vec{K} \phi_0)]$$

$$= -\{\phi_0 [\omega \phi_{0\bar{z}} - (\omega \phi_0)_{\bar{z}}]\}_{z=0} - \{\phi_0^2\}_z$$

$$= hK \cdot \bar{\nabla} h \quad \dots\dots\dots (1-19)$$

Leibniz's Rule

$$D \int_a^b f dz = \int_a^b Df dz + (Da) f_z = a - (Db) f_z = b$$

$$\nabla \cdot \int_{-h}^0 dz (\vec{K} \phi_0^2) + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\omega \phi_0^2]_{z=0} = 0$$

$$\dots\dots\dots (1-20)$$

$$\text{將 } E = \frac{1}{2} \rho g A^2 \cdot Cg = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

$$\phi_0 = - \frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cdot \omega^2 = gk \tanh kh \text{ 代入得}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\frac{E}{\omega} \bar{C}_g \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1-21)$$

如考慮海流流速為 $\vec{U}$ 時，則(1-21)式可改寫為

$$\bar{\nabla} \cdot \left((\vec{U} + \vec{C}_g) - \frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\sigma} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1-22)$$

即以流速與波速合量 $\vec{U} + \vec{C}_g$ 代替(1-21)式之波速 $\vec{C}_g$

以波與流交互作用後之波動密度 $\frac{E}{\sigma}$ 代替 $\frac{E}{\omega}$ ，如波浪

為穩定運動時 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 則(1-21)及(1-22)

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\frac{E}{\omega} \bar{C}_g \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1-23)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \left[\frac{E}{\sigma} (\vec{U} + \vec{C}_g) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (1-24)$$

因 $\bar{\nabla}$ 可寫成為 $\mu \nabla$ ，故(1-23)及(1-24)式可改寫為

$$\nabla \cdot \left(\frac{E}{\omega} \bar{C}_g \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1-23)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{E}{\sigma} (\vec{U} + \vec{C}_g) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (1-24)$$

群波速度 $\vec{C}_g$ 與波向線為切線，利用 Gause Divergence

Theorm 在 X_0 至 X 兩斷面間能量損失不予考慮，則沿兩波向

線所構成之控制體(Control Volume)如圖 1-1

1-1 積分 $d\sigma$ 。輸入之能量等於 $d\sigma$ 輸出能量即

$$E C_g dn = (E C_g dn)_0 = \text{Constant} \quad (1-25)$$

沿波向線波高變化為

$$\frac{A}{A_0} = \left[\frac{(C_g dn)_0}{C_g dn} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (1-26)$$

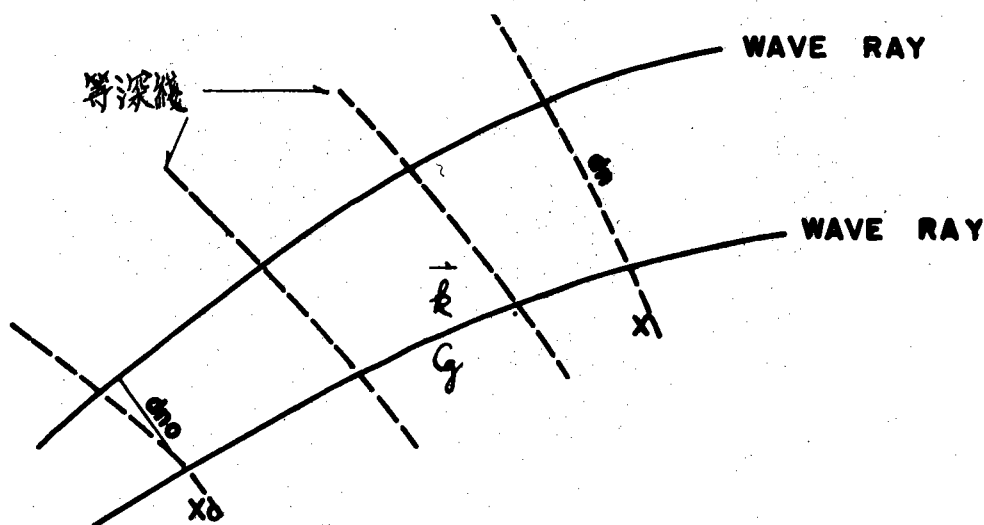


圖 1-1 波向線構成之控制體

同理波浪受地形及水流影響產生之變化可利用 (24) 式沿兩條 $(\vec{C}_g + \vec{U})$ 構成之跡線控制體 (如圖 1-2) 積分求得

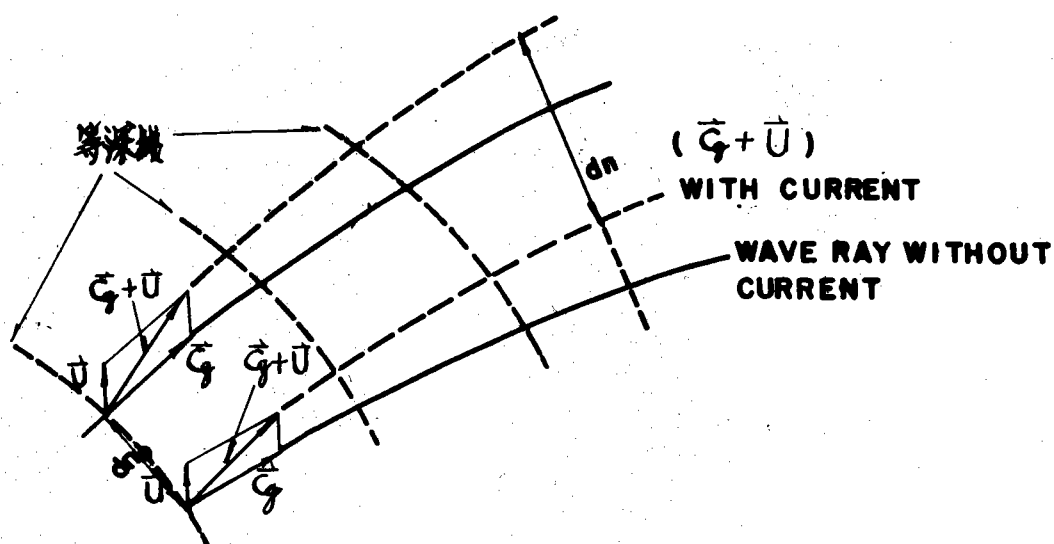


圖 1-2. $(\vec{C}_g + \vec{U})$ 跡線構成之控制體

$$\frac{A'}{A_0} = \left[\frac{(U + Cg)_0}{(U + Cg)} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_0} \cdot \frac{dn_0}{dn} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (1-27)$$

波浪行進之路徑為 $y(x)$ 則在 $x-y$ 平面上，波向線之坡度為

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{S_y}{S_x}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{S_y}{S_x} \right)^2 = \frac{K^2}{S_x^2} \dots\dots\dots (1-28)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{ky'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \frac{d}{dx} (S_y)$$

$$\frac{d}{dx} (S_y) = S'_y$$

$$= S_{yx} \frac{dy}{dx} + S_{yy} \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{S_{yx} S_x + S_{yy} S_y}{S_x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{ky'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \sqrt{1+y'^2} \frac{\partial k}{\partial y} \dots\dots\dots (1-29)$$

(1-29) 式為非線性微分方程式，如果起始點為已知點，

則波浪進行之弧線可利用數值解法求得。

(二) 能量通率法 (Energy Flux Method)

1. 波長變化

對一週期性之波浪而言，根據 Phillips (1966) 波浪與水流作用後其絕對角頻率 (Absolute Angular Frequency) ω 與實質角頻率 (Intrinsic Angular Frequency) 關係為

$$\sigma = \omega + \vec{k} \cdot \vec{U}$$

式中 $\vec{k} = (k \cos \alpha, k \sin \alpha)$ ， U 為水流速度

由 (1-30) 式中可得群波速度關係式為

$$\vec{C}_{ga} = \frac{\partial \sigma}{\partial \vec{k}} = \vec{C}_{gr} + \vec{U} \quad \dots\dots\dots (1-31)$$

(1-31) 式以卡式直角座標表示如圖 1-3

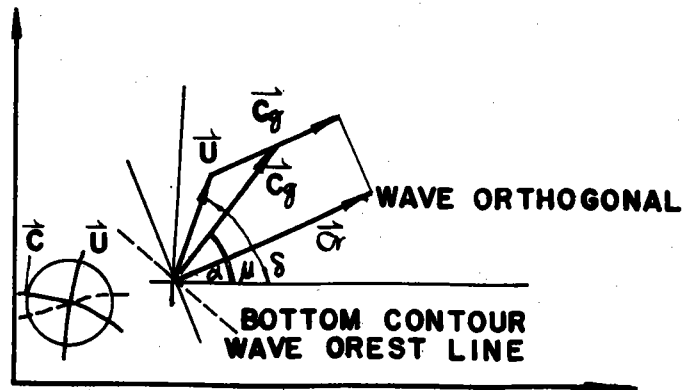


圖 1-3. 波浪相對與絕對速度關係圖

由 (1-30) 式可得

$$C_a = C_r + U \cos(\delta + \alpha) \quad \dots\dots\dots (1-32)$$

$$\text{上式中 } C_r^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \quad \dots\dots\dots (1-33)$$

由 (1-32) 及 (1-33) 式對水深 h 微分得

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dh} = \frac{L}{h} & \frac{\left(-\frac{C_o L_o}{h} q^* \cos(\delta - \alpha) [2 + G] \right)}{\left\{ C_a [1 + G] + \frac{C_o L_o}{h} q^* \cos \right.} \\ & \left. + C_a G + 2 C_o L_o q^* \sin(\delta - \alpha) \frac{d\alpha}{dh} \right\}} \quad \dots\dots\dots (1-34) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } q^* = \frac{h \cdot U}{C_o L_o} \quad G = \frac{2kh}{\sinh 2kh}$$

$$\frac{dC_a}{dh} = \frac{C_a}{h} \frac{(A + B + C \cdot \frac{d\alpha}{ds})}{D} \quad \dots\dots\dots (1-35)$$

$$\text{式中 } A = - \frac{C_o L_o}{h} q^* \cdot \cos(\delta - \alpha) [2 + G]$$

$$B = C_a \cdot G$$

$$C = 2 C_o L_o q^* \sin(\delta - \alpha) \frac{d\alpha}{dh}$$

$$D = C_a [1 + G] + \frac{C_o L_o}{h} q^* \cos(\delta - \alpha) [1 + G]$$

當波浪發生折射時，其波垂線方程式為

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{C_a} \left[\sin \alpha \frac{\partial C_a}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial C_a}{\partial y} \right] \dots\dots\dots (1-36)$$

將(1-35)式代入(1-36)式得

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\{ (A+B) \cdot \left[\sin \alpha \frac{\partial h}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} \right] \}}{\{ h \cdot D + C \cdot \left[\cos \alpha \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) - \sin \alpha \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \}} \dots\dots (1-37)$$

利用上式用數值解法可逐步推算波浪折射角度、波長與波速變化。

2. 波高變化

由伯努利方程式 (Bernoulli's Equation)

$$\frac{p}{\rho} = \phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g z = 0 \dots\dots\dots (1-38)$$

波浪與海流交互作用後之波形與流速勢為

$$\eta(x, y, t) = a \cos \theta + a^2 \frac{1}{2} k \coth kh$$

$$\left(1 + \frac{3}{2 \sinh^2 kh} \right) \cos 2\theta \dots\dots\dots (1-39)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \{ (U \cos \delta - B \cos \alpha) x + (U \sin \delta - B \sin \alpha) y \} + \phi - \left\{ \frac{1}{2} U^2 + B - B U \cos(\delta - \alpha) \right\} t \quad \dots\dots\dots (1-40)$$

$$\text{式中 } \phi(x, y, z, t) = \frac{a \omega \cosh k(z+h)}{k \sinh kh} \sin \theta + a^2 \frac{3}{8} \frac{\omega}{\sinh^4 kh} \cosh 2k(h+z) \sin 2\theta$$

$$\theta = k \cos \alpha \cdot x + k \sin \alpha \cdot y - \sigma t$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{gkh}{h \sinh 2kh} a^2 \quad B = \frac{1}{2} \frac{g}{h C_r} a^2$$

取 $\vec{C}_r$ 方向波浪平均週期能量通率

$$E_{MWL, \alpha} = \int_h^\eta \left\{ \left[P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho (\nabla \phi)^2 \right] \left[U \cos(\delta - \alpha) - B + \phi_x \cos \alpha + \phi_y \sin \alpha \right] \right\} dz \quad \dots\dots\dots (1-41)$$

(1-41) 式表示以平均水位為基準之能量通率，但當水深漸漸淺時，產生水位下降 (Set down) 現象，因之若考慮以平均能量為基準時，可得

$$\begin{aligned} E_{MEL, \alpha} &= E_{MWL, \alpha} - \rho g h U \cos(\delta - \alpha) \Delta h \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \left[\left(1 + \frac{U \cos(\delta - \alpha)}{C_r} \right) (U \cos(\delta - \alpha) + C_{gr}) \right] \quad \dots\dots\dots (1-42) \end{aligned}$$

式中 Δh 為水位下降

$$\Delta h = \frac{U^2}{2g} + \frac{a^2 G}{4h} - \frac{a^2}{2h C_r} U \cos(\delta - \alpha)$$

若考慮波向間距離變化，且忽略能量損失時，則

$$\overline{[E_{MEL} \cdot \ell]}_n = \overline{[E_{MEL\alpha} \cdot \ell]}_{n+1} \dots\dots\dots (1-43)$$

式中 ℓ 為兩波向距離，可由 Wave Intensity equation 求得

$$\frac{d^2 \ell}{ds^2} - P \frac{d\ell}{ds} + q\ell = 0 \dots\dots\dots (1-44)$$

$$\text{式中 } P = \frac{1}{C_a} \left[\cos \alpha \cdot \frac{\partial C_a}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial C_a}{\partial y} \right]$$

$$q = \frac{1}{C_a} \left[\sin^2 \alpha \frac{\partial^2 C_a}{\partial y^2} - 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 C_a}{\partial x \partial y} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right]$$

三、數值分析

根據上節理論分析結果所求得波向線有關公式，以數值解法分析如下：

(一)攝動法 (Perturbation Method)

先將(1-27)式改寫為

$$k y'' + (y' + y'^3) \frac{\partial k}{\partial x} = (1 + y'^2)^2 \frac{\partial k}{\partial y} \dots\dots (1-45)$$

以有限差分法 (Finite Difference Method) 代入(1-45)式

$$k \left[\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} \right] + \left[\frac{-y_i + y_{i+1}}{\Delta x} + \left(\frac{-y_i + y_{i+1}}{\Delta x} \right)^3 \right] \frac{\partial k}{\partial y} = \left[1 + \left(\frac{-y_i + y_{i+1}}{\Delta x} \right)^2 \right]^2 \frac{\partial k}{\partial y} \quad (1-46)$$

座標系統如圖 1-4

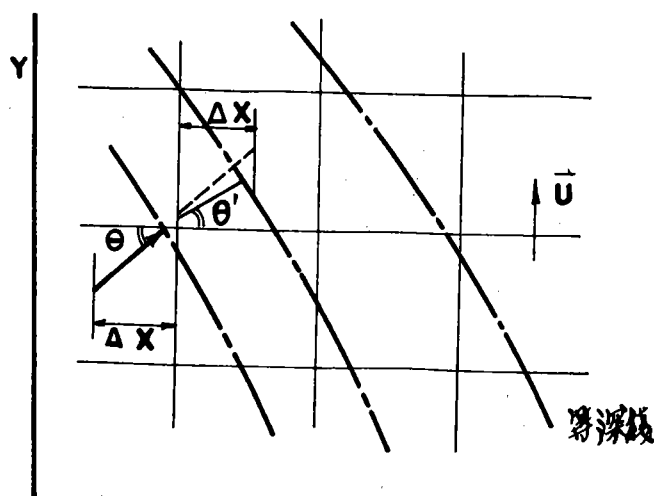


圖 1-4. 有限差分法座標系統

(1-46) 式中 $\frac{\partial k}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial k}{\partial y}$ 可用擴散關係式 (Dispersion

Relationship) 微分求得

$$\sigma^2 = (\omega - U k \cos \alpha)^2 = g k \tanh k h$$

$$k h = \tanh^{-1} \left\{ (\omega - U k \cos \alpha) / g k \right\}$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{1}{k} \left\{ \ln \left[1 + \frac{(\omega - U k \cos \alpha)^2}{g k} \right] - \ln \left[1 - \frac{(\omega - U k \cos \alpha)^2}{g k} \right] \right\} \dots\dots\dots (1-47)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dx} \frac{\partial k}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{dh}{dk} \frac{\partial k}{\partial y}$$

(1-47) 式分別對 x 及 y 微分得

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2k} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(\omega + U k \cos \alpha)^2}{g k}} \left[\frac{-2gk(\omega - U k \cos \alpha)}{(gk)^2} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{U \cos \alpha - (\omega - U k \cos \alpha)^2 g}{gk} \right] \right\} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{1}{1 - \frac{(\omega - U k \cos \alpha)^2}{g k}}$$

$$\left\{ \frac{2 g k (\omega - U k \cos \alpha) U \cos \alpha + (\omega - U k \cos \alpha)^2 g}{(gk)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} \} - \frac{1}{2k^2} \{ \ell_n \left[1 + \frac{(\omega - U k \cos \alpha)^2}{gk} \right] - \ell_n$$

$$\left\{ 1 - \frac{(\omega - U k \cos \alpha)^2}{gk} \right\} \frac{\partial k}{\partial x} \dots\dots\dots (1-48)$$

$$\text{令 } S = \frac{2 g k \sigma U \cos \alpha - \sigma^2 g}{(gk)^2}$$

$$R_1 = 1 + \frac{\sigma^2}{gk}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{gk}$$

則 (1-48) 式可改寫成

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2k} \left\{ -S \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{k} (\ell_n R_1 - \ell_n R_2) \right\} \frac{\partial k}{\partial x}$$

..... (1-49)

同理

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{2k} \left\{ -S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{k} (\ell_n R_1 - \ell_n R_2) \right\} \frac{\partial k}{\partial y}$$

..... (1-50)

設海底任意點水深可以 $h(x, y) = E_1 + E_2 x + E_3 y + E_4 xy$ 表示，
E 為常數，可以鄰近四點水深資料以最小二乘方法求得，設實際水深 h ，
與理論方程式所求得水深 $E_1 + E_2 x_1 + E_3 y_1 + E_4 x_1 y_1$ 誤差平方和為
T，則

$$T = \sum_{i=1}^4 \left[h_i - (E_1 + E_2 x_i + E_3 y_i + E_4 x_i y_i) \right]^2$$

..... (1-51)

為使T值最小(51)分別對 E_1 , E_2 , E_3 及 E_4 微分, 令其等於0
 , 可得四個聯立方程式, 以解四個E未知數, 以矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} 4 & \Sigma x_1 & \Sigma y_1 & \Sigma x_1 y_1 \\ & \Sigma x_1 & \Sigma x_1 y_1 & \Sigma x_1^2 y_1 \\ & & \Sigma y_1^2 & \Sigma x_1 y_1^2 \\ & & \text{Sym} & \Sigma x_1^2 y_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma h_1 \\ \Sigma h_1 x_1 \\ \Sigma h_1 y_1 \\ \Sigma h_1 x y_1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1-52)$$

將以上各式代入(1-46)式, 利用高氏法(Gauss Method)由已知入射波向線起始點 y_{i-1} 及 y_i 求 y_{i+1} , 先令 $y_{i-1} = y_2$

$y_i = y_1$, $y_{i+1} = y$ 代入(1-46)式改寫成

$$f = k \left\{ \frac{y_2 - 2y_1 + y}{(\Delta x)^2} \right\} + \left\{ \frac{y - y_1}{\Delta x} + \left(\frac{y - y_1}{\Delta x} \right)^3 \right\} \frac{\partial k}{\partial x} \\ - \left\{ 1 + \left(\frac{y - y_1}{\Delta x} \right)^2 \right\}^2 \frac{\partial x}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (1-53)$$

(1-53) 式對y微分將二次以上忽略得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} \left\{ \frac{y^2 - 2y_1 + y}{(\Delta x)^2} + \frac{k}{(\Delta x)^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\Delta x} + 3 \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{y - y_1}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{\Delta x} \right\} - \frac{\partial k}{\partial y} \left[1 + \left(\frac{y - y_1}{\Delta x} \right)^2 \right] \right. \\ \left. \left(\frac{y - y_1}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} \right\} \quad \dots\dots\dots (1-54)$$

程式計算主要步驟為

1. 依實測地形建立格網, 將格點高程及流速以兩個二維排陣(Arrays)輸入電腦。
2. 求波向線即將通過網格之海底地形代表方程式。

$$h(x, y) = E_1 + E_2 x + E_3 y + E_4 xy \quad \circ$$

3. 利用波浪擴散關係 (Wave Dispersion Relation) 求波數
(Wave Number) k 。

4. 計算 $\frac{\partial k}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial k}{\partial y}$ 。

5. 計算波向線在 x 向前進 Δx 時之 y 座標。

6. 計算波向線折射後之入射角 $\theta_{ref} = \tan^{-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ 如果所求得

之入射角與原入射角相差太大時，必須以 θ_{ref} 代入原入射角，因為 $\vec{V}$
與 $\vec{K}$ 間夾角 α 係為計算點之夾角，重複 3 之步驟。

計算流程圖如圖 1—5

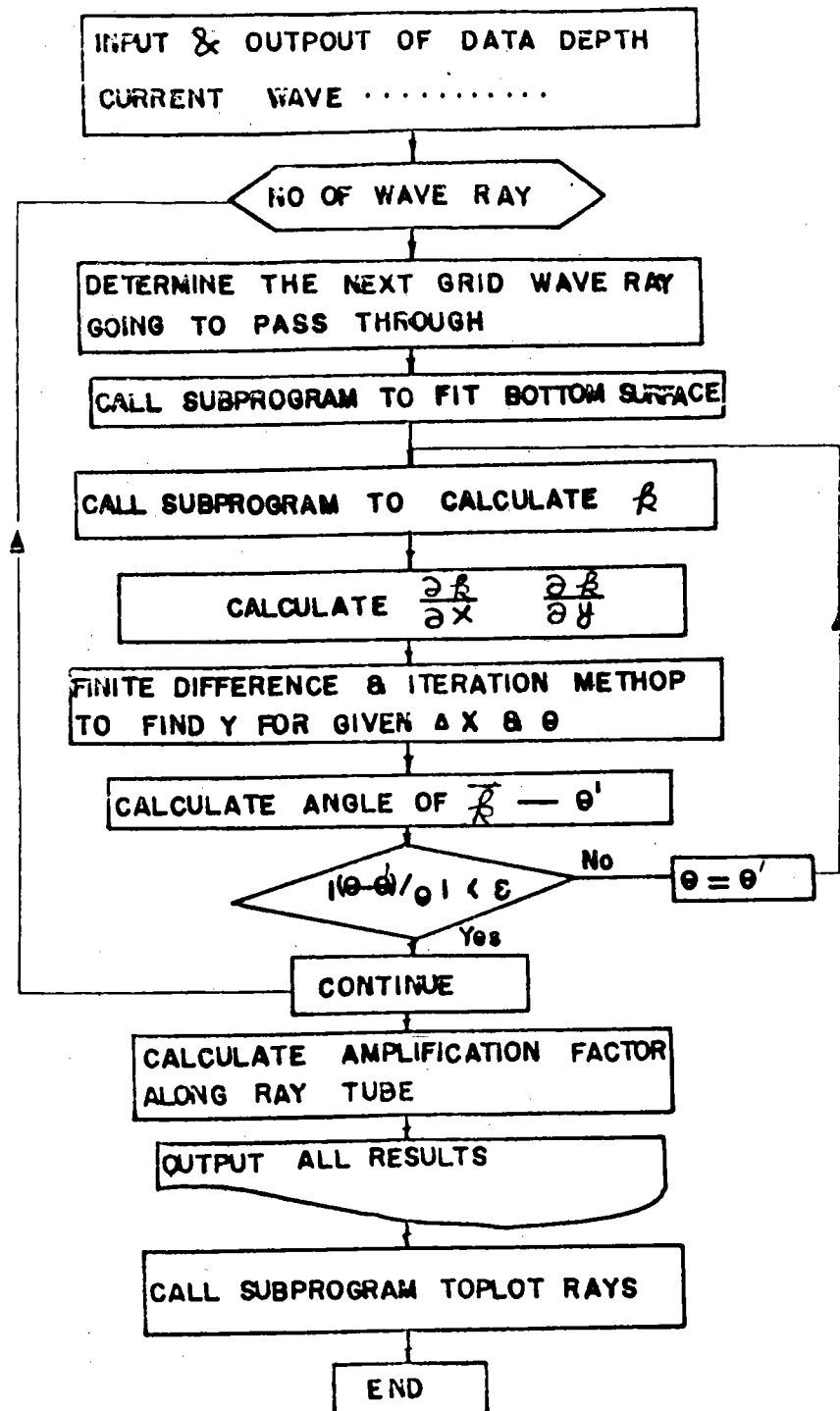


圖 1-5. 攝動法數值計算流程圖

(二) 能量通率法 (Energy flux Method)

根據理論分析結果，由已知點波浪、水流條件以逐步推算法依次求得波浪折射後之路徑、波長、波高等，其步驟如下：

1. 由深海已知點 (x_n, y_n) 推算起，該點之波浪特性如波長、波高、波速、波向與海流之流向，無因次流量等為已知，由此點起受地形與水流作用。

2. 取波垂線方向極短之距離 ΔS_n ，則次一點 (x_{n+1}, y_{n+1}) 之座標，折射角 α_{n+1} 為

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_n &= \Delta S_n \cos \alpha_n \\ \Delta y_n &= \Delta S_n \sin \alpha_n \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta x_n \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta y_n \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_n \Delta S_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-55)$$

式中

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_n = \frac{\{(A_n + B_n) \left[\sin \alpha_n \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_n - \cos \alpha_n \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_n\right]\}}{\{h_n \cdot D_n + C_n \left[\cos \alpha_n \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_n - \sin \alpha_n \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_n\right]\}} \dots\dots\dots (1-56)$$

A_n, B_n, C_n 及 D_n 可由 (1-35) 式求得， $h_n \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_n$ ，

$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_n$ 可由水深函數或由已知水深網格圖求得如圖 1—6

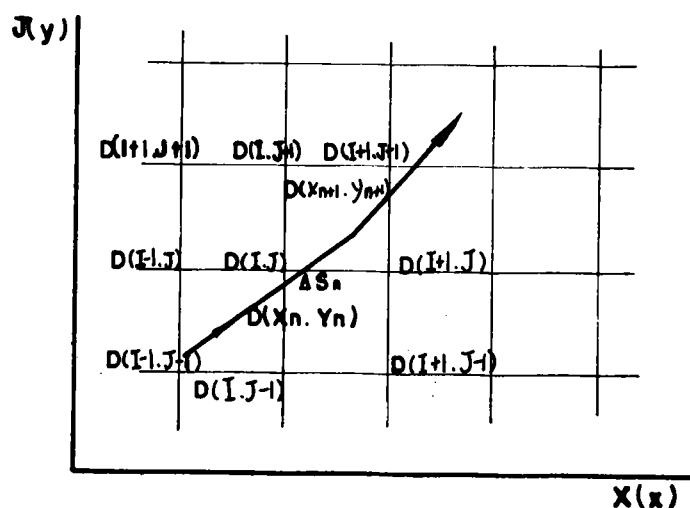


圖 1-6. 水深網格圖

$$\begin{aligned}
 h(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y) &= h(x_n, y_n) + \Delta x h_x(x_n, y_n) \\
 &\quad + \Delta y h_y(x_n, y_n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} h_{xx}(x_n, y_n) + \Delta x \cdot \Delta y \cdot h_{xy}(x_n, y_n) \\
 &\quad + \frac{(\Delta y)^2}{2} h_{yy}(x_n, y_n) \dots\dots\dots (1-57)
 \end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned}
 h_x &= 0.5 [h(I+1, J) - h(I-1, J)] \\
 h_y &= 0.5 [h(I, J+1) - h(I, J-1)] \\
 h_{xx} &= h(I-1, J) - 2h(I, J) + h(I+1, J) \\
 h_{xy} &= 0.25 [(I+1, J+1) - h(I-1, J+1) - h(I+1, J-1) + h(I-1, J-1)] \\
 h_{yy} &= h(I, J+1) - 2h(I, J) + h(I, J-1)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} h_x \\ h_y \\ h_{xx} \\ h_{xy} \\ h_{yy} \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots (1-58)$$

3. 當 (x_{n+1}, y_{n+1}) 點之水深 h_{n+1} ，折射角 α_{n+1} 求得後，則波長

L_{n+1} ，波速 $C_{\alpha, n+1}$ 可以下式求得。

$$\frac{L_{n+1}}{L_0} = \left(\frac{h_{n+1}}{L_0} \right)^{-1} q * \cos(\delta - \alpha)_{n+1}$$

$$= \left\{ \left(\frac{L_{n+1}}{L_0} \right) \tanh \left[2\pi \frac{h_{n+1}}{L_0} \left(\frac{L_{n+1}}{L_0} \right)^{-1/2} \right] \right\}^{1/2}$$

.....(1-59)

$$C_{\alpha, n+1} = \left\{ \frac{g \cdot L_{n+1}}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi h_{n+1}}{L_{n+1}} \right) \right\}^{1/2} + \frac{C_0 L_0}{h_{n+1}} q * \cos(\delta - \alpha)_{n+1}$$

.....(1-60)

4. 將 α_{n+1} ， L_{n+1} 及 $C_{\alpha, n+1}$ 代入 (1-43) 及 (1-44) 可求得對應點之波高、數值計算之流程圖如圖 1-7。

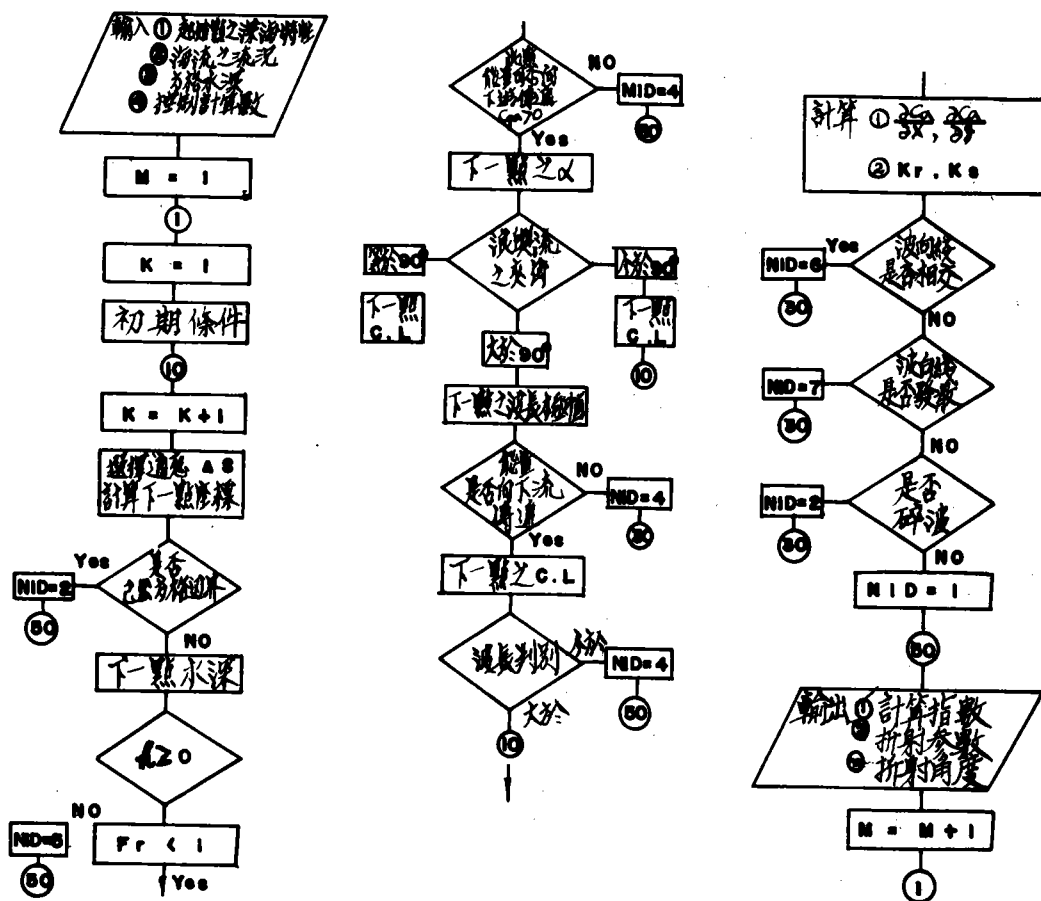


圖 1-7. 能量通率波數值計算流程圖

四、計算結果與討論

(一)攝動法計算結果

1. 為印證計算機程式，首先利用對稱之海底地脊 (Submarine Ridge) 其等深線互相平行，波浪入射角為 45° ，如圖 1—8。當波浪由深到淺，入射角逐漸減小，再由淺到深入射角又逐漸增大，波浪折射線與地形一樣成對稱性變化，此印證程式正確無誤，其次為了解海流對波浪折射的影響，以 2 m/sec 之流速，流向分別為 90° 及 180° 流向與波向夾角 $\alpha < 90^\circ$ 時，海流使波長增加，波數減小，波速加快，則加大折射程度。而當 $\alpha > 90^\circ$ 時，相反的，波長受擠，波速減慢，折射程度較小。
2. 圓形等深線，當波浪平行 x 軸入射，則波向線均向零等深線集中，且成對稱型，若以 3 m/sec 恒流 45° 流向作用於上述條件，則波浪折射程度加大，上游面折射較下游面大，因上游面流向與波向夾角有逐漸減小之趨勢，波長被拉長，而下游面夾角逐漸增大，但仍小於 90° ，故雖被拉長，但程度較小。如圖 1—9。
3. 圓形等深線、波向線與 x 軸成 30° 時，純受地形折射與受地形、海流交互作用結果如圖 1—10 及圖 1—11。波浪受地形與海流作用後，沿兩波向線波高變化情形，如圖 1—12。
4. 以台中港平緩地形作為輸入條件，利用 N 向及西向波浪，週期 8 秒，潮流速度分別為 1 m/sec 向西南， 1 m/sec 向東北及無潮汐輸入繪成繞射圖如圖 1—13 及圖 1—14。

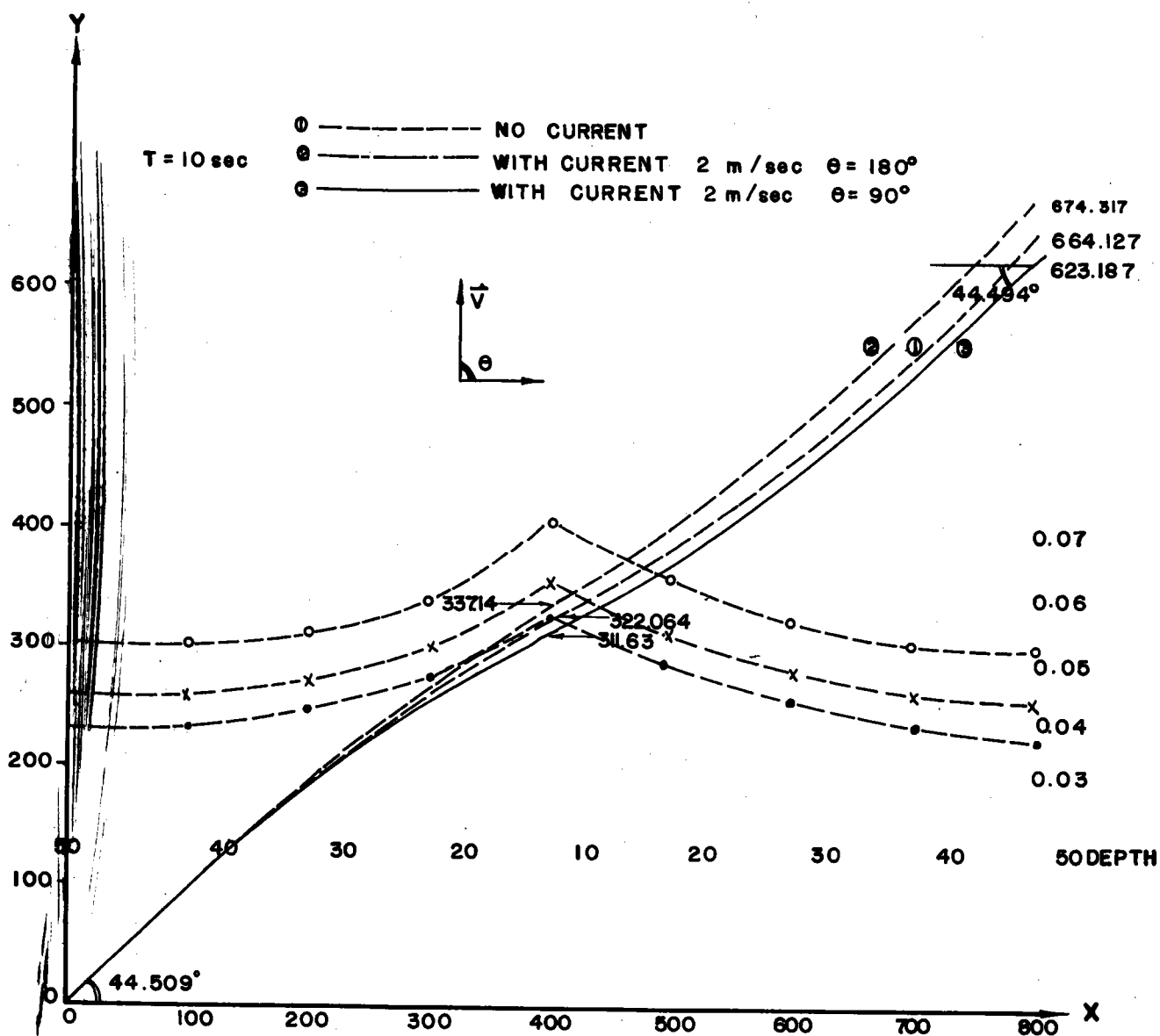


圖1-8. 平行且對稱海底地背波浪受地形及海流影响折射圖
(入射角 45°)

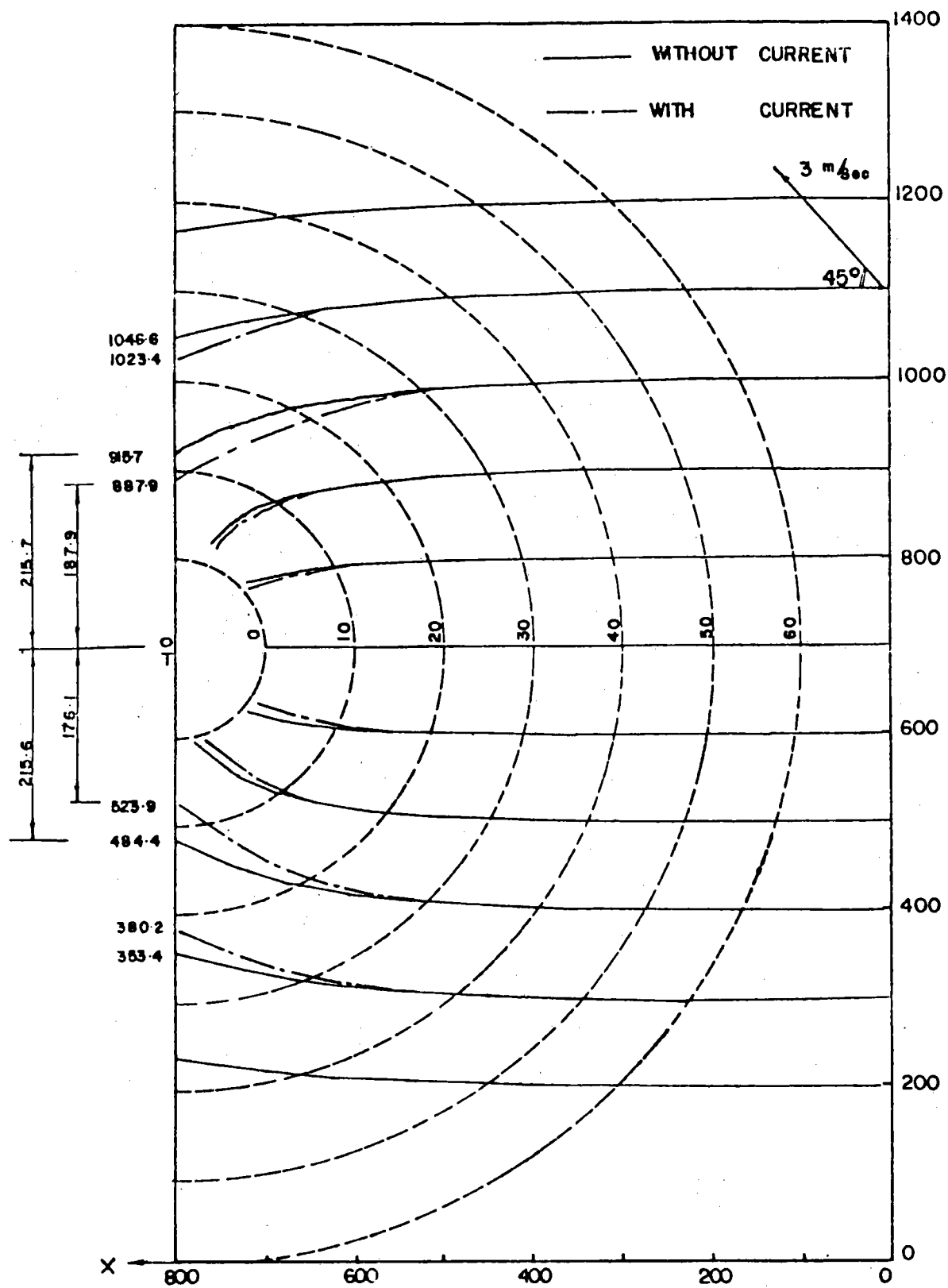


圖1-9. 圖形等深綫波浪受地形與海流影响折射圖

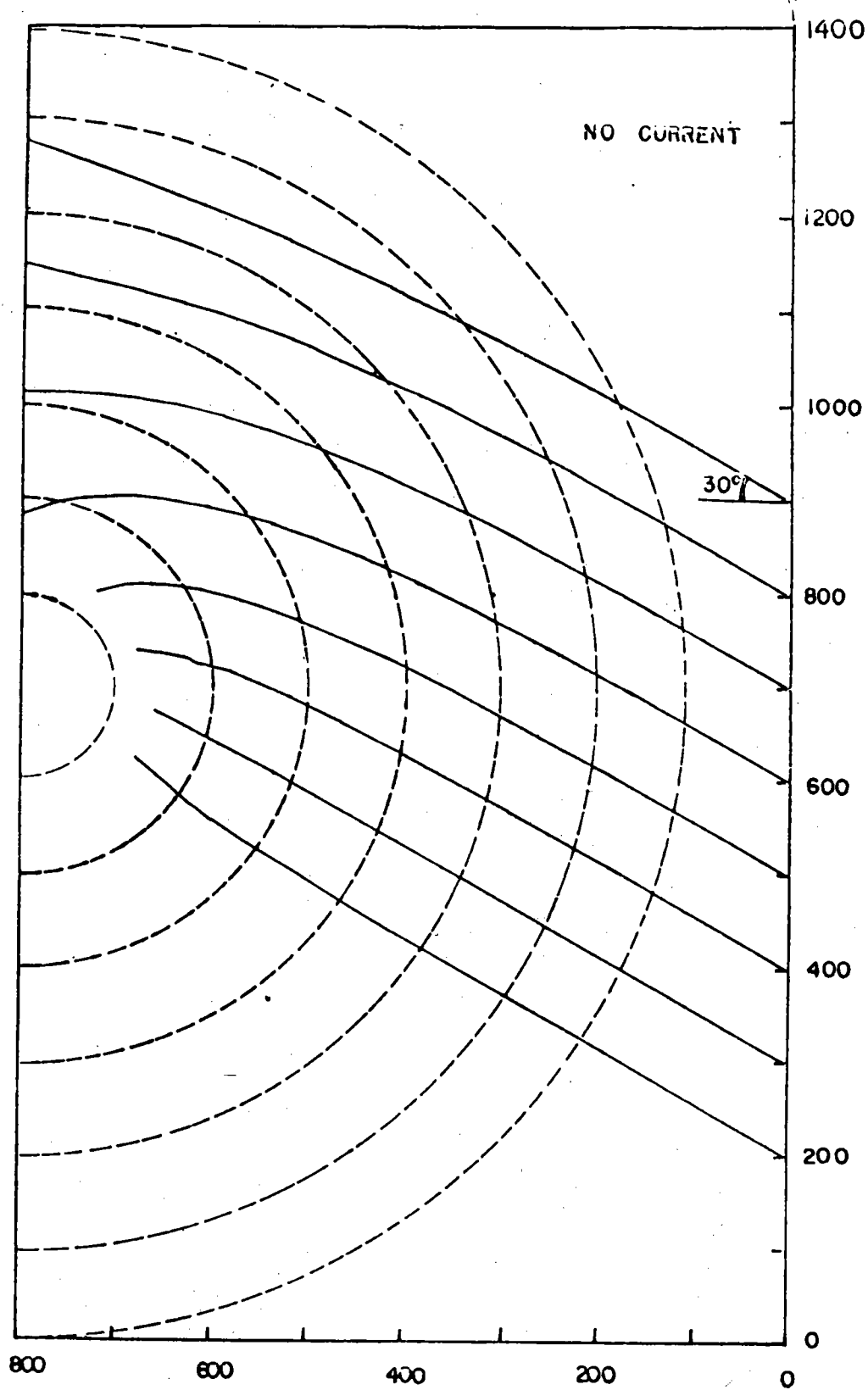


圖1-10. 圓形等深綫波浪受地形影响折射圖(入射角 30°)

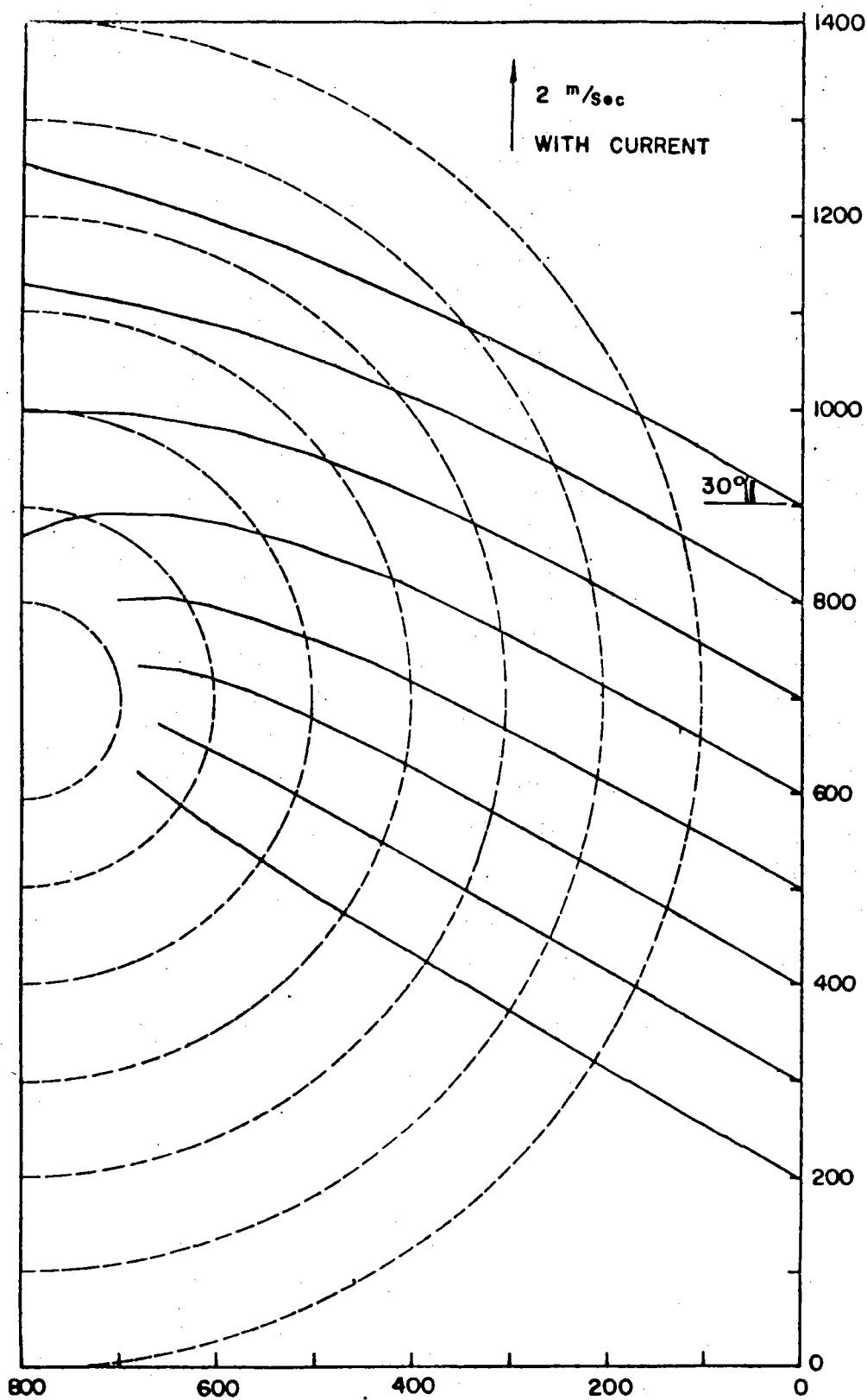


圖 1-11. 圓形等深綫波浪受地形與海流作用折射圖
(入射角 30° , 流速 2 m/sec)

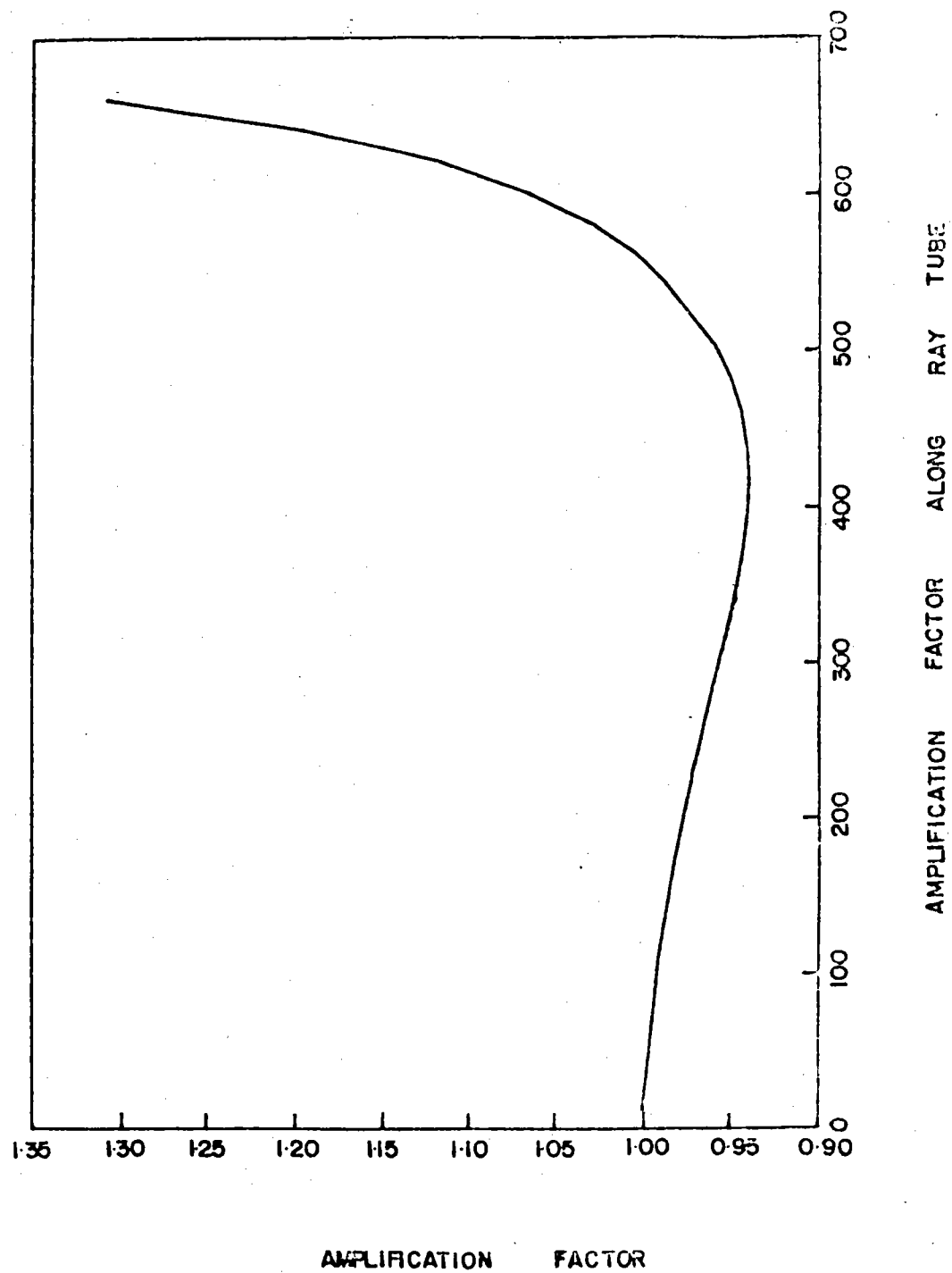


圖 1 - 12. 波高沿波向綫之變化圖

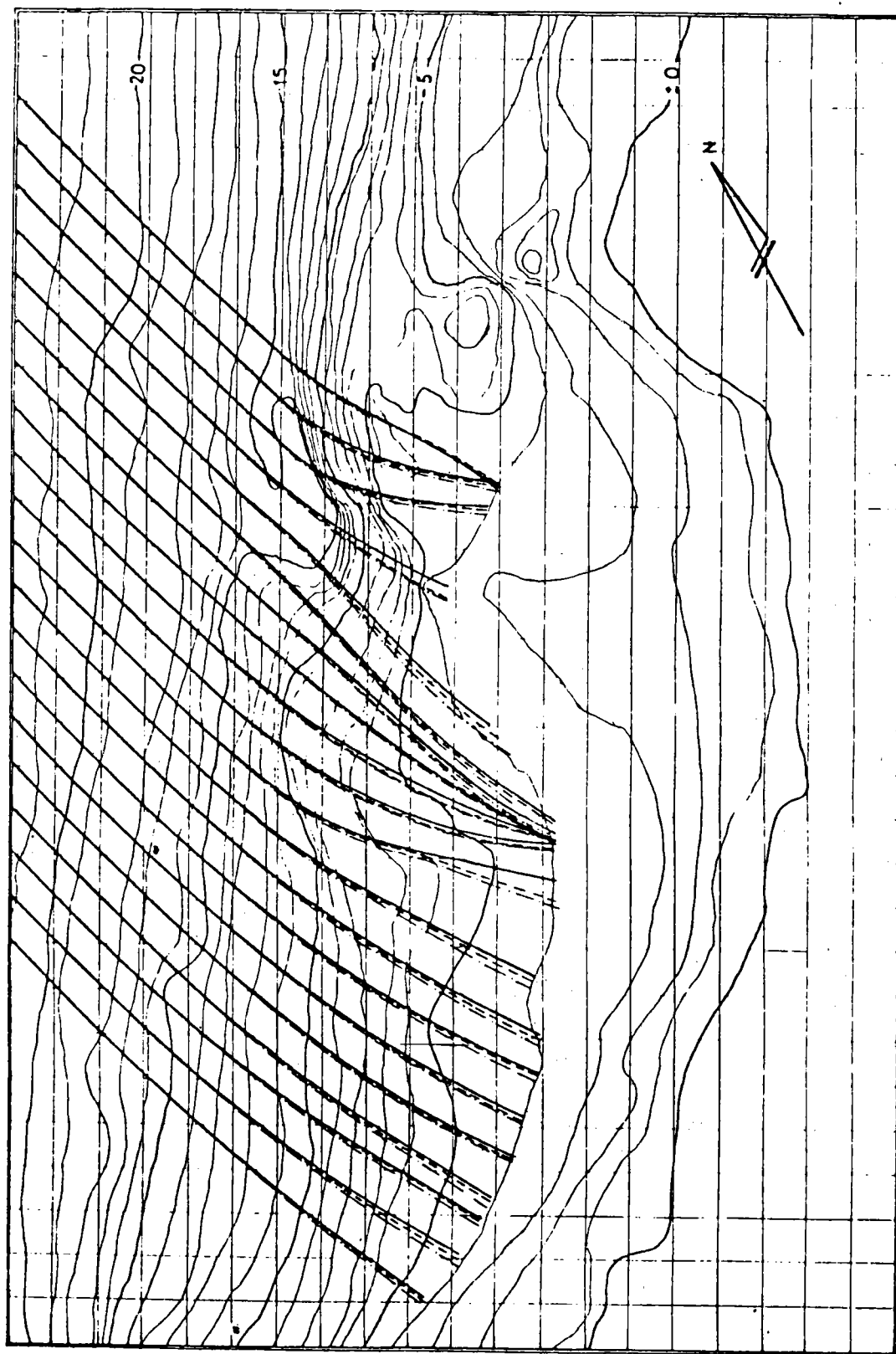


圖1-13.台中港北堤以北波浪折射圖 ($T=8 \text{ sec}$)

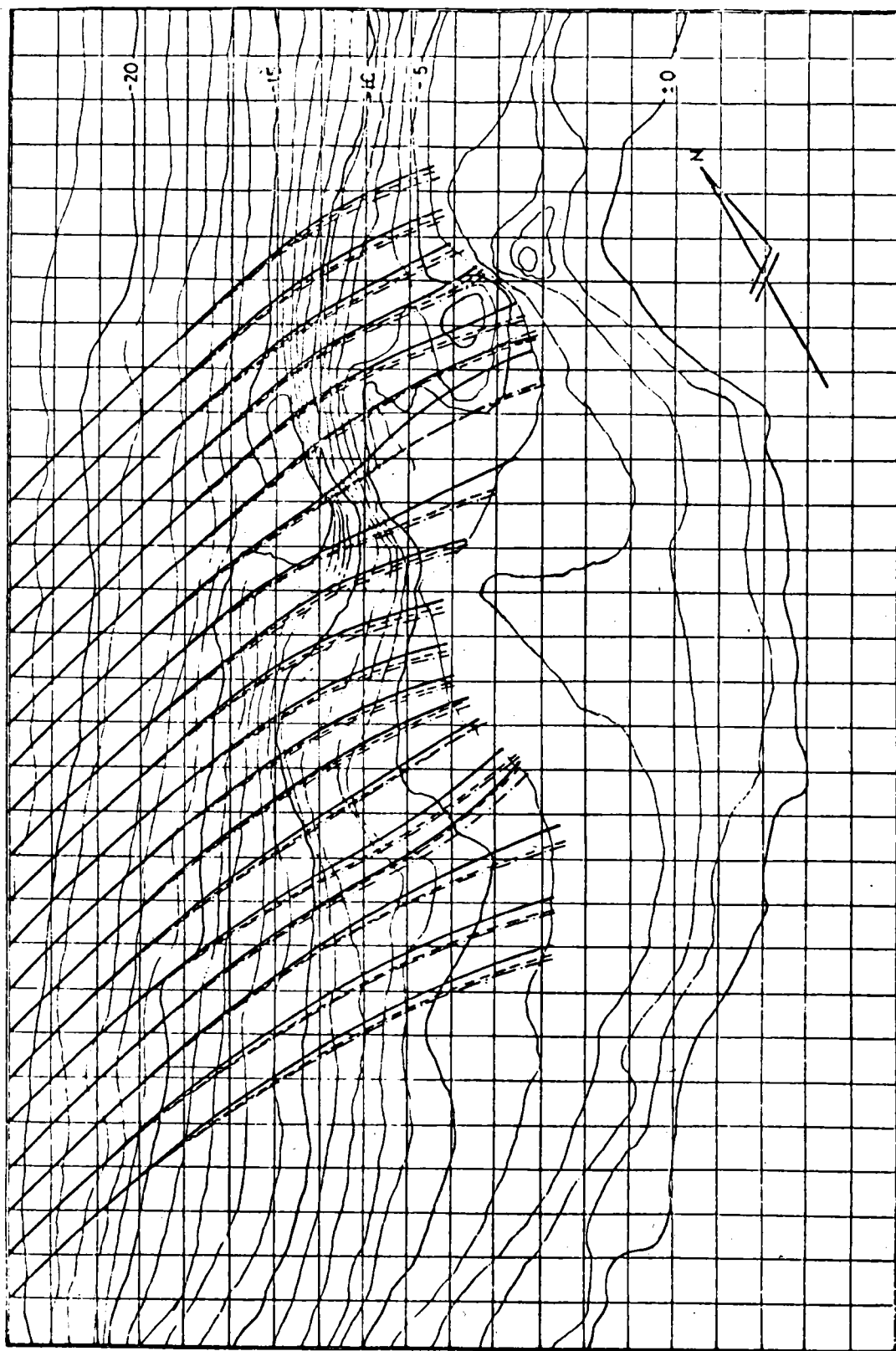


圖1-14台中港北堤以北波浪折射圖 ($T = 6 \text{ sec}$)

(二) 能量通率法計算結果

1. 波浪折射路徑變化

先以海底坡度為 $1/100$ 之規則地形依前述數值計算法計算波浪之折射路徑，其結果如圖 1—15。由圖中可知當波浪與水流斜向作用夾角小於 90° 時，雖然流有增加波浪折射角作用，但海流流量較小，（如 $q^* = 0.002$ ）而地形影響較顯著，故折射角仍大於深海入射角，而在流量較大時，（如 $q^* \geq 0.06$ ）因流影響較大，故折射角小於深海波浪入射角，若波與流作用夾角大於 90° 時則流有減小波浪折射作用，故波浪折射角小於深海波浪入射角。

2. 波長變化

規則地形之相對波長 L/L_0 。如圖 1—16 所示，由圖可知，浪與流斜向作用夾角小於 90° 時，雖然流有增長波長作用，但在流量較小時，（如 $q^* = 0.002$ ）地形影響較顯著，故相對波長小於 1，而在流量較大時（如 $q^* \geq 0.06$ ），相對波長大於 1.0，若浪與流斜向作用夾角大於 90° 時，因流有減小波長作用，相對波長愈小。

3. 波高變化

波高變化情況如圖 1—17 所示，其變化情況視地形與海流之變化大小而定。

4. 實際外海波浪折射情形，以深澳外海地形加以計算，所得結果如圖 1—18 及圖 1—19 所示，此結果與規則地形結論一致。

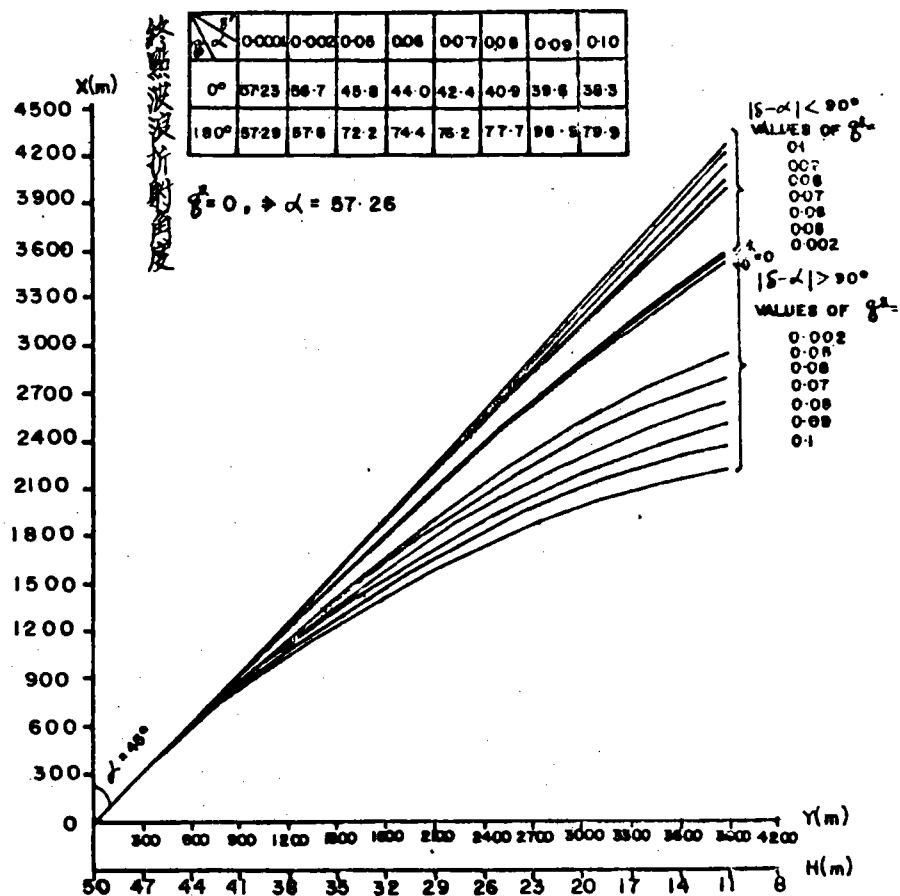


圖 1-15. $T_d = 8 \text{ Sec}$ $m = 1/100$ 時規則地形各神無因次
量關係圖表中值為最後計算點之折射角度

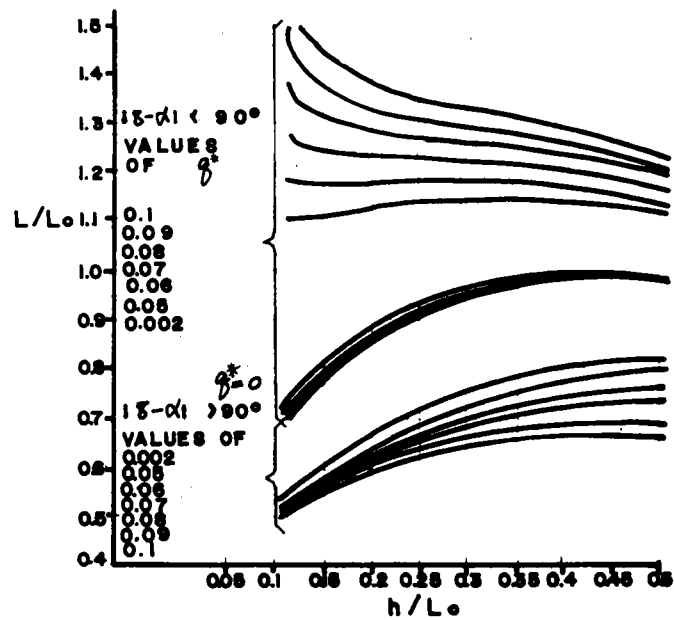


圖1-16. $T_a = 8 \text{ sec. } m = 1/100 \alpha = 45^\circ$
規則地形各種無因次量關係圖

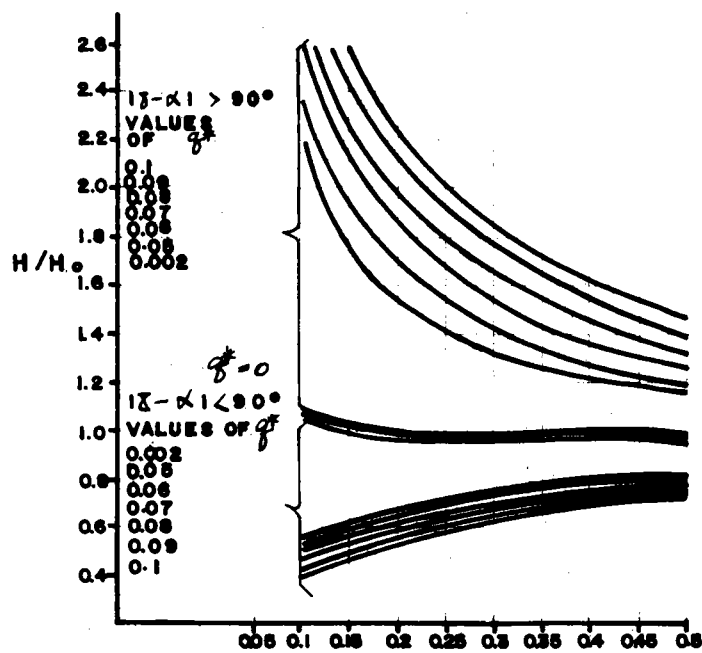


圖1-17. $T_a = 8 \text{ sec. } m = 1/100 \alpha = 45^\circ$
規則地形各種無因次量關係圖

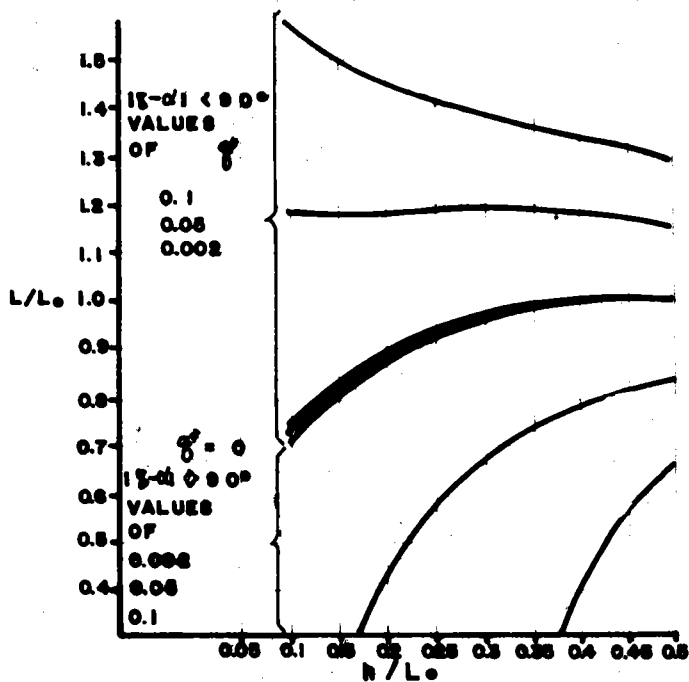


圖1-18. $T_s=8\text{sec}$, $\alpha_0=225^\circ$ 海流流向為 90° 與 190° 時
實際外海地形之各種海流無因次流量與相對波長關係圖

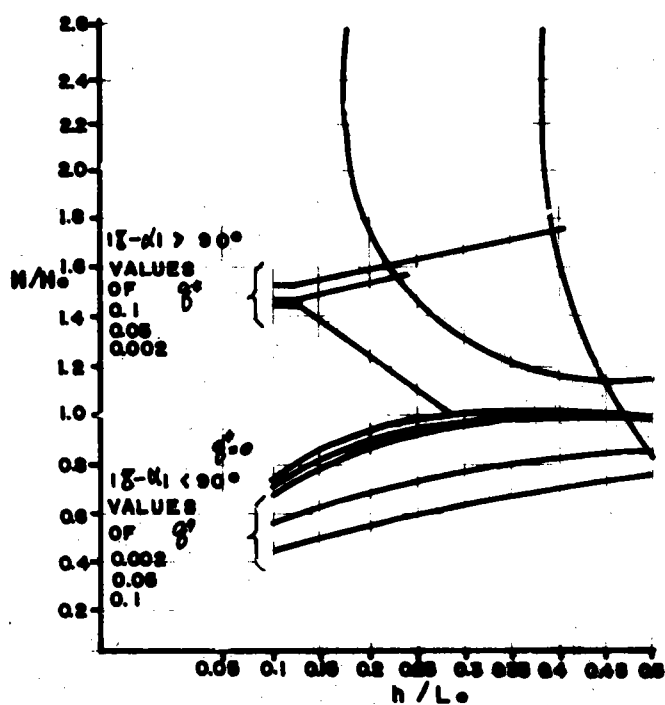


圖1-19. $T_s=8\text{sec}$, $\alpha_0=225^\circ$ 流向為 90° 與 190° 時
實際外海各種流況與無因次量關係圖

五、結論與建議

(一) 結論

綜合前述結果，本研究對波浪受地形與海流影響獲致下列結論。

1. 海流對波浪折射角、波長、波高等變化有加強或減少作用，其影響程度視波向、流速而定，當流向與波向夾角小於 90° 時，海流使波長增加、波速加快、波高減小，而折射角增加，反之夾角大於 90° 時，波長減短、波速減慢、波高加大、折射角減小，此種結果與物理現象吻合。

2. 當海流無因次流量 $q^* (= \frac{hu}{C_0 L_0})$ 較小時，波浪折射角、波長、波高

變化主要受地形影響，而當海流無因次流量 q^* 較大時則海流影響大於地形影響，此結果與擴散關係 (Dispersion Relation) 一致。

(二) 建議

1. 本研究目前因本所電腦設備容量不足，因此僅着手於較規則地形及恒向海流之研究，對較複雜地形及海流，需再進一步研究。
2. 本研究對兩波向線相交情況下之波浪變化，雖已着手研究，尚未獲得所要結果，下年度將着手於這方面之研究。
3. 有關波浪繞射已搜集資料甚多，但大部份均未考慮海流影響，理論推導與程式設計均列入下年度計劃。
4. 本所因大型電腦設備尚未購置，目前僅能利用 H P 1000 迷你電腦，容量太小程式處理極為困難，本年度電腦購置後，當可解決。

貳、波浪繞射

一、前言

波浪之繞射現象在選擇防波堤最佳配置，以防止大量波浪進入港內是一個很重要因素，假如防波堤配置設計不當，使港內水面產生不良擾動，則不僅對於港內船隻貨物裝卸造成很大困擾，且可能使碇泊船隻造成斷纜而導致互撞現象。

水工模型試驗是研討防波堤配置很有效的方法之一，但模型試驗而言需時太多對初步規劃往往緩不濟急，且所費不貲，不合經濟原則。因此使用數值模式方法計算波浪繞射現象，對提供最佳防波堤配置是一種很有效方法。

Penny 和 Price(1944) 首先引用光學繞射原理 Sommerfield's Solution 理論，求得波浪（小振幅波）通過半無限長不透水直立壁之防波堤繞射解，並應用於波浪垂直通過兩支半無限長防波堤缺口之繞射解。

Taikai (1969) 應用 Penny 和 Price 理論計算波浪通過不同線上兩支半無限長缺口之繞射解（考慮入射波對兩防波堤之相差）Puttnam 和 Arthur (1948) 以實驗證明波浪通過半無限長防波堤之繞射解（考慮深水波），實驗值與理論值在遮蔽區甚為接近，在反射區及通過區，則實驗值較理論值為小。Blue 和 Johnson (1948) 實驗證明波浪通過二半無限長防波堤缺口之繞射實驗值與近似值甚為接近（考慮缺口長 1.41 — 4.87 波長）。以上論文探討之入射波僅考慮規則波及全反射不透水防波堤。Wiegand etc (1972) 和 Goda (1975) 考慮不規則入射波分別使用不同之 distribution function 和 Frequency Spectrum 求得波浪之繞射解。Tomtsuka (1977) 則考慮不同反射係數之防波堤，求得波浪之繞射解。Tichael (1972) 則應用 Mathieu

function 求得波浪通過一有限長防波堤之繞射解。Tomotsuka etc (1981) 分別使用 Sommerfeld's Solution 和 Mathieu function 方法，求得波浪通過簡單類型配置之防波堤，並應用於複雜邊界之港口。Katsutoshi etc (1972 和 1975) 使用有限差分法 (finite difference) 求得波浪通過複雜防波堤及邊界之港內波高分佈。Berkhoff (1974) 使用有限元素法 (finite element) 求得波浪通過不同海面結構物 (例如圓柱體) 之繞射及折射解。

本研究分別以理論解法、近似解法、有限差分法及有限元素法計算波浪通過各種不同防波堤配置並考慮反射因素，港內外波高分佈狀況，最後繪成等繞射係數圖。

二、理論分析及數值方法

(一) 波浪繞射理論解

A. 基本假設

(1) 水為理想，不可壓縮，非旋轉流體。

(2) 假設波浪為微小振幅波 (線性波)。

(3) 等水深。

(4) 防波堤為半無限長，不透水，直立壁 (反射係數 $k_r = 1.0$)，

如圖 2 — 1 防波堤為 x 軸，堤端在原點。

(5) 入射波為正弦波。(如圖 2 — 2)

令入射波水位變化 η_0 。

$$\eta_0 = \eta_0(x, y, t)$$

$$= \frac{H}{2} \exp(i(kx \cos \theta_0 + ky \sin \theta_0) + \sigma t) \cdots (2-1)$$

其中 k : 圓週波速

σ : 圓週頻率

H : 波高

基礎方程式，起始條件及邊界條件假設波浪為微小振幅波，則其流勢
(Velocity Potential) 滿足 Laplace 方程式：

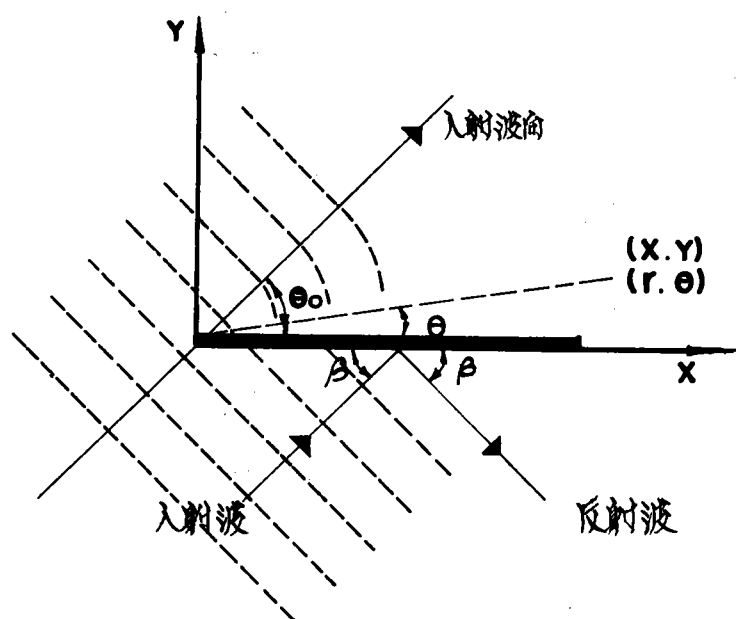


圖 2-1 波浪通過半無限長防波堤

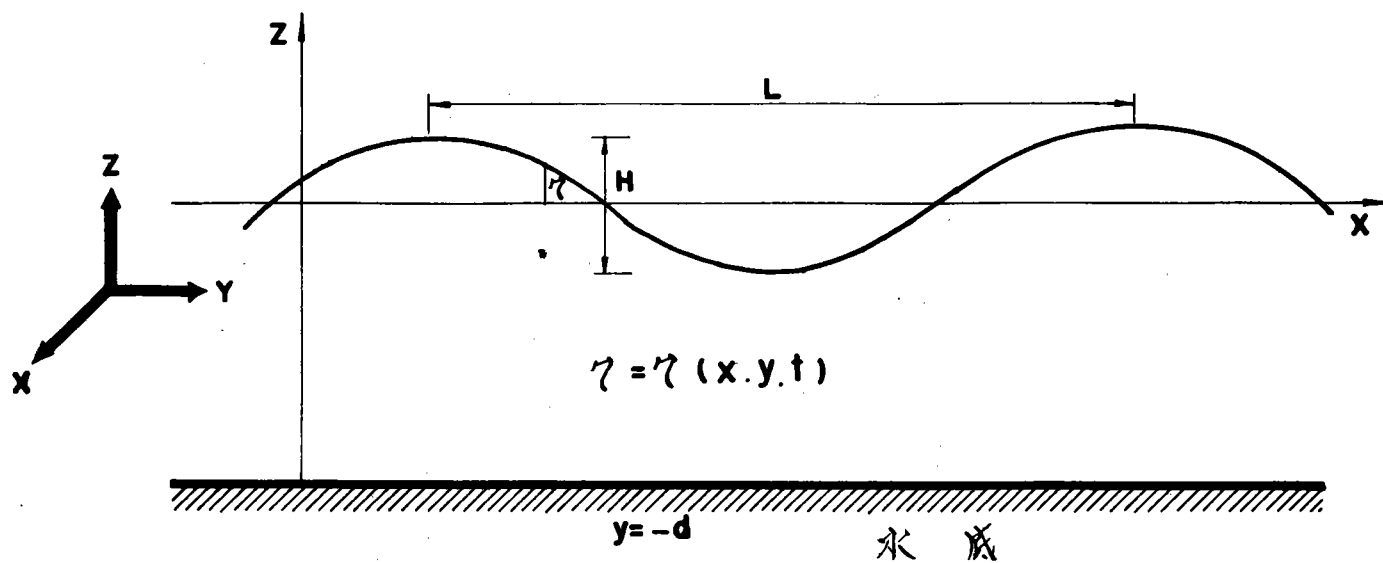


圖 2-2 正弦波坐標系

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (2-2)$$

其中 $\phi = \phi (x, y, z, t)$

起始條件及邊界條件：

根據 Bernoulli 方程式及小振幅波理論

水位變化 η 為

$$\eta = - \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} \dots\dots\dots (2-3)$$

水面運動條件為

$$W = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} = \frac{-\partial y}{\partial t} \dots\dots\dots (2-4)$$

水底之條件為

$$W = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=-d} = 0 \dots\dots\dots (2-5)$$

防波堤為不透水直立壁，y 方向流速為零

$$V = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{x \geq 0, y=0} \dots\dots\dots (2-6)$$

在 $x = -\infty$ 處不受防波堤影響

$$\eta_{x=-\infty} = \eta_0 \dots\dots\dots (2-7)$$

小振幅波通過半無限長防波堤繞射解為入射波水位變化 η_0 ，其對應流勢為

$$\phi_0 = ka \exp [ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)] \cdot \cosh [k(h+z)] \exp(i\sigma t) \dots\dots\dots (2-8)$$

其中 $ka = igH/2\sigma \cos(kh)$

從方程式 (2-4) 和 (2-5) 可得水面變化及流勢為

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \eta(x, y, t) = \frac{H}{2} \varphi(x, y) \exp\{i[k(x \cos \theta_0 \\ + y \sin \theta_0 + \sigma t)]\} \dots\dots\dots (2-9) \\ \phi = ka \varphi(x, y) \cosh[k(z+h)] \exp(i\sigma t) \dots\dots\dots (2-10) \end{array} \right.$$

其中 $\varphi = \varphi(x, y)$ 稱轉換函數

繞射係數 kd 定義為：

入射波水位變化與波浪通過防波堤後水位變化之比值

$$kd = |\eta/\eta_0| = |\varphi(x, y)| \dots\dots\dots (2-11)$$

相位差 ε 為

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{ARg}(\eta) - \text{ARg}(\eta_0) \\ &= \text{ARg}(\varphi) + kr \dots\dots\dots (2-12) \end{aligned}$$

如果求得 $\varphi(x, y)$ 即可得 kd 及 ε 值將方程式

(2-10) 代入 (2-2)

得 Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0 \dots\dots\dots (2-13)$$

或

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0 \dots\dots (2-14)$$

將邊界條件方程式 (2-6) 及 (2-7) 代入 (2-14) 得

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x, y) = \varphi(r, \theta) \\ &= \varphi_1(r, \theta) + \varphi_2(r, \theta) \dots\dots\dots (2-15) \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[i[kr \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\pi}{4}]] f(\sigma_1)$$

$$\dots\dots\dots(2-16)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \{ i \sqrt{k r} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\pi}{4} \}$$

$$\rfloor \} f(\sigma^2) \dots\dots\dots(2-17)$$

$$f(\sigma) = \frac{1+i}{2} \int_{-\infty}^{\sigma} \exp(-i \pi x^2/2) dx \dots\dots\dots(2-18)$$

$$\sigma_1 = 2 \sqrt{k r / \pi} \cos(\theta - \theta_0 / 2)$$

$$\sigma_2 = 2 \sqrt{k r / \pi} \cos(\theta + \theta_0 / 2)$$

方程式(2-18)稱Fresnel 函數，可用下式表示

$$f(\sigma) = \frac{1-i}{2} + C(\sigma) + S(\sigma)$$

$$C(\sigma) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx \dots\dots\dots(2-19)$$

$$S(\sigma) = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx \dots\dots\dots(2-20)$$

B. 數值方法

(1) 將平面分為3個區域

a. 繞射區(S) : $0 \leq \theta \leq \theta_0$ $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$

b. 反射區(R) : $2\pi - \theta_0 \leq \theta < 2\pi$, $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$

c. 通過區(Q) : $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$

(2) 直角座標(x, y)轉換為極座標(r, θ)

(3) 計算 σ_1, σ_2 值。

(4) 計算 $C(\sigma_1), C(\sigma_2), S(\sigma_1), S(\sigma_2)$

$$C(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot \Delta x_i$$

$$S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \cdot \Delta x_i$$

$$\text{其中 } x_0 = 0 \quad x_i = \sigma \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$C_i = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} \left[(x_{i+1} - x_i) / 2 \right]^2 \right\}$$

$$S_i = \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \left[(x_{i+1} - x_i) / 2 \right]^2 \right\}$$

(5) 計算 φ_1 , φ_2 , kd , ε 值。

(6) 畫出等 kd 值線。

3. 轉換函數 φ 之物理意義

方程式 (2-15) 第一項 φ_1 重新改寫為

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \exp \left\{ i \left[kr \cos(\theta - \theta_0) \right] \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ i \left[kr \cos \right. \right. \\ & \left. \left. (\theta - \theta_0) + \frac{\pi}{4} \right] \cdot \left[C(\sigma_1) - \frac{1}{2} \right] \right. \\ & \left. \left. i \left(S(\sigma_1) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$(1) \text{R 區: } 0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 \quad C(\sigma_1) < 0 \quad S(\sigma_1) > 0$$

$$\text{若 } r \rightarrow \infty \text{ 則 } C(\sigma_1) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad S(\sigma_1) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\varphi_1 \rightarrow \exp \left[i kr \cos(\theta - \theta_0) \right]$$

表示僅入射波存在

$$(2) \text{S 區: } \theta_0 + \pi \leq \theta < 2\pi, \quad C(\sigma_1) < 0, \quad S(\sigma_1) < 0$$

$$\text{若 } r \rightarrow \infty \text{ 則 } C(\sigma_1) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad S(\sigma_1) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \varphi_1 \rightarrow 0$$

(3)Q區： $\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta$

$\varphi_1 = \text{入射波} + \text{繞射波}$

方程式 (2 - 15) 第二項 φ_2 重新表示為

$$\varphi_2 = \exp [i k r \cos (\theta + \theta_0)] + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \{ i [k r \cos (\theta + \theta_0) + \frac{\pi}{4}] \cdot [C(\sigma_2) - \frac{1}{2}] - i [S(\sigma_2) - \frac{1}{2}] \}$$

4.(1)R區： $0 \leq \theta < \pi - \theta_0$ $C(\sigma_1) < 0$ $S(\sigma_1) > 0$

若 $r \rightarrow \infty$ 則 $C(\sigma_2) > 0$ $S(\sigma_2) > 0$

$$\varphi_2 = \exp [i k r \cos (\theta + \theta_0)]$$

表示僅反射波存在

(2)S區： $\theta_0 + \pi \leq \theta < 2\pi$ $C(\sigma_1) < 0$ $S(\sigma_1) < 0$

$$\text{若 } r \rightarrow \infty \quad C(\sigma) \rightarrow -\frac{1}{2} \quad S(\sigma_2) \rightarrow \frac{-1}{2}$$

$$\varphi_2 \rightarrow 0$$

(3)Q區： $\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta$

$\varphi_2 = \text{反射波} + \text{反射波造成之繞射波}$

因此各區域之成分為

R區：入射波 + 反射波 + 反射波造成之繞射波

Q區：入射波 + 繞射波

S區：繞射波

假設防波堤反射係數為 $k r$ $0 \leq k r \leq 1$

我們將轉換函數改寫為

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 + k r \varphi_2$$

(二) 波浪繞射近似解

假如考慮波浪為線性關係，應用前述波浪通過半無限長防波堤繞射解，利用重疊原則，可求得波浪通過同一線上二半無限長防波堤缺口，如圖 2 - 3 之繞射解：

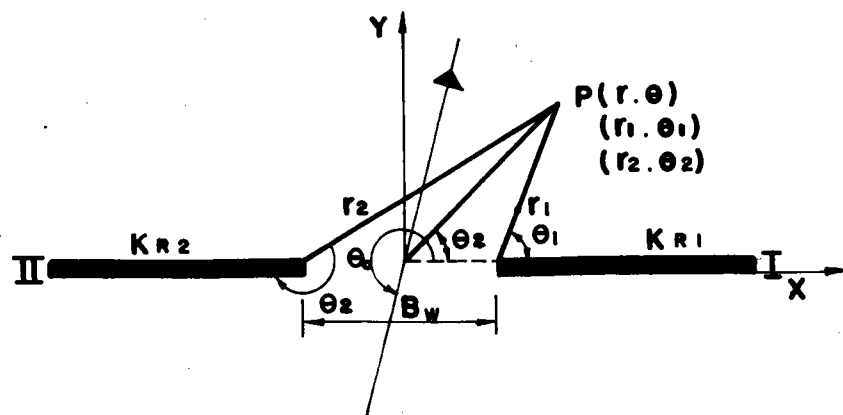


圖 2-3 波浪通過二半無限長防波堤缺口

假設堤 II 不存在，則對堤 I 之轉換函數

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1(r_1, \theta_1, \theta_0, f) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ikr_1 \cos(\theta_1 - \theta_0) + \frac{\pi}{4} \right] \cdot f(\sigma_{11}) \\ &\quad + \frac{kr_1}{\sqrt{2}} \exp \left[ikr_1 \cos(\theta_1 + \theta_0) + \frac{\pi}{4} \right] \cdot f(\sigma_{12}) \\ &\quad \dots\dots\dots (2-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 \sqrt{kr_1 / \pi} \cos(\theta_1 - \theta_0 / 2) \\ \sigma_{12} &= 2 \sqrt{kr_2 / \pi} \cos(\theta_1 + \theta_0 / 2) \end{aligned} \quad \dots\dots (2-22)$$

假設堤 I 不存在，則波浪對堤 II 之轉換函數為

$$\varphi_2 = \varphi_2(r_2, \theta_2, f, \theta_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ +i \left[-kr_2 \cos (\theta_2 - \theta_0) + \frac{\pi}{4} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. k B_w \cos \theta_0 \right] \right\} \cdot f(\sigma_{21}) + \frac{kr_2}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. k r_2 \cos (\theta_2 + \theta_0) + \frac{\pi}{4} - k B_w \cos \theta_0 \right] \right\} \cdot \\
&\quad f(\sigma_{22}) \cdots \cdots (2-23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{21} &= 2 \sqrt{kr_2 / \pi} \cdot \cos (\theta_2 - \theta_0 + \pi / 2) \\
\sigma_{21} &= 2 \sqrt{kr_2 / \pi} \cos (\theta_2 + \theta_0 + \pi / 2) \cdots (2-24)
\end{aligned}$$

$k B_w \cos \theta_0$ 為相差

利用重疊原理對

港內任一點P之 ϕ 值為

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 - \exp [i k r_1 \cos (\theta_1 - \theta)]$$

$\exp [i k r_1 \cos (\theta_1 - \theta)]$ 為入射波因考慮兩項，須減去一次。

同理可應用波浪通過半無限長防波堤之理論解於有限長度防波堤之繞射解。(如圖 2 - 4)

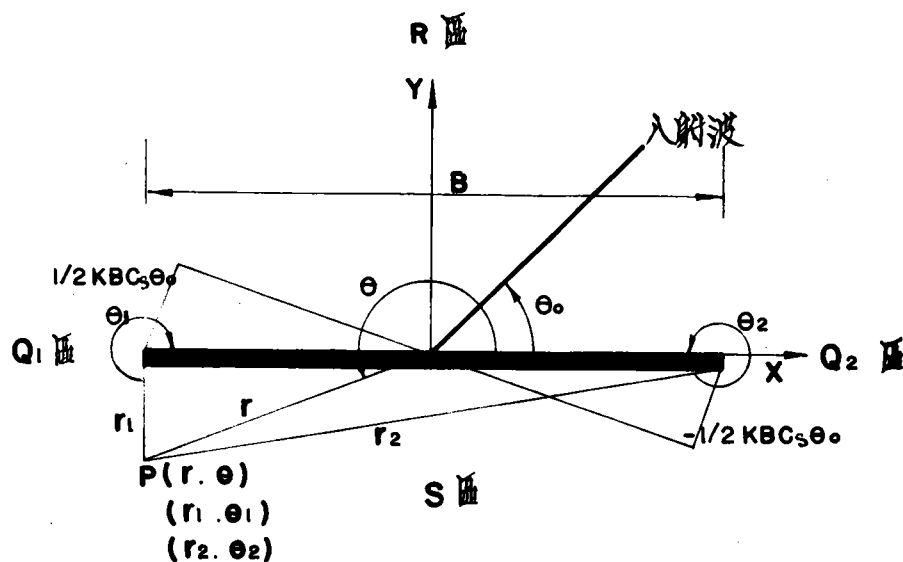


圖 2-4 波浪通過有限長度防波堤繞射圖解

Q₁ 區之轉換函數

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[k r_1 \cos(\theta_1 - \theta_0) + \frac{\pi}{4} - \frac{k B}{2} \cos \theta_0 \right. \right. \\ & \left. \left. \right] \right\} f(\sigma_{11}) + \frac{k r}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[k r_1 \cos(\theta_1 + \theta_0) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{4} - \frac{k B}{2} \cos \theta_0 \right] \right\} f(\sigma_{12}) \dots\dots\dots (2-25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & 2 \sqrt{k r_1 / \pi} \cos [(\theta_1 - \theta_0) / 2] \\ \sigma_{12} = & 2 \sqrt{k r_2 / \pi} \cos [(\theta_1 + \theta_0) / 2] \end{aligned} \dots\dots (2-26)$$

Q₂ 區之轉換函數

$$\begin{aligned} \varphi_{Q_2} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[k r_2 \cos(\theta_2 - \pi + \theta_0) + \frac{\pi}{4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{k B}{2} \cos \theta_0 \right] \right\} \cdot f(\sigma_{21}) + \frac{k r}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[k r_2 \cos \right. \right. \\ & \left. \left. (\theta_2 + \pi - \theta_0) + \frac{\pi}{4} + \frac{k B}{2} \cos \theta_2 \right] \right\} f(\sigma_{22}) \\ & \dots\dots\dots (2-27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = & 2 \sqrt{k r / \pi} \cos [(\theta_2 - \pi + \theta_0) / 2] \\ \sigma_{22} = & 2 \sqrt{k r / \pi} \cos [(\theta_2 + \pi - \theta_0) / 2] \end{aligned} \dots\dots (2-28)$$

R 區之轉換函數

$$\varphi_R = \varphi_{Q_1} + \varphi_{Q_2} \dots\dots\dots (2-29)$$

S 區之轉換函數

$$\begin{aligned} \varphi_S = & \varphi_{Q_1} + \varphi_{Q_2} - \exp [i k r \cos(\theta - \theta_0)] \\ & - k r \exp [i k r \cos(\theta + \theta_0)] \dots\dots\dots (2-30) \end{aligned}$$

波浪通過任何配置形態之二半無限長防波堤之繞射解因入射角不同我們分為下列 6 種不同狀況（如圖 2 - 5）。

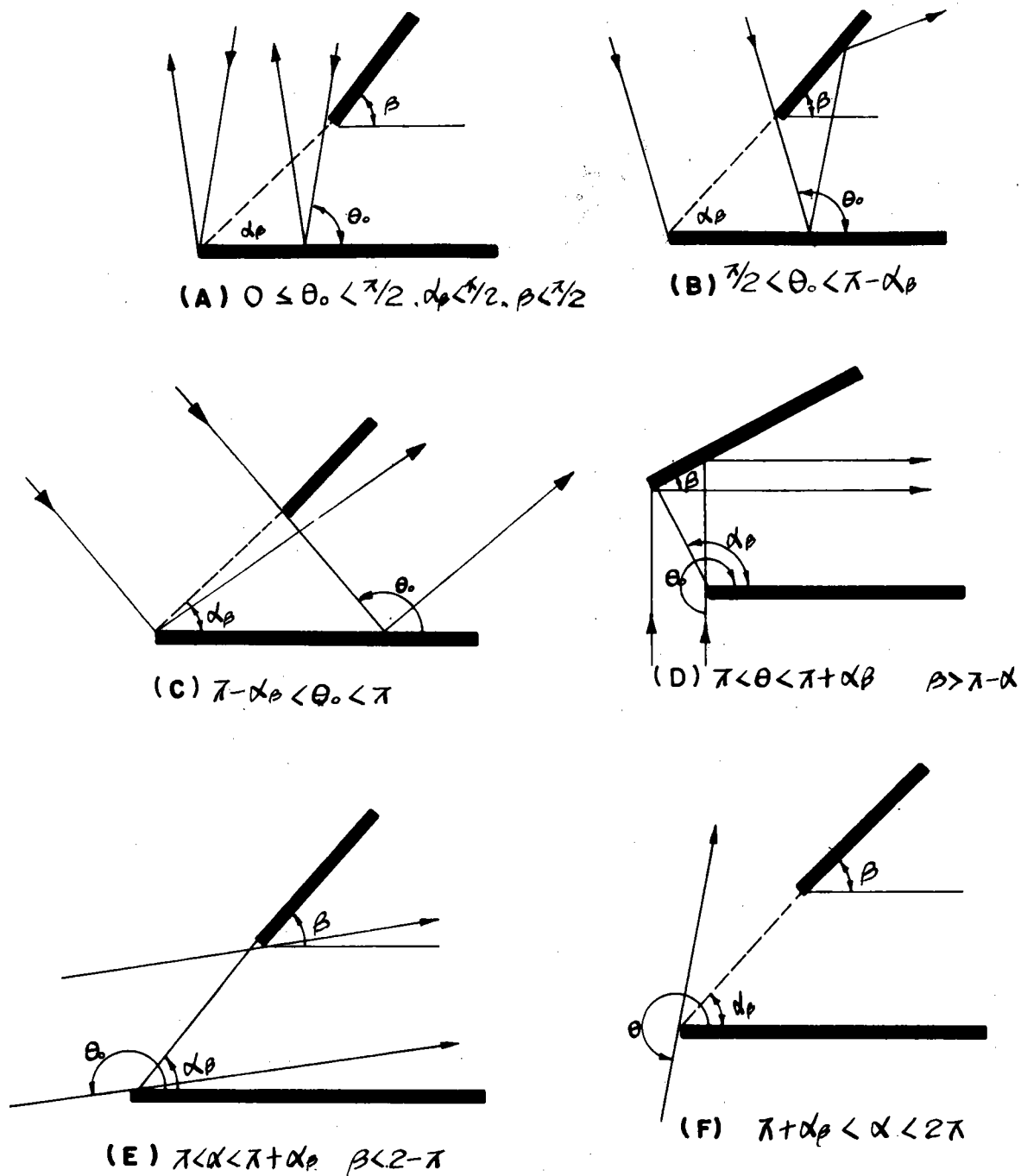


圖 2-5 波浪通過任何配置之二半無限長防波堤

取 (b) 型態，如圖 2-6 為例，說明如下：

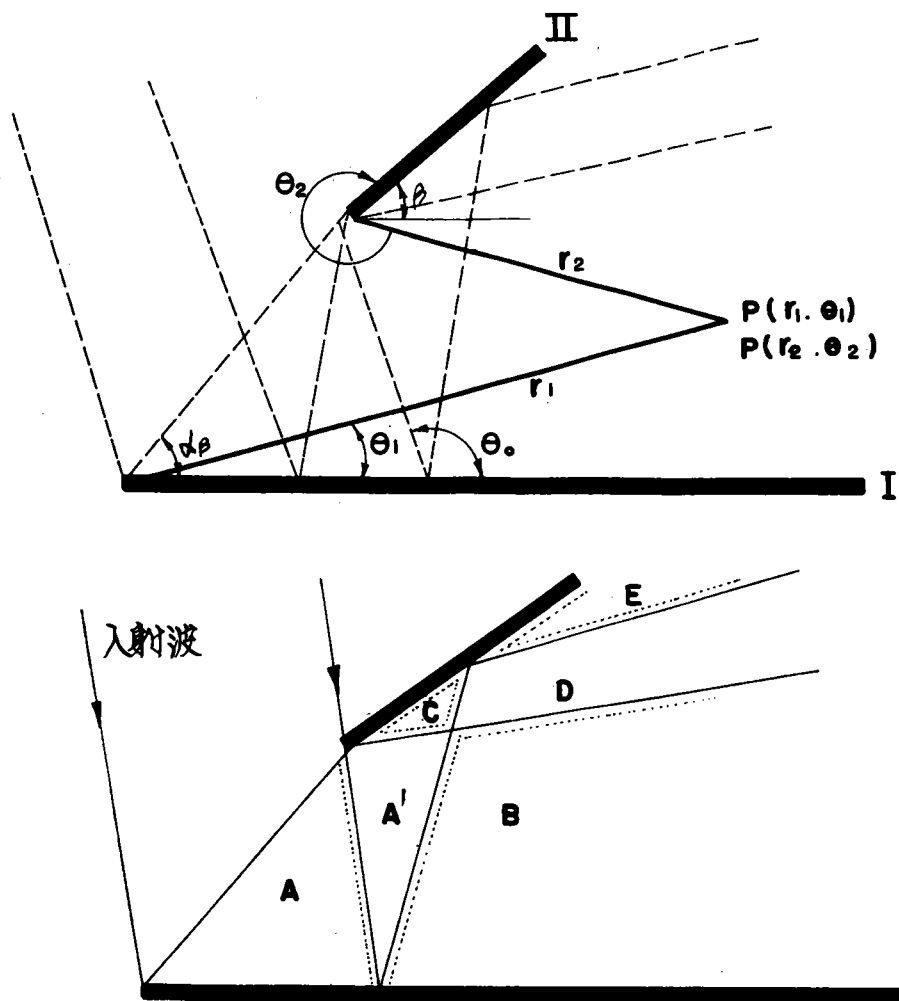


圖 2-6 波浪通過一半無限長防波堤

若堤 II 不存在，對堤 I 之轉換函數為

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[kr_1 \cos (\theta_1 - \theta_0) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \cdot f(\sigma_{11}) \\ & + \frac{kr_1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[kr_1 \cos (\theta_1 + \theta_0) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \cdot f(\sigma_{12}) \\ & \dots\dots\dots (2-31) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 \sqrt{kr_1 / \pi} \cos (\theta_1 - \theta_0 / 2) \\ \sigma_{12} &= 2 \sqrt{kr_1 / \pi} \cos (\theta_1 + \theta_0 / 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-32)$$

若堤 I 不存在，對堤 II 之轉換函數

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[k \cos (\theta_2 - \theta_0 + \beta) + \frac{\pi}{4} + k B \cos \right. \right. \\ & \left. \left. (\alpha_{\beta} - \theta_0) \right] \right\} \cdot f(\sigma_{21}) \frac{k r_2}{2} \exp \left\{ i \left[k \cos (\theta_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \theta_0 + \beta) + \frac{\pi}{4} + k B \cos (\alpha_{\beta} - \theta_0) \right] \right\} \cdot f(\sigma_{22}) \\ & \dots\dots\dots(2-33) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{21} &= 2 \sqrt{k r_2 / \pi} \cos \left(\theta_2 - \theta_0 + \frac{\beta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= 2 \sqrt{k r_2 / \pi} \cos \left(\theta_2 + \theta_0 + \frac{\beta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2-34)$$

波浪經堤 I 之反射波通過堤 II 之轉換函數為

$$\begin{aligned} \phi_{12} = & \frac{k r_1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ i \left[k r_2 \cos (\theta_2 + \theta_0 + \beta) + \frac{\pi}{4} \right. \right. \\ & \left. \left. + k B \cos (\alpha_{\beta} + \theta) \right] \right\} f(\sigma_{12.1}) + \frac{k r_1 \cdot k r_2}{\sqrt{2}} \\ & \exp \left\{ i \left[k r_2 \cos (\theta_2 - \theta_0 - \beta) + \frac{\pi}{4} \right. \right. \\ & \left. \left. + k B \cos (\alpha_{\beta} + \theta) \right] \right\} f(\sigma_{12.2}) \dots\dots\dots(2-35) \\ \sigma_{12.1} &= 2 \sqrt{k r_2 / \pi} \cos \left[(\theta_2 + \theta_0 + \beta - 2\pi) / 2 \right] \\ \sigma_{12.2} &= 2 \sqrt{k r_2 / \pi} \cos \left[(\theta_2 - \theta_0 - \beta + 2\pi) / 2 \right] \\ & \dots\dots\dots(2-36) \end{aligned}$$

1. A 區

$$\begin{aligned} \phi_A = & \phi_1 + \phi_{12} + \phi_2 - \exp \left\{ i k r_1 \cos (\theta_1 - \theta_0) \right\} \\ & - k_n \exp \left\{ i \left[k r_2 \cos (\theta_2 + \theta_0 + \beta) \right. \right. \\ & \left. \left. + k B \cos (\alpha_{\beta} + \theta_0) \right] \right\} \dots\dots\dots(2-37) \end{aligned}$$

2. B 區

$$\varphi_B = \varphi_A - k r_1 \exp \{ i k r_1 \cos(\theta_1 + \theta) \} \cdots (2-38)$$

3. C 區

$$\varphi_C = \varphi_2 + \varphi_{12} \cdots (2-39)$$

4. D 區

$$\begin{aligned} \varphi_D = \varphi_C - k r_1 \exp \{ i [k r_2 \cos(\theta_2 + \theta_0 + \beta) + \\ k B \cos(\alpha_\beta + \theta_0)] \} \cdots (2-40) \end{aligned}$$

5. E 區

$$\begin{aligned} \varphi_E = \varphi_D - k r_1 k r_2 \exp \{ i [k r_2 \cos(\theta_2 - \theta_0 - \beta) \\ + k B \cos(\alpha_\beta + \theta_0)] \} \cdots (2-41) \end{aligned}$$

(三)有限差分法波浪繞射理論解

1. 基本方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdots (2-42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdots (2-43)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tan \eta (k h) \cdots (2-44)$$

$$\text{令 } Q_x = \int_{-h}^{\eta} u dz : x \text{ 方向水量}$$

$$Q_y = \int_{-h}^{\eta} v dz : y \text{ 方向水量}$$

波速 C 為

$$C^2 = g/k \tanh(kh) = \frac{\sigma^2}{k^2} \dots\dots\dots(2-45)$$

化為

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} = -C \frac{\partial \eta}{\partial x} \dots\dots\dots(2-46)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} = -C \frac{\partial \eta}{\partial y} \dots\dots\dots(2-47)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \dots\dots\dots(2-48)$$

2. 邊界條件：(如圖 2-7)

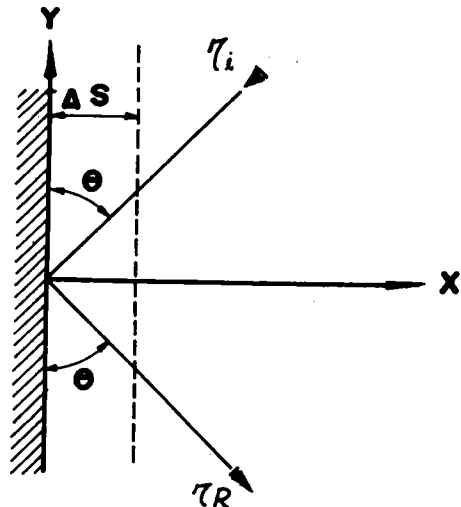


圖 2-7 邊界條件圖

入射波為

$$\eta_i = a \sin(kx \sin \theta - ky \cos \theta + \sigma t) \dots\dots\dots(2-49)$$

反射波為

$$\eta_R = -a R \sin(kx \sin \theta - ky \cos \theta - \sigma t) \dots\dots\dots(2-50)$$

$$0 < R < 1.0$$

在邊界 ($x = 0$) 的流量為

$$Q_0 = -(1 - R) a c \sin \theta \sin(\sigma t - ky \cos \theta)$$

$$\dots\dots\dots(2-51)$$

在 $x = \Delta S$ 之流量

$$Q_1 = - \{ (1+R)^2 \sin^2 (k \Delta S \sin \theta) + (1-R)^2 \cos (k \Delta S \sin \theta) \}^{\frac{1}{2}} \cdot a c \sin \theta \sin (\sigma(t+\tau) - ky \cos \theta) \dots\dots\dots(2-52)$$

$$\text{式中 } \tan (\sigma \tau) = \frac{1+R}{1-R} \tan (k \Delta S \sin \theta)$$

則關係式為

$$Q_0^t = \Lambda Q_1^{t-\tau} \dots\dots\dots(2-53)$$

$$\Lambda = \frac{1-R}{\{ (1+R)^2 \sin^2 (k \Delta S \sin \theta) + (1-R)^2 \cos^2 (k \Delta S \sin \theta) \}^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots(2-54)$$

3. 差分方程式

(1) 基本方程式為

$$\eta (i, j)^{(N-\frac{1}{2})\Delta t} = \eta (i, j)^{(N-\frac{3}{2})\Delta t} - \frac{\Delta t}{\Delta S}$$

$$\{ Q_x (i+1, j)^{(N-1)\Delta t} - Q_x (i, j)^{(N-1)\Delta t} + Q_y (i, j+1)^{(N-1)\Delta t} - Q_y (i, j)^{(N-1)\Delta t} \} \dots\dots(2-55)$$

$$Q_x (i, j)^{N\Delta t} = Q_x (i, j)^{(N-1)\Delta t} - C_x^2 (i, j) \frac{\Delta t}{\Delta S}$$

$$\{ \eta (i, j)^{(N-\frac{1}{2})\Delta t} - \eta (i-1, j)^{(N-\frac{1}{2})\Delta t} \} \dots\dots\dots(2-56)$$

$$Q_Y(i, j)^{N \Delta t} = Q_Y(i, j)^{(N-1) \Delta t} - C_Y^2(i, j)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta s} \left[\eta(i, j)^{(N-\frac{1}{2}) \Delta t} - \eta(i-1, j)^{(N-\frac{1}{2}) \Delta t} \right] \dots\dots\dots(2-57)$$

ΔS : 距離間隔

Δt : 時間間隔

$N = 0$ 為起始時間

(2) 邊界流量條件為

$$Q_0^{N \Delta t} = \wedge Q_1^{(N - N_0) \Delta t} \dots\dots\dots(2-58)$$

式中

$$N_0 = \frac{1}{\sigma \Delta t} \tan^{-1} \left\{ \frac{1+R}{1-R} \tan(k \Delta S \sin \theta) \right\} \dots\dots\dots(2-59)$$

(3) 起始及邊界條件為

a. 入射波進入無反射界面 ($i = i_0$) 之區域

起始值為 $i = i_0 \sim i_0$ ($N = 0$)

$$\eta(i, j)^{-\frac{1}{2} \Delta t} = a \sin \left\{ (i - i_0 - \frac{1}{2}) k \Delta x - \frac{1}{2} \sigma \Delta t \right\} \dots\dots\dots(2-60)$$

$$Q_X(i, j)^0 = -a c_1 \sin \{ (i - i_0) k \Delta x \} \dots\dots\dots(2-61)$$

$$Q_Y(i, j)^0 = 0 \dots\dots\dots(2-62)$$

$$C_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

b. 計算區域之起始值：

$$i = 1 \sim i_0 - 1$$

$$\eta(i, j) - \frac{\Delta t}{2} = Q_x(i, j)^0 = Q_y(i, j)^0 = 0$$

.....(2-63)

c. 無反射界面 ($i = i_0$) 流量條件：

$$Q_x(i_0, j)^{N\Delta t} = Q_x(i_0 - 1, j)^{(N-1)\Delta t} + ac_1 \sin\{k(i_0 - i_0 - 1)\Delta x + (N-1)\sigma\Delta t\} - ac_1 \sin\{k(i_0 - i_0)\Delta x + N\sigma\Delta t\} \dots\dots\dots(2-64)$$

4. 有限差分法流程 (如圖 2 - 8)

(四) 有限元素法波浪繞射理論解

1. 基本理論：

控制方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots(2-65)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\sigma^2}{g} \phi = 0, \quad z = 0 \dots\dots\dots(2-66)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad z = -h(x, y)$$

.....(2-67)

式中 $\bar{\phi} = \phi \exp(i\sigma t)$

h : 水深

H : 平均水深

L : 波長

L' : 水平距離 (如圖 2 - 9)

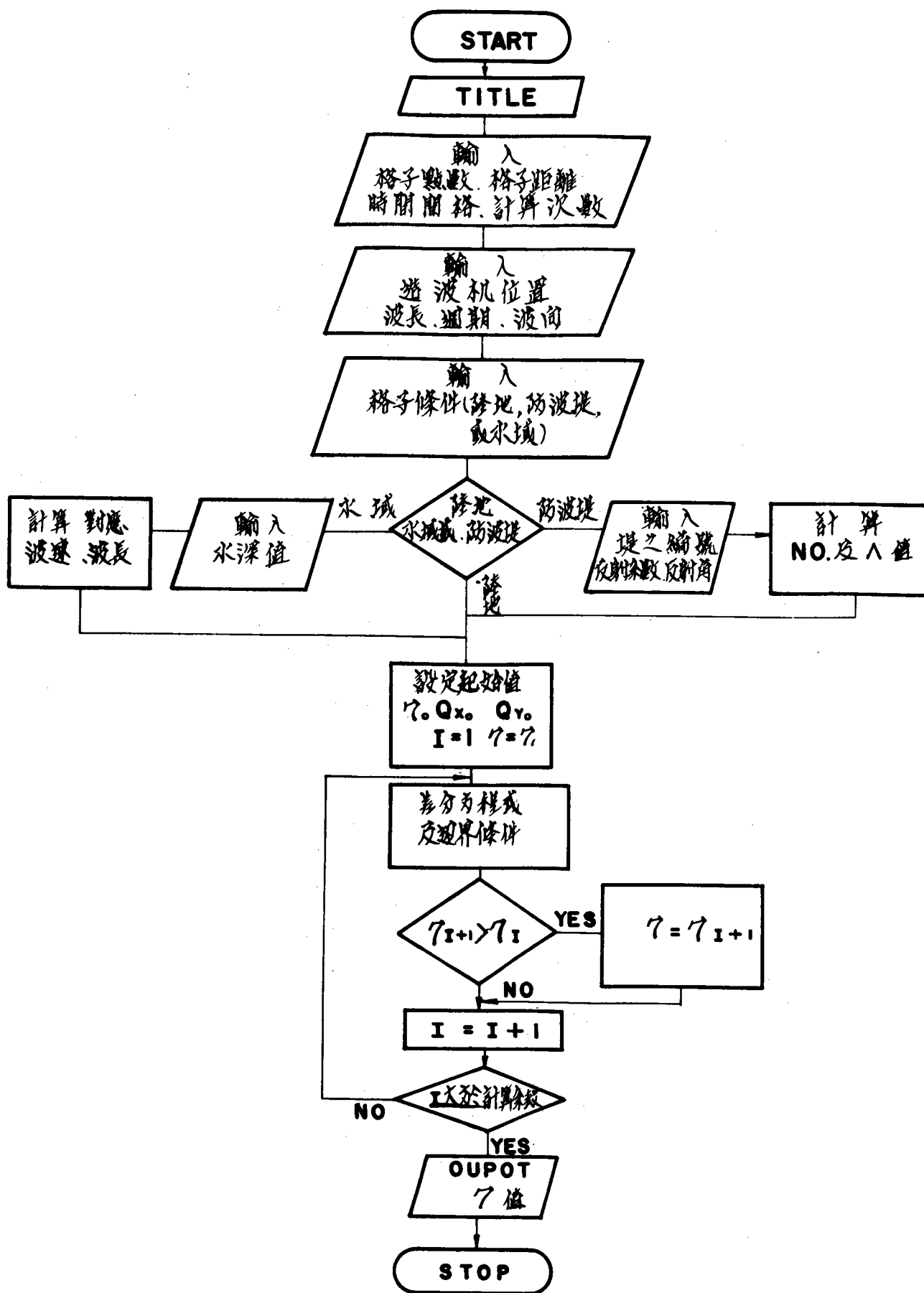


圖 2—8 有限差分法流程圖

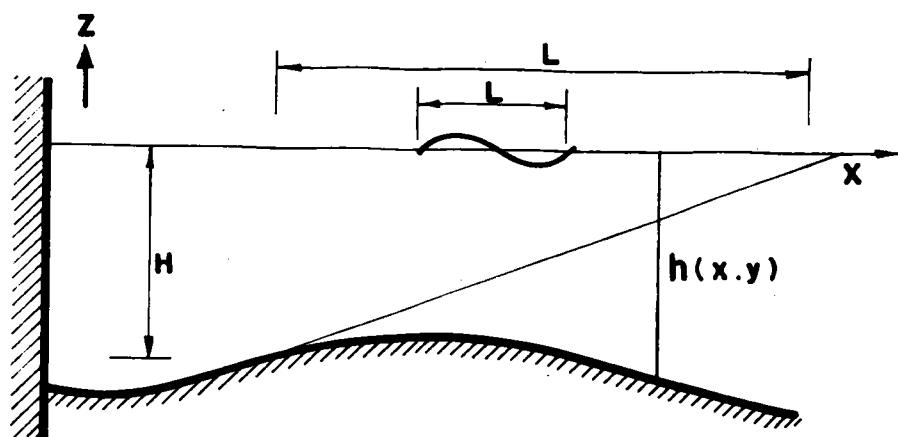


圖 2-9 坐標圖

$$\text{令 } x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L} \text{ 及 } d = \frac{h}{H}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = 0 \dots\dots\dots (2-68) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \delta \phi = 0, \quad z' = 0 \dots\dots\dots (2-69) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z'} + \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \cdot \left(\frac{\partial d}{\partial x'} + \frac{\partial d}{\partial y'} \right) \right] \end{array} \right.$$

$$= 0 \quad z' = -\mu d \dots\dots\dots (2-70)$$

$$\text{上式中 } \mu = \frac{H}{L} \quad \delta = \sigma^2 \frac{L}{g}$$

$$\text{令 } \bar{x} = \frac{x}{L'} \quad \bar{y} = \frac{y}{L'}$$

則有下列關係式存在

$$\frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{\partial h}{\partial y} = r \left(\frac{\partial d}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial d}{\partial \bar{y}} \right) \dots\dots\dots (2-71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x'} + \frac{\partial d}{\partial y'} &= \frac{L}{H} \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \epsilon \left(\frac{\partial d}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial d}{\partial \bar{y}} \right) \dots\dots\dots (2-72) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y'^2} = \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 d}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial \bar{y}^2} \right) \dots\dots\dots (2-73)$$

$$\epsilon = \frac{L}{L'} \quad r = \frac{H}{L'}$$

假設 $\phi(x, y, z) = Z(d, \xi, \mu) \varphi(x, y, \nu \xi)$

$$\xi = \frac{z}{\mu} \quad \nu = \mu \sqrt{L/L'}$$

φ 級數展開

$$\varphi = \varphi_0 + \nu \xi \varphi_1 + \nu^2 \xi^2 \varphi_2 + \dots\dots\dots (2-74)$$

假設 $O(\nu^2)$ 可忽略, ie $\varphi \approx \varphi_0$

代入基本方程式可得:

$$\nabla' \cdot (C - C_0 \nabla' \varphi_0) + \frac{C_0}{C} \sigma^2 \varphi_0 = 0 \dots\dots\dots (2-75)$$

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \dots\dots\dots (2-76)$$

$$C = \frac{\sigma}{k}$$

$$C_g = C \cdot n$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

及

$$Z = \frac{\cosh\{\kappa\mu(\xi+d)\}}{\cosh\{\kappa\mu d\}} \dots\dots\dots (2-77)$$

式中

$$\delta = \kappa \tanh(\kappa\mu d)$$

(1) 若為淺水波 $kh \ll 1$

$$\text{ie } \tanh(kh) \approx kh \quad C_g = \sqrt{gh} \quad n = 1$$

$$\nabla' (h \nabla' \varphi_0) + \frac{\sigma^2}{g} \varphi_0 = 0 \dots\dots\dots (2-78)$$

(2) 若為深水波 $kh \gg 1$

$$\text{ie } \tanh(kh) \approx 1 \quad C = \frac{g}{\sigma} \quad n = \frac{1}{2}$$

$$\nabla'^2 \varphi_0 + \frac{\sigma^4}{g^2} \varphi_0 = 0 \dots\dots\dots (2-79)$$

2. 有限素法

(1) 起始及邊界條件 如圖 2 - 10

區域 II 為等水深

區域 I 不必為等深

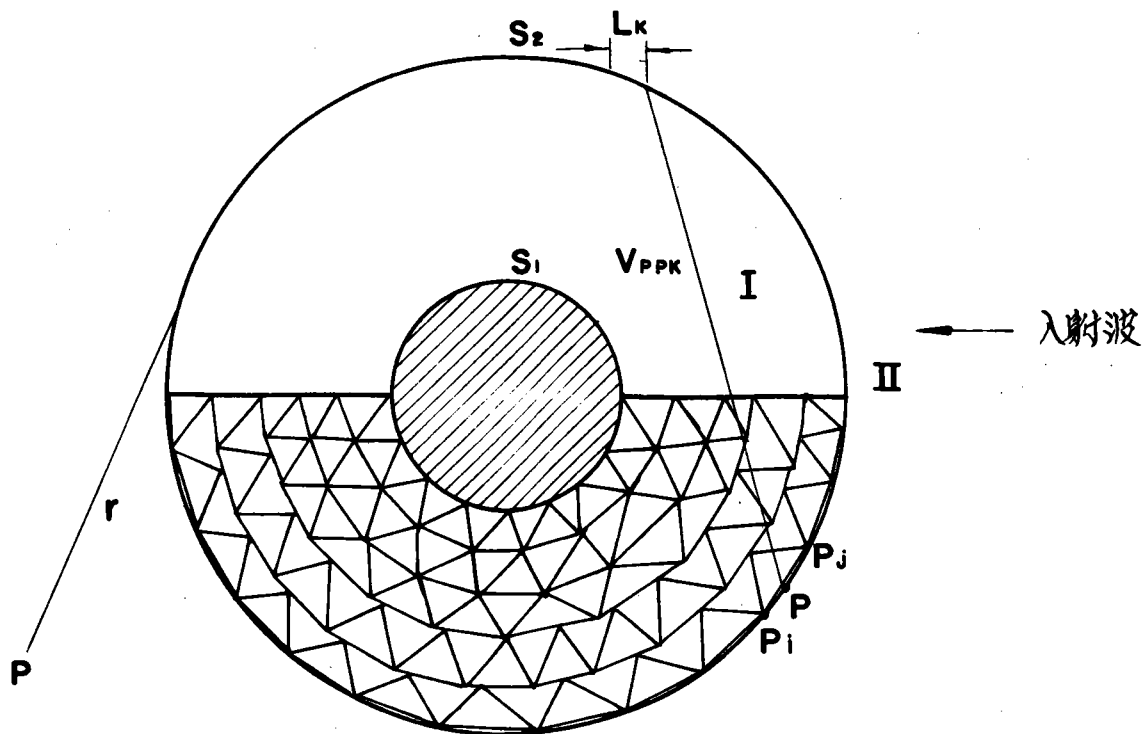


圖 2-10 有限元素法示意圖

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{在邊界 } S_1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f \quad \text{在邊界 } S_2 \quad |f| \leq 1$$

(2) 在區域 I 變分函數為

$$J = \frac{1}{2} \iint_I C C_0 (\nabla' \varphi_I)^2 - \frac{\sigma^2 C_0}{C} \varphi_{II}^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{S_2} (f \bar{\varphi}_{II} + \bar{f} \varphi_{II}) C C_0 ds \dots \dots (2-80)$$

$\bar{f}$ 表 f 之共軛複數

假想在邊界 S_2 存在一強度源 $\mu(S)$

(the strength of a source distribution)

則在區域 II 之 potential 函數可表為

$$\varphi_{II}(p) = \tilde{\varphi}(p) + \int_{S_2} \mu(s) \frac{1}{2i} H_0^2(kr) ds \quad \dots\dots\dots(2-81)$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 為入射波， H_0^2 為二階 Hankel 函數， $P \in$ 區域 II

且在邊界 S_2 有下列關係式存在

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial n} \right|_{p \in S_2} &= f \Big|_{p \in S_2} \\ &= \left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} + \int_{S_2} \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{2i} H_0^2(kr) \right] ds \right\}_{p \in S_2} = \mu(s) \dots\dots\dots(2-82) \end{aligned}$$

因 φ_I 及 φ_{II} 滿足在 S_2 之連續條件則在邊界 S_2

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_{II} \\ \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial n} \quad \dots\dots\dots(2-83) \end{aligned}$$

3. 有限元素數值法

極小化變分函數 J 在 M 個結點得

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_m} = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots, M \dots\dots\dots(2-84)$$

在邊界 S_2 取 N 個強度源

$$\mu(P_n) \quad n = 1, 2, \dots, N \text{ 在強度源點}$$

$$\text{滿足 } \varphi_{P_n} = \frac{1}{2} (\varphi_i + \varphi_j)$$

$$= \widetilde{\varphi}(P_n) + \sum_{k=1}^N \mu(P_k) \frac{1}{2i} H_0^2(kr_{PPk}) L_k \dots\dots\dots (2-85)$$

P_i, P_j 為臨近之結點 $n = 1, 2 \dots\dots N$

且

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \Big|_{P_n} + \sum_{k=1}^N \mu(P_k) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{2i} H_0^2(kr_{PPk}) L_k \right] - \mu(P_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-86)$$

結合上式條件可得下列方程組

$$\left. \begin{aligned} A \vec{\varphi} + B \vec{\mu} &= \vec{r} \\ D \vec{\varphi} + T \vec{\mu} &= \vec{S} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-87)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mu} &= (T - D A^{-1} B)^{-1} (\vec{S} - D A^{-1} \vec{r}) \\ \vec{\varphi} &= A^{-1} \vec{r} - A^{-1} B \vec{\mu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-88)$$

式中 $A : M \times M$ 階矩陣 (係數矩陣)

$B : M \times N$ 階矩陣

$D : N \times M$ 階矩陣

$T : N \times N$ 階矩陣為 Hankel 函數值

$\vec{r}, \vec{S}$ 為入射波值

三、計算結果

(一) 理論解

1. 假設入射角為 90° ，反射係數分別為 1.0 及 0.0 其等繞射係數線圖分別如圖 (2-11) 及圖 (2-12) 圖中顯示在繞射區 (S 區) 之 K_d 值不隨 K_r 值改變而改變；在通過區 (Q 區) K_d 值則隨 K_r 變化有微小的改變；在反射區 (R 區) 則 K_r 值愈大， K_d 值

有愈大的趨勢。

2.入射角為 60° ， K_r 值分別為1.0及0.0其等繞射係數線圖分別如圖(2-13)及圖(2-14)。圖中顯示其結果與入射角 90° 有類似之趨勢。

3.圖(2-15)及圖(2-16)則分別為入射角 90° 及 60° (反射係數為1)之等繞射係數立體圖。

(二)近似解

1.同一線上兩半無限長之防波堤缺口長為2單位波長，入射角為 90° ，防波堤反射係數為1.0，其等繞射係數線(如圖2-17)，在入口處有累加性的波高存在。

2.有限長防波堤為6單位波長，入射角為 60° 及入射角為 90° ，反射係數0.7，其等繞射係數線(如圖2-18及圖2-19)。

3.不同線上二半無限長防波堤型態(E)(交角為 60°)缺口長為4單位波長，入射角 30° (對堤I而言)，防波堤反射係數為1.0，其等繞射係數線(如圖2-20)。

4.不同線上二半無限長防波堤(交角 70°)如圖(2-21)型態(b)，其缺口長2單位波長，入射角為 110° (對堤I而言)缺口與防波堤I交角為 30° ，等繞射係數圖如圖(2-21)。

(三)有限差分法

1.考慮半無限長防波堤，反射係數為1.0，入射角為 90° ，其等繞射係數線圖(如圖2-22)比較理論解法(2-12)二者有很類似之趨勢。

2.考慮同線上二半無限長防波堤開口長為4.0單位波長，入射角為 90° ，二堤之反射係數皆為1.0，其等繞射係數線圖(圖2-23)，比較近似解法(圖2-17)二者亦有很類似之趨勢。

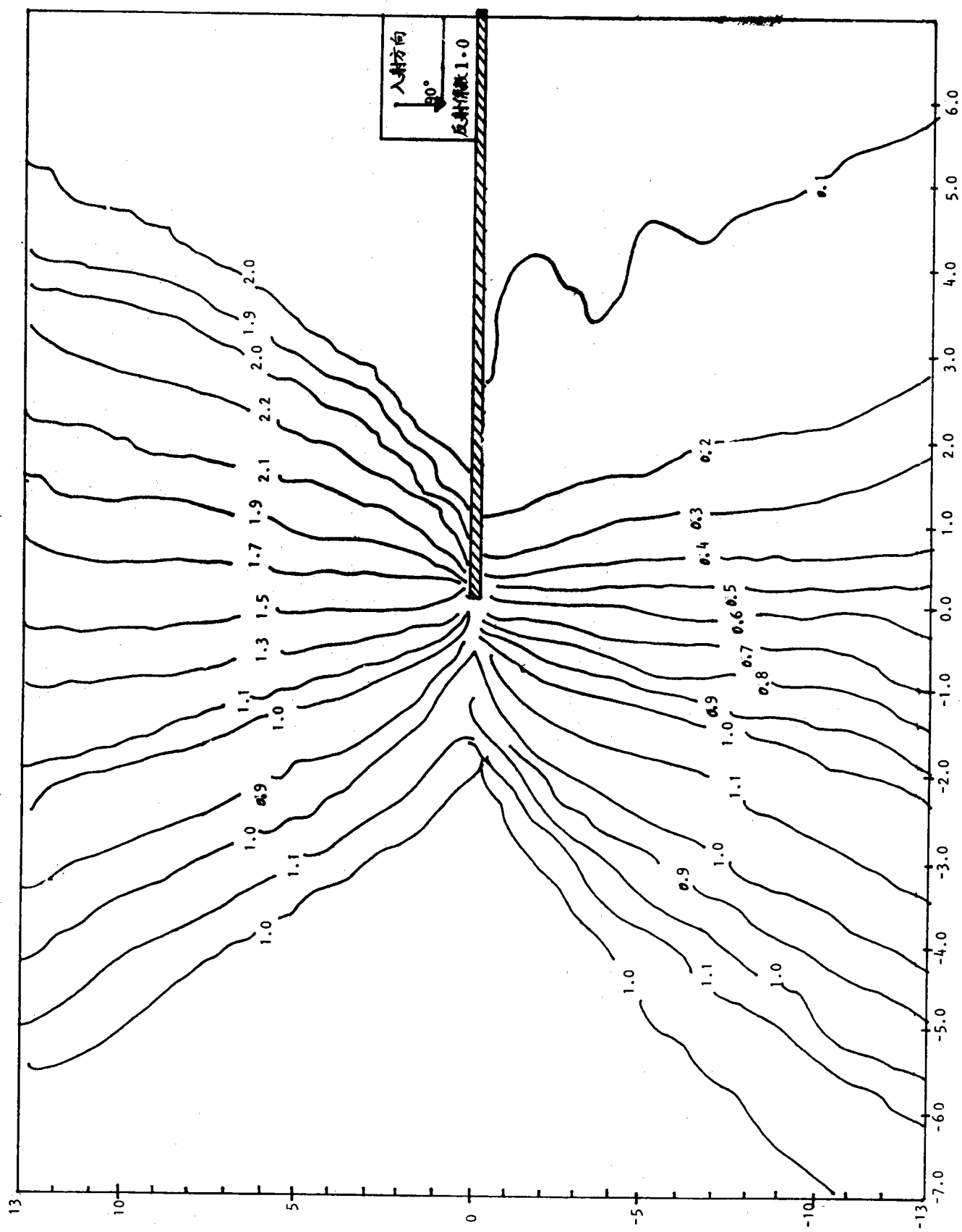
四、討論及建議

(一) 討論

1. 對半無限長防波堤配置，我們可應用 Sommerfeld solution 原理（對不同堤的反射係數及入射角）求得等繞射係數圖，由分析顯示堤背的波高分佈與入射角有關，而與反射係數大小關係甚微小，堤前波高分佈大小隨反射係數增大而增大。
2. 對有限長防波堤應用 Sommerfeld solution 及重疊原理可求得等繞射係數圖，由分析顯示堤前波高分佈大小與反射係數大小成正比關係，堤背則與反射係數關係甚微小。
3. 對簡單配置之單開口防波堤繞射解，其港內波高分佈狀況與入射角關係甚大。我們可利用 Sommerfeld solution 及重疊原理求得其繞射解。
4. 對較複雜港口之防波堤及邊界之配置問題，我們可分解為各類型簡單配置型態，逐步計算。在計算過程為簡化整個運算步驟，對反射大於某固定次數之成份量我們可忽略之。
5. 對較複雜港口任意型態防波堤及邊界之配置問題，使用有限差分法是一個較普遍性適用的分析方法，惟此法需要較大的記憶、精確度及計算時間。
6. 有限元素法分析波浪繞射問題亦需要較大的記憶及精確度。

(二) 建議：

本所因大型電腦設備正購置中，目前僅能利用 HP-1000 迷你電腦，容量太小，程式設計僅能分析較簡單配置港口之防波堤及邊界條件，來印證理論之結果。對較複雜港口防波堤配置問題，等大型電腦購置後，需再做進一步的研究。



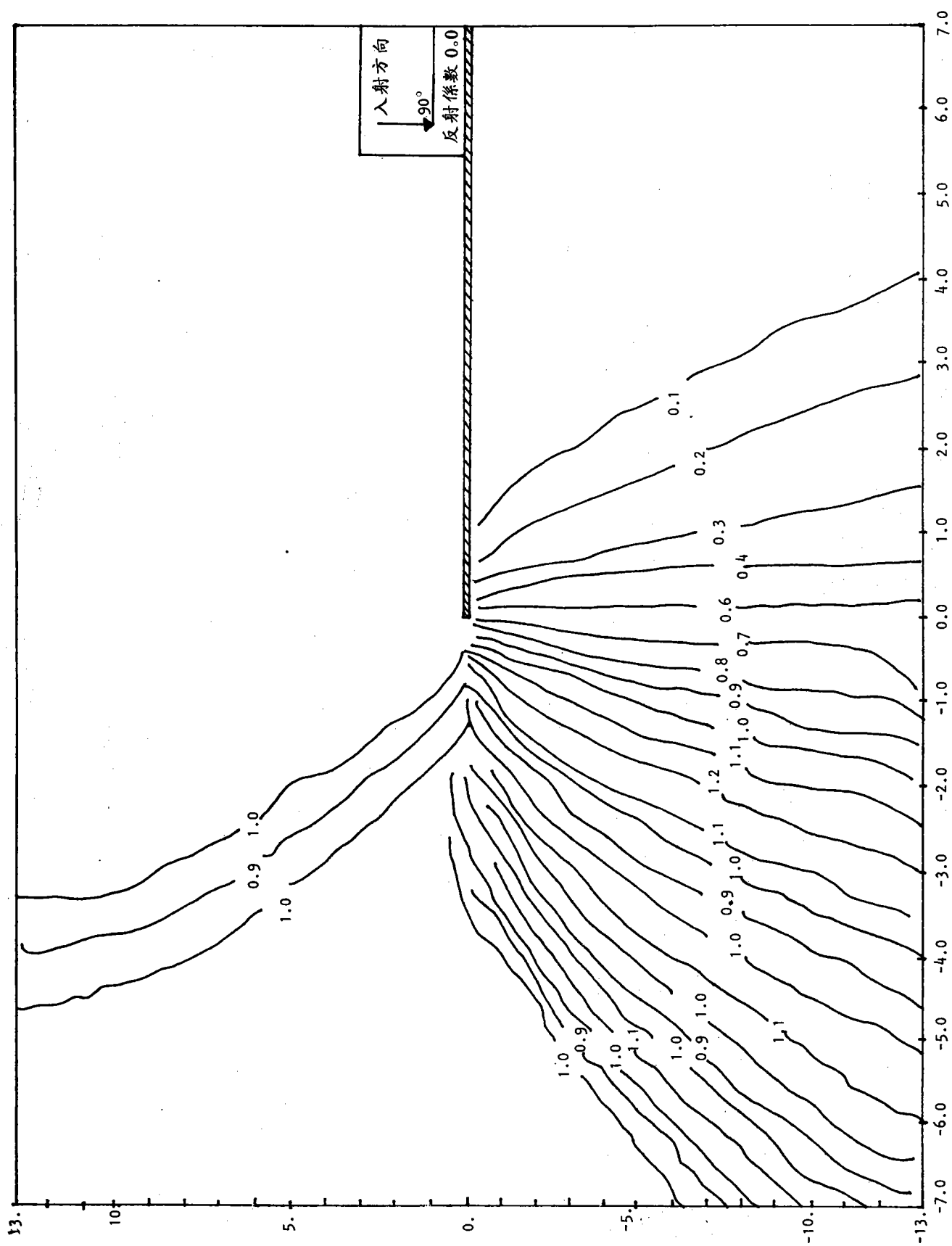


圖 2—12 半無限長防波堤等繞射係數線圖 (入射角 90 度, 反射係數 0.0)

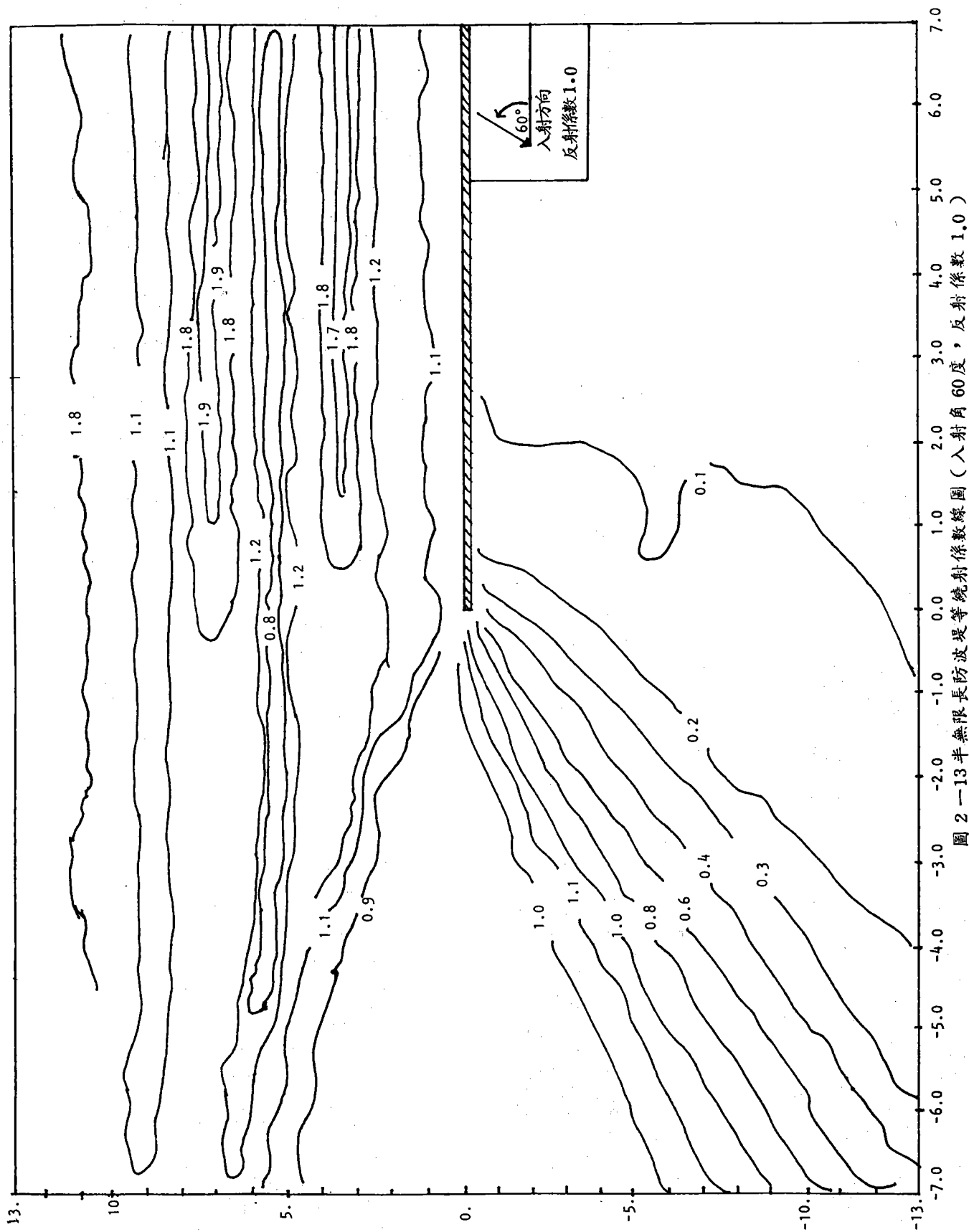


圖 2-13 半無限長防波堤等繞射係數線圖 (入射角 60° ，反射係數 1.0)

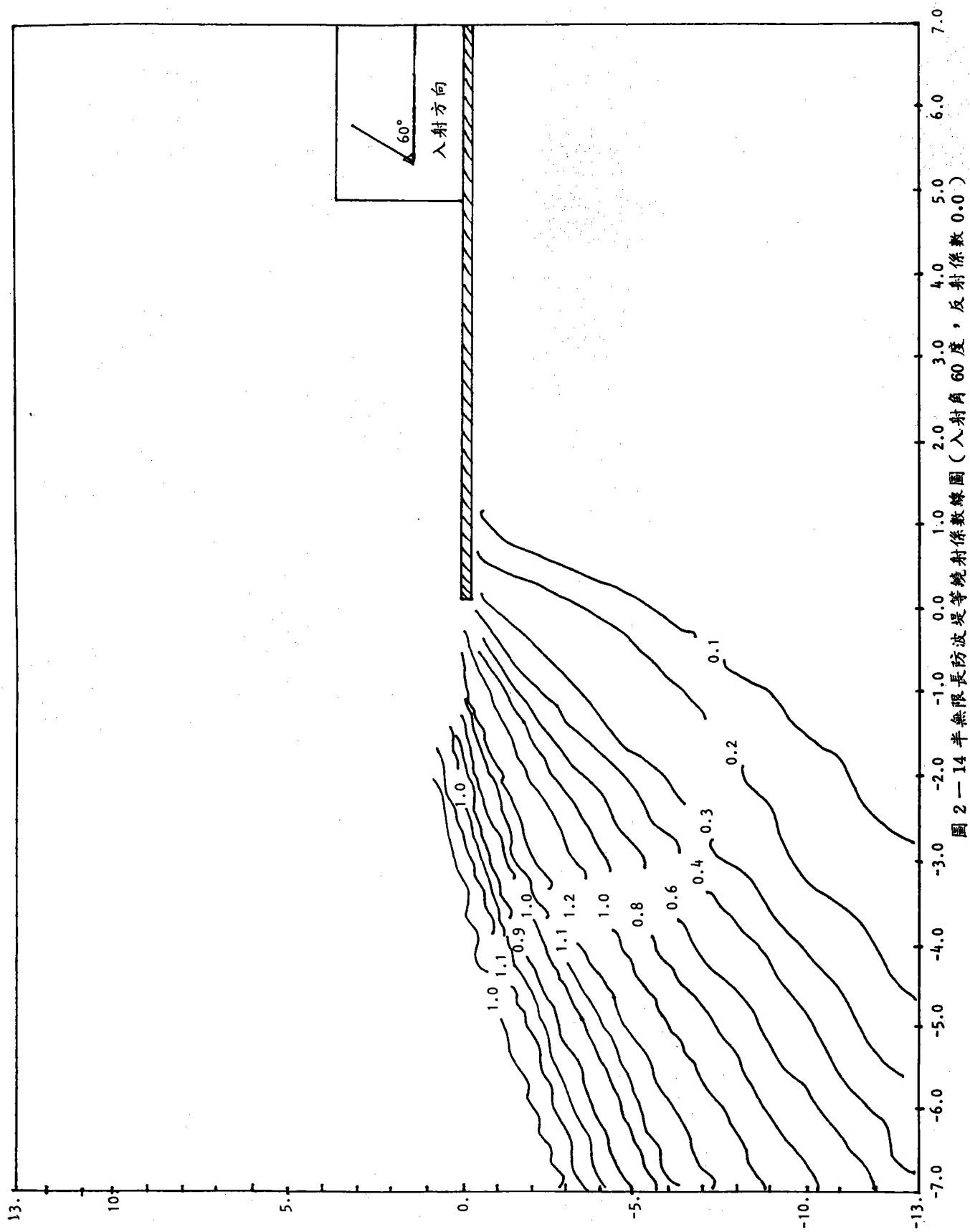


圖 2-14 半無限長防波堤等繞射係數線圖 (入射角 60 度, 反射係數 0.0)

入射角
 $\downarrow$
 90°
 反射係數 1.0

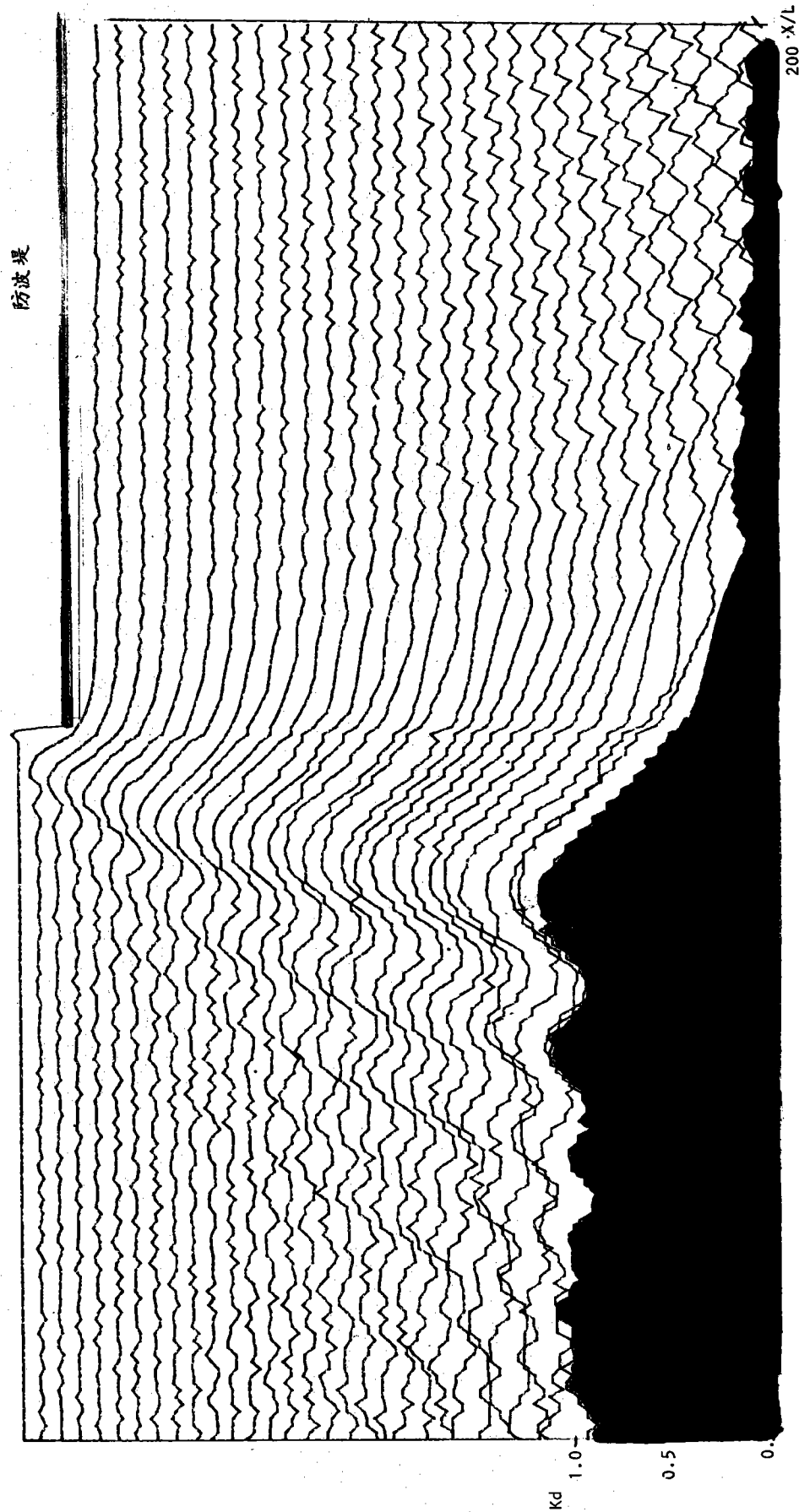
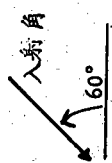


圖 2-15 半無限長防波堤等繞射係數線圖 (入射角 90° 、反射係數 1.0)



反射係數 1.0

防波堤

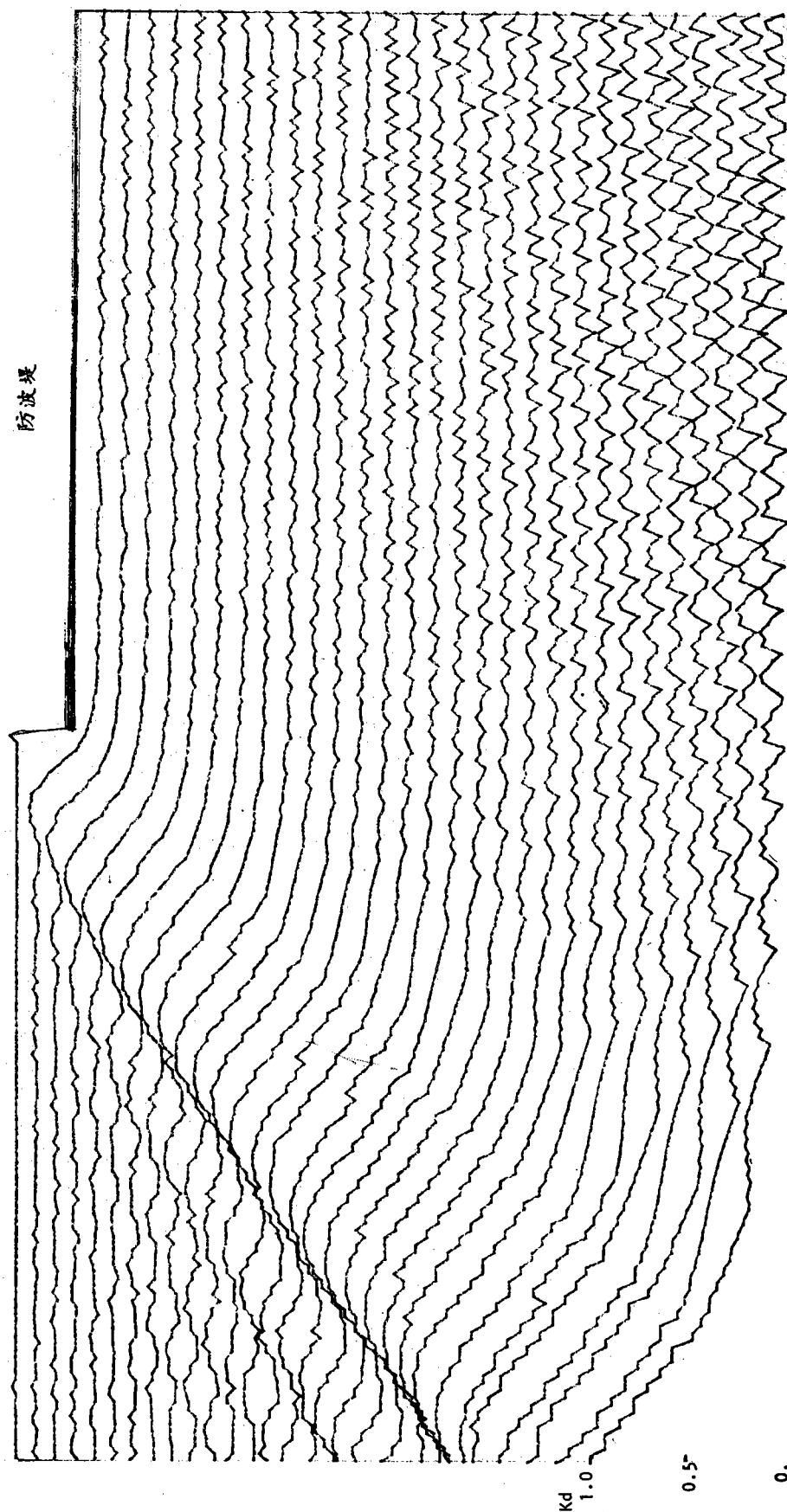


圖 2-16 半無限長防波堤等繞射係數線圖 (入射角 60 度、反射係數 1.0)

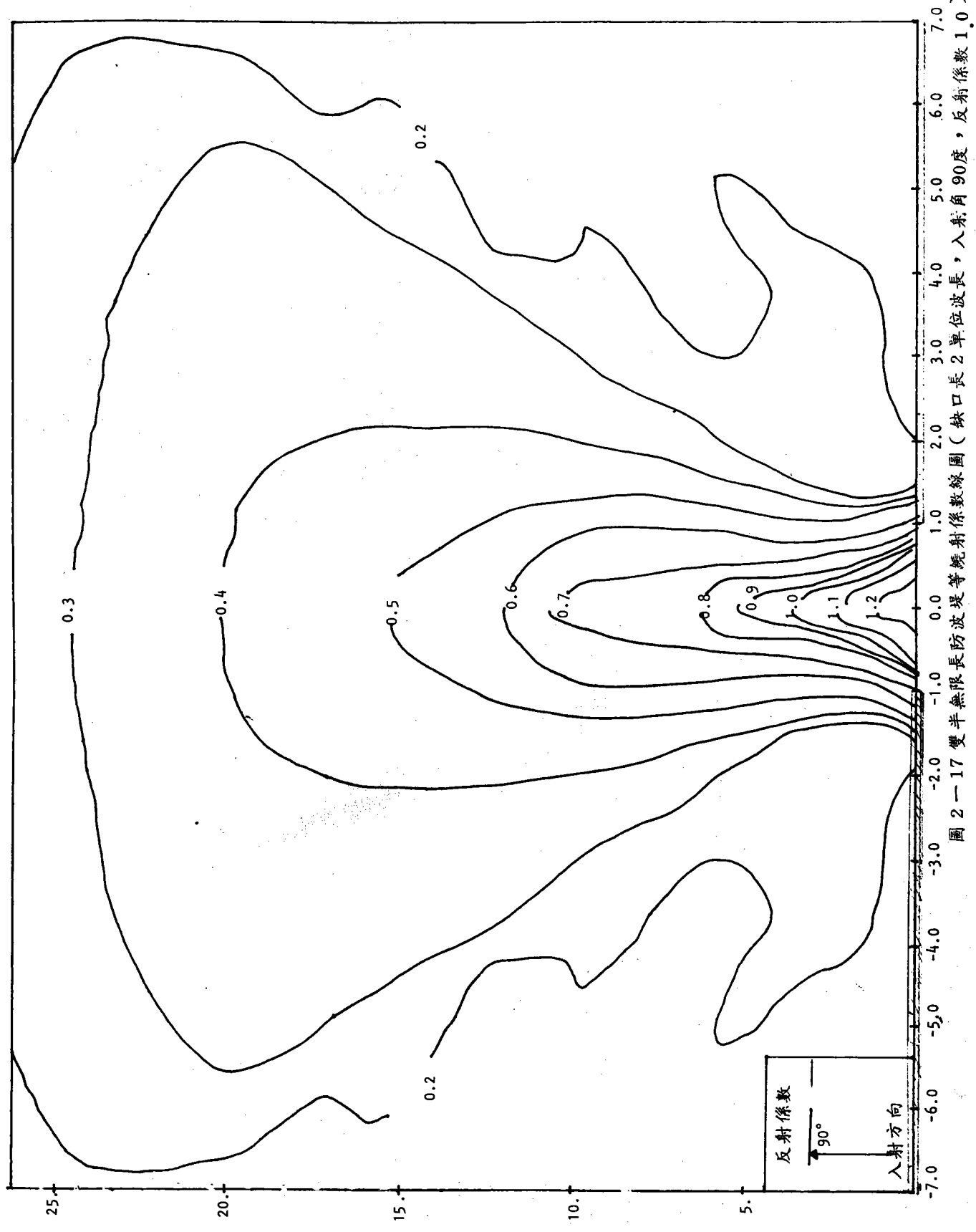


圖 2-17 雙半無限長防波堤等繞射係數線圖 (缺口長 2 單位波長, 入射角 90 度, 反射係數 1.0)

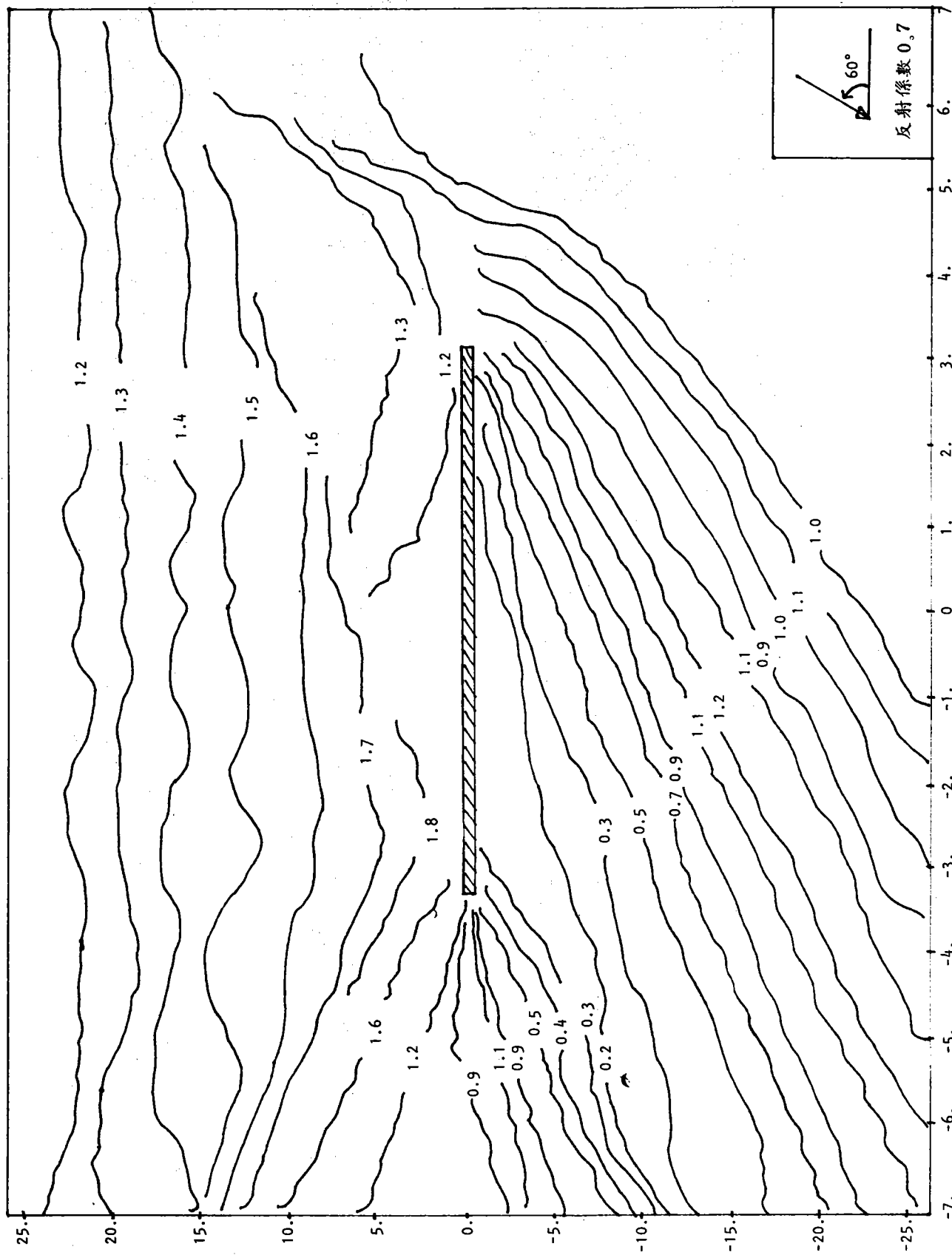


圖 2-18 有限長防波堤等繞射係數線圖 (堤長 6 單位波長, 入射角 60 度, 反射係數 0.7)

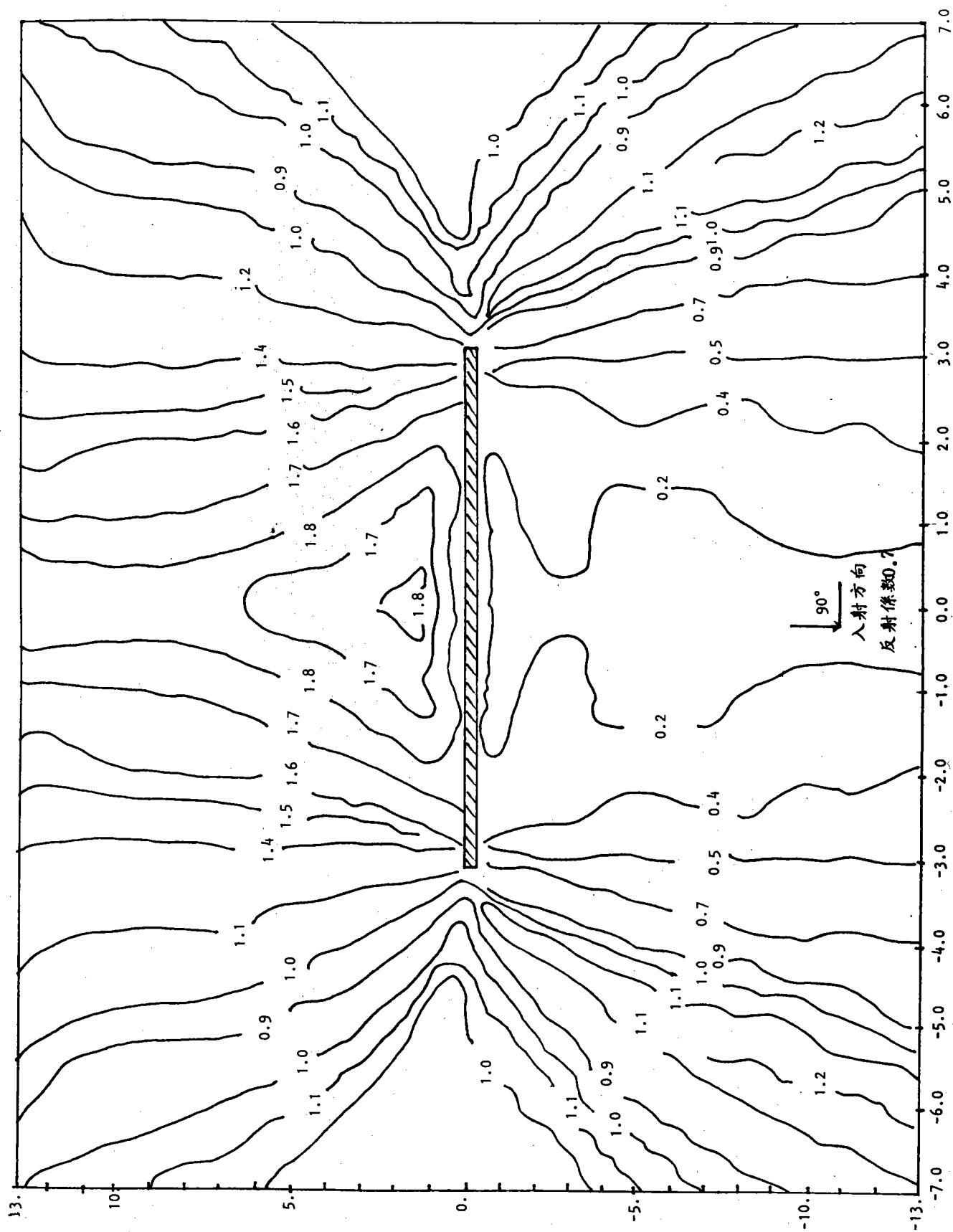


圖 2-19 有限長防波堤等繞射係數圖 (堤長 6 單位波長，入射角 90 度，反射係數 0.7)

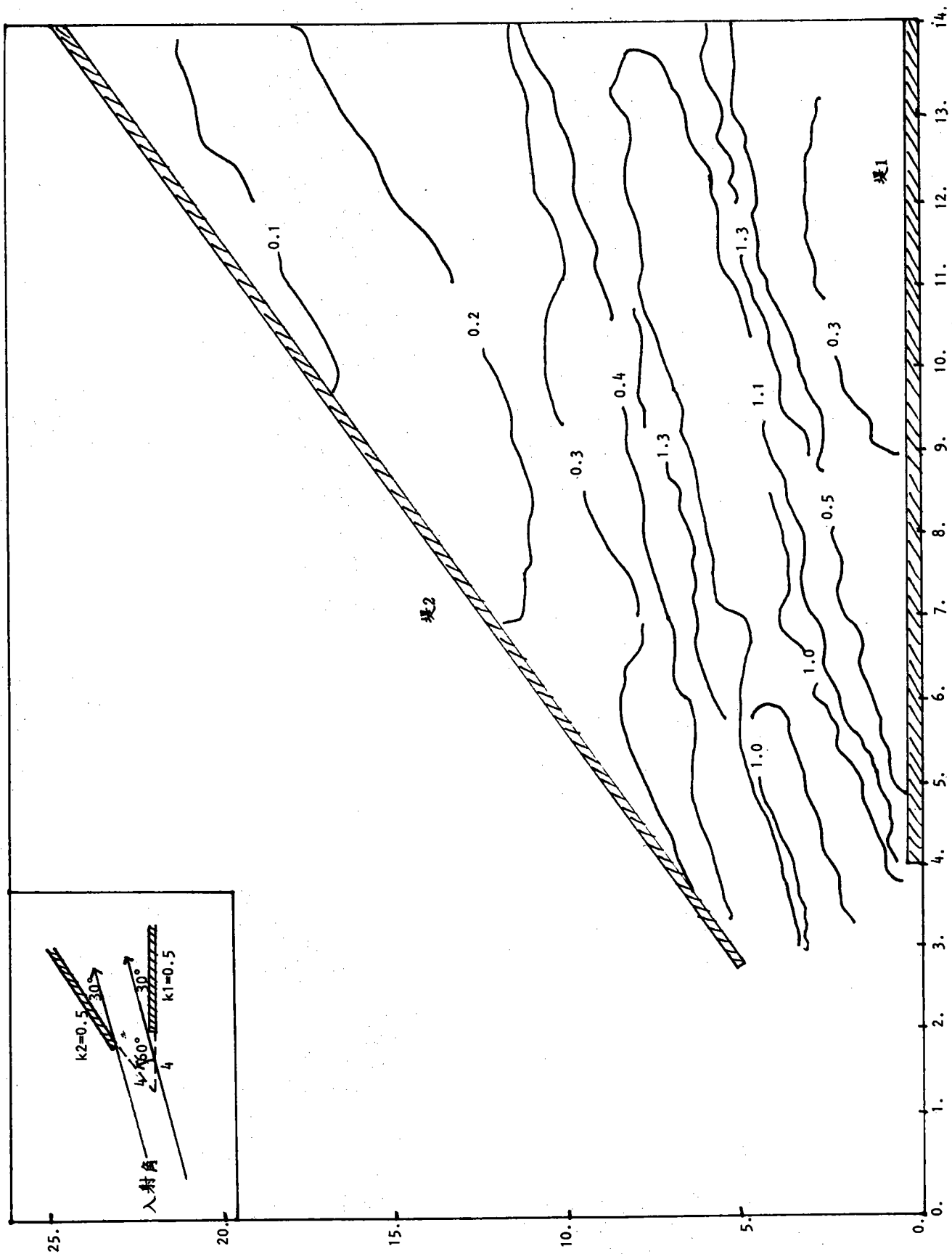


圖 2-20 缺口雙半無限長防波堤等線射線係數圖 (二堤夾角 60° ，入射角 30° (與堤 1)，堤 1 及堤 2 反射係數皆為 0.5))

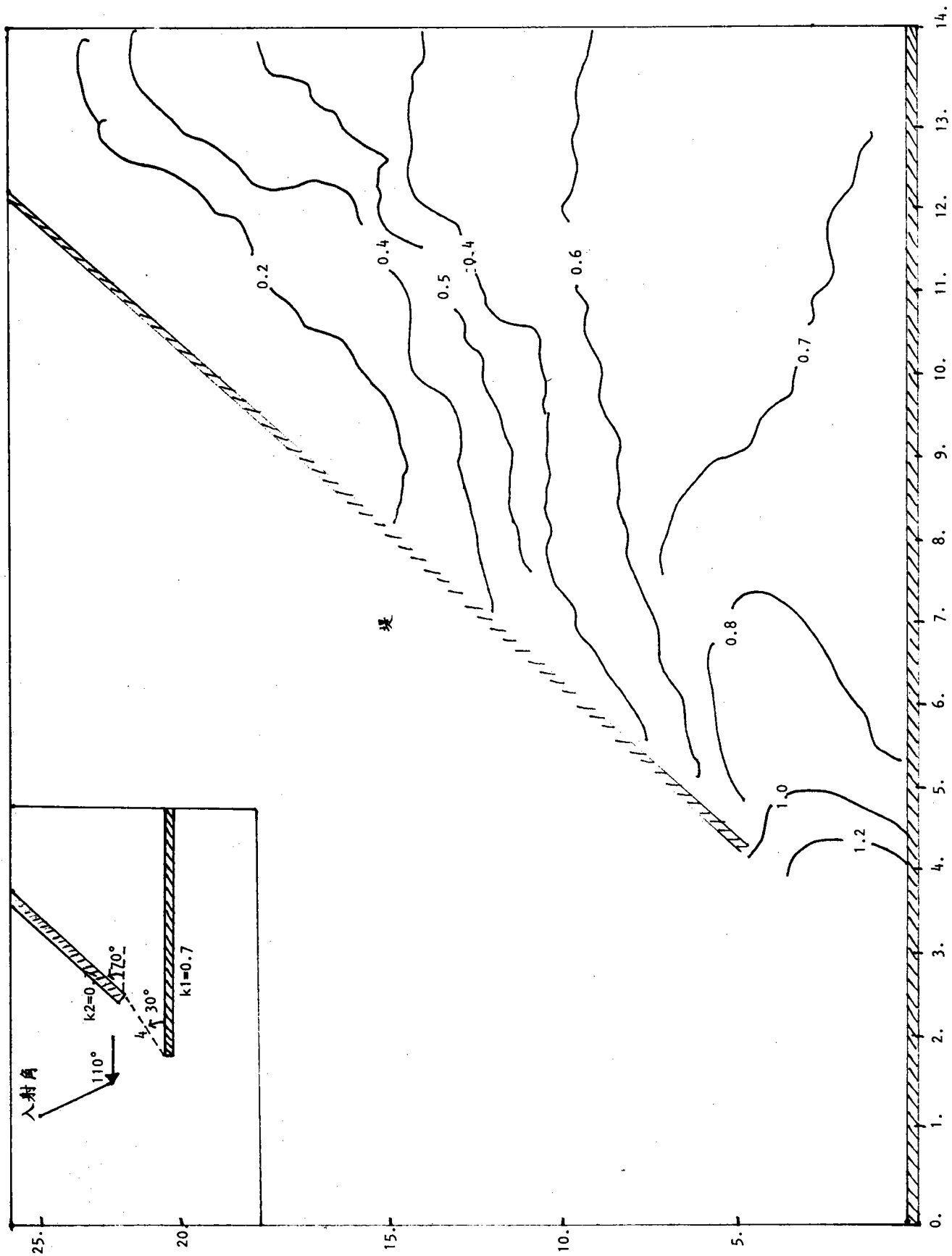


圖 2—21 型態(b)缺口式二半無限長防波堤等繞射係數圖(缺口長 4 單位波長缺口夾角 30 度, 二堤夾角 70 度, 入射波 110 度)

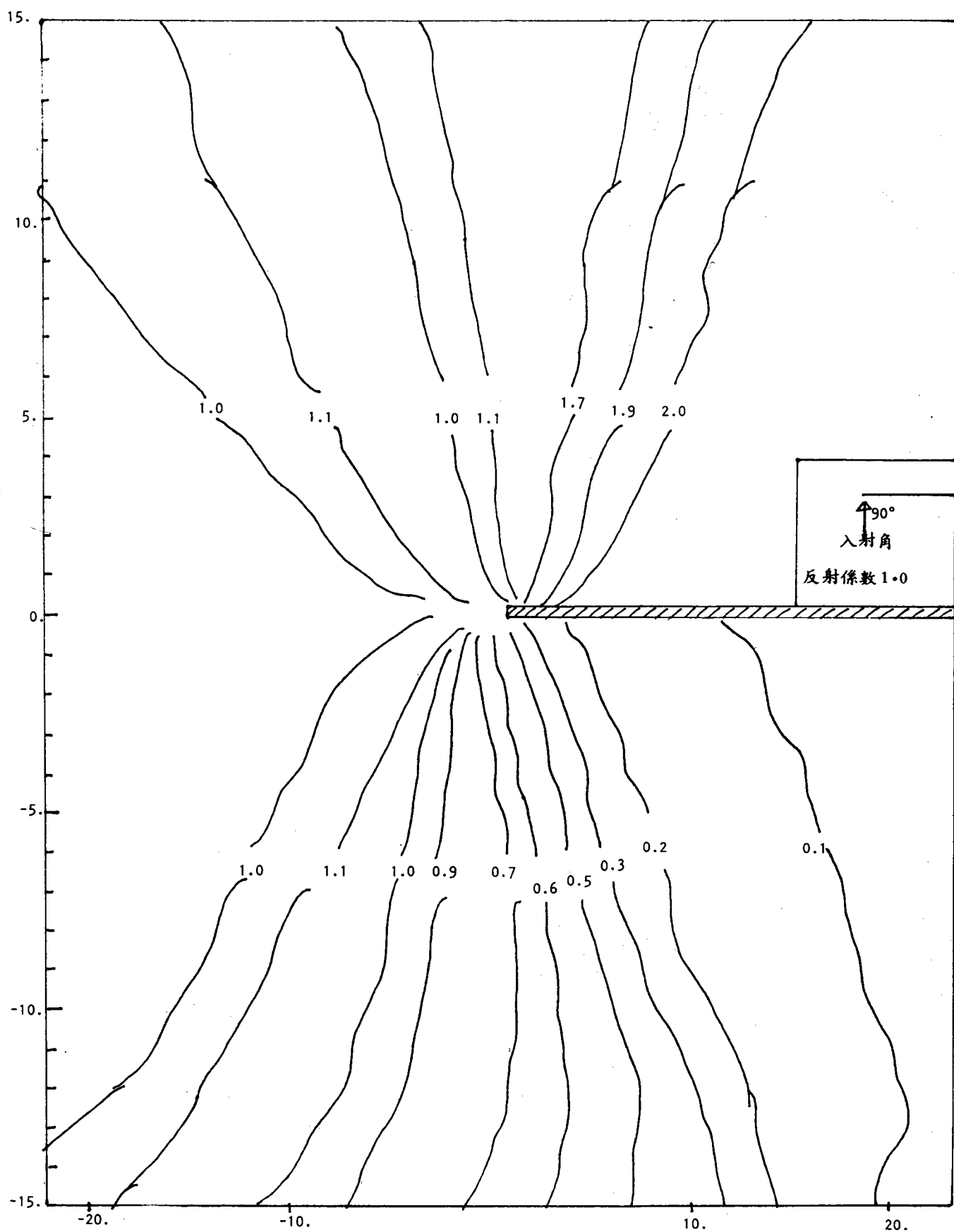


圖 2-22 有限差分法半無限長防波堤等繞射係數線圖 (入射角 90 度、反射係數 1.0)

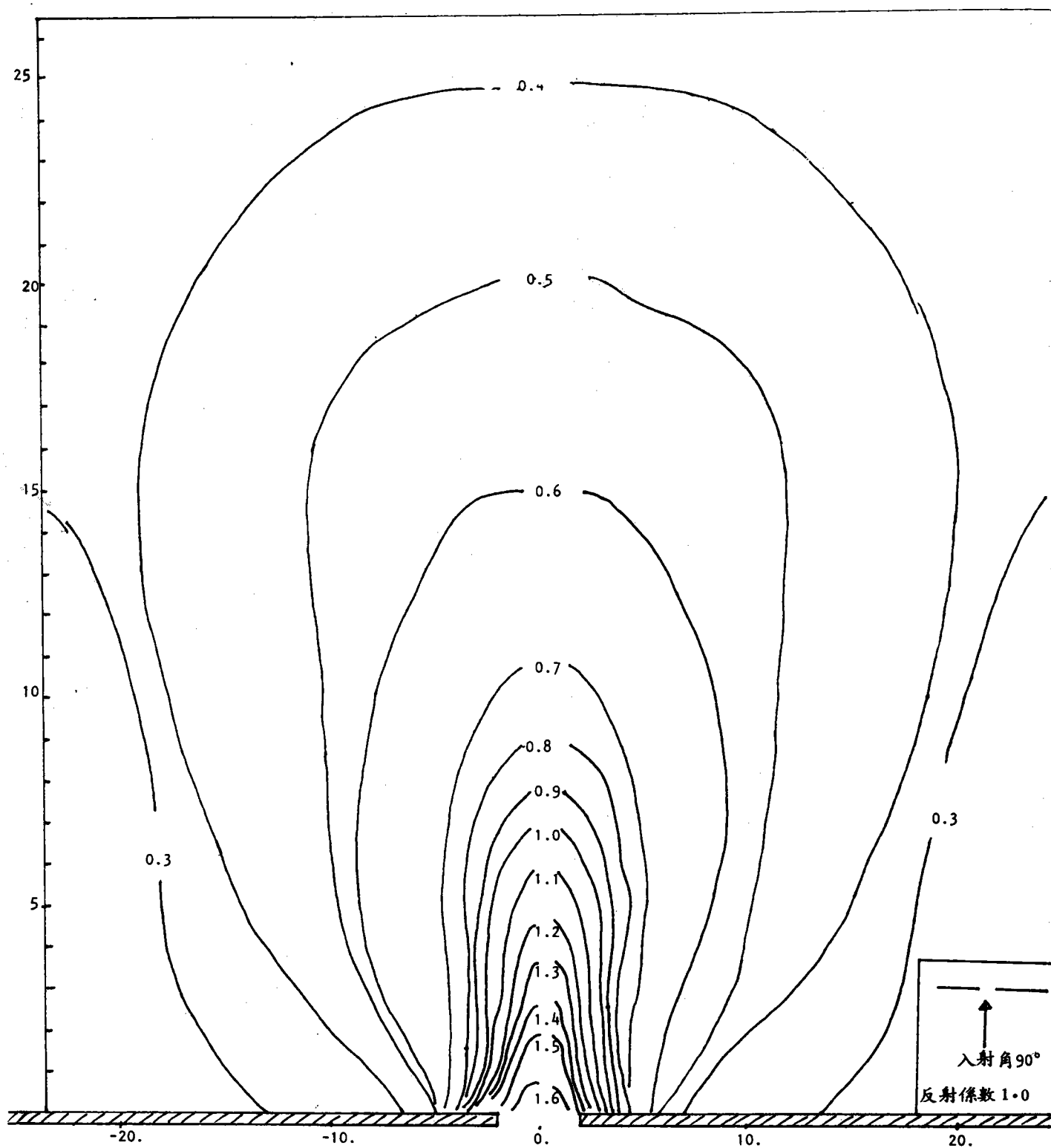


圖 2—23 有限差分法雙半無限長防波堤等繞射係數線圖 (缺口長 4 單位波長・入射角 90 度、反射係數 1.0)

叁、電腦繪等深線及等波高線研究

一、前言

本所使用電腦於試驗室自動化已有數年歷史，由於年前增設繪圖機（PLOTTER）及銀幕式繪圖終端機（GRAPHIC TERMINAL）乃興起利用遮蔽試驗結果以電腦自動繪製波浪分佈圖，配合本組之基本研究「波浪折射繞射及淺化數學模式研究」需利用電腦繪製等高線圖，乃決定自行發展一套等高線繪圖程式集，由於等高線之繪製需甚多軟體技巧，為使整個發展過程順利成功，除在發展前參考甚多電腦用書外，國外雜誌亦涉獵不少，而於發展時更引用了結構化程式設計的觀念。在整個發展過程，文件（documentation）的忠實紀錄、保存亦發揮了極大的功能。本程式集之得以順利發展成功，軟體發展技巧之引用實為最重要的因素，因此本文於介紹此等高線繪製程式集之同時，亦列舉這些軟體技巧之被引用情形，以供對電腦有興趣之同仁參考。

二、繪製等高線的基本觀念

根據一本名為「測量及其相關名詞之定義」的國外書籍對等高線的定義，所謂等高線乃是位於地面上的一條想像的線，線上所有的點皆代表同一高度。

繪製等高線時所用的資料可以是散亂的（RANDOM）或是被方格化的（GRIDDED），但是在以電腦處理的立場而言，被方格化的資料是較容易處理的，目前已有數種方法可以將散亂的資料予以方格化，由於這個主題並非本文的研究範圍，因此暫且不談，僅就繪製等高線的基本觀念以實例說明如下：

（一）實例

情況說明如圖 3 - 1 為一被方格化的資料，此方格將為 0.5 的等高

有前後關係，有次序性的資料，本文乃決定以 Linear list 或稱 Link List 來作為等高線的資料結構。

四、本程式集所使用的軟體發展技術

本程式集的發展採用結構化的設計方法，使所有的功能被一一的模組化 (Modulize)，如此一來整個程式集顯得非常容易了解及維護，在設計階段，所有的功能 (function) 皆係依據一詳細的規範格式來設計及編寫文件 (documentation)，其格式如表(一)。

當所有的功能皆設計完成後才開始 coding 及測試的工作，由於 documentation 製作嚴謹、資料結構選擇恰當，對整個問題的分析完整，使得整個程式集的發展非常順利而且圓滿。

五、程式發展架構與功能解說

在說明本程式集之前必須先行介紹整個系統的流程 (SYSTEM FLOW CHART)。如圖 3 - 3。

整個系統可明確的劃分為四大部份，即資料輸入、計算分析、結果輸出、繪製圖形，其中資料輸入部份係將已方格化的資料及希望繪製的等高線高程輸入此系統，然後再行依各方格逐一計算分析，並將等高線之座標以數學型態輸出至磁碟檔內，第四部份即啟動一繪圖程式去找取磁碟檔內的計算結果，將其以圖形方式繪製出來，在此四大部份中，以第二部份最為重要，其功能流程圖及模組架構如圖 3 - 4 及圖 3 - 5 所示。

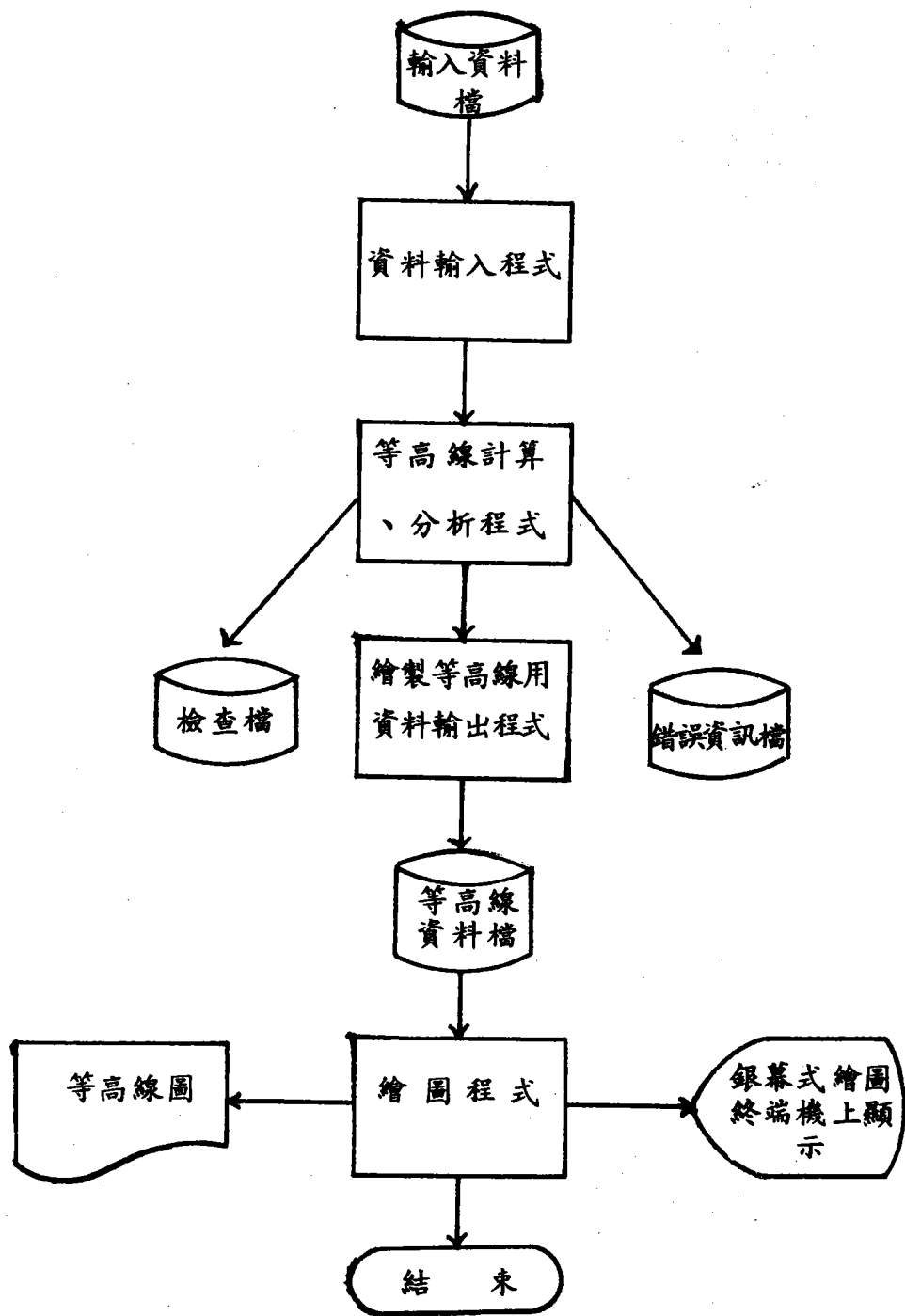


圖 3 - 3 系統流程圖

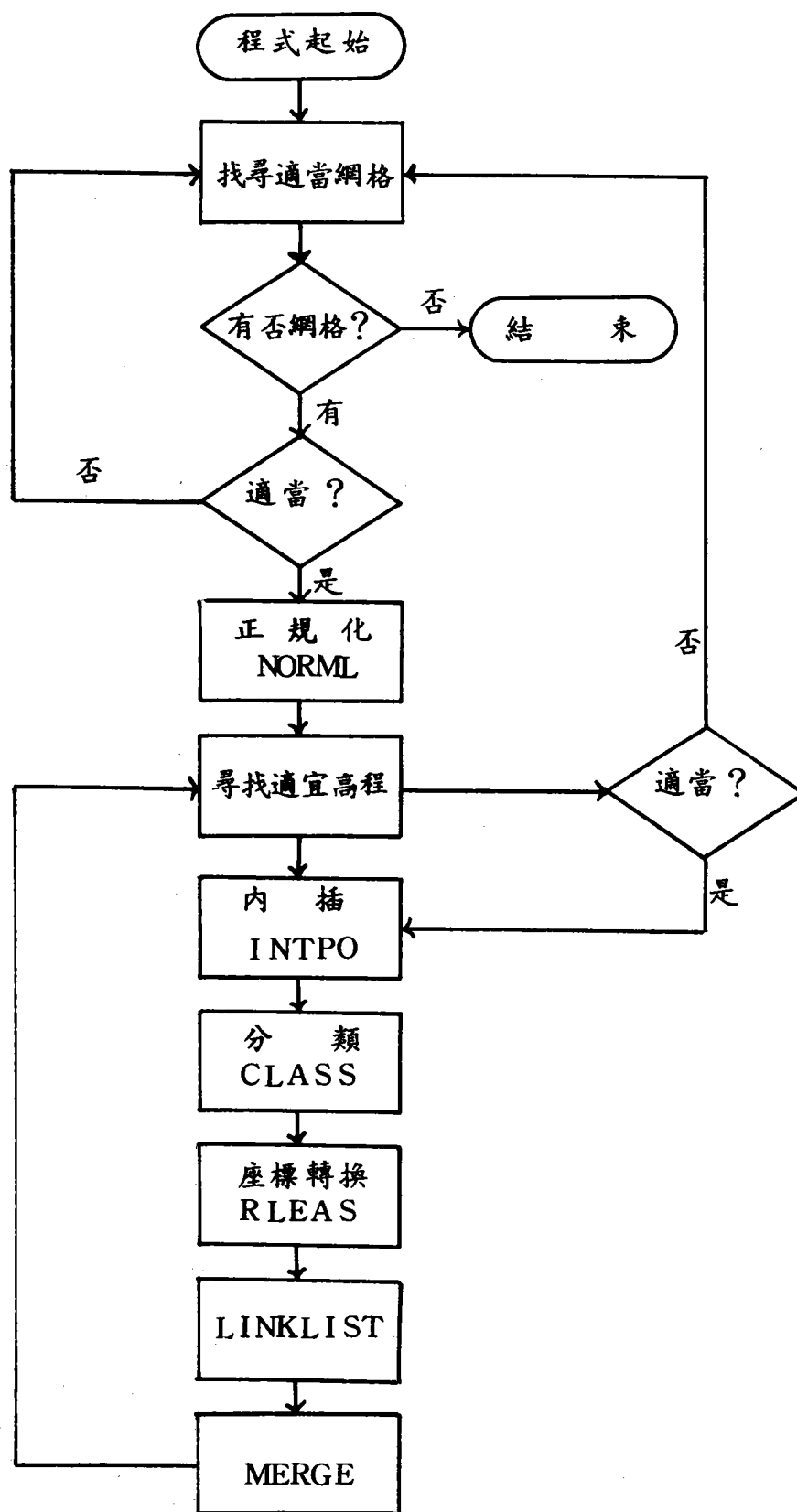


圖 3 - 4 等高線計算分析功能流程圖

<u>CODE</u>	<u>NAME</u>
S 1	ANALYZE
S 2	DATAIN
S 3	CONTOUR
S 4	SORTGD
S 5	NORMAL
S 6	INTERPOLATE
S 7	CLASSIFY
S 8	SINGLE
S 9	DOUBLE
S 10	RELEASE
S 11	LINKLIST
S 12	ONEPT
S 13	POP
S 14	TWOPT
	POP
S 15	TRIPT
	TWOPT
	POP
S 16	MERGE
S 17	COMPARE
S 18	MERGE I
S 19	PUSH
S 20	MERGE 2
	PUSH
S 21	COMPLETE
	COMPARE
S 22	MERGE 3
	PUSH
S 23	DATAOUT
S 24	YCONP

圖 3 - 5 模組架構圖

於圖 3 - 7 中，左方格為一待正規化的方格，其最小值在角 3 的位置上，整個處理過程係希望利用平移及旋轉的技巧將角 3 移轉至角 1，依本例子而言，需反時針旋轉 180 度，並於 X 及 Y 方向各平移 + 1 個單位。當正規化完成後，內插的工作這才開始執行，由於等高線通過小方格的情況極其複雜，它可能以任何方式穿越小方格，為有效掌握所有可能的變化，決策表的應用實不可或缺，為方便分析整個問題，單元方格被區分為八大部份（如圖 3 - 6 所示），如果等高線通過角 1，在決策表（詳如表 3 - 1）上而言即屬第一種情況成立，此時 “ * ” 符號將被記在決策表上，同時標幟 1 也將被設定為 1（原來為 0），統計起來，類似這種的情況有 33 種之多，表中 N 及 M 為兩個輔助因子，用來協助分類此 33 種變化，其中 N 為標幟 1（Flag 1）～標幟 4（Flag 4）的總和，M 則為標幟 5～標幟 8 的總和。

$$N = \text{Flag 1} + \dots + \text{Flag 4}$$

$$M = \text{Flag 5} + \dots + \text{Flag 8}$$

接下來單元方程將為 CLASS 程式所分類，然後是 RLEAS 程式將單元方格上的資料轉移至原來的座標系統上，在 RLEAS 執行後，LNKLT 程式將所有相同高度的點聯結在一起（用 Linklist），Linklist 的使用也是 CONTOUR 程式集得以圓滿成功的一大關鍵，本程式集將用三個等級的 Linklist 交互使用而成。

（一）基本的 Linklist（也稱 Linklist A）其結構如圖 3 - 8 所示。

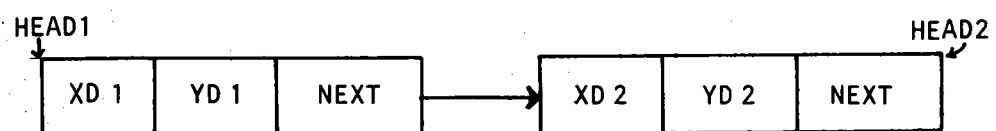


圖 3 - 8 LINKLIST A 示意圖

每一元素包含三個子元素，第一子元素為 XD 1 儲存某一高程等高線中某一點的 X 座標，第二子元素為 YD 1 儲存 Y 座標，第三子元素則

	CONDITION								CLASSIFICATION			
	1	2	3	4	a	b	c	d	N	M	N+M	TYPE
1 2 3 4	*								1		1	I
		*							1		1	
			*						1		1	
				*					1		1	
5 6 7 8	*	*							2		2	II
			*	*					2		2	
	*			*					2		2	
		*	*						2		2	
9 10	*		*						2		2	III, IV
		*		*					2		2	
11 12 13 14 15 16					*			*		2	2	V
					*	*				2	2	
						*	*	*		2	2	
							*	*		2	2	
					*		*			2	2	
						*		*		2	2	
17 18 19 20 21 22		*					*		1	1	2	VI
		*						*	1	1	2	
			*		*			*	1	1	2	
			*		*			*	1	1	2	
				*	*				1	1	2	
				*		*			1	1	2	
23 24 25		*					*	*	1	2	3	VII
			*		*			*	1	2	3	
				*	*	*			1	2	3	
26 27		*	*					*	2	1	3	VIII
			*	*	*				2	1	3	
28 29 30 31	*	*	*						3		3	VIV
		*	*	*					3		3	
	*		*	*					3		3	
	*	*		*					3		3	
32	*	*	*	*					4		4	X
33					*	*	*	*		4	4	XI

表 3 - 1 决策表

儲存對應此點的下一點的位址資料，如此，此一元素方能與下一元素聯結在一起，每一個基本 Linklist 皆有頭尾兩個指標（pointer）指 HEAD 1 及 HEAD 2。

(二)中級 Linklist（也稱 Linklist B），其結構如圖 3 - 9 所示。

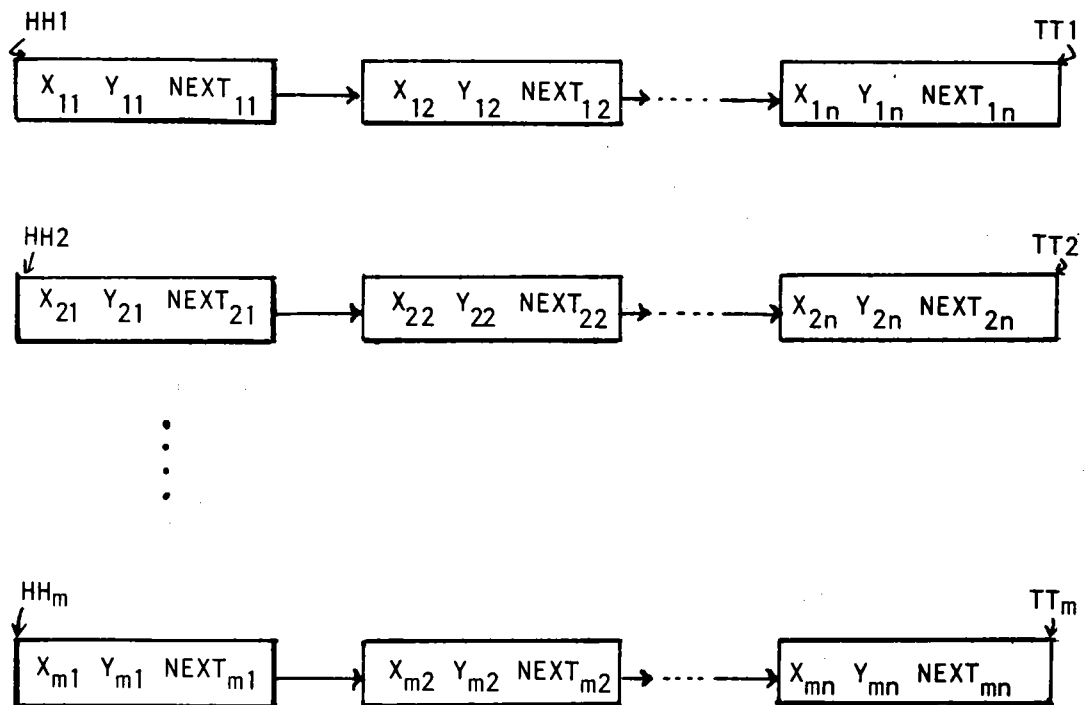


圖 3 - 9 LINKLIST B 示意圖

中級 Linklist 與基本 Linklist 在本質上完全一樣元素中的內涵亦相同，其最大的差異在中級 Linklist 係由 Merge 基本 Linklist 而產生的，每一高度的等高線可能不只一條，因此，其中級 Linklist 可能不止一條。

(三)高級 Linklist，也稱 Linklist c 如圖 3 - 10，在此等級，Linklist 的內涵不再是等高線點的座標而係各等高線的頭尾指標（pointer），其第三項子元素仍為指向下一組元素的指標。

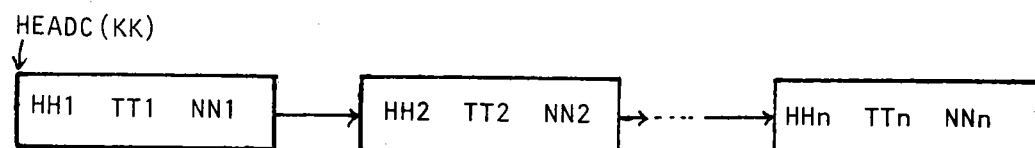


圖 3 - 10 LINKLIST C 示意圖

總而言之，若此程式需繪製一有 8 個高程 (level) 的等高線時，由 HEADC (KK) 所帶領的線應有八條，若某一 HEADC (KK) 所帶領的 Linklist 的元素有 6 點，表示此一高程有 6 條互不相接各自獨立的等高線。

在本程式集中 LNKLT, MERGE 及 CMPLT 是完成上述三級 Linklist 的主要副程式。

六、等高線繪圖程式集之使用解說

本程式集之使用依程式執行限制、網格及基本資料輸入、程式執行程序及應用實例四部份說明如下：

(一) 程式執行限制

本程式集之初稿係在 IBM3031 上發展，經過修正後移轉至 HP 1000 RTE IV B 上，由於 HP1000 尚無 Virtual Memory 的功能乃利用其 EMA 特性將所有網路資料以 COMMON 方式儲存於 EMA 內而與程式主體分開，經過試用結果，程式主體僅佔 12 PAGE 即 24 KB，網格資料部份在 1500 點的情況下需 24 PAGE 即 48 KB，若網格數增加僅需修正程式中之 COMMON 內之 ARRAY 數即可，其增加數最大不可超過一個 mother Partition 扣除第一個 Child partition 所佔的記憶空間。

(二) 網格及基本資料輸入

本程式集之資料輸入格式 (或稱檔案結構)，詳如表 3 - 2 所示，其輸入實例詳如表 3 - 3。

檔案名稱 Logic Code	資料種類 Type of Record	變數名稱 Variable Name	格 式 FORMAT	位 置 COLUMN	註 解 COMMENT
#ANALY (4)	第一類	NXSA NYSA IDX DELXY XOR YOR	I4 I4 I4 F4.1 F4.1 F4.1	1-4 5-8 9-12 13-16 17-20 21-24	x 方向繪圖範圍點數 y 方向繪圖範圍點數 等高綫之種類 方格間距 原點座標 (x 向) 原點座標 (y 向)
	第二類 I=1,IDX	LEVEL(I)	F4.0		欲繪等高綫之高程
	第三類	GD(I,J) J=NYSA,1,-1 I=1,20	F4.0		網格資料

表 3 - 2 輸入資料檔案結構表

表 3-3 輸入資料實例

[illegible]

(三) 程式執行程序

1. 依照本章第二節輸入資料檔案結構之格式準備輸入資料，並將其儲存於磁碟內檔名設定為 # ANALY。

2. CREAT 一個程序檔 (procedure file)

如下：

: S L , 4 , # ANALY , RE

: S L , 6 , ? ERR , WR

: S L , 7 , ? ANY , WR

: S L , 8 , ? DTO , WR

: R U , ANALY

: C S , 6

: C S , 7

: C S , 8

: C S , 4

: T R

3. 於執行此程序檔後，繪圖所需的資料皆已建於 ? DTO 檔內，此時只需執行 YCONP 程式即可將等高線圖繪於 PLOTTER 上。其繪圖實例，如圖 3 - 11。

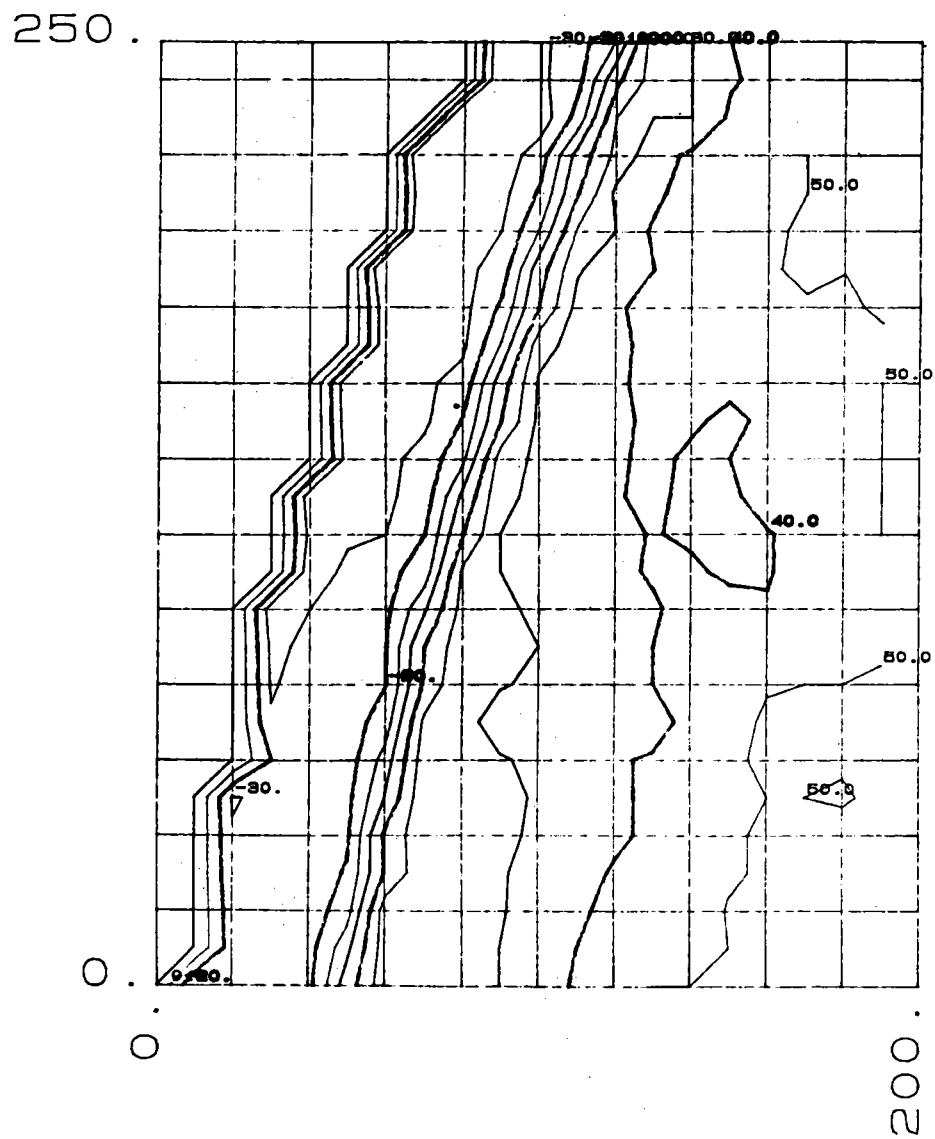


圖 3 - 11 等高線繪圖實例

肆、結論與建議

(一) 結論

綜合前述三部份研究結果，本研究計劃可獲致下列結論：

- (1) 海流對波浪折射角、波長、波高等變化有加強或減少作用，其影響程度視波向、流速而定。當流向與波向夾角小於 90° 時，海流使波長增加，波速加快，波高減小，而折射角增加；反之當夾角大於 90° 時，波長減短，波速減慢、波高加大、折射角減小，此種結果與物理現象吻合。
- (2) 當海流無因次流量 $q^* (= \frac{hu}{C_0 L_0})$ 較小時，波浪折射角，波長、波高變化主要受地形影響，而當海流無因次流量 q^* 值較大時，則海流影響大於地形影響，此結果與擴散關係一致。
- (3) 對半無限長防波堤配置吾人可應用 Somerfeld solution 原理求得無繞射係數圖，對有限長防波堤則吾人可應用 Somerfeld solution 及重疊原理求得等繞射係數圖。
- (4) 對簡單配置之單開口防波堤繞射解，其港內波高分佈狀況與入射角關係甚大，吾人亦可利用 Somerfeld solution 之重疊原理求得其繞射解；對較複雜港口之防波堤及邊界之配置問題，吾人可分解為各類型簡單配置型法，逐步計算而使用有限差分法則係一個較普遍性適用之分析方法，惟此法需要較大的記憶、精確度及計算時間。
- (5) 本文研究成果亦可提供吾人爾後利用電腦繪製海岸地形等深線及波浪折射繞射等波高線分佈繪圖之參考。

(二) 建議

- (1) 本研究目前因本所電腦設備容量不足，因此僅着手於較規則地形及恒

向海流之研究，對較複雜地形及海流與對較複雜港口防波堤配置問題等需再作進一步研究。

(2)有關兩波向線相交情況下波浪變化之研究亦有待作進一步檢討。