

內 容

圖目錄

表目錄

符 號

摘 要

英文摘要

壹、前言

貳、理論分析

叁、資料分析及討論

肆、結論及建議

參考資料

致 謝

附 錄

圖 目 錄

圖 1 台中港港口附近測站位置圖

圖 2 流速儀安裝圖

圖 3-1 測站 B 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 自相關及偏自相關函數圖

圖 3-2 測站 B 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 第一次差分自相關及偏自相關函數圖

圖 3-3 測站 B 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 第二次差分自相關及偏自相關函數圖

圖 3-4 測站 B 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 殘差值自相關及偏自相關函數圖

圖 3-5 測站 B 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 實測值與推定值比較圖

圖 4-1 測站 B 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 9.日) 自相關及偏自相關函數圖

圖 4-2 測站 B 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 9.日) 第一次差分自相關及偏自相關函數圖

圖 4-3 測站 B 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 9.日) 第二次差分自相關及偏自相關函數圖

圖 4-4 測站 B 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 9.日) 殘差值自相關及偏自相關函數圖

圖 4-5 測站 B 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 9.日) 實測值與推定值比較圖

圖 5-1 測站 B 夏季 (71.年 5.月 3.日 ~ 5.月 18.日) 自相關及偏自相關函數圖

圖 5-2 測站 B 夏季 (71.年 5.月 3.日 ~ 5.月 18.日) 第一次差分自相關及偏自相關函數圖

圖 5-3 測站 B 夏季 (71.年 5.月 3.日 ~ 5.月 18.日) 第二次差分自相關及偏自相關函數圖

圖 5-4 測站 B 夏季 (71.年 5.月 3.日 ~ 5.月 18.日) 殘差值自相關及偏自相關
函數圖

圖 5-5 測站 B 夏季 (71.年 5.月 3.日 ~ 5.月 18.日) 實測值與推定值比較圖

圖 6-1 測站 C 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 4.日) 自相關及偏自相關函數圖

圖 6-2 測站 C 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 4.日) 第一次差分自相關及偏自
相關函數圖

圖 6-3 測站 C 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 4.日) 第二次差分自相關及偏自
相關函數圖

圖 6-4 測站 C 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 4.日) 殘差值自相關及偏自相關
函數圖

圖 6-5 測站 C 冬季 (70.年 11.月 19.日 ~ 12.月 4.日) 實測值與推定值比較圖

圖 7-1 測站 C 夏季 (71.年 4.月 29.日 ~ 5.月 13.日) 自相關及偏自相關函數圖

圖 7-2 測站 C 夏季 (71.年 4.月 29.日 ~ 5.月 13.日) 第一次差分自相關及偏自
相關函數圖

圖 7-3 測站 C 夏季 (71.年 4.月 29.日 ~ 5.月 13.日) 第二次差分自相關及偏自
相關函數圖

圖 7-4 測站 C 夏季 (71.年 4.月 29.日 ~ 5.月 13.日) 殘差值自相關及偏自相關
函數圖

圖 7-5 測站 C 夏季 (71.年 4.月 29.日 ~ 5.月 13.日) 實測值與推定值比較圖

圖 8-1 測站 D 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 自相關及偏自相關函數圖

圖 8-2 測站 D 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 第一次差分自相關及偏自
相關函數圖

圖 8-3 測站 D 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 第二次差分自相關及偏自
相關函數圖

圖 8-4 測站 D 冬季 (70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日) 殘差值自相關及偏自相關

函數圖

圖 8-5 測站 D 冬季 (70 年 11 月 5 日 ~ 11 月 16 日) 實測值與推定值比較圖

圖 9-1 ~ 圖 9-6 海流流向、流速統計圖

圖 10-1 ~ 圖 10-5 海流向量行進圖

圖 11-1 ~ 圖 11-5 海流旋轉能譜圖

圖 12-1 B 站與 C 站冬季海流之互相關函數圖

圖 12-2 C 站與 B 站夏季海流之互相關函數圖

表 目 錄

表 2-1 定常模式之理論自相關和偏自相關函數

符 號

x_t : 時間序列 t 時之隨機變數

μ_t : 時間序列在 t 時之可定平均值

ε_t : 時間序列在 t 時之隨機誤差份量

$\{\phi_j\}$: 權重 (Weights)

B : 後運算子 (Backward-shift operator)

$\phi(B)$: 線性濾器 (linear filter) 為 B 之多項式函數

$E(x_t)$: 某一定常序列之平均值

γ_0 : 時間序列過程之方差值

$V(x_t)$: 時間序列過程之方差值

γ_k : 時間遲延為 k 之自協變異數 (auto-covariance)

ρ_{wz} : 兩隨機變數 w 和 z 之相關數

ρ_k : 時間遲延為 k 之自相關數 (autocorrelation)

$f(w, y, z)$: 三隨機變數 w , y 和 z 之聯合密度函數 (joint density function)

$h(w, y | z)$: 已知 z 值之 x 和 y 之條件分佈 (conditional distribution)

ϕ_{kk} : 時間序列第 k 個偏自相關數 (partial auto-correlation)

$AR(p)$: p 階自迴歸過程

$\{\phi_p\}$: p 階自迴歸過程之未知參數

$\phi_p(B)$: p 階自迴歸過程含 B 之多項式函數

$\tilde{x}_t$: 時間序列定義以自平均值 μ 之離差

$MA(q)$: q 階移動平均過程

$\{\theta_q\}$: q 階移動平均過程之未知參數

$\mathbb{H}_q(B)$: q 階移動平均過程含 B 之多項式函數

$\text{ARMA}(p,q)$: 混合自迴歸—移動平均過程

∇ : 差分運算子

$\text{ARIMA}(p,d,q)$: (p,d,q) 階之自迴歸積分移動平均過程

d : 表差分符號次數

$\text{IMA}(d,q)$: d 次差分 q 階之積分移動平均過程

$S(\hat{p}_k)$: 自相關係數之標準誤差

$S(\hat{\phi}_{kk})$: 偏自相關係數之標準誤差

$\hat{x}_t$: 表隨機變數 x_t 之預測值

$\{\omega_t\}$: 差分後之時間序列

N : 時間序列長度

e_t : 殘差值

Q : 奇方檢驗之統計量

$\hat{X}_{T+\tau}(t)$: 以 T 為原點所作時間為 $T + \tau$ 時之預測值

S : 季節性自迴歸過程每一季節具有之觀測值

$\{\lambda_i\}$: 季節性自迴歸過程參數

$\Lambda_p(B')$: 季節性 $\text{ARMA}(P,Q)$, 模式為 B' 之 p 次多項式

$\Gamma_Q(B')$: 季節性 $\text{ARMA}(P,Q)$, 模式為 B' 之 Q 次多項式

∇_s : 季節性差分運算子

$\{q_t\}$: 季節性模式中之白噪音過程

摘要

本文利用 Box-Jenkins 氏所發展之疊算過程以建立台中港口海流時流速之預報模式。文中分別利用本所在民國70.年冬季期間11.月5.日至11.月16.日，11.月19.日至12.月9.日以及民國71.年夏季期間4.月29.日至5.月13.日，5.月3.日至5.月8.日等，於台中港口B、C、D測站，根據流速儀RCM4所記錄之現場實測資料加以分析以導出模式，分析結果顯示，冬季期間各站海流時流速，可用 $ARIMA(0, 1, 1)$ 或 $IMA(1, 1)$ 模式 $\nabla X_t = (1 - B\theta)\epsilon_t$ 表示，即 $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ ；而夏季期間各站海流時流速可用 $ARIMA(0, 2, 1)$ 或 $IMA(2, 1)$ 模式 $\nabla^2 x_t = (1 - B\theta)\epsilon_t$ 表示，即 $x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ ，各模式推測值與實測資料之信賴度達95%以上，其中 θ 為參數，由實測資料推定，於台中港口處， θ 值介於0.18~0.42； x_t, x_{t-1}, x_{t-2} 分別表在時間為 $t, t-1, t-2$ 時之實測資料。同時文中並對該過程作一概略之描述。

利用該模式，除可迅速預測台中港口短期時流速以供港務局營運單位作為船舶進港時之參考資料外，尚可提供規劃及設計單位作有關流速資料缺失之補遺。

ABSTRACT

The recursive methods developed by Box-Jenkins are used to establish the ocean current ARIMA forecasting model at the vicinity of Taichung Harbor in this study. The forecasting models are derived from field data directly at B, C, and D stations (shown as Fig 1.) around Taichung Harbour by using AANDERAA RCM 4 current meters during the winter season (Nov. 5 - Nov. 16, Nov.19 - Dec.9) in 1981 and the summer season (Apr.29 - May.3, May.3 - May.8) in 1982 respectively. The analytical results indicate that winter's ocean current velocity can be represented adequately by ARIMA (0, 1, 1) or IMA (1, 1) model $\nabla X_t = (1 - B\theta)$ ie. $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$ at each station; in the meanwhile, its summer's ocean current velocity can also be simulated properly by ARIMA (0, 2, 1) or IMA (2, 1) model $\nabla^2 X_t = (1 - B\theta)$ ie, $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}$. Here, θ is a parameter estimated by field data and its value is ranged in 0.18 - 0.42. The confident level is reached up 95% between estimated values and field data at each station. Moreover, this process is also briefly described in this study. By using these models, one may not only predict the short-term ocean current velocity quickly in the vicinity of Taichung Harbor, which could afford to the authority as the references of ship-entrance, but also may recompense the shortage of past field data.

壹、前言

中國石油公司為瞭解中華顧問工程司所擬有關台中港外港興建LNG碼頭佈置事宜，曾於民國七十年九月委託本所辦理台中港目前港口外海流況及海象、氣象觀測工作。該委託研究計劃計分為現場資料觀測分析與數值模式計算兩部分，並配合台南國立成功大學水利及海洋研究所之水工模型試驗以求出定案佈置。

本所曾依據現場數據加以分析並提供數值模式及物理模型試驗邊界條件之參考，先後利用有限元素法數值計算及動力方程式完成由波浪引起的近岸流數值模式以及台中港外港LNG進口站案港口風及潮汐所引起水流之數值計算。唯二者均依據現場觀測資料修飾邊界條件以求出各種不同防波堤佈置方案之定性比較，本文則係利用各站現場觀測資料同時考慮受潮汐波浪，風及地形等之相互作用所引起近岸海流流速之性質，加以系統化之整理分析以尋求一海流流況最佳時間序列模式用以預報台中港口附近時流速之時間變化。而台中港外海水流，深海流肇因於海流及潮流，碎波帶沿岸流則主要由波浪引起，根據台中港務局民國60年夏季在港口附近水深—19.4公尺處利用CM—II電氣流速計，作連續25小時之流速流向觀測，調合分析結果得知，該港夏季期間外海水流均為NE向。同時台中港每年之九月分起到翌年之三月分止屬明顯季節風期間，在強烈季節風侵襲時沿岸流方向大多由北向南，故本研究亦朝此兩明顯季節加以探討研究，有關其理論分析與資料分析結果分別如以下章節所述。

貳、理論分析

2.0 前言

有關時間序列 (Time Series) 隨機變數預測法，一般而言，大都係指數平滑 (exponential smoothing) 法之另一形式。例如，多項式模式之倍數平滑 (multiple smoothing) 法以及超越函數模式之直接平滑法等。唯兩者均係導自最小平方法。然而其他的方法，諸如溫特法 (Winter's method) 則完全憑其直覺發展而成。而最小平方法係假設時間序列之平均值為時間之可定函數 (deterministic function)，同時在任一時間之觀測值，可由平均值加上某一隨機誤差份量組合而成。這些隨機誤差通常假設係獨立隨機變數，譬如，在雙指數平滑方法中 (Double exponential smoothing) 假設時間序列模式為

$$x_t = b_0 + b_{1t} + \varepsilon_t \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\text{或 } x_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

此處， $\mu_t = b_0 + b_{1t}$ ，係時間序列過程在時間 t 時之可定平均值，而 ε_t 為一隨機誤差份量，惟有一點應注意者，如果隨機誤差 $\{\varepsilon_t\}$ 為獨立隨機變數，則觀測值 $\{x_t\}$ 亦必為一獨立隨機變數，而指數平滑方法之自然發展過程，亦通常假設 $\{\varepsilon_t\}$ 係獨立者。

惟獨立誤差之假設，通常係無法保證，故獨立觀測值之假設亦然。此即意謂許多時間序列其連續之觀測值係具甚高之相依性。如果是這種情形，則依據指數平滑之預測方法則可能不適當，蓋這些方法並未以最有效之方式考慮觀測值間彼此之相依性。但實際上，目前指數平滑法仍經常被應用在時間序列分析上，雖然其觀測值間，彼此係相依的，却仍具有很合理的結果；然而尚有其他被設計用來考慮此相似性之預測方法，這些方法通常將產生更良好之結果，許多這些方法，大都係依據最近由 Box 和 Jenkins

所提出有關時間序列之分析法推導而出。故通常又稱之為 Box-Jenkins 模式。

2.1 時間序列模式之種類

考慮某一時間序列，其中之連續觀測值，可用一組獨立隨機變數，如 $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ 等之線性組合來表示，該組獨立隨機變數之平均值為零而方差值為 σ_ε^2 。通常亦假設 $\{\varepsilon_t\}$ 分佈為正常分佈，故隨機變數數列 $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ 又稱為白噪音過程 (White noise process)。 $\{\varepsilon_t\}$ 之線性組合可寫成

$$x_t = \mu + \phi_0 \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$\text{或 } x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} \dots\dots\dots (2-2)$$

此處常數 $\phi_j (j=0, 1, \dots)$ 稱為權重 (Weights)； μ 係決定某過程水平之常數，通常 $\phi_0 = 1$ 。而 (2-2) 式可利用後運算子 (Backward shift operator) B 之符號表示之。 B 定義為

$$B \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$$

$$\text{其通式為 } B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j} \dots\dots\dots (2-3)$$

則 (2-2) 式可寫成

$$x_t = \mu + (\phi_0 B^0 + \phi_1 B^1 + \phi_2 B^2 + \dots) \varepsilon_t$$

$$\text{或 } x_t = \mu + \underline{\psi}(B) \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-4)$$

此處 $\underline{\psi}(B) = \phi_0 B^0 + \phi_1 B^1 + \phi_2 B^2 + \dots$ ，而 $\phi_0 = 1$ 。式 (2-2) 稱為線性濾器 (linear filter)。很顯然地，在時間序列 $\{\varepsilon_t\}$ 連續觀測值間，彼此具相依關係，蓋這些觀測值，係自同一 $\{\varepsilon_t\}$ 計算而得。尤其如果 $\{\varepsilon_t\}$ 係正常分佈，則 $\{x_t\}$ 當屬正常分佈。則依據線性濾器模式，可定義某一時間序列模式係轉換某一白噪音過程成為一時間序列之函數，故自 (2-2) 式之線性濾器可產生許多不同時間序列之模式。Box 和 Jenkins 氏則統一

並擴展該些模式而導出其使用法之原理，故導自線性濾器之時間序列模式稱為 Box-Jenkins 氏模式。

Box 和 Jenkins 氏模式可分別用以表示定常 (stationary) 和非定常 (nonstationary) 之時間序列。如果某一時間序列係屬定常者，意謂其隨機變數係在某一定值平均處而隨意變動；而某一時間序列係屬非定常者，意謂隨機變數不具自然的平均值。一般而言，在線性濾器中之 $\{\epsilon_j\}$ 權重數列中如果係有限或無限個而且係收斂的話，則時間序列 $\{x_t\}$ 則屬定常而具平均值 μ ；如果數列 $\{\phi_j\}$ 係無限，同時發散的話，則時間序列則屬非定常而 μ 僅是其過程中，其原點之一參考點。在未更進一步詳細討論 Box-Jenkins 模式前，有必要先介紹一些有關時間序列分析之基本概念。

2.1.1 自協變異數，自相關數和偏自相關數

假設導自式 (2-2) 之線性濾器之時間序列係屬定常者，則此意謂者時間序列之統計特性並不受時間原點移動之影響。換言之，在原點 t ， n 個觀測值如 $x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+n-1}$ 之統計特性與在原點 $t+k$ 時之 n 個觀測值如 $x_{t+k}, x_{t+k+1}, \dots, x_{t+k+n-1}$ 等之統計特性相等。對於某一定常時間序列，其平均值為

$$E(x_t) = E\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \epsilon_{t-j}\right) = \mu + E \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \epsilon_{t-j}, \dots (2-5)$$

因為 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j$ 之和係收斂，故可取 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \epsilon_{t-j}$ 各項之平均值而產生 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j E(\epsilon_{t-j}) = 0$ 故定常序列之平均值為

$$E(x_t) = \mu \dots (2-6)$$

時間序列過程之方差值為

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= V(x_t) = E[x_t - E(x_t)]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \epsilon_{t-j}\right]^2 \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 \epsilon_{t-j}^2 + \text{cross products}\right] \dots (2-7) \end{aligned}$$

因為 $\{\varepsilon_t\}$ 係獨立，故其交差乘積 (cross products) 具有為 0 之期望值

$$\text{故 } \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 \dots\dots\dots (2-8)$$

而方差值僅在 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2$ 收斂時方存在。在觀測值 x_t 和距 k 個單位時間之另一

觀測值 x_{t+k} 間之協變異數，稱為時間遲延 k 之自協變異數 (autocovariance)，定義為

$$\gamma_k = \text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = E[(x_t - E(x_t))(x_{t+k} - E(x_{t+k}))] \dots\dots\dots (2-9)$$

故自協變異數就好比是兩隨機變數之協變異數，上式可化簡為

$$\gamma_k = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \phi_{j+k} \dots\dots\dots (2-10)$$

在 Box-Jenkins 氏之方法論中，時間序列模式係以其自相關函數 (autocorrelation functions) 表示其特徵性。兩隨機變數 W 和 Z 間之相關定義為

$$\rho_{wz} = \frac{\text{Cov}(W, Z)}{\sqrt{V(W)V(Z)}} \dots\dots\dots (2-11)$$

故在時間遲延為 k 之自相關數係指某一時間序列中相距 k 個單位時間之任兩觀測值間之相關，換言之

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(W, Z)}{\sqrt{V(x_t)V(x_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \dots\dots\dots (2-12)$$

係指遲延時間為 k 之自相關， ρ_k 對遲延 k 之圖形表示，稱為該過程之自相關函數 $\{\rho_k\}$ ，有點應注意者，即自相關函數係無因次，同時 $-1 \leq \rho_k \leq 1$ ，且 $\rho_k = \rho_{-k}$ ；換言之，自相關函數係對稱，故僅需考慮正值時間遲延即可。一般而言，當觀測值其遲延 k 值非常接近時，將可發現 ρ_k 值接近於 1

，相反的，則 ρ_k 值將趨近於 -1 。而如果當遲延 k 時之觀測值間具很少相關時，將可發現 ρ_k 值近似於零。

在描述時間序列模式之另一有用概念即偏相關數 (partial correlation)。考慮三個隨機變數 W ， Y 和 Z 。如果令 W ， Y 和 Z 之聯合密度函數 (joint density function) 為 $f(W, Y, Z)$ ，則 E 知 Z 值之 W 和 Y 之條件分佈 (conditional distribution) 為

$$h(w, y | z) = \frac{f(w, y, z)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, y, z) dw dy} \dots\dots\dots (2-13)$$

在條件分佈 $h(w, y | z)$ 中， W 和 Y 間之相關係數稱為偏相關係數 (partial correlation coefficient) 簡而言之， W 和 Y 間之偏相關僅是在移去 Z 對其相關影響後 W 和 Y 間之一簡單相關。自時間序列之觀點言，若將在遲延為 k 之偏自相關當作在 x_t 和 x_{t+k} 間而移去其中間觀測值 ($x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+k-1}$) 作用之相關則較為方便。在符號上第 k 個偏自相關係數以 ϕ_{kk} 表之。有關 ϕ_{kk} 對遲延 k 之圖形稱為偏自相關函數 $\{\phi_{kk}\}$ 必須注意者，即 $\phi_{00} = \rho_0 = 1$ 而 $\phi_{11} = \rho_1$ 。

2-1.2 自迴歸過程 (Autoregressive process), AR(p)

式 (2-2) 線性濾器並非一個非常有用之時間序列模式，蓋其包含一無限個之未知參數，即權重 ψ 值。此法將發展一更簡潔之模式，換言之，即該模式將能適當地描述時間序列又能包含相對更少之參數。(2-2) 式之一重要特殊情形為模式

$$x_t = \zeta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-14)$$

式 (2-14) 稱為自迴歸過程，因為現有之觀測值 x_t 係依據同一時間序列較先前之實測值 $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$ 而被迴歸之故。同時此過程包含 p 個未知參數 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ，故上式又稱為 p 階自迴歸過程，簡寫為 AR(p)。

AR(p)過程亦可用後運算子改寫成下式，即

$$x_t = \zeta + (\phi_1 B^1 + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) x_t + \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots (2-15)$$

如果令 $\tilde{\phi}_p(B) = 1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad \dots\dots\dots (2-16)$

則(2-15)式可寫成

$$\tilde{\phi}_p(B) x_t = \zeta + \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots (2-17)$$

在處理時間序列問題時，為方便起見，通常將時間序列定義以自平均值 μ 之離差表之。故對所有時間 t ，令 $\tilde{x}_t = x_t - \mu$ 則AR(p)過程(2-17)式變成 $\tilde{\phi}_p(B) \tilde{x}_t = \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots (2-18)$

比較(2-17)式和(2-18)式，可發現AR(p)過程之平均值為 $\mu = \zeta / (1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j)$ 。

自迴歸模式可用以表示定常和非定常兩種時間序列。Box和Jenkins氏證明，如果多項式 $\tilde{\phi}_p(B) = 0$ 之根位於單位圓之外側，則此過程係屬定常。此條件係基於對定常過程 $\{x_t\}$ ，其 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j$ 必須收斂這個事實而來，現在將簡略地討論AR(p)過程中兩種非常重要之特殊情形：

一階自迴歸過程(The first-order auto-regressive process)

如果 $p = 1$ ，則式(2-14)即為一階自迴歸，或AR(1)，過程

$$x_t = \zeta + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots (2-19)$$

AR(1)過程經常被稱為馬可夫過程(Markov process)，蓋在時間 t 時之觀測值，僅決定於在時間 $t - 1$ 時之觀測值。如果此過程屬定常，則 $\tilde{\phi}_1(B) = 1 - \phi_1 B^1 = 0$ 之根必須位於單位圓之外側，此即意謂，若當此過程為定常時，則必須 $|\phi_1| < 1$ 。

AR(1)過程之平均值，方差值以及自協變異數可很簡單地計算而得：

$$\mu = \frac{\zeta}{1 - \phi_1} \quad \dots\dots\dots (2-20)$$

其方差值和自協變異數為

$$\gamma_k = \phi_1^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2-21)$$

自相關函數可自上式求得為

$$\rho_k = \phi_1^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2-22)$$

顯然地，當 ϕ_1 值為正時，AR(1) 過程其自相關函數將成指數形式消減，而當 ϕ_1 值為負時，其自相關函數，雖亦成指數形式消減却正負交替變換。

二階自迴歸過程 (The second-order auto-regressive process)

如果式 (2-14) 中之 $p = 2$ ，可得一二階自迴歸過程

$$x_t = \zeta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2-23)$$

若 AR(2) 過程屬定常者，則必須 $(1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2) = 0$ 之根，位在單位圓之外側，亦即參數 ϕ_1 和 ϕ_2 值必須選擇使得

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned} \quad (2-24)$$

如果滿足條件 (2-24) 式，將可證明 AR(2) 過程之平均值為

$$\mu \equiv E(x_t) = \frac{\zeta}{1 - \phi_1 - \phi_2} \quad (2-25)$$

AR(2) 過程之方差值和自協變異數遵循一有趣之關係式。考慮一經過平均值改正過之 AR(2) 過程，即對所有時間 t ， $\tilde{x}_t = x_t - \mu = x_t - \zeta / (1 - \phi_1 - \phi_2)$

$$\text{或 } \tilde{x}_t = \phi_1 \tilde{x}_{t-1} + \phi_2 \tilde{x}_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2-26)$$

很顯然地，式 (2-26) 中之方差值和自協變異數與式 (2-23) 者相等。(2-26) 式兩邊 $\times \tilde{x}_{t-k}$ 得

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_t \widetilde{x}_{t-k} &= \phi_1 \widetilde{x}_{t-1} \widetilde{x}_{t-k} + \phi_2 \widetilde{x}_{t-2} \widetilde{x}_{t-k} + \varepsilon_t \widetilde{x}_{t-k} \\ &\dots\dots\dots (2-27)\end{aligned}$$

取(2-27)式之期望值得

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad k > 0 \quad \dots\dots\dots (2-28)$$

當 $k > 0$ 時，因 $\widetilde{x}_{t-k}$ 與 ε_t 不相關，故 $E(\varepsilon_t \widetilde{x}_{t-k})$ 為零，如果 $k = 0$ ，因為 $\gamma_{-k} = \gamma_k$ ，可得

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad \dots\dots\dots (2-29)$$

如果將(2-28)式中之每一項除以 γ_0 ，則可得一自相關函數之反復關係式，即

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k > 0 \quad \dots\dots\dots (2-30)$$

注意，如果對 $k = 1, 2$ ，可自(2-30)式得

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2-31)$$

上式通常稱為 Yule-Walker 方程式。如果 ϕ_1 和 ϕ_2 值為已知，則可自(2-31)式解得 ρ_1 和 ρ_2 值。較高階之自相關數，依據(2-30)式，於是乎即可求得。

自(2-30)式和(2-31)式中很顯然地，對某一 AR(2) 過程其自相關函數甚為複雜。Box 和 Jenkins 證明，如果 $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ ，則自相關函數成一消散指數式之混合；而如果 $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ ，則自相關函數成一消散正弦波(damped sine wave)。

2-1.3 移動平均過程 (Moving Average Process), MA(q)

考慮式(2-2)線性濾器中僅最初 n 個 q 權重非零之特殊情況，其過程將為

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \dots\dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &\dots\dots\dots (2-32)\end{aligned}$$

此處 $-\theta_1, -\theta_2, \dots\dots, -\theta_q$ 為在(2-2)式中權重之一有限集合，模式(

2-32) 稱為 q 階移動平均過程，簡寫為 $MA(q)$ ，利用後運算子， $MA(q)$ 過程可寫成

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + (1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \\ &= \mu + \textcircled{H}_q(B) \varepsilon_t \cdots \cdots \cdots (2-33) \end{aligned}$$

此處 $\textcircled{H}_q(B) = (1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)$ ，在 $MA(q)$ 過程中，因為僅有有限個數目之非零值權重，故不管權重所選之值如何， $MA(q)$ 過程將必屬定常，其平均值為

$$\begin{aligned} E(x_t) &= E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) = \mu \\ &\cdots \cdots \cdots (2-34) \end{aligned}$$

$MA(q)$ 之方差值為

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= V(x_t) = V(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \cdots \cdots \cdots (2-35) \end{aligned}$$

為方便起見，通常令 $\theta_0 = 1$ 。在時間遲延為 k 時之自協變異數則可自下式求得

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \times (\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \\ &\cdots - \theta_q \varepsilon_{t-k-q})] \end{aligned}$$

化簡得

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q) & k = 1, 2, \cdots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \\ &\cdots \cdots \cdots (2-36) \end{aligned}$$

利用 (2-35) 式和 (2-36) 式， $MA(q)$ 過程之自相關函數為

$$\begin{aligned} \rho_k &= \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \cdots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \\ &\cdots \cdots \cdots (2-37) \end{aligned}$$

因此在 $MA(q)$ 中之自相關函數係由在時間遲延 1, 2, …… q 時之非零值以及 0 組合而成。故其自相關函數在時間遲延 q 處被截斷 (cut off)。

一階移動平均過程 (The first-order moving average process)

$MA(q)$ 一非常重要特殊情況即一階移動平均過程

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots\dots\dots (2-38)$$

利用 (2-34), (2-35) 和 (2-37), 即可求得 $MA(1)$ 過程之平均值, 方差值以及自相關函數分別為

$$E(x_t) = \mu$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2) \dots\dots\dots (2-39)$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & , k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

故自相關函數在時間遲延 1 處被截斷。對任何 θ_1 值, 該過程均屬定常 (stationary)。

二階移動平均過程 (The second-order moving average process)

另一有用之過程為 $MA(2)$ 即

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \dots\dots\dots (2-40)$$

$MA(2)$ 過程對任何 θ_1 和 θ_2 值亦均屬定常。其平均值, 方差值以及自相關函數分別為

$$E(x_t) = \mu$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \dots\dots\dots (2-41)$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0, k > 2$$

故MA(2)過程自相關函數在時間遲延2處被截斷。

移動平均過程之轉化 (Invertibility of Moving average processes)

在移動平均和自迴歸過程間，存在著一有趣之雙重性。譬如，考慮MA(1)過程

$$\tilde{x}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t$$

當解得 ε_t 時得

$$\varepsilon_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} \tilde{x}_t$$

現在如果 $|\theta_1| < 1$ ，可將上式寫成

$$\varepsilon_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j \right) \tilde{x}_t$$

$$\text{或 } \varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \dots) \tilde{x}_t \dots\dots\dots (2-42)$$

則可將上式當作係具有權重 $\phi_j = \theta_1^j$ 之一無限階自迴歸過程。注意，此時已將MA(1)過程轉化而得一AR(∞)過程，故條件

$$|\theta_1| < 1$$

稱為MA(1)過程之轉化條件，一般而言，欲將MA(q)過程轉化成一AR(∞)過程，必須多項式 $\Phi_q(B) = 0$ 之根，位在單位圓之外側，譬如，對AR(2)過程，必須

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1 \dots\dots\dots (2-44)$$

$$|\theta_2| < 1$$

故對於在MA(q)過程中參數之轉化條件等於AR(q)過程之定常條件。此雙重性對於自迴歸過程亦同樣為真，換言之，有限之AR(p)過程亦可被轉化成具有無限階之移動平均過程。

2-1.4 混合自迴歸—移動平均過程 (Mixed autoregressive-moving average processes), ARMA(p, q)

在建立某一實際時間序列之經驗模式中，人們偶爾發現包含自迴歸和移動平均項轉自單純之自迴歸和移動平均形式更能導致效果更佳之模式。此產生 (p, q) 階之混合自迴歸—移動平均模式為

$$x_t = \zeta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

$$\text{或 } \Phi_p(B)x_t = \zeta + \Theta_q(B)\varepsilon_t \quad \cdots \cdots \cdots (2-45)$$

上式簡寫為 ARMA(p, q)。對於 AR(p) 和 MA(q) 過程之定常和轉化條件建立了 ARMA(p, q) 過程之這些特性。換言之，如果 $\Phi_p(B)=0$ 之根，位在單位圓外側，則 ARMA(p, q) 係屬定常者，而如果 $\Theta_q(B)=0$ 之根，位在單位圓之外側，則屬可轉化之過程。式 (2-45) 中一非常有用之特殊情況為 ARMA(1, 1) 過程

$$x_t = \zeta + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \cdots \cdots \cdots (2-46)$$

如果 $|\phi_1| < 1$ ，則此過程屬定常，而如果 $|\theta_1| < 1$ ，則此過程可被轉化。ARMA(1, 1) 之平均值，方差值和自協變異數分別為

$$\mu \equiv E(x_t) = \frac{\zeta}{1 - \phi_1} \quad \cdots \cdots \cdots (2-47)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 [1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)] \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \quad \cdots \cdots \cdots (2-48) \end{aligned}$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}, \quad k \geq 2$$

有點應注意者，ARMA(1, 1) 過程之平均值等於 AR(1) 之平均值。同時對於時間遲延大於 1 之自協變異數和 AR(1) 者相等，因為 ARMA(1, 1) 之移動平均份量僅向後一個時間週期。

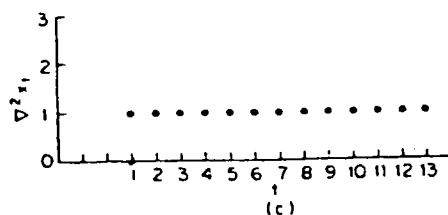
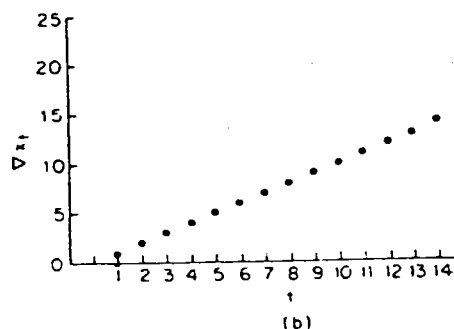
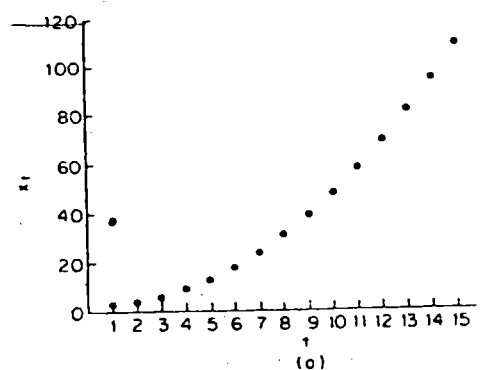
ARMA(1, 1) 過程之自相關函數為

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1} \quad \cdots \cdots \cdots (2-49) \\ \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1}, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

對於一般之 ARMA(p, q) 過程，自相關函數之最初 q 個時間遲延將僅受到移動平均參數之影響，而遲延大於 q 值，將僅受自迴歸參數之作用。

2-1.5 非定常過程 (Nonstationary Processes)

以上所討論之自迴歸—移動平均過程係一種用來描述廣泛變化時間序列非常有用之定常時間序列模式。該些模式亦可利用一簡單之運算而推廣到非定常時間序列之分析。許多時間序列之行為好比係不具常數平均值，換言之，對任何地方性片斷時間之觀測值看起來像任何其它片斷遠離其平均值。如此之時間序列稱為平均值之非定常性。同樣地，某一時間序列在平均值和斜率上表現其不定常行為者，亦屬可能。



如上圖中(a)所示之時間序列所展現者，即屬平均值和斜率之非定常行

為。然而其第一次差分（即 $x_t - x_{t-1}$ ）如同上圖中(b)所顯示者，僅是在平均值屬非定常者，而其第二次差分 $[(x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}]$ ，如同上圖中(c)顯示者，則屬定常者。故利用連續差分而將某非定常序率之時間序列化為一定常序列似乎是合理的。如果某一非定常時間序列利用適當次數之差分可被化簡成一定常序列，則稱原先序列係一均勻非定常 (homogeneously nonstationary)。若定義差分運算子 ∇ 為

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} \dots\dots\dots (2-50)$$

根據後運算子 B 定義， ∇ 亦可寫成 $\nabla = 1 - B$ 。故較高階之差分可被表示成 $\nabla^2 = (1 - B)^2$ ， $\nabla^3 = (1 - B)^3 \dots\dots$ ， $\nabla^d = (1 - B)^d$ 。差分某一長度為 n 之時間序列 $\{x_t\}$ ，將產生一新的時間序列 $\{w_t\} = \{\nabla^d x_t\}$ ，其長度為 $n - d$ 。同時，差分運算子之作用係依據其原先觀測值而運算。換言之， $w_t = \nabla^d x_t = \nabla^d \tilde{x}_t$ ，故觀測值是否經過平均值之改正，並無關緊要。惟有一點應注意者，即一般而言，新的序列 $\{w_t\}$ 可能具有一非零之平均值。

一種可用於代表某非定常時間序列之一般模式稱為 (p, d, q) 階之自迴歸積分移動平均過程 (Autoregressive integrated moving average process)，簡寫為 $ARIMA(p, d, q)$ ，可寫為

$$\phi_p(B) \nabla^d x_t = \theta_q(B) \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-51)$$

$$\text{或 } \phi_p(B) w_t = \theta_q(B) \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-52)$$

該模式代表對原序列之第 d 階差分，而作為一種包含 p 階自迴歸以及 q 階移動平均參數之過程。如果被差分過之序列 $\{w_t\}$ 具有一非零之平均值 μ_w ，則 $ARIMA(p, d, q)$ 過程將為

$$\phi_p(B) w_t = \mu_w + \theta_q(B) \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-53)$$

允許 μ_w 為非零之目的，在於引進某一 d 次之可定多項式於一可能發生之

預測函數。蓋如果 $d = 1$ 而且多項式具有正之斜率，則不管序列之行為如何，預測值始終將增加，故基於這理由 μ_w 經常假設為零，在實際上所遇見之大部份時間序列，通常都可以利用 $ARIMA(p, d, q)$ 過程，而適當地加以模擬，其中 p, d, q 值均不大於 2。兩種重要過程分別為

$ARIMA(1, 1, 1)$ 過程

$$(1 - \phi_1 B) \nabla x_t = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t$$

可化簡為

$$x_t = (1 + \phi_1)x_{t-1} - \phi_1 x_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots \dots \dots (2-54)$$

以及 $ARIMA(2, 1, 0)$ 過程

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \nabla x_t = \varepsilon_t$$

亦可寫成

$$x_t = x_{t-1} + \phi_1(x_{t-1} - x_{t-2}) + \phi_2(x_{t-2} - x_{t-3}) + \varepsilon_t \dots \dots \dots (2-55)$$

很顯然地，如果 $d = 0$ ， $ARIMA$ 過程將包含自迴歸，移動平均以及前面討論過之混合過程。

2-1.6 指數平滑法之關係式

在某些特殊情況，指數平滑法相當於 $Box-Jenkins$ 氏模式，如考慮 $ARIMA(0, 1, 1)$ 過程

$$\nabla x_t = (1 - \theta B) \varepsilon_t$$

為方便起見，上式可表示為

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \dots \dots \dots (2-56)$$

由於此非定常過程，僅包含一移動平均參數，故又稱為積分移動平均過程 (integrated moving average process) 或 $IMA(1, 1)$ 。同時利用連續代入 $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}$ 等將 $IMA(1, 1)$ 過程轉化成一無限階之自迴歸過程，即

$$x_t = (1 - \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j x_{t-j} + \varepsilon_t \dots \dots \dots (2-57)$$

若令 $\alpha = 1 - \theta$ ，將可發現式 (2-57) 與一階指數平滑有著明顯類似之外觀。有點應注意者，對於 $0 < \alpha < 2$ 亦滿足轉化條件 $-1 < \theta < 1$ ，而實際上，通常 α 值係被限制在 0 和 1 之間。故一階指數平滑可說是 IMA(1, 1) 過程一種最適宜之預測方法。

§ 2-2 時間序列之模式化 (Time Series Modeling)

Box 和 Jenkins 氏在 1970 年，提出一種方法論 (methodology) 用以發展一種特有之 ARIMA 時間序列模式並利用該模式作預測工作。其方法是由三個步驟之反覆計算過程所組成。首先係利用某種試探性之 ARIMA 模式，經由已知數據之分析，來驗證其可行性，其次再根據現有資料用以推定模式之未知參數。最後則進行診斷性的查驗，用以決定該模式是否為妥當或應如何加以修正。

§ 2-2.1 驗證 (Identification)

某種 ARIMA 時間序列模式被用來與實際現有資料作試探性的驗證。一般而言，至少必須擁有 50 個以上觀測值用以驗證此試探性之模式是否適當。在驗證過程中，其主要的工具即自相關函數。實際上，定義於 (2-12) 式之理論自相關函數係未知的，必須利用下式之樣本自相關係數加以推定

$$\rho_k = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}, \quad k = 0, 1, \dots, k$$

..... (2-58)

此處 N 為研究之時間序列長度。一般而言，應計算其前面 $k \leq \frac{N}{4}$ 個樣本自相關數。偏自相關數在驗證過程中亦擔當一重要角色，利用 (2-30) 式，將

可發現偏自相關係數滿足下式 Yule- Walker 方程式

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

..... (2-59)

於上式中，可用 $\hat{\rho}_j$ 代替 ρ_j 表推定之偏自相關係數而

$$\hat{\rho}_j = \phi_{k1}\hat{\rho}_{j-1} + \phi_{k2}\hat{\rho}_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\hat{\rho}_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

..... (2-60)

當 $k = 1, 2, \dots, k$ ，解 (2-60) 式，得 $\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \dots, \hat{\phi}_{kk}$ 等樣本偏自相關函數。然後比較實測之自相關函數型態與理論上之型態，以證明此一試探性之模式是否合適。其理論上之型態如表 2.1 所示。

表 2.1 定常模式之理論自相關和偏自相關函數

模 式	自 相 關 函 數	偏 自 相 關 函 數
AR(p)	函數以指數，正弦形式消散	函數在時間遲延 p 處後被截斷
MA(q)	函數在時間遲延 q 處後被截斷	函數以指數，正弦形式等消散
ARMA(p, q)	函數以指數，正弦形式等消散	函數以指數，正弦形式等消散

樣本自相關及偏自相關函數之標準誤差，在驗證其值是否為非零值亦非常有用。Barlett 曾經證明第 k 個樣本自相關係數之標準誤差為

$$S(\hat{\rho}_k) = N^{-\frac{1}{2}} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2-61)}$$

此處
$$\gamma_j = \begin{cases} \hat{\rho}_j^2, & \rho_j \neq 0 \\ 0, & \rho_j = 0 \end{cases} \quad \text{..... (2-62)}$$

而 Quenouille 亦曾證明第 k 個之樣本偏自相關係數之標準誤差為

$$S(\hat{\phi}_{kk}) \simeq N^{-\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2-63)}$$

一般而言，當自相關或偏自相關函數之絕對值小於其二倍之標準誤差，將

可假設其值為零。故直接繪製 $\pm 2 S(\hat{\rho}_k)$ 以及 $\pm 2 S(\hat{\phi}_{kb})$ 於這些函數之圖形上將非常有用。如果時間序列係屬非定常者，則樣本自相關函數將消滅地非常緩慢。如果是這種型態，則通常的方法即再求此時間序列第一次差分後之樣本自相關和偏自相關函數。如果這些函數型態與表 2.1 中之理論型態一致，則欲產生定常性，一次差分則是必須的。相反的，如果不一致，則必須繼續再試著更高階之差分直到定常化為止。前面曾經提到差分過後之序列 $\{w_t\}$ 可能具有一非零之平均值 μ_w ，故在驗證階段應先求得差分樣本平均值 $\bar{W} = \sum_{t=1}^{n-d} w_t / n-d$ ，並與其近似標準誤差比較以看其是否為零。

§ 2-2.2 推測 (estimation)

當某種較適當之時間序列模式被作試探性驗證以後，則模式中之參數，則可利用最小平方法相定而得。顯然地，如果某一模式係線性的話，則 ε_t 對任何參數之偏導數，必不為該模式參數之函數。如考慮 AR(p) 過程

$$x_t = \zeta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\text{或 } \varepsilon_t = x_t - \zeta - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_p x_{t-p}$$

$$\text{其 } \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \phi_i} = -x_{t-i}, \quad \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \zeta} = -1 \dots\dots\dots (2-64)$$

由於其偏導數並非 ϕ_i 和 ζ 之函數，故即可利用線性最小平方法推定在 AR(p) 過程中之參數。惟很不幸的，對於移動平均和混合過程中，其參數之推定就並不如此簡單，如考慮 MA(1) 過程

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\text{或 } \varepsilon_t = (1 - \theta_1)^{-1} x_t$$

$$\text{其第一階導數為 } \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_1} = B(1 - B\theta_1)^{-2} \dots\dots\dots (2-65)$$

上式為未知參數 θ_1 之函數。故其解法一般則利用一種反覆尋找的步驟，直接應用在平方函數之餘數和。任何非線性迴歸反覆計算法均需要模式參數之起始推定值。其步驟係由推定值代替自相關係數以及求解未知模式參數而組成。如在 AR(1) 過程，理論自相關值遵守 $\rho_k = \phi_1^k$ 之關係式，故若 $\hat{\rho}_1$ 為 ρ_1 之推定值，則 ϕ_1 之預備推定值為 $\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1$

§ 2-2.3 診斷性查驗 (Diagnostic checking)

在試探性模式完成密合數據驗證工作以後，其次則必須審查其妥適性。同時如果須要的話並建議作可能之修正。如果密合的模式係妥當者，則應將觀測值轉換成白噪音 (whitenoise) 過程。因此某種邏輯之診斷查驗法係計算其餘數 $e_t = x_t - \hat{x}_t$ ，然後推定及審察其自相關函數。令餘數之樣本自相關函數以 $\{\hat{\rho}_k(e)\}$ 表示。如果模式是適當的，則其餘數之樣本自相關係數，對所有時間遲延大於 1 者應很接近於零。假設模式之形式係正確，同時真實的參數值為已知，則餘數自相關係數之標準誤差為 $N^{-\frac{1}{2}}$ ，如果任一餘數自相關係非零值，則應將外觀之結構加入原模式再密合時間序列，這過程將繼續直到餘數自相關係數類似於白噪音過程之自相關數。除了考慮個別之 $\hat{\rho}_k(e)$ 值外，亦應一併考慮最初 k 個餘數之自相關數，其是否適宜於該模式，此可經由適當之奇一方 (chi-square) 檢驗法檢定模式是否為妥當，其檢驗之統計量為

$$\theta = (N - d) \sum_{k=1}^k \hat{\rho}_k^2(e) \dots\dots\dots (2-66)$$

如果模式是適當者，則上統計量應近似於 $k - p - q$ 自由度之奇方分佈值，否則應拒絕該模式適合性之假設。

§ 2-3 預測 (Forecasting)

一旦某種適當之模式被密合以後，則該模式可被作為對未來觀測值之預測工作，若以 T 表現在時間，而假設欲預測在時間為 $T + \tau$ 時之預測序

列。令 $\hat{x}_{T+\tau}(T)$ 表以 T 為原點所作時間為 $T + \tau$ 時之預測值。此預測值係依據以時間 T 為原點而取在時間為 $T + \tau$ 時之期望值而產生。通常對時間 $T + \tau$ 之預測值必須連續自時間為 $T + 1, T + 2, \dots, T + \tau - 1$ 時之預測值而求得。以這種方式，在時間 T 時， x_{T+j} 尚未發生，故代之以預測值 $\hat{x}_{T+j}(T)$ 而在時間為 T 時， ε_{T+j} 尚未發生故代之以零，同時已發生過之 ε_{T-j} 則被代之以單獨時間預測值誤差 $e_1(T-j) \cong x_{t-j} - \hat{x}_{t-j}(T-j-1)$ 在預測過程開始，必須假設對 $T-j \leq 0$ 者，其 $\varepsilon_{T-j} = 0$ 。以預測 ARIMA(1, 1, 1) 過程作一個說明。在時間 $T + \tau$ 時之模式為

$$(1 - \phi_1 B) \nabla x_{T+\tau} = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_{T+\tau}$$

$$\text{或 } x_{T+\tau} = (1 + \phi_1) x_{T+\tau-1} - \phi_1 x_{T+\tau-2} + \varepsilon_{T+\tau} - \theta_1 \varepsilon_{T+\tau-1} \dots (2-67)$$

令 $\tau = 1$ ，取在時間為 T 時之期望值得

$$E[x_{T+1}] \equiv \hat{x}_{T+1}(T) = (1 + \phi_1) x_T - \phi_1 x_{T-1} - \theta_1 e_1(T)$$

因為 $E(\varepsilon_{T+1}) = 0$ ，而在時間末期， ε_T 係根據 $e_1(T) = x_T - \hat{x}_T(T-1)$ 而推定。對於 $\tau \geq 2$ 則得

$$E[x_{T+\tau}] \equiv \hat{x}_{T+\tau}(T) = (1 + \phi_1) \hat{x}_{T+\tau-1}(T) - \phi_1 \hat{x}_{T+\tau-2}(T), \tau \geq 2$$

因為在原點 T 時， $x_{T+\tau-1}$ 和 $x_{T+\tau-2}$ 之最佳推定值分別為 $\hat{x}_{T+\tau-1}(T)$ 和 $\hat{x}_{T+\tau-2}(T)$ ，此步驟通常被稱為具有差分方程式形式之模式預測。蓋 $\hat{x}_{T+\tau}(T)$ 在 $\{x_t\}$ 和 $\{\varepsilon_t\}$ 中係一單純地差分方程式。

而利用 x 權重表示之模式以獲得推測值亦屬可能。在原點 T ，通常可寫成

$$x_{T+\tau} = \phi_1 \varepsilon_{T+\tau-1} + \phi_2 \varepsilon_{T+\tau-2} + \dots + \phi_{\tau-1} \varepsilon_{T+1} + \phi_\tau \varepsilon_T + \phi_{\tau+1} \varepsilon_{T-1} + \dots + \varepsilon_{T+\tau} \dots (2-68)$$

上式有時被稱之為模式之隨機震盪形式 (random shock form)。在時間 $t > T$ 時，可用 0 取代相對應之 ε_t ，而在時間 $t \leq T$ 時，將 $e_1(t)$ 取代 ε_t ，故相對應於 (2-68) 式之預測函數為

$$\hat{x}_{T+\tau}(T) = \phi_T e_T(T) + \phi_{T+1} e_{T+1}(T) + \dots \quad (2-69)$$

(2-69) 式中之權重 ϕ 可自模式參數 $\{\phi_i\}$ 以及或 $\{\theta_i\}$ 中很容易求得，而線性濾器亦可寫成

$$x_t = \phi(B) \varepsilon_t \quad \text{或} \quad \varepsilon_t = \frac{x_t}{\phi(B)} \quad (2-70)$$

代入 (2-51) 式中得

$$\phi_p(B) \nabla^q x_t = \Theta_q(B) \frac{x_t}{\phi(B)}$$

$$\text{或} \quad \phi(B) \phi_p(B) (1-B)^q x_t = \Theta_q(B) x_t$$

故權重 ϕ 可自平衡展開式中 B 相同次方係數而求得

$$\begin{aligned} (\phi_0 + \phi_1 B + \dots) (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) (1-B)^q \\ = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \quad (2-71) \end{aligned}$$

而得權重通式 $\phi_j = \phi_1^{j-1} (\phi_1 - \theta)$ 。同時有兩個理由足以說明何以人們熱衷於模式之隨機震盪形式。第一，該形式提供一簡單互除法用以補充每一時間末期之預測值。其次，可自該模式很簡單地求得 τ 以後時間預測值之或然率極限值。即自 (2-68) 和 (2-69) 式中可求得

$$\begin{aligned} e_\tau(T) = \varepsilon_{T+\tau} + \phi_1 \varepsilon_{T+\tau-1} + \phi_2 \varepsilon_{T+\tau-2} + \dots + \phi_{\tau-1} \varepsilon_{T+1} \\ \dots \quad (2-72) \end{aligned}$$

$$V[e_\tau(T)] = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \phi_j^2 \right)$$

故對於 $T + \tau$ 時間，近似 $100(1 - \alpha)$ 百分比或然率極限之預測值可自下式中求得

$$\hat{x}_{T+\tau}(T) \pm U_{1-\alpha/2} \sigma_\varepsilon \left(1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \phi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-73)$$

此處 $U_{1-\alpha/2}$ 為 $100(1 - \alpha/2)$ 百分比之標準常態分佈值。同時則以下式推定白噪音過程之方差值

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SS(\hat{\phi}, \hat{\theta})}{\gamma - m} \dots\dots\dots (2-74)$$

此處 $SS(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ = 模式參數最小平方推定值之平方函數其餘數和之值。

γ = 餘數之數目

m = 在模式中，已經推測得參數之數目。

§ 2-4 季節性之過程 (Seasonal processes)

考慮某種每一季節具有 S 個觀測值之季節性自迴歸過程

$$x_t = \lambda_1 x_{t-s} + \lambda_2 x_{t-2s} + \dots\dots\dots + \lambda_p x_{t-ps} + \varepsilon_t \dots\dots (2-75)$$

此為 p 階之季節性 AR 過程； $\{\lambda_i\}$ 為季節性自迴歸參數； s 為整數，同樣地， θ 階之季節性 MA 過程可寫成

$$x_t = \varepsilon_t - \gamma_1 \varepsilon_{t-s} - \gamma_2 \varepsilon_{t-2s} - \dots\dots\dots - \gamma_Q \varepsilon_{t-Qs} \dots\dots\dots (2-76)$$

對這種季節性模式之自相關函數和偏自相關函數類似於非季節性之情況。換言之，季節性 AR 過程之自相關函數以指數或正弦形式消散，唯偏自相關數僅在時間遲延 ps 處不為零。然而季節性 MA 過程之自相關函數在遲延 Qs 後被截斷。一種邏輯之季節性混合模式為

$$x_t = \lambda_1 x_{t-s} + \lambda_2 x_{t-2s} + \dots\dots\dots + \lambda_p x_{t-ps} + \varepsilon_t - \gamma_1 \varepsilon_{t-s} \\ - \gamma_2 \varepsilon_{t-2s} - \dots\dots\dots - \gamma_Q \varepsilon_{t-Qs} \dots\dots\dots (2-77)$$

利用後運算子，上式可寫成

$$(1 - \lambda_1 B^s - \lambda_2 B^{2s} - \dots\dots\dots - \lambda_p B^{ps}) x_t = (1 - \gamma_1 B^s - \gamma_2 B^{2s} - \dots\dots\dots \\ - \gamma_Q B^{Qs}) \varepsilon_t$$

$$\text{或 } \Lambda_p(B^s) x_t = \Gamma_Q(B^s) \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-78)$$

此處 $\Lambda_p(B^s)$ 和 $\Gamma_Q(B^s)$ 分別為 B^s 之 p 次和 Q 次多項式，此為季節性 ARMA(p, Q) 模式。

一般而言，時間序列 $\{x_t\}$ 可能係非定常者，對於這種情形，則可引進某種適當季節性差分次數加以處理。令 $\nabla_s = (1 - B^s)$ 為季節性差分運

算子，如對第一次季節差分為

$$\nabla_s x_t = (1 - B^s) x_t = x_t - x_{t-s} \dots\dots\dots (2-79)$$

通常欲產生某一定常序列也許需要D次之季節性差分，那麼D階之季節性差分運算子為 $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$ ，而p，D， θ 階季節性自迴歸積分移動平均模式之一般通式則為

$$\Lambda_p(B^s) \nabla_s^D x_t = \Gamma_\theta(B^s) \varepsilon_t \dots\dots\dots (2-80)$$

上式經常被稱為ARIMA(P,D,Q)_s模式。很不幸地，在(2-80)模式中
之觀測值，僅是在季節時間遲延倍數處係相依的。換言之，在季節內之觀
測值係獨立的。Box和Jenkins氏認為這是不真實的，故建議模式中應加
入 a_t

$$\tilde{\Phi}_p(B) \nabla^d \varepsilon_t = \Theta_q(B) a_t \dots\dots\dots (2-81)$$

此處 $\{a_t\}$ 係一白噪音過程，而 $\tilde{\Phi}_p(B)$ 和 $\Theta_q(B)$ 分別是p和q階之B多項式
以上式代入(2-80)得

$$\tilde{\Phi}_p(B) \Lambda_p(B^s) \nabla^d \nabla_s^D x_t = \Theta_q(B) \Gamma_\theta(B^s) a_t \dots\dots\dots (2-82)$$

上式稱為 $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ 階之倍數季節性模式(multiple seasonal model) 對於倍數季節性ARIMA模式其驗證，推測
，診斷查驗以及預測的方法，在原理上和非季節性序列過程並無多大區別
。

叁、資料分析及討論

本所於民國七十年九月，依據中國石油公司委託計劃，首先著手辦理現場流況調查，分為冬季與夏季兩個階段。

一、第一階段觀測期間自民國70年11月5日至70年12月9日止，在台中港港口附近選擇四個測站如圖1所示，觀測冬季期間港口附近流況，其中11月5日～11月16日在B站與D站作流況調查，11月19日～12月9日在B站，11月19日～12月4日在C站，除在A站水深22公尺處安裝波浪儀(Wave rider)外，其餘在B站水深25公尺處，C站水深27公尺處及D站水深7公尺處分別安裝AANDERAA RCM4自記式流速儀如圖2所示作流況調查，在此期間曾有數次強勁東北季風出現。

二、第二階段觀測期間自民國71年4月28日至71年5月18日止分別在港口附近B、C、D測站，辦理一次連續三星期之流況，惟此階段觀測期間在D站處，因流速儀下水不久後，其旋轉器當晚即被漁網纏繞，致使該站無夏季期間之觀測記錄資料以資比較殊為可惜，其中5月3日～5月18日在B站，4月29日～5月13日在C站。

根據本所海象資料分析顯示，B站主要受風漂流及潮流的影響，C站則受地形，波浪及風漂流、潮流的影響，D站則受潮流及沿岸流影響較大。惟各站之流向因位置不同而異。B站於東北季風期間主要流向為西南方向，夏季則為東北方向；C站、D站在冬季季風期間主要流向分別為西南西向及西向，夏季則為東北向和北北東方向，同時根據海流向量行徑圖可看出冬季時向量行徑向西南，夏季則向東北。

本文主要目的，則利用在B站、C站及D站分別所實測得夏季及冬季之現場資料，根據前面章節所述ARIMA模式之探討分析，再根據後面附錄之計算程式，分別求出各站在此兩季節之自相關係數(Autocorelation

coefficients) 以及偏自相關係數 (Partial auto-correlation coefficients) 作為縱座標值，以時間遲延 (time lag) k 值為橫座標，點繪其自相關函數，偏自相關函數分別如圖 3.1 ~ 圖 8.1 所示，並在其函數圖形上繪製 $\pm 2 S(\hat{\rho}_k)$ 以及 $\pm 2 S(\hat{\phi}_{kk})$ 虛線，亦即相對應之自相關和偏自相關係數之 2 倍標準離差值，用以判斷其係數是否為零值，由圖 3.1 圖 4.1 圖 6.1 以及圖 8.1 中之(a)圖顯示，在冬季期間 B 站與 C 站因主要受潮流及風漂流之影響，其自相關函數成指數 (exponential) 形態緩慢地消散(b)圖顯示偏自相關函數則在時間遲延 k 值為 1 處被截斷；而 D 站因受潮流及沿岸流的影響，其自相關函數則成明顯正弦函數 (sinusoidal function) 形態緩慢地消散；夏季期間在 B 站與 C 站之自相關函數則成明顯正弦函數緩慢地消散如圖 5.1 及圖 7.1 中之(a)圖所示，而偏自相關函數則在時間遲延 k 值為 2 處被截斷如(b)圖所示。根據前面章節之理論分析得知，由於自相關係數消散非常地緩慢，該過程 (process) 應屬非定常性時間序列 (nonstationary process)，而欲轉換成定常性 (stationary) 時間序列，則必須將原始資料作第一次差分 (first difference) 再行研究。故利用後面附錄程式分別求出各站冬季夏季期間原始資料之第一次差分值，再以同樣方法利用繪圖機 (plotter) 繪製自相關及偏自相關函數如圖 3.2 ~ 圖 8.2 所示圖形顯示，在冬季期間 B 站和 D 站之自相關函數在時間遲延 k 值為 1 處已被明顯截斷，而 C 站除了在時間遲延 k 值為 10, 20 處其值稍大外，其餘各 k 值在 k 值為 1 處後已被明顯截斷，其原因可能係 C 站除受裂流 (rip current) 影響外，根據台中港口附近之水域測量，於 C 站處附近，堤頭有被顯著刷深現象，證明該站亦受渦流之影響所致。而其偏自相關係數則以指數或正弦等形式消散，故根據表 2.1 可知，B 站，C 站及 D 站在冬季時之時流速滿足 $ARIMA(0, 1, 1)$ 或 $IMA(1, 1)$ 之定常理論模式 $\nabla x_t = (1 - B\theta) \varepsilon_t$ ，其中 $\nabla = 1$ ，表一次差分， $q = 1$ 表自相關函數在

q 值為 1 時被截斷，故試探性之 ARIMA(0, 1, 1) 或 IMA(1, 1) 過程可寫成

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

其中 θ 為參數， x_t, x_{t-1} 分別表在時間為 t 及 $t-1$ 時之觀測值； $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$ 分別表 $x_t - \hat{x}_t$ 與 $x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}$ 之殘差值(residuals)，符號“ $\hat{}$ ”表推定值。對於 IMA(1, 1) 過程，僅有一個參數 θ 值需加以推測，此參數之最初推定值可自 MA(1) 過程之理論自相函數

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2} \quad \text{中求得。以 B 站 70 年 11 月 5 日} \sim \text{11 月 16 日與 70 年 11 月 19 日}$$

~12 月 9 日，C 站 70 年 11 月 19 日~12 月 4 日，D 站 11 月 5 日~11 月 16 日數據所得之 $\hat{\rho}_1$ 推定值分別代入上式中，即可求得各站 θ 之推定值。以 B 站 70 年 11 月 5 日~11 月 16 日之數據為例， $\hat{\rho}_1 = -0.259$ 代入得 $-\theta$ 之二次方程式，其根分別為 $\theta = 0.28$ 與 $\theta = 3.58$ ，顯然僅有 $\theta = 0.28$ 值滿足 MA(1) 過程之轉化條件 $|\theta| < 1$ ，利用該值作為 θ 之起始推定值，再利用最小平方法證明 $\theta = 0.28$ 是否合理，故試探性之模式為

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.28\varepsilon_{t-1}$$

其次利用附錄之程式，可求得此模式與實測值之殘差(residuals)以驗證其適合度(fitness)。對 $t = 1$ 時，殘差為零， $t = 2$ 時，可求得

$$\hat{x}_2 = x_1 + \varepsilon_2 - 0.28\varepsilon_1$$

由於當 ε_1 和 ε_2 值均為零時，可求得最佳推定值，故 $\hat{x}_2 = x_1 = 39.09$ 在時間為 $t = 2$ 時實際觀測值為 $x_2 = 32.73 \text{ cm/sec}$ ，因此對於時間 $t = 2$ 時之殘差為 $\varepsilon_2 = 32.73 - 39.09 = -6.36$ ，同樣地，對時間 $t = 3$ 時

$$\hat{x}_3 = x_2 + \varepsilon_3 - 0.28\varepsilon_2$$

$$= 32.73 + 0 - 0.28 \times (-6.36)$$

$$= 34.51 (\text{cm/sec})$$

而殘差 $\varepsilon_3 = x_3 - \hat{x}_3 = 28.77 - 34.51 = -5.74$ ，同樣地可求得時間

$t = 4, 5, \dots, 194$ 之殘差。其殘差之自相關函數分別如圖 3.4 ~ 圖 8.4 所示。同樣以民國 70 年 11 月 5 日 ~ 11 月 16 日測站 B 之資料為例，其自相關係數之奇方統計量 (Chi-square statistics) 為

$$Q = (N - d) \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2(e)$$

其中 N 為觀測長度， d 為差分次數， k 為所考慮之時間遲延數通常 $k \leq \frac{N}{4}$ 。此處 $N = 194$ ， $k = 45$ ，則其 Q 值為

$$\begin{aligned} Q &= (194 - 1) \sum_{k=1}^{45} \hat{\rho}_k^2(e) \\ &= 193 \times [(0.029)^2 + (0.006)^2 + (0.061)^2 + \dots + \\ &\quad (-0.31)^2] = 50.23 \end{aligned}$$

Q 值小於自由度 (degree of freedom) 為 $k - p - q = 45 - 0 - 1 = 44$ ，有效水準為 5 % 之奇方臨界值為 $X^2_{0.05, 44} = 60.52$ ，故該模式顯然係可被接受的。換言之即 ARIMA(0, 1, 1) 模式 $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.28\varepsilon_{t-1}$ 對 B 站 11 月 5 日 ~ 11 月 16 日之實測值有 95 % 以上之信賴水準。同理亦可求得 B 站冬季兩觀測期間，C 站及 D 站之 ARIMA(0, 1, 1) 模式分別為

$$\text{B 站 (70 年 11 月 5 日 ~ 11 月 16 日)} \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.28\varepsilon_{t-1}$$

$$\text{(70 年 11 月 19 日 ~ 12 月 9 日)} \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.31\varepsilon_{t-1}$$

$$\text{C 站 (70 年 11 月 19 日 ~ 12 月 4 日)} \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.18\varepsilon_{t-1}$$

$$\text{D 站 (70 年 11 月 5 日 ~ 11 月 16 日)} \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.30\varepsilon_{t-1}$$

其參數 θ 值分別為 0.28, 0.31, 0.18, 和 0.30 等，其中 C 站 θ 值偏小可能如上面所述受裂流及渦流影響所致，惟有點應注意者，即 D 站之 θ 原推定值為 $\hat{\theta} = 0.5$ ，然依據最小平方方法證明當 $\theta = 0.30$ 時較合理。圖 3.5 圖 4.5 圖 6.5 圖 8.5 分別表示各站冬季期間實測值與推定值之比較，圖形顯示，推定值與實測值之變化趨勢非常一致，僅有些微之時間遲延 (time

lag) 而可。

惟各站在夏季期間之原始資料其第一次差分後所繪製之自相關函數以及偏自相關函數和上述冬季期間各站資料之結果並不一樣，如圖 5.2 和圖 7.2 所示，其自相關函數仍呈明顯正弦函數緩慢地消散，故欲轉換成定常性時間序列，有必要再差分一次，其第二次差分後之自相關函數以及偏自相關函數如圖 5.3 和圖 7.3 所示，圖形顯示，B 站和 C 站在夏季期間原始資料第二次差分以後，其自相關函數，B 站除了在 k 值為 31 處，C 站除了在 k 值為 10 及 15 處稍嫌較大外，在 $q = 1$ 處已明顯地被截斷，而偏自相關函數則成正弦函數消散，根據表 2-1 定常模式之理論自相關和偏自相關函數比較，B 站和 C 站在夏季期間之時流速時間序列適用 $ARIMA(0, 2, 1)$ 或 $IMA(2, 1)$ 模式即 $\nabla^2 x_t = (1 - B\theta)\epsilon_t$ ，其中 ∇^2 表差分二次， $q = 1$ 表自相關函數在 q 值為 1 處以後被截斷。故試探性之 $ARIMA(0, 2, 1)$ 或 $IMA(2, 1)$ 過程可寫成

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$$

其中 θ 為參數，其它符號與上述相同。此過程同樣亦僅有一個參數 θ 需加以推定，可自 $MA(1)$ 過程之理論自相關函數

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}$$

中求得，在夏季時，B 站與 C 站之 θ 值分別為 0.42 與

0.35 即

$$\text{夏季時 B 站} \quad x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \epsilon_t - 0.42\epsilon_{t-1}$$

$$\text{C 站} \quad x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \epsilon_t - 0.35\epsilon_{t-1}$$

然後再利用附錄之程式，可求得該試探性模式與實值之殘差以驗證其適合度。由於該模式考慮到其前面二個時間遲延之資料，故通常令 $\hat{x}_1 = x_1$ ，

$\hat{x}_2 = x_2$ 同時令 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ，以 B 站為例：

$$\hat{x}_1 = x_1 = 24.13, \quad \hat{x}_2 = x_2 = 18.76$$

故 $t = 3$ 時， $\hat{x}_3 = 2x_2 - x_1 + \varepsilon_3 - 0.42\varepsilon_2$

由於當 ε_3 亦為零時，可求得 $\hat{x}_3$ 之最佳推定值故

$$\hat{x}_3 = 2 \times 18.76 - 24.13 + 0 - 0.42 \times 0 = 13.39$$

殘差 ε_3 為 $\varepsilon_3 = x_3 - \hat{x}_3 = 15.13 - 13.39 = 1.74$ ，同樣地當時間 $t = 4$

$$\text{時} \quad \hat{x}_4 = 2x_3 - x_2 + \varepsilon_4 - 0.42\varepsilon_3$$

$$= 2 \times 15.13 - 18.76 + 0 - 0.42 \times (1.74)$$

$$= 10.77$$

而殘差 $\varepsilon_4 = x_4 - \hat{x}_4 = 12.83 - 10.77 = 2.06$ ，依此類推可相繼求得 t

$= 5, 6, \dots, 325$ 時之殘差，其殘差之自相關係數如圖 5.4 和圖 7.4 所

示，其殘差自相關係數之奇方統計差 Q 為

$$Q = (N - D) \sum_{k=1}^{80} \hat{\rho}_k^2(\varepsilon)$$

$$= (325 - 2) [(0.004)^2 + (-0.001)^2 + (-0.095)^2 + \dots +$$

$$(-0.025)^2 + (-0.021)^2] = 81.8$$

Q 值小於自由度為 $k - p - q = 80 - 0 - 1 = 79$ ，有效水準為 5% 之奇方臨界值 $X^2_{0.05, 79} = 100.74$ ，故該試探性模式顯然亦可被接受，換言之，

ARIMA(0, 2, 1) 模式，當 θ 為 0.42 時對 B 站夏季期間實測值具有 95% 以上頗信之信賴水準，C 站當 θ 值為 0.35 時，其結果亦然，故對夏季期間之時流速模式分別可用下二式表之

B 站 (71.年 5.月 3.日 ~ 5.月 18.日)

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.42\varepsilon_{t-1}$$

C 站 (71.年 4.月 29.日 ~ 5.月 13.日)

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.42\varepsilon_{t-1}$$

圖 5.5 和圖 7.5 分別表示 B 站，C 站夏季期間實測值與推定值之比較，圖形顯示二者趨勢及時間遲延均甚為一致，僅是推定值較實測值稍為略大而

已。

由於本研究僅著重在於海流流速其大小模式之研究而已，故有關海流流向流速統計圖，向量進行圖，海流旋轉能譜圖以及各站間之互相關函數分別自本所專刊第6號之附圖摘錄如圖9.1～圖12.2所示以資比較。

肆、結論及建議

(一) 結論

綜合以上資料分析及討論，台中港口海流之流速可用 $ARIMA(p, d, q)$ 模式適當地來表示，而顯然地冬季期間與夏季期間之模式並不相同

1. 冬季期間可用 $ARIMA(0, 1, 1)$ 或 $IMA(1, 1)$ 模式， $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ ，適當地表之，其中 θ 為參數，即

$$B \text{ 站 (70.年11.月5.日} \sim 11.月16.日) \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.28\varepsilon_{t-1}$$

$$(70.年11.月19.日 \sim 12.月9.日) \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.31\varepsilon_{t-1}$$

$$C \text{ 站 (70.年11.月19.日} \sim 12.月4.日) \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.18\varepsilon_{t-1}$$

$$D \text{ 站 (70.年11.月5.日} \sim 11.月16.日) \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.30\varepsilon_{t-1}$$

除 C 站 θ 值為 0.18 較小外，各站 θ 值約為 0.30，其原因可能是測站位置之關係使得 C 站受裂流及渦流之影響所致。

2. 夏季期間可用 $ARIMA(0, 2, 1)$ 或 $IMA(2, 1)$ 模式， $x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ 適當地表之，其中 θ 為參數即

$$B \text{ 站 (71.年5.月3.日} \sim 5.月18.日)$$

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.42\varepsilon_{t-1}$$

$$C \text{ 站 (71.年4.月29.日} \sim 5.月13.日)$$

$$x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + \varepsilon_t - 0.35\varepsilon_{t-1}$$

(二) 建議

⊖ 建議應在各站同一時間實測其海流狀況以資比較，並進一步推求其各站間彼此之相關函數以建立更完整之模式。

⊖ 除了台中港口海流可用 $ARIMA(p, d, q)$ 模式適當表示外，台灣四週海岸及港口是否有此特性應作進一步之研究。

參 考 資 料

1. GEORGE E. P. BOX, GWILYM M. JENKINS (1976)
“Time Series Analysis ; forecasting and control ”
2. DOUGLAS C. MONTGOMERY, LYNWOOD A. JOHNSON
(1976) “Forecasting and Time Series Analysis ”, McGraw-Hill, Inc.
3. NICK T. THOMOPOULOS (1979)
“Applied Forecasting Methods ”
4. 梁乃匡，曾相茂 (1982)
“ 台中港口流況調查研究 ”，港研所專刊第六號。
5. 李欽青 (1978)
“ 台灣河川月流量預報模式之研究 ”，成大水利及海洋研究所碩士論文
6. 台中港工程局 (1974)
“ 台中港氣象，海象等自然資料調查之研究 ”

致 謝

本文承蒙歐善惠教授之指導，本組曾相茂兄之惠予提供資料以及數學模式組陳錫奎、蘇青和、張瀚達等諸兄協助電腦操作及程式有關事宜得以完成，謹致以最高衷心之敬意，在此一併致謝。

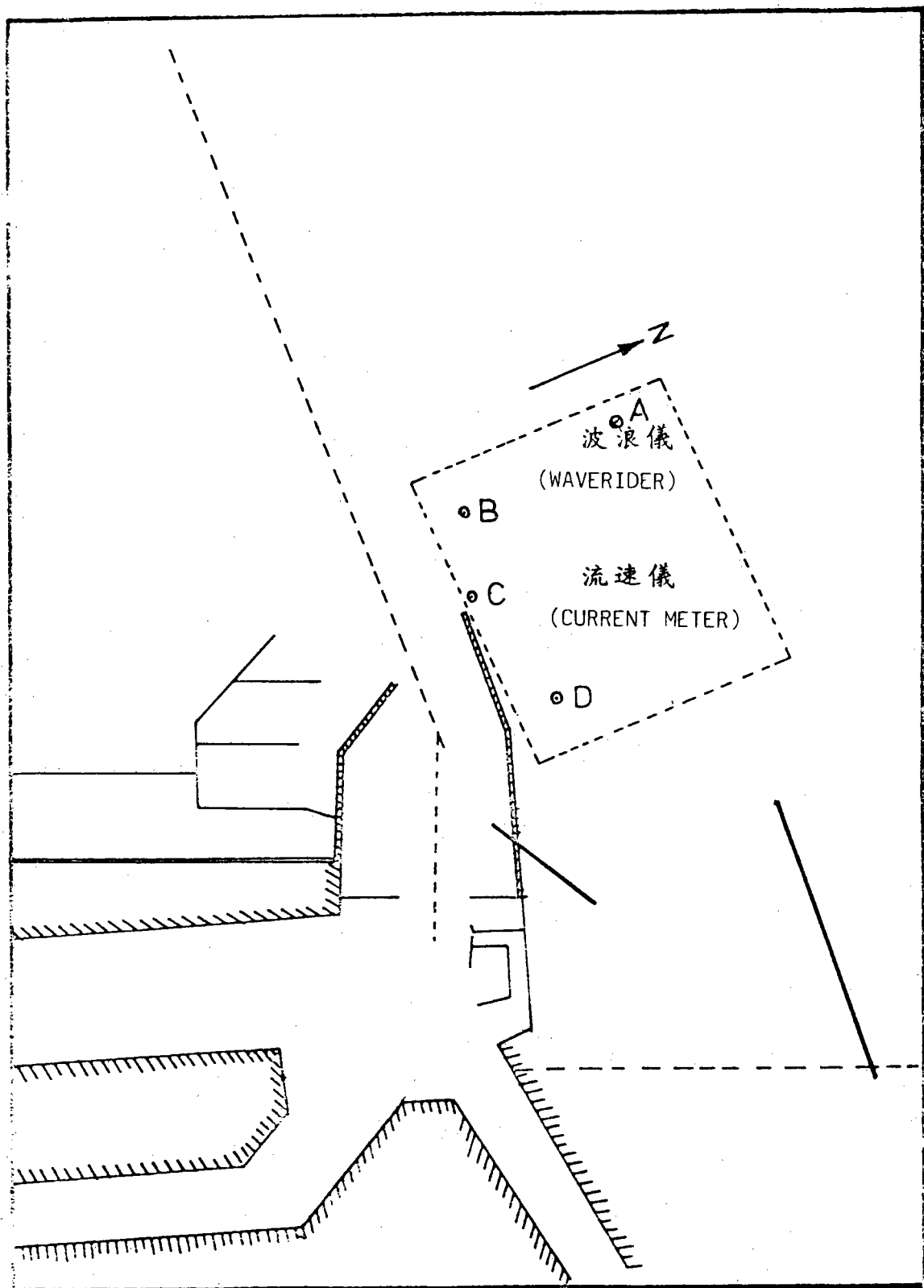


圖 1 台中港港口附近測站位置圖

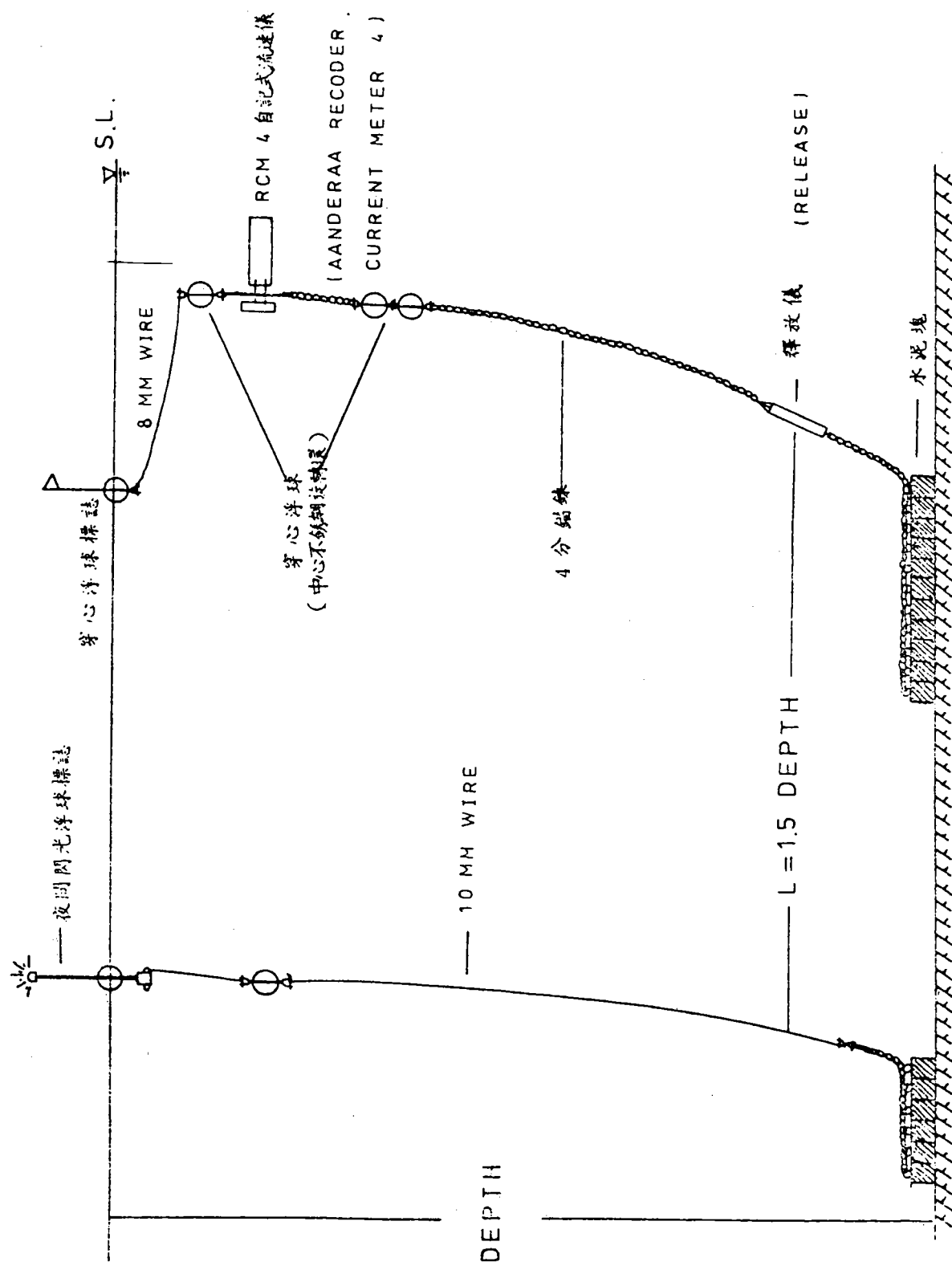


圖 2 流速儀安裝圖

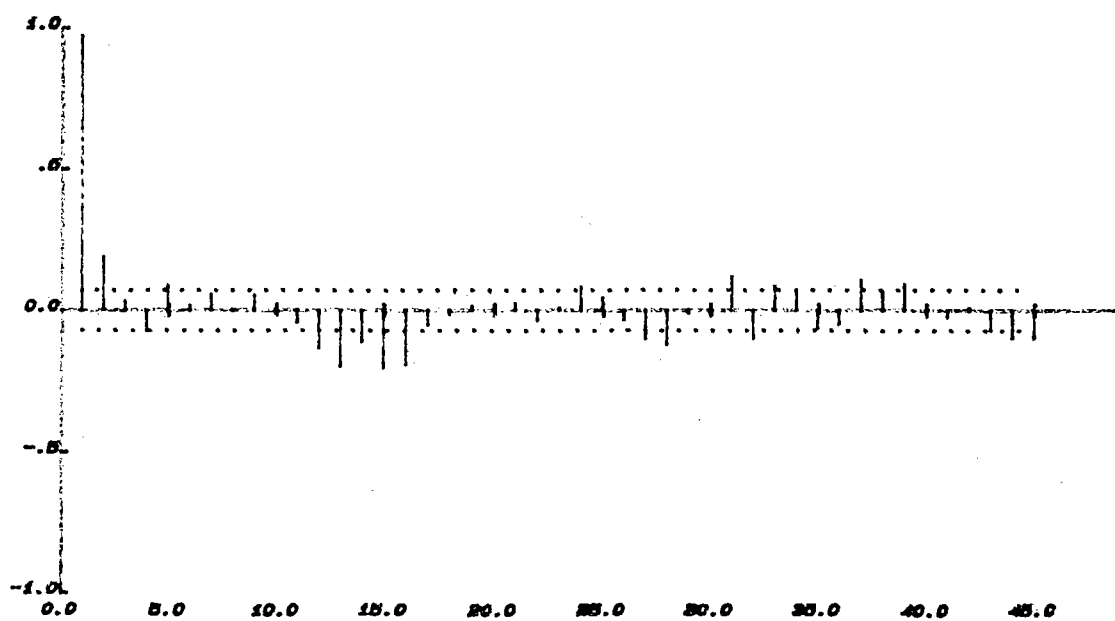
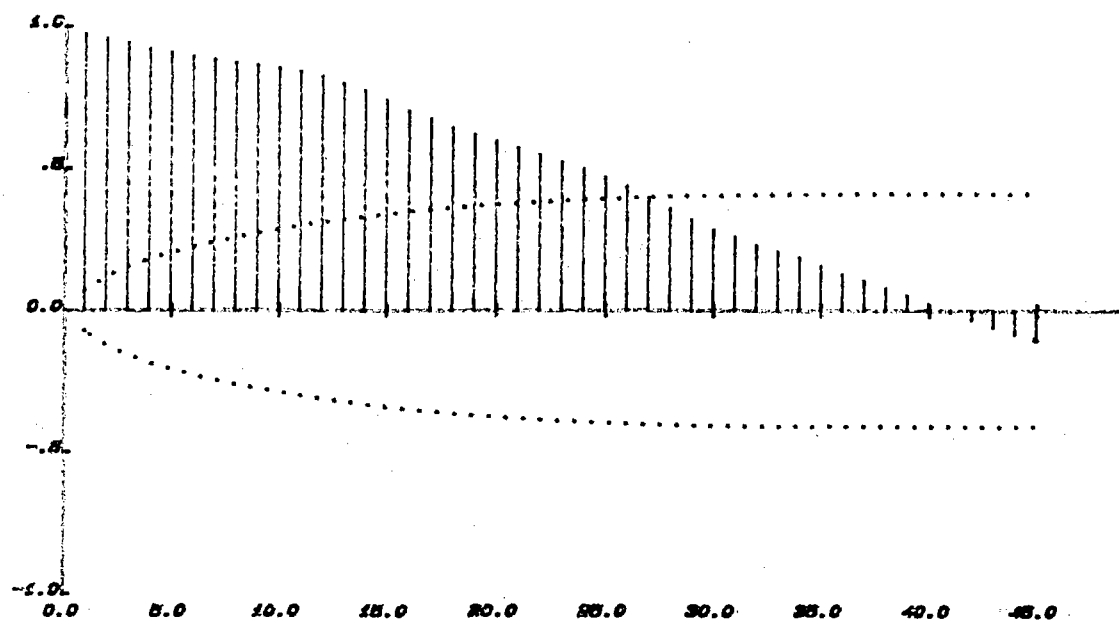


圖 3·1 測站B 冬季自相關及偏自相關函數圖

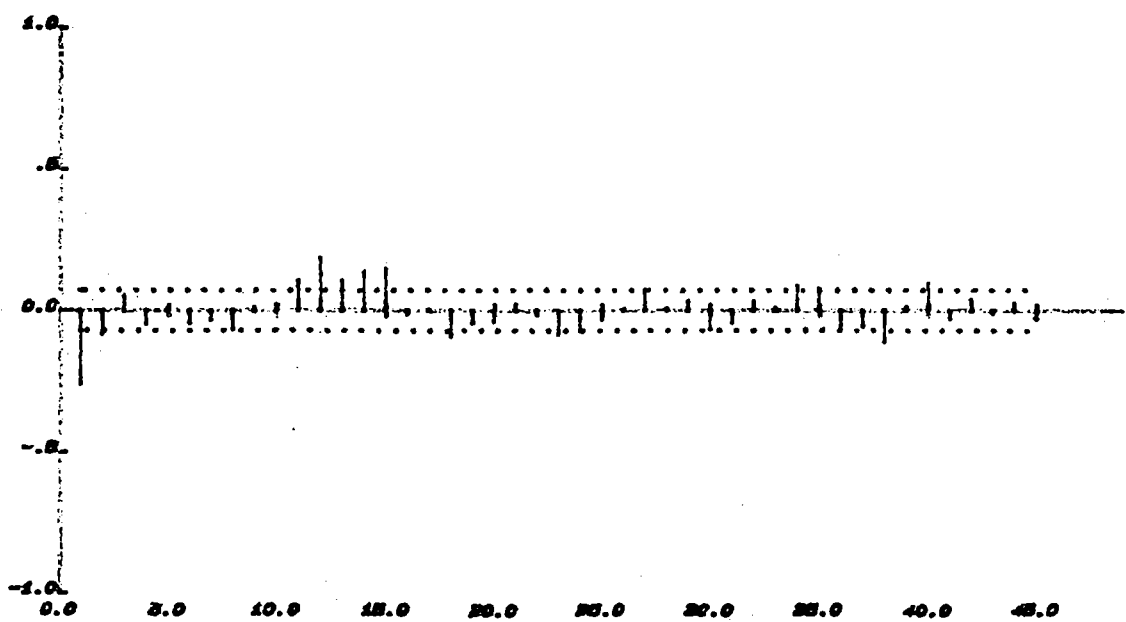
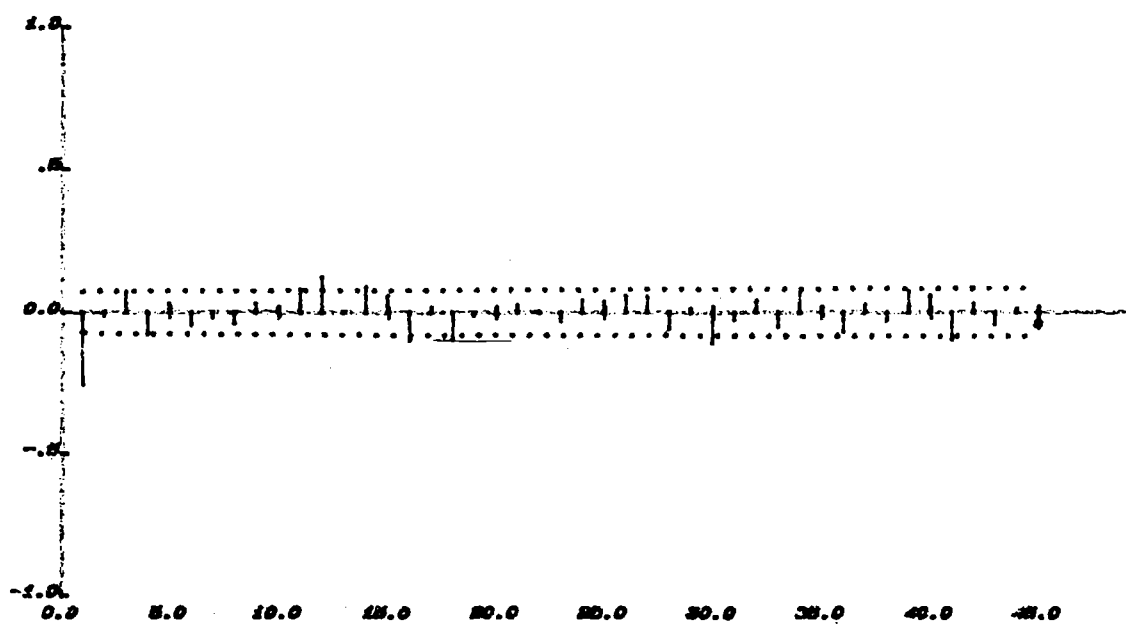


圖 3·2 測站 B 冬季第一次差分自相關及偏自相關函數圖

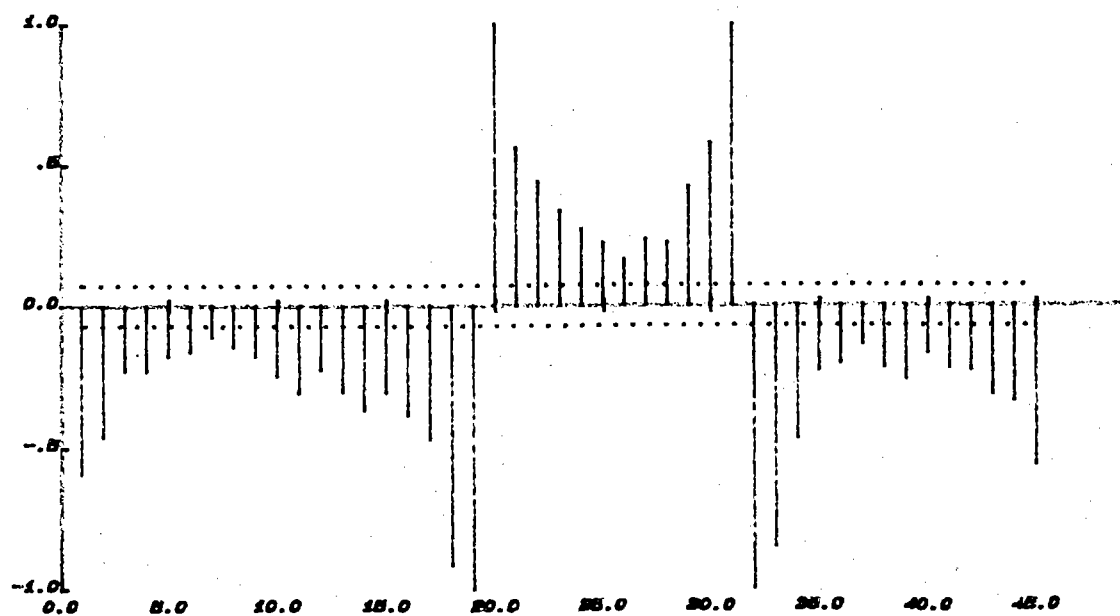
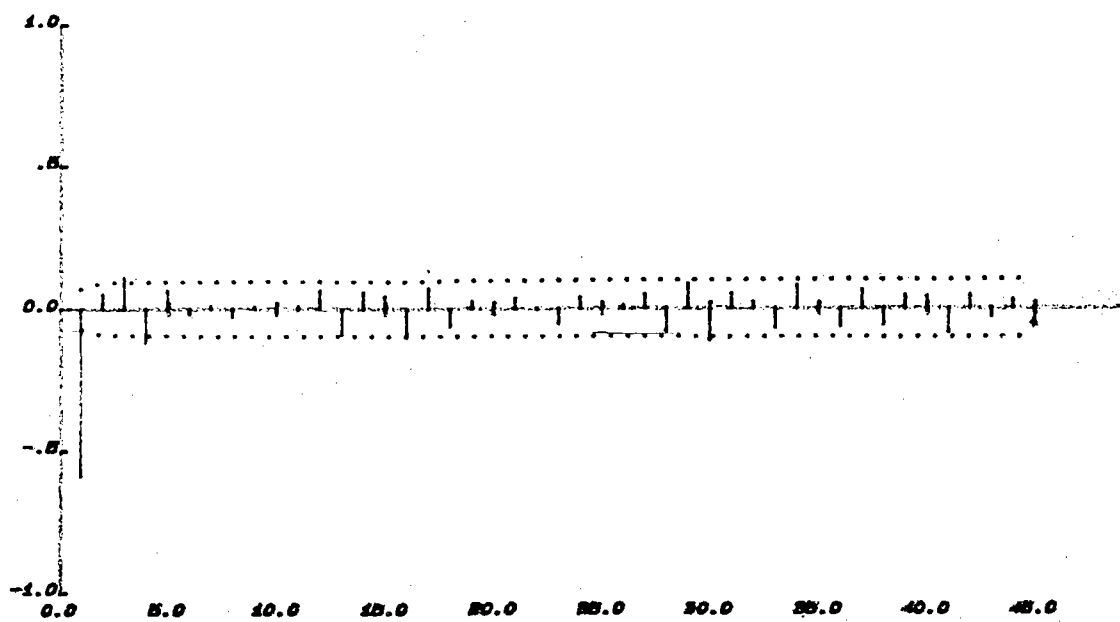


圖 3.3 測站 B 冬季第二次差分自相關及偏自相關函數圖

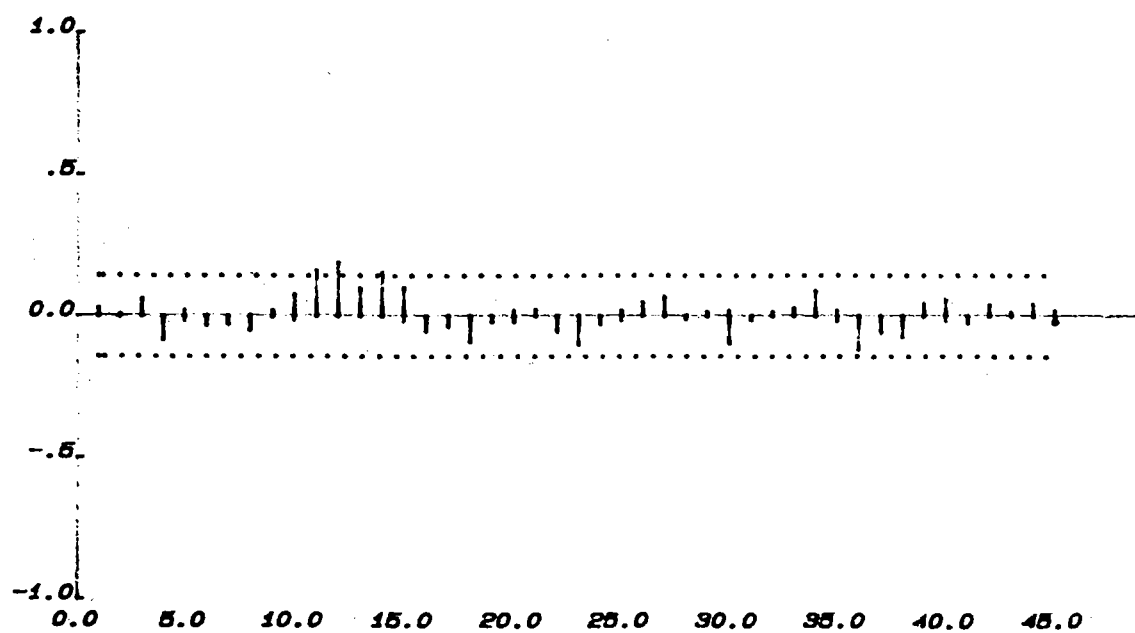
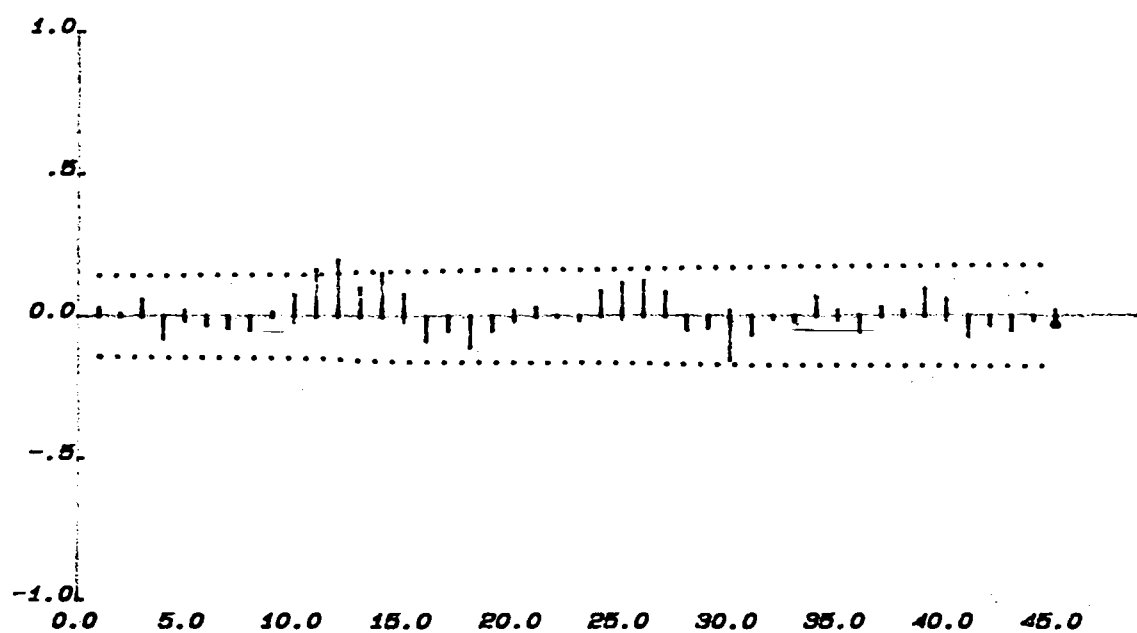


圖 3·4 測站 B 冬季殘值自相關及偏自相關函數圖

(70.年 11.月 5.日 ~ 11.月 16.日)

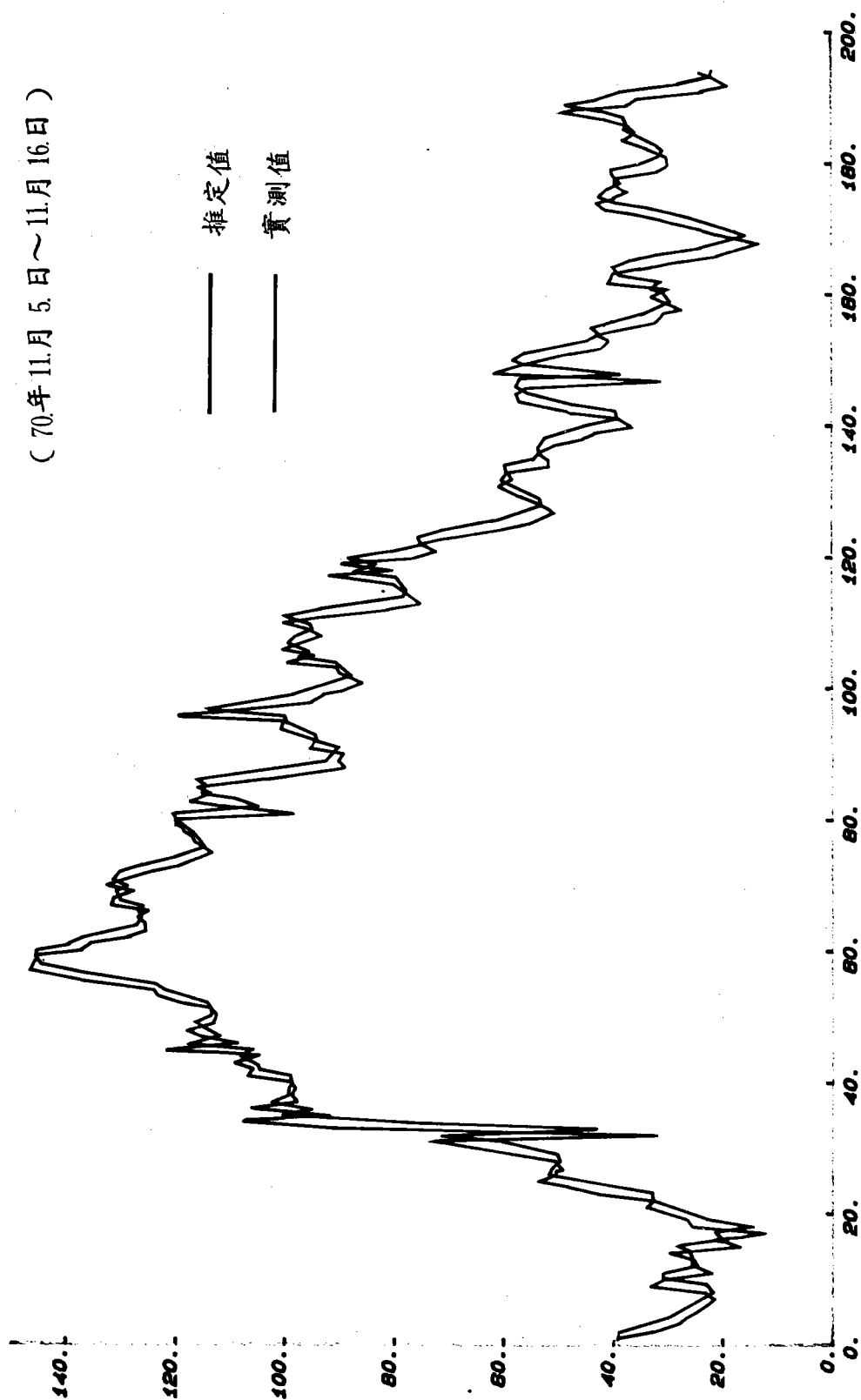


圖 3・5 測站 B 冬季實測值與推定值比較圖

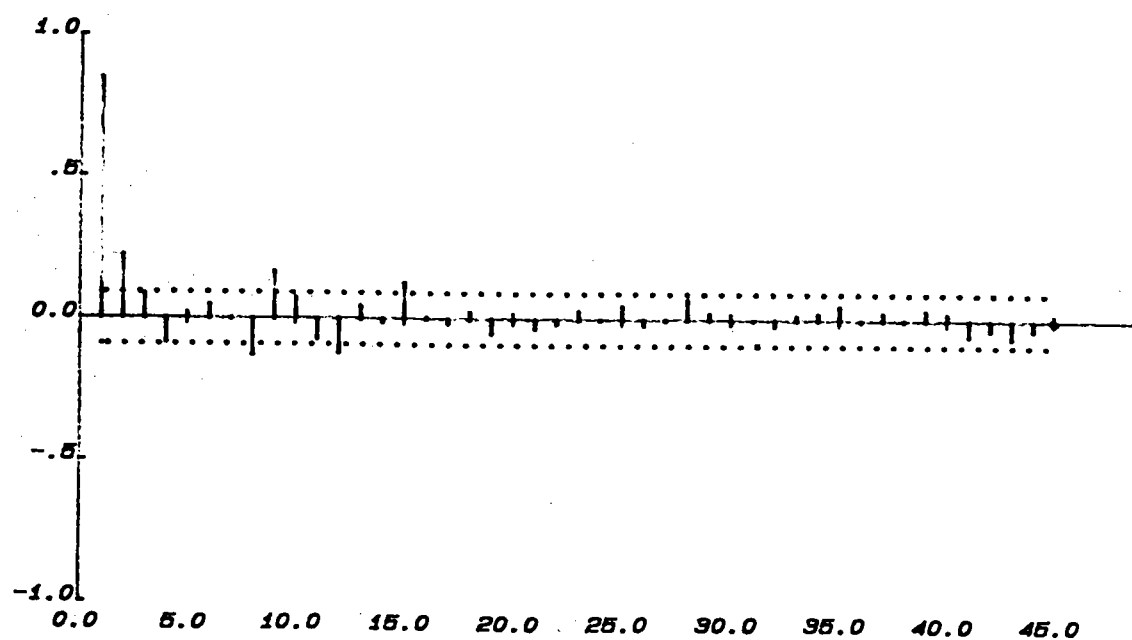
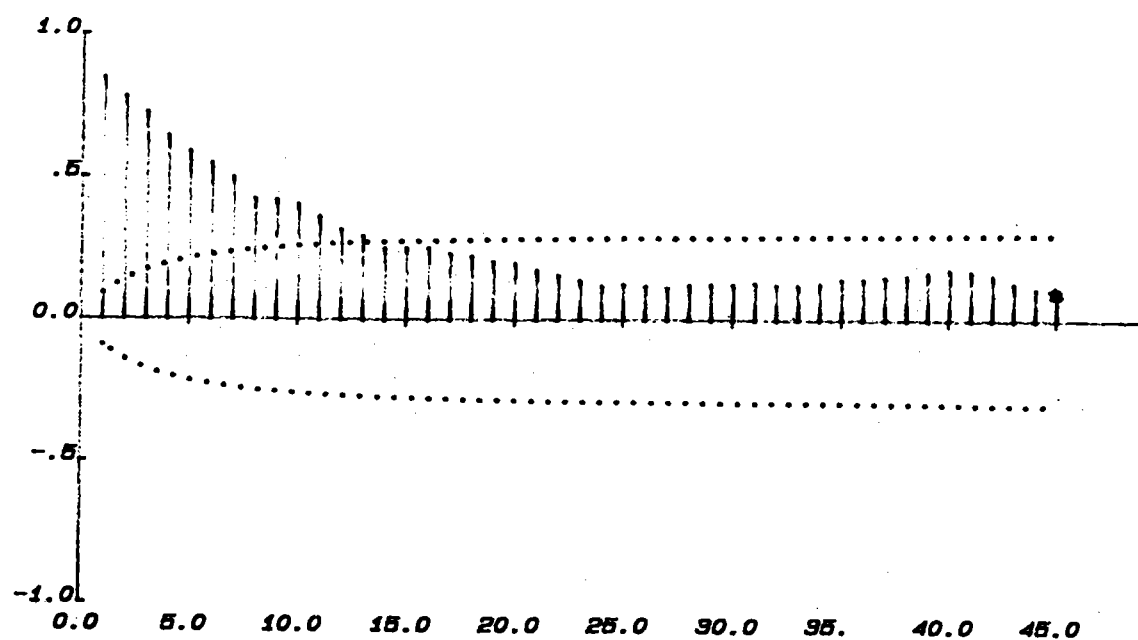


圖 4·1 測站 B 冬季自相關及偏自相關函數圖

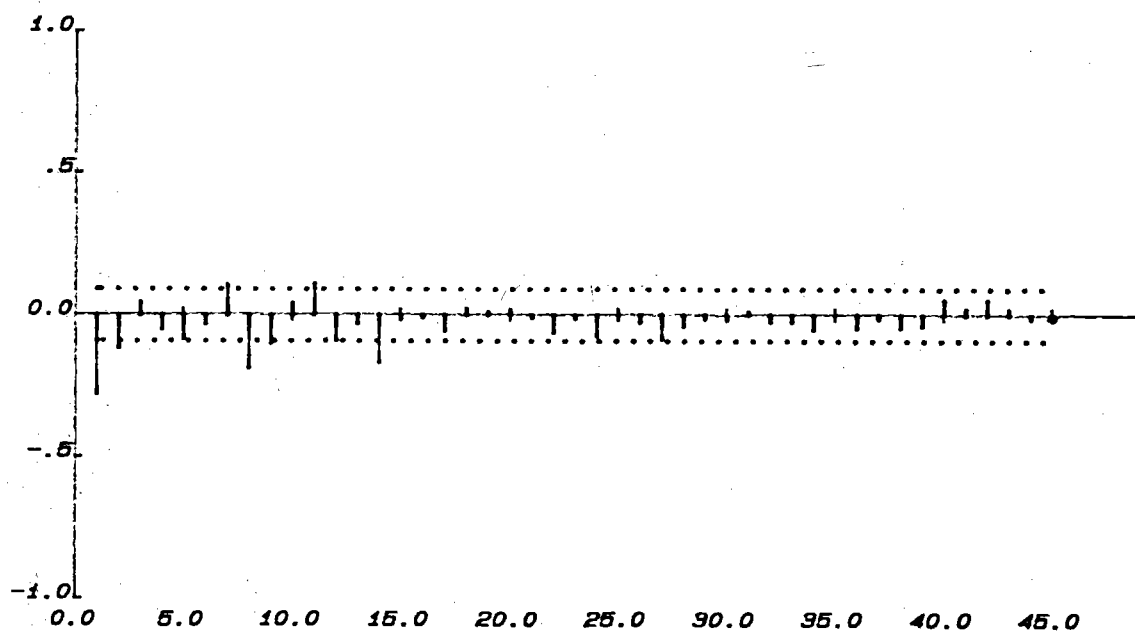
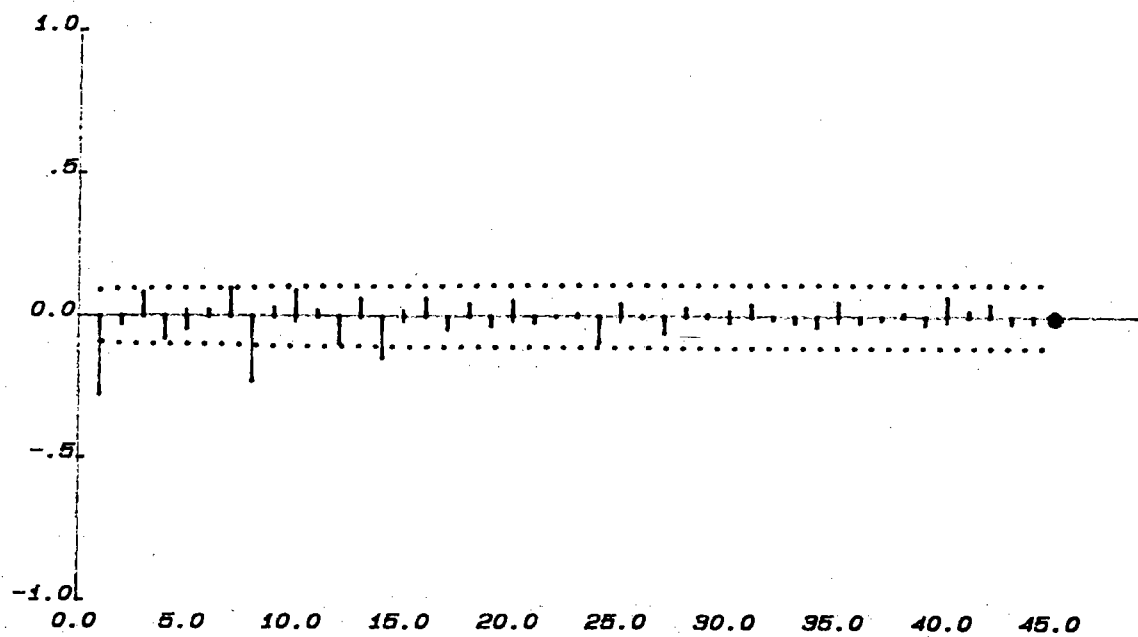


圖 4.2 測站 B 冬季第一次差分自相關及偏自相關函數圖

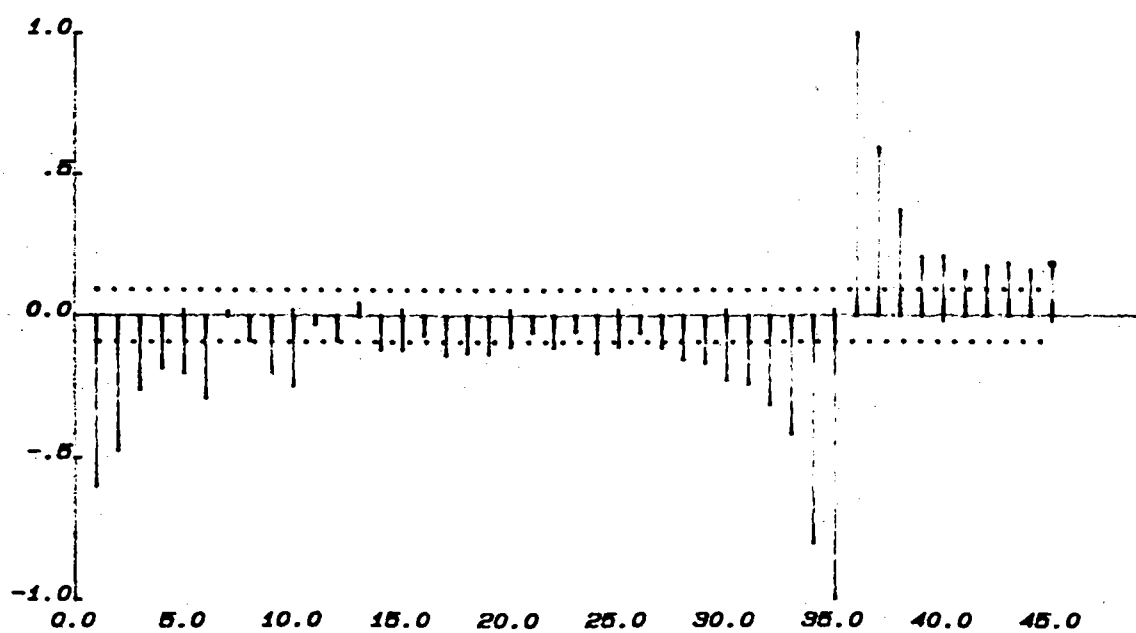
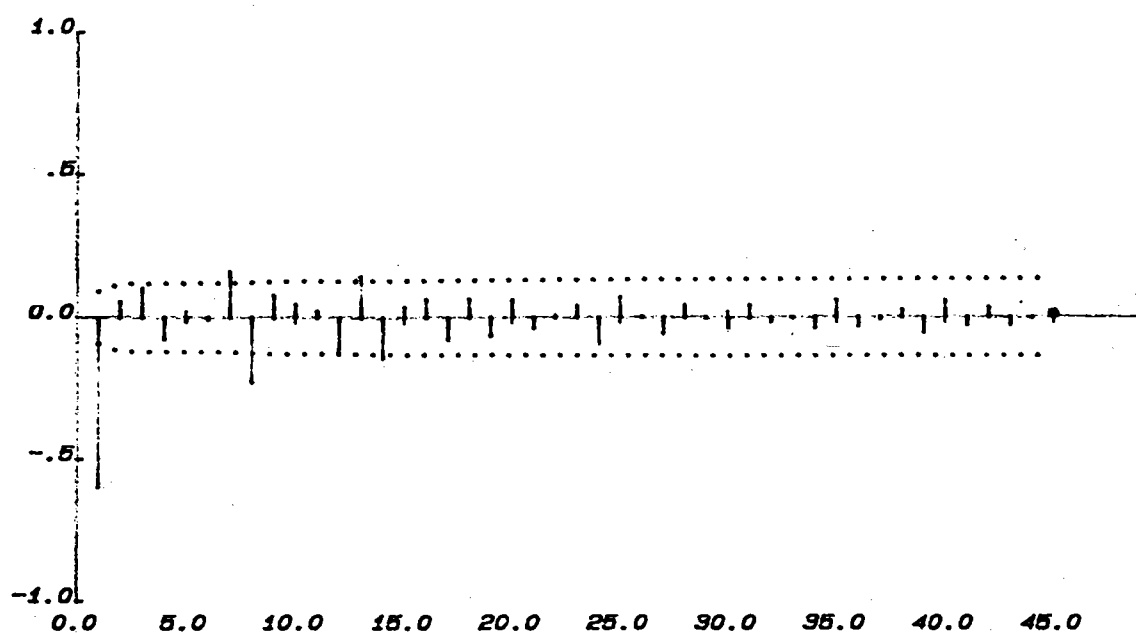


圖 4.3 測站 B 冬季第二次差分自相關及偏自相關函數圖

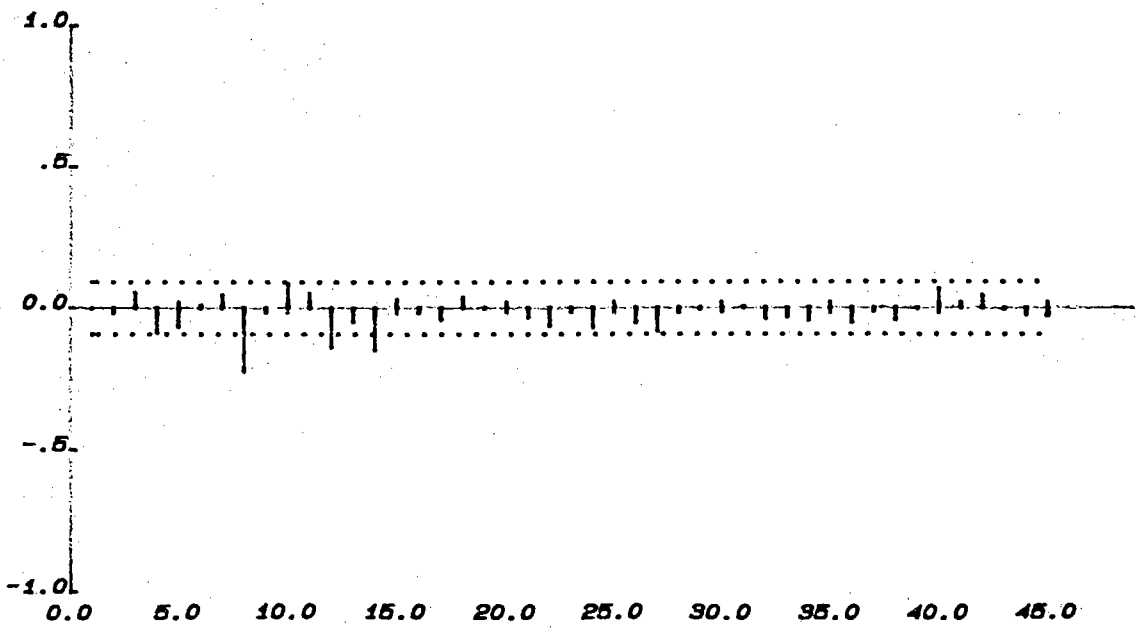
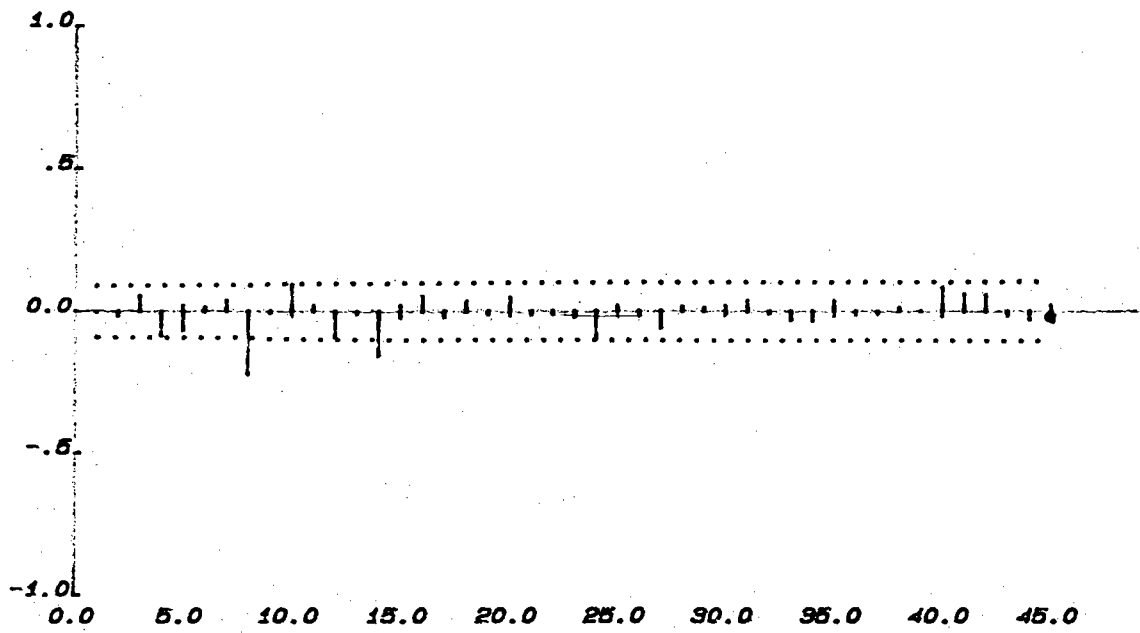


圖 4·4 測站 B 冬季殘差值自相關及偏自相關函數圖

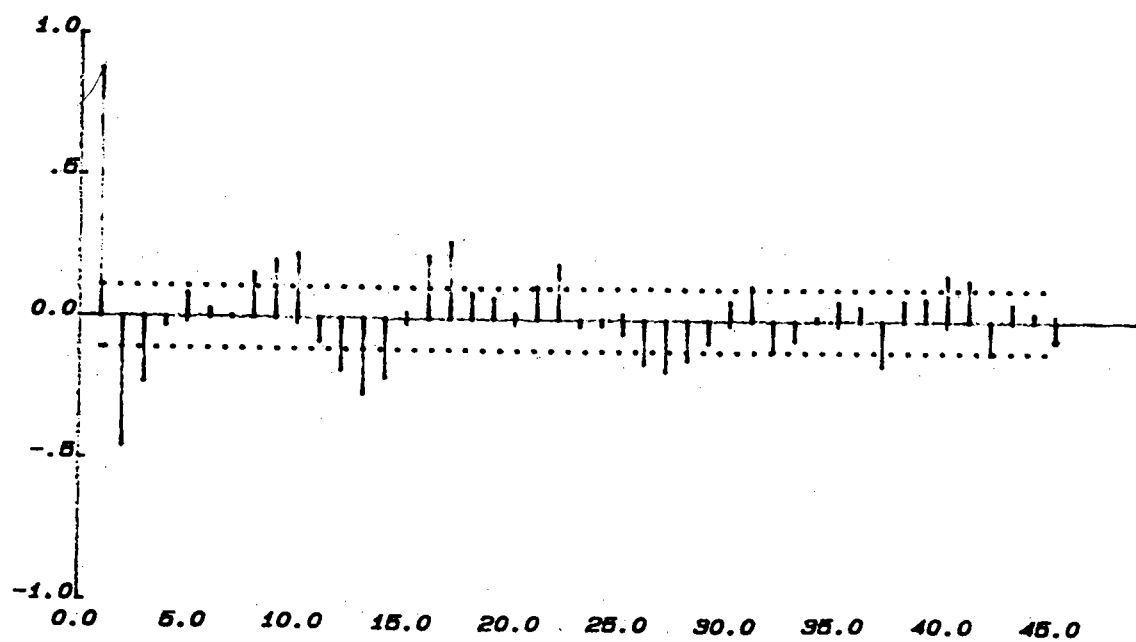
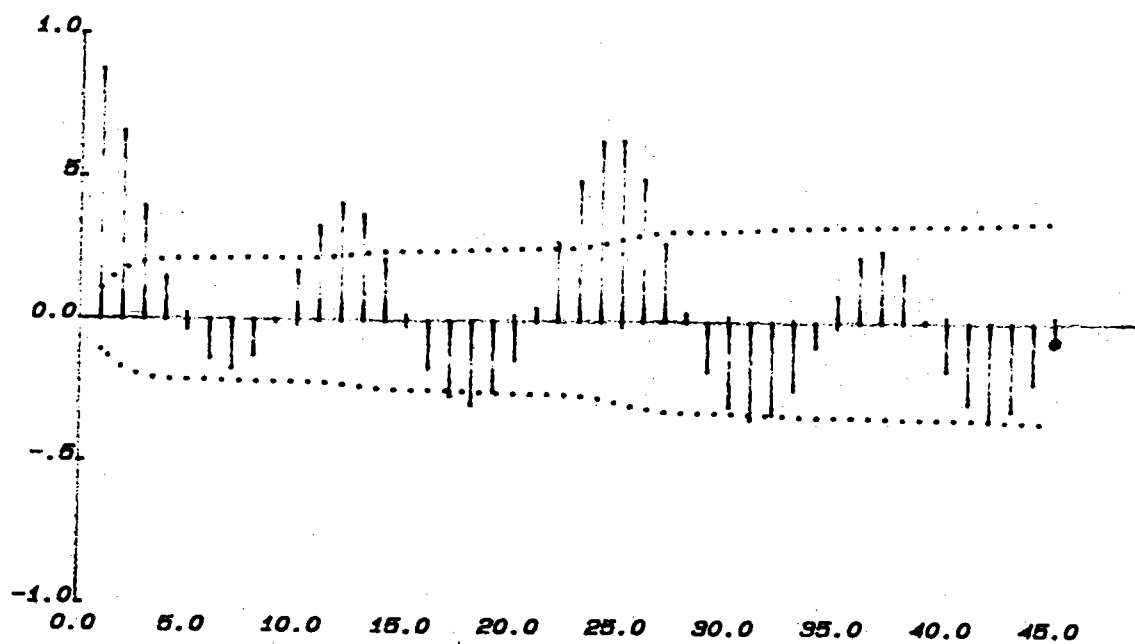


圖 5-1 測站B 夏季自相關及偏自相關函數圖

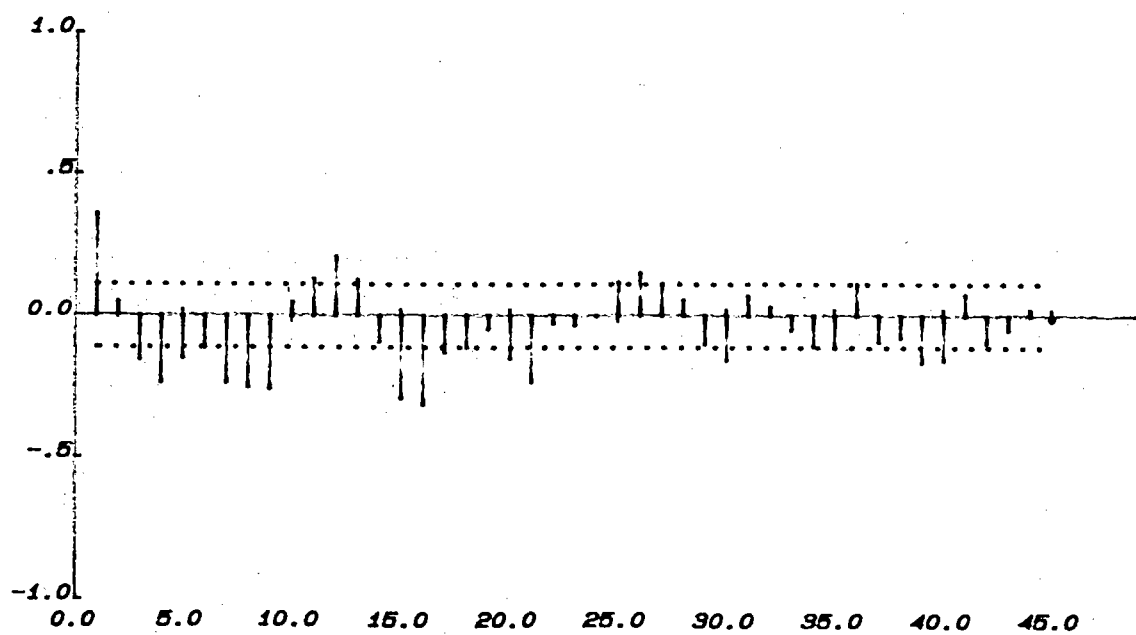
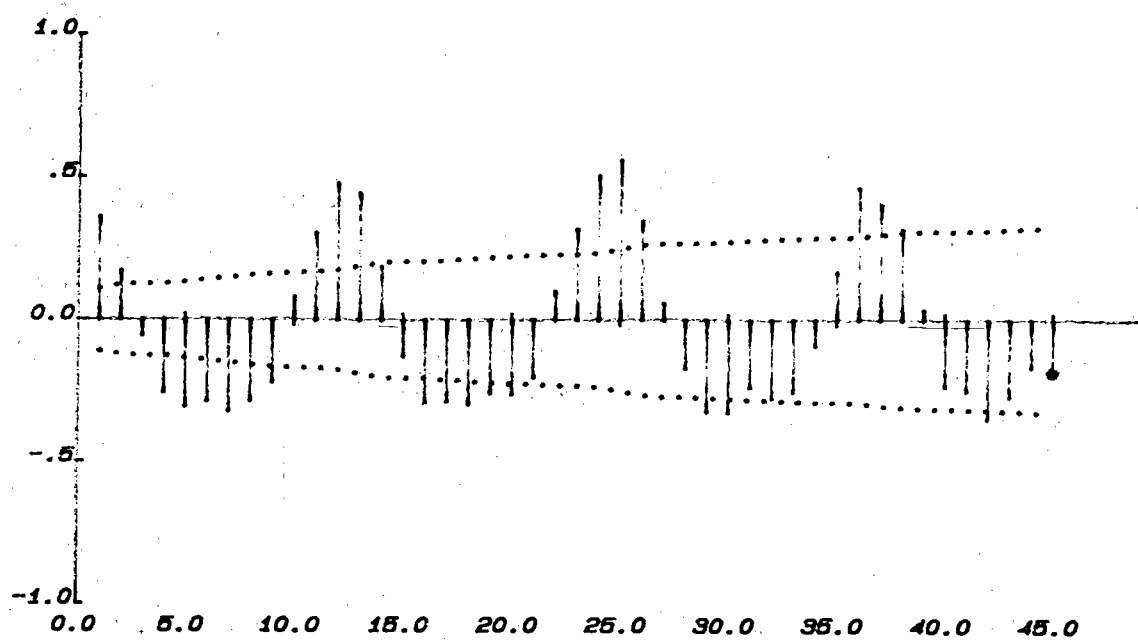


圖 5·2 測站B 夏季第一差分自相關及偏自相關函數圖

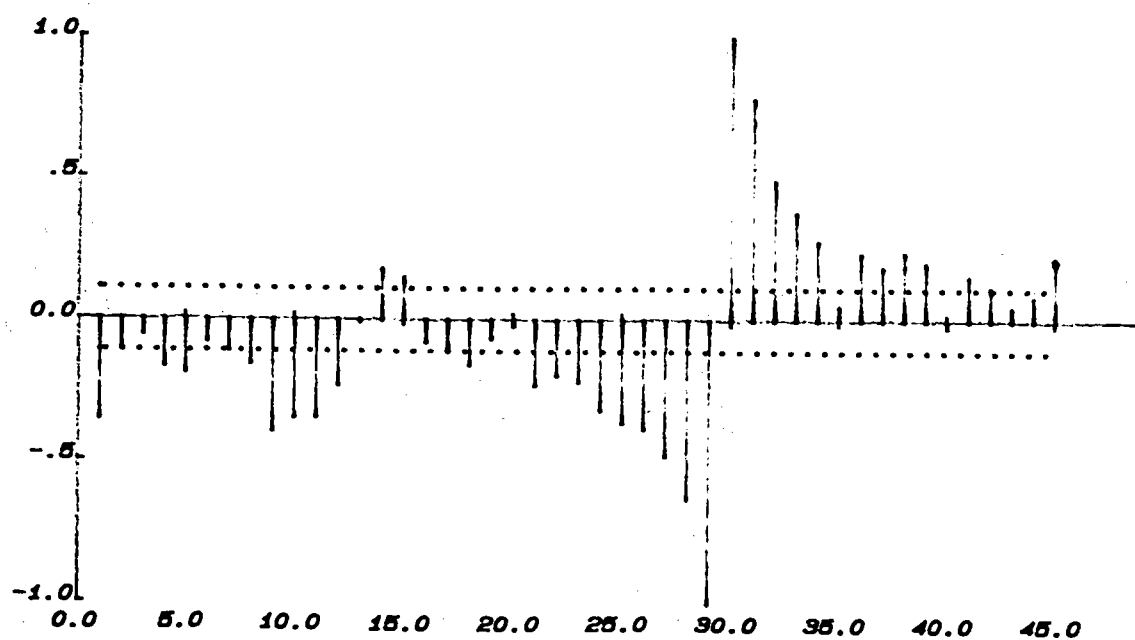
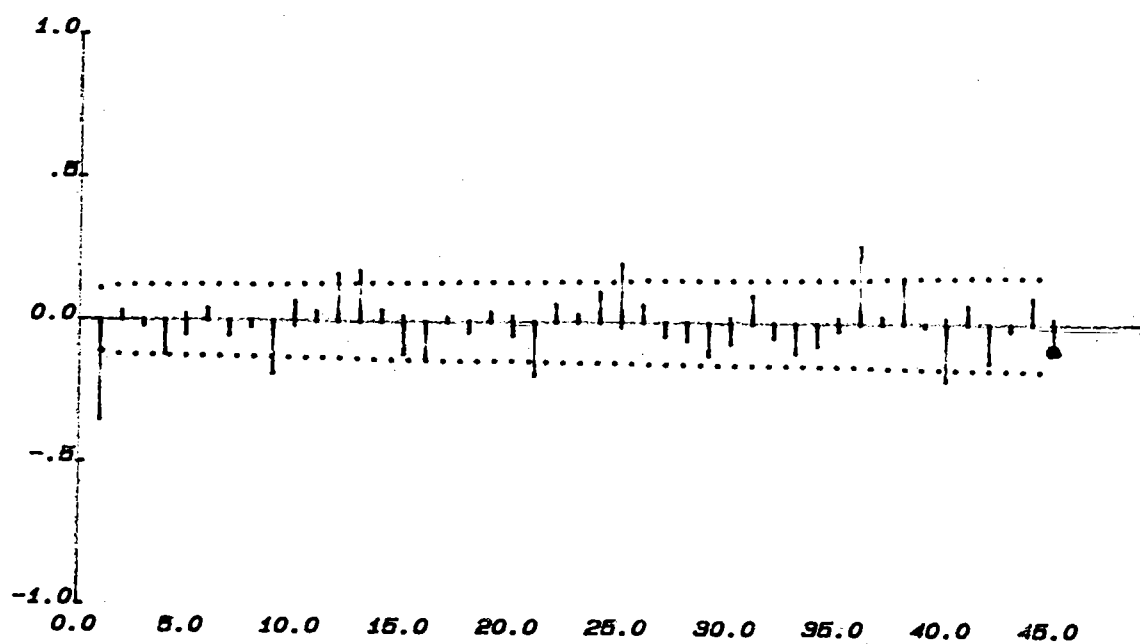


圖 5·3 測站 B 夏季第二差分自相關及偏自相關函數圖

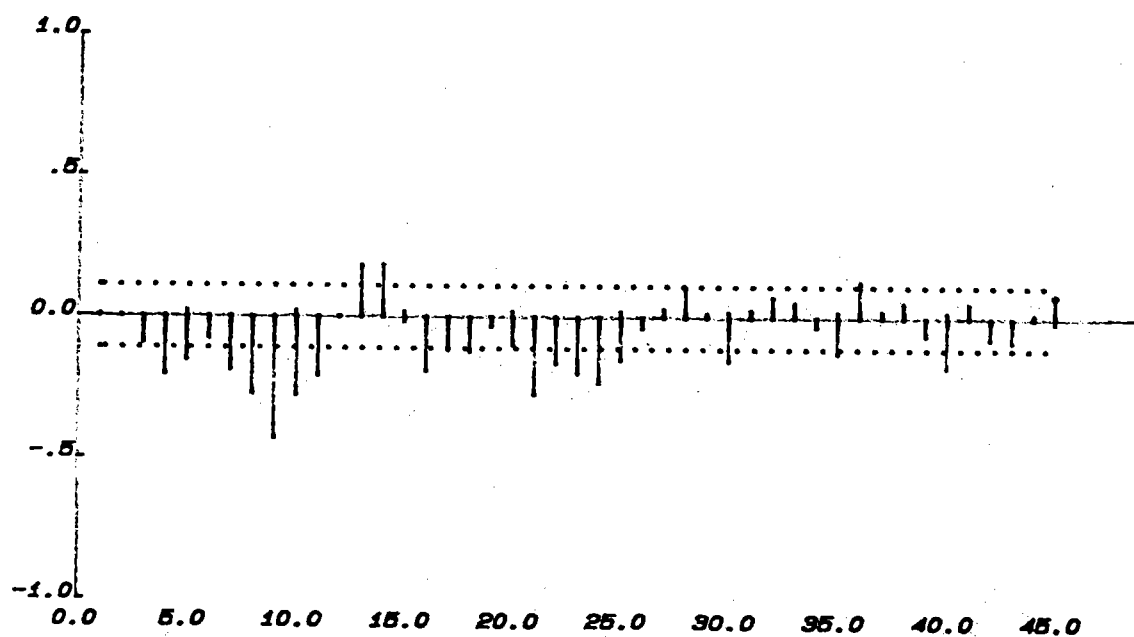
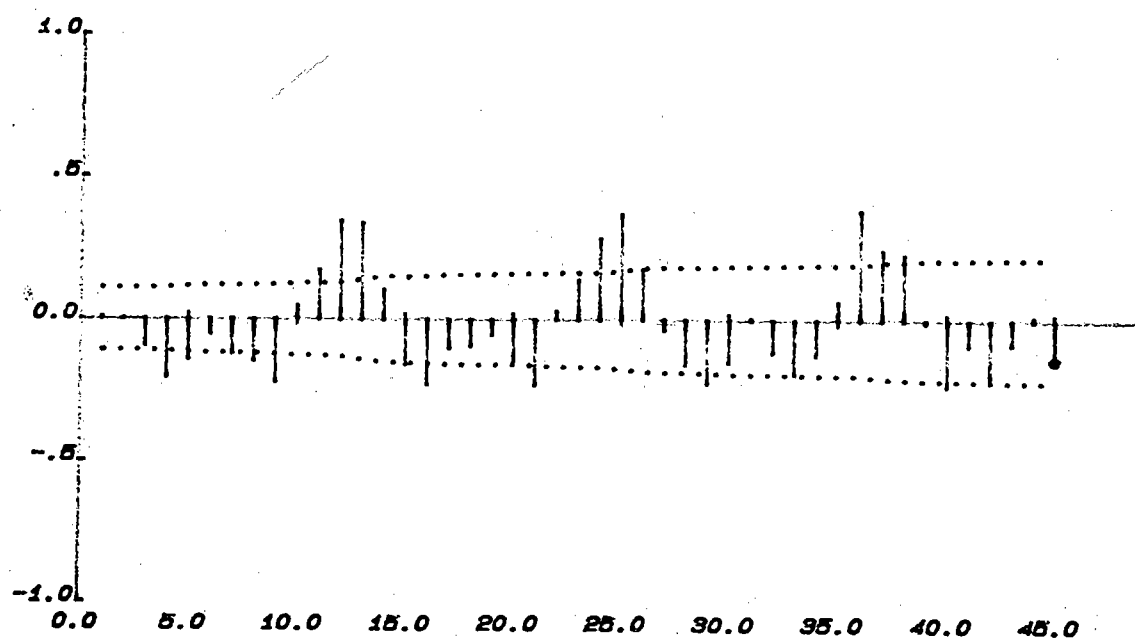


圖 5.4 測站 B 夏季殘差值自相關及偏自相關函數圖

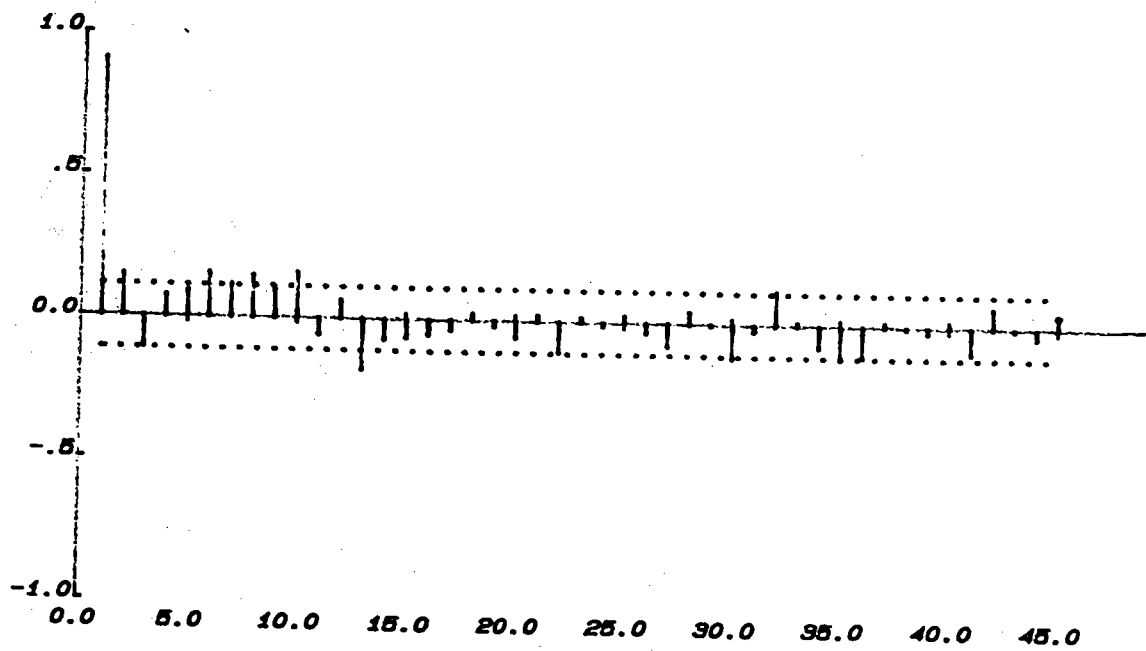
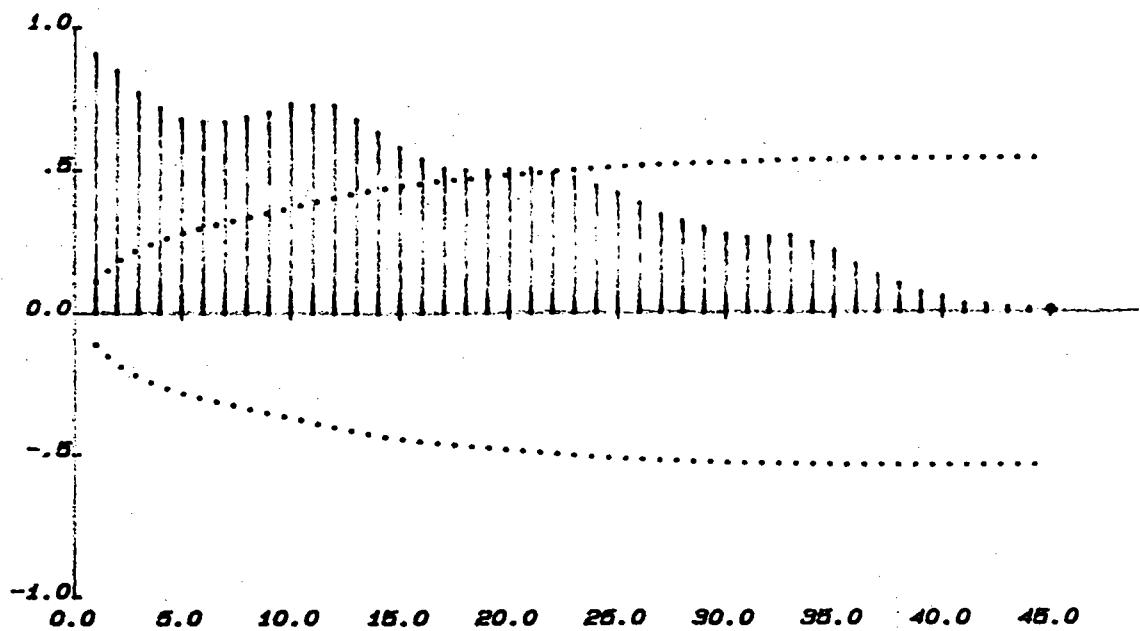


圖 6·1 測站 C 冬季自相關及偏自相關函數圖

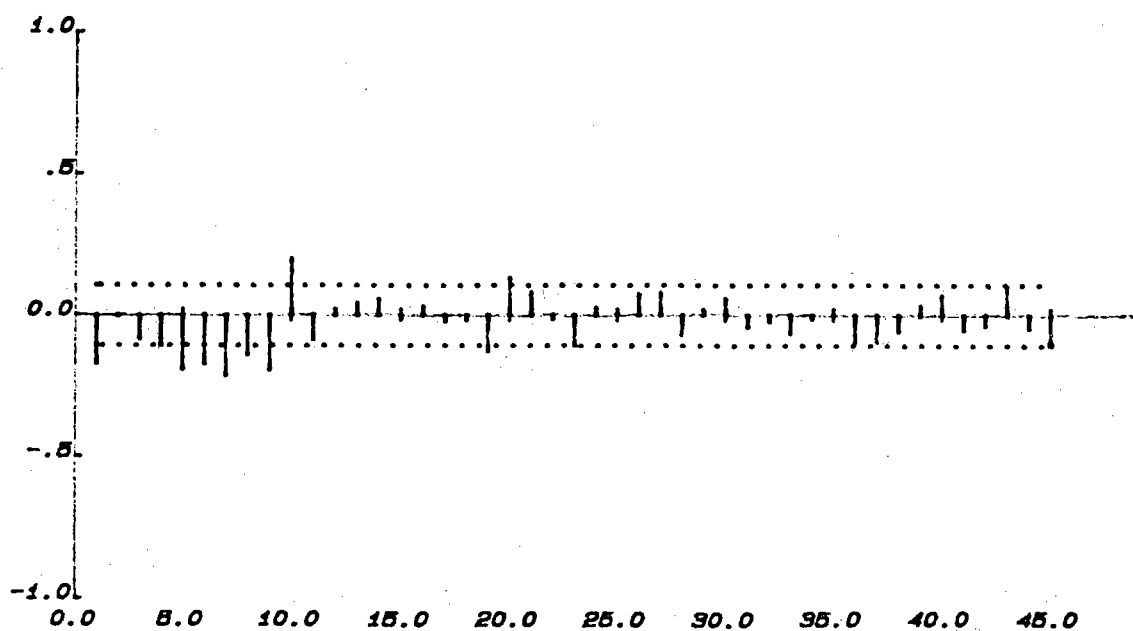
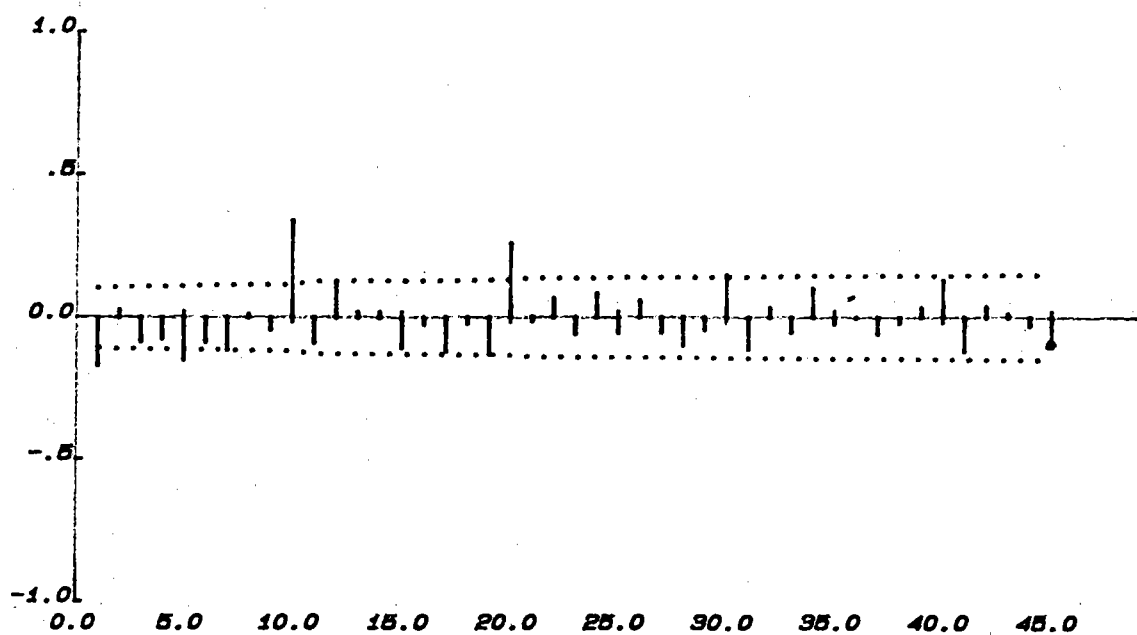


圖 6·2 測站 C 冬季第一次差分自相關及偏自相關函數圖

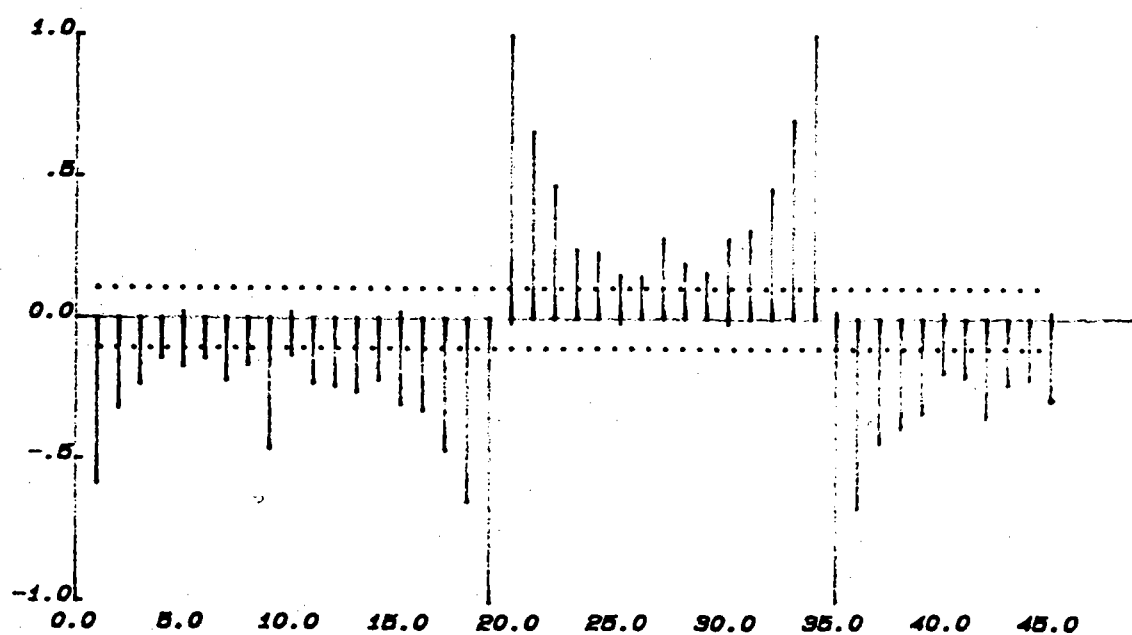
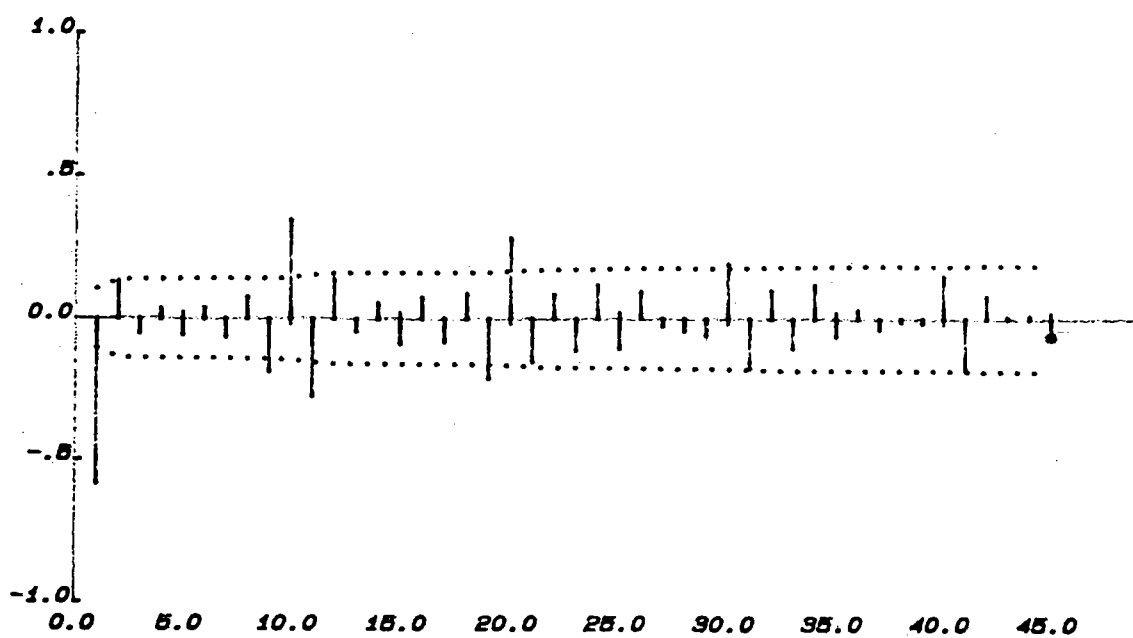


圖 6-3 測站 C 冬季第二次差分自相關及偏自相關函數圖

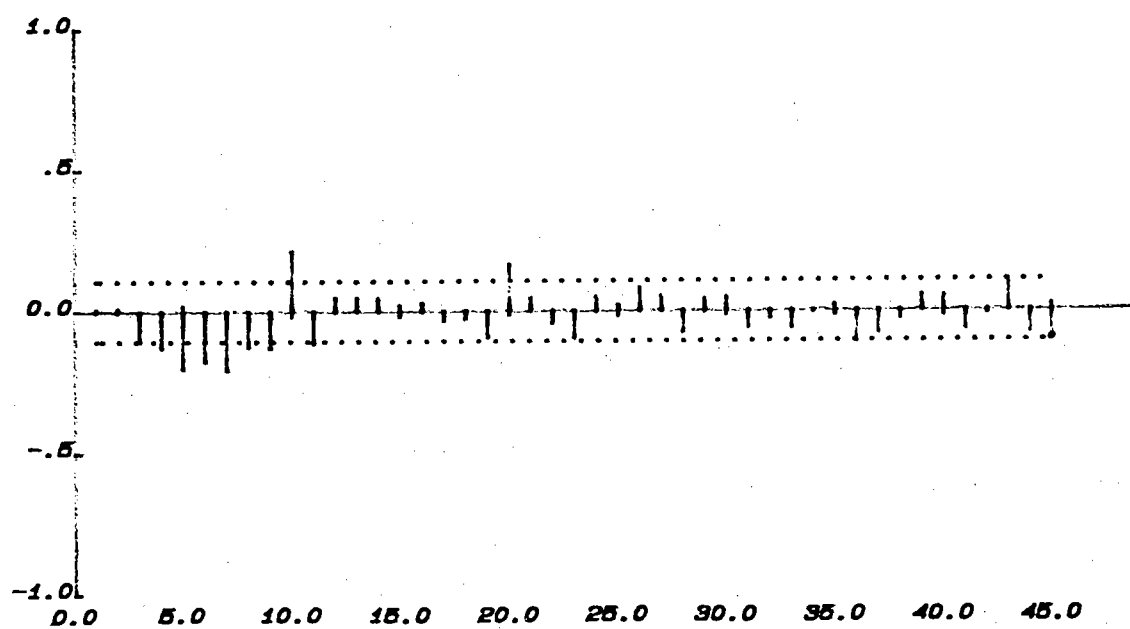
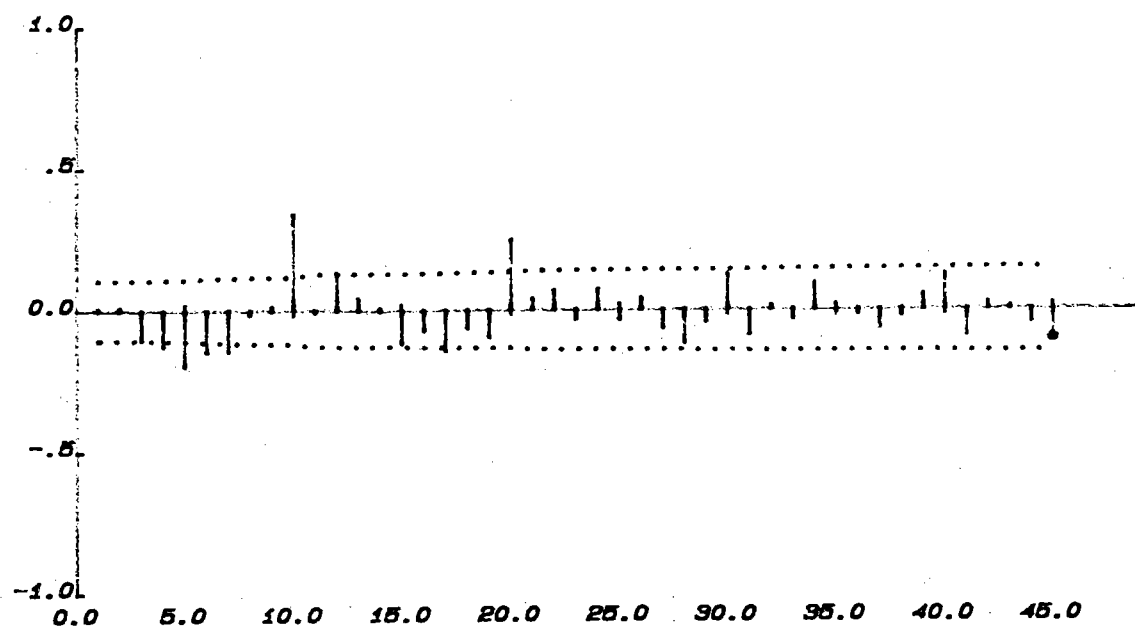


圖 6·4 測站 C 冬季殘差值自相關及偏自相關函數圖

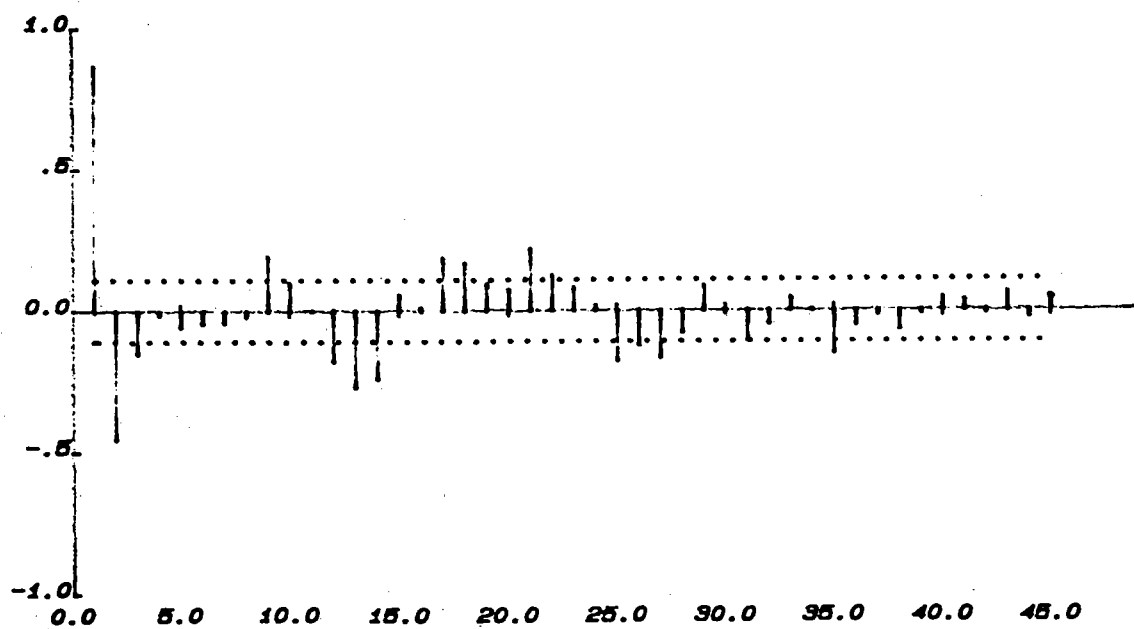
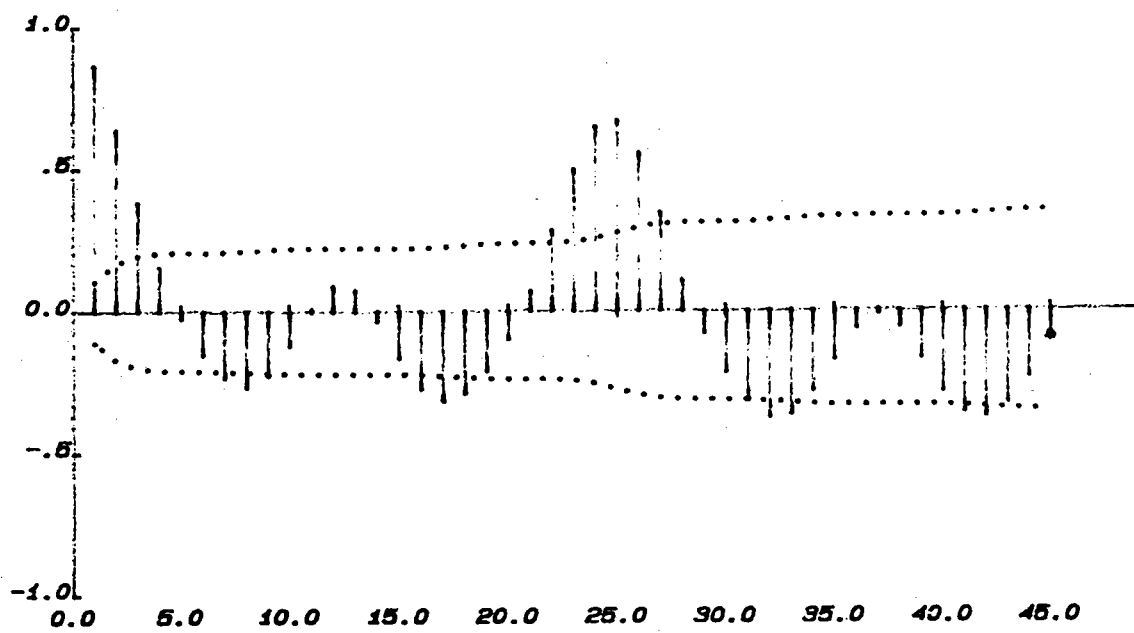


圖 7·1 測站 C 夏季自相關及偏自相關函數圖

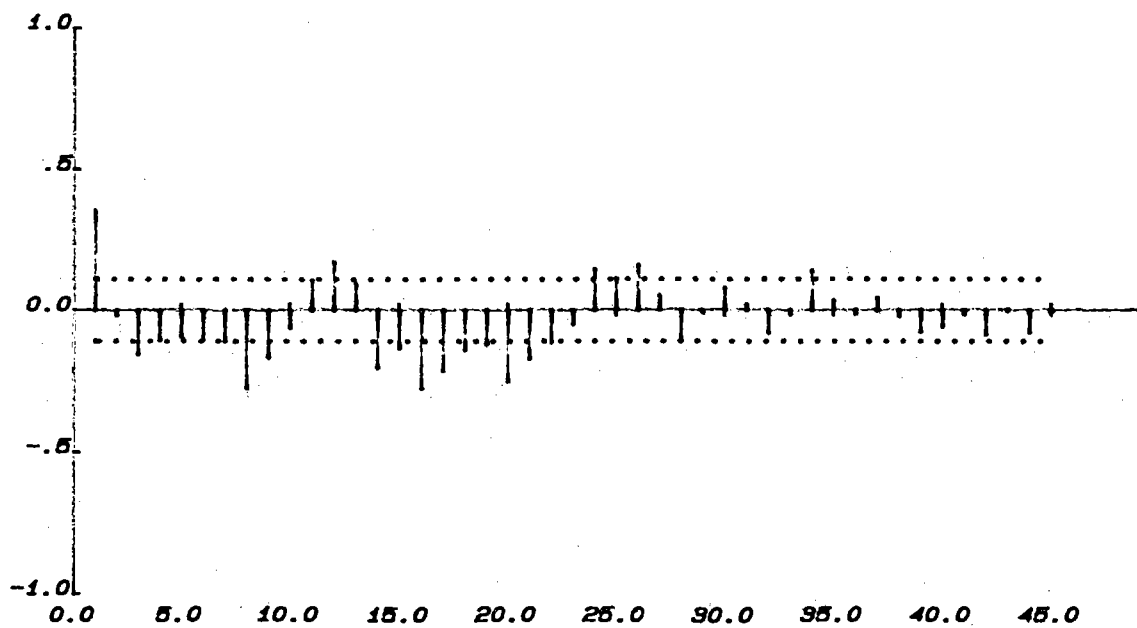
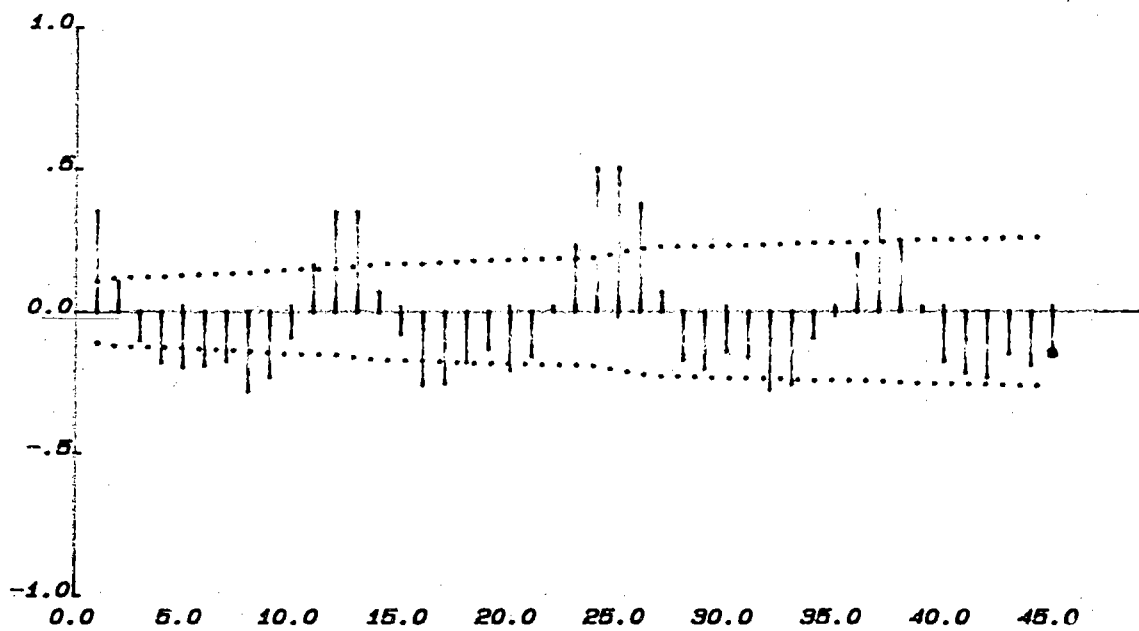


圖 7·2 測站 C 夏季第一次差分自相關及偏自相關函數圖

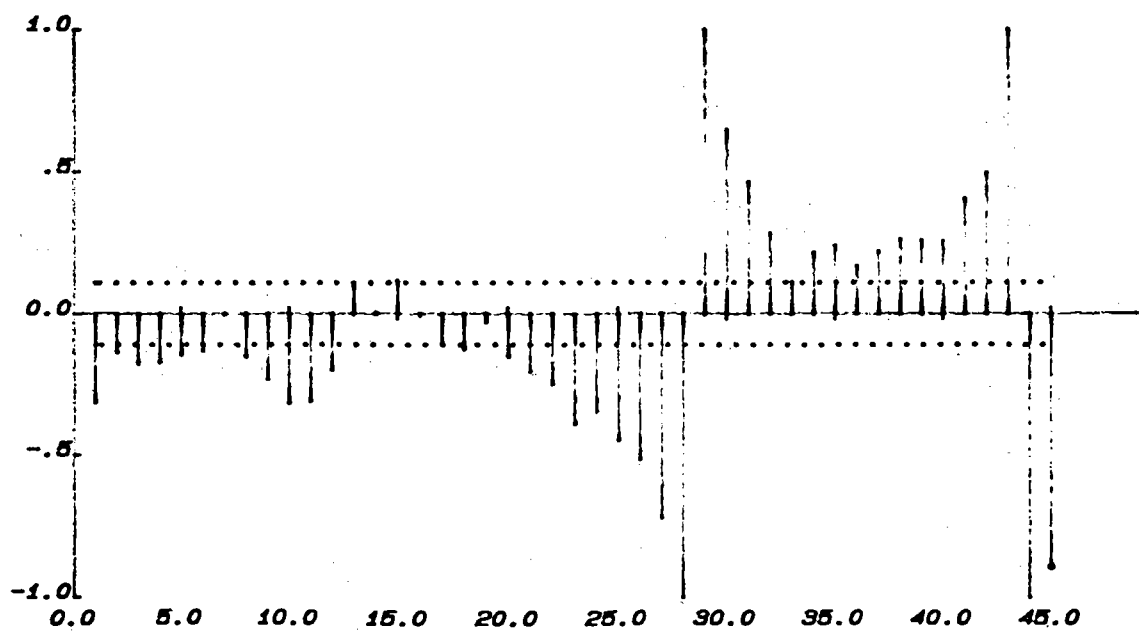
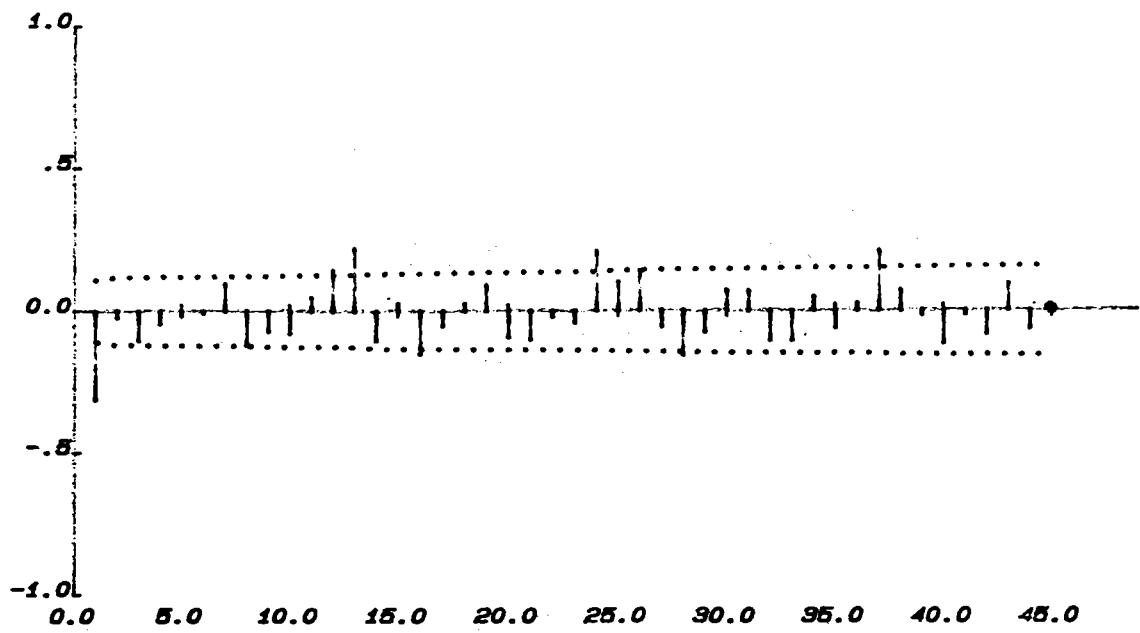


圖 7·3 測站 C 夏季第二次差分自相關及偏自相關函數圖

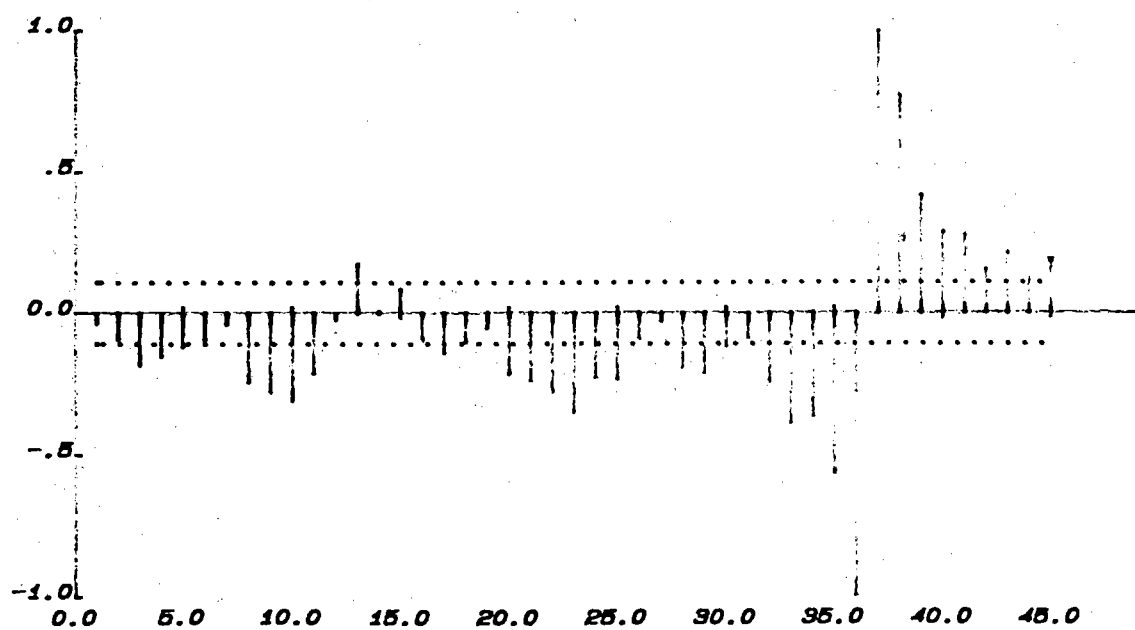
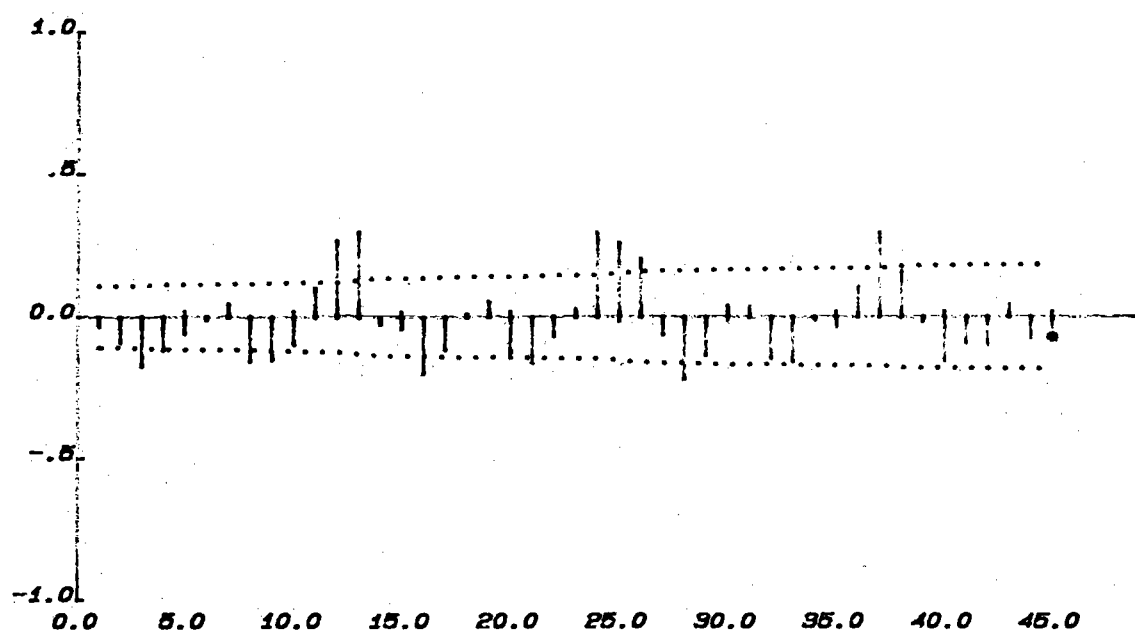


圖 7·4 測站 C 夏季殘差值自相關及偏自相關函數圖

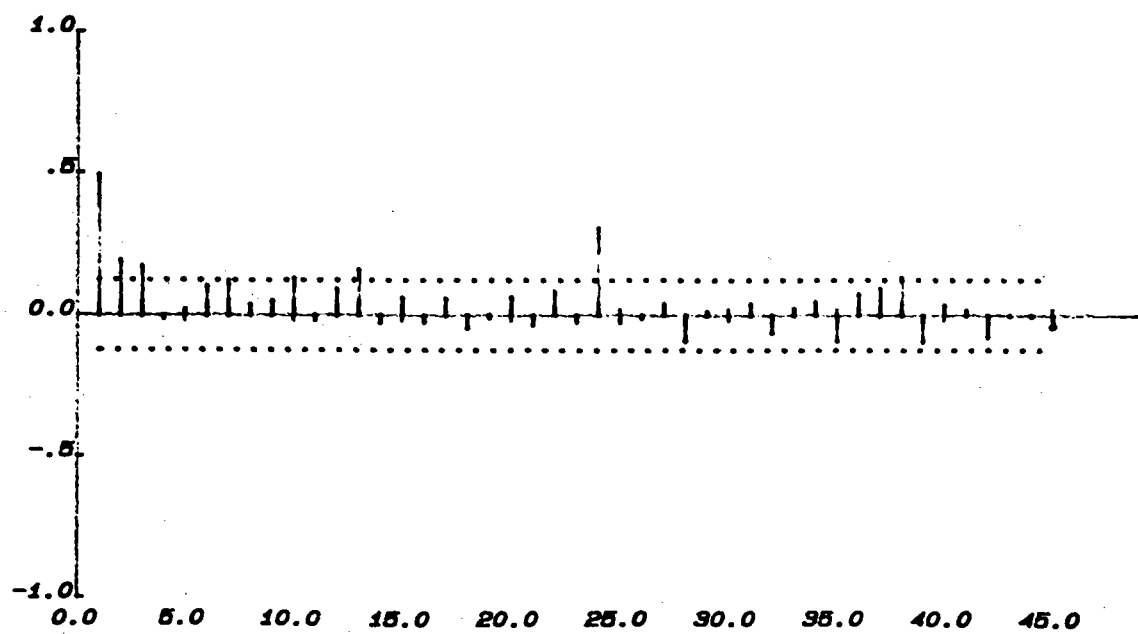
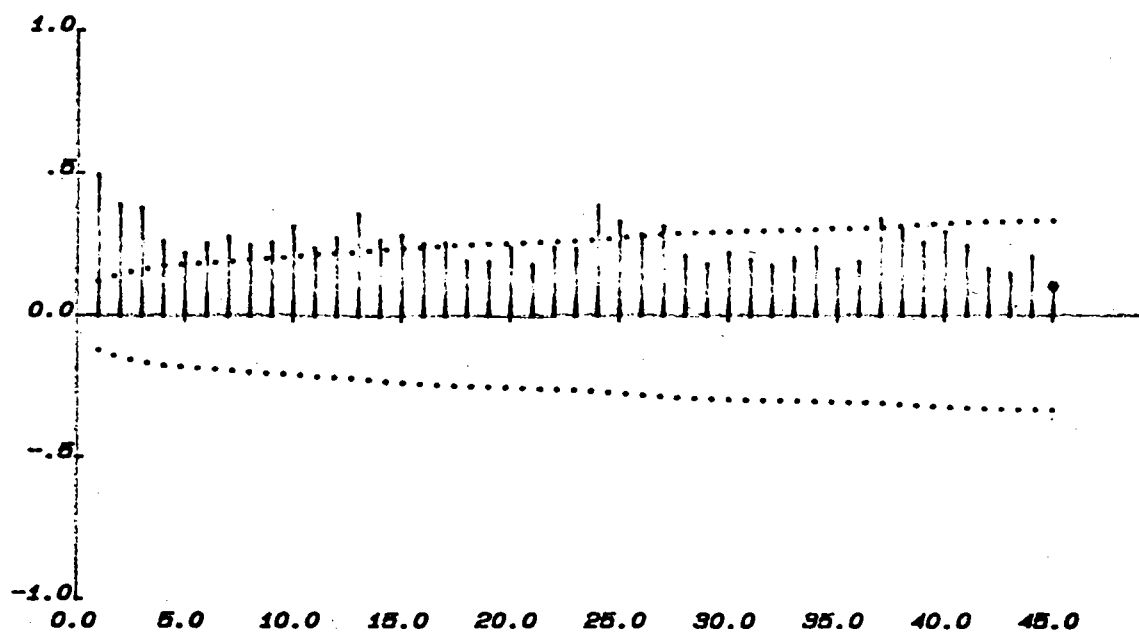


圖 8.1 測站 D 冬季自相關及偏自相關函數圖

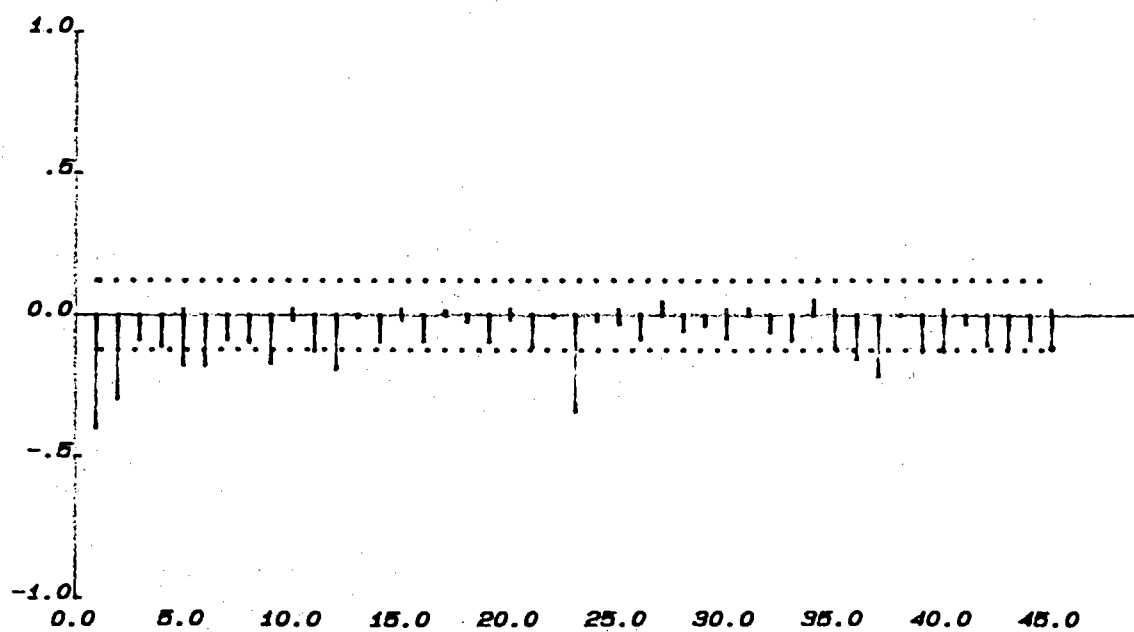
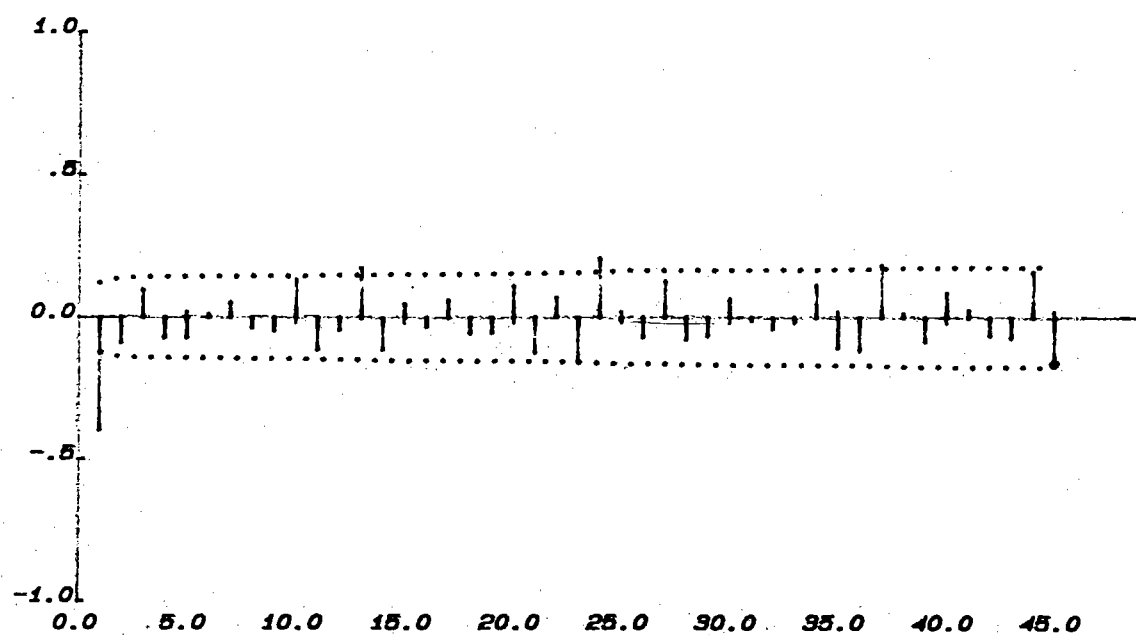


圖 8·2 測站 D 冬季第一次差分自相關及偏自相關函數圖

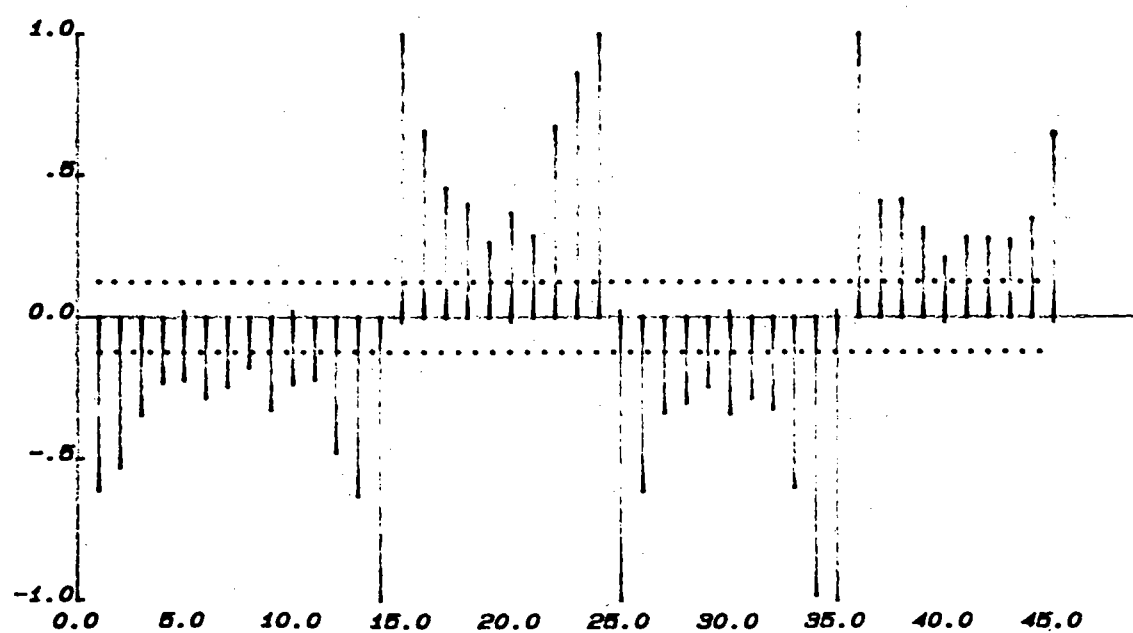
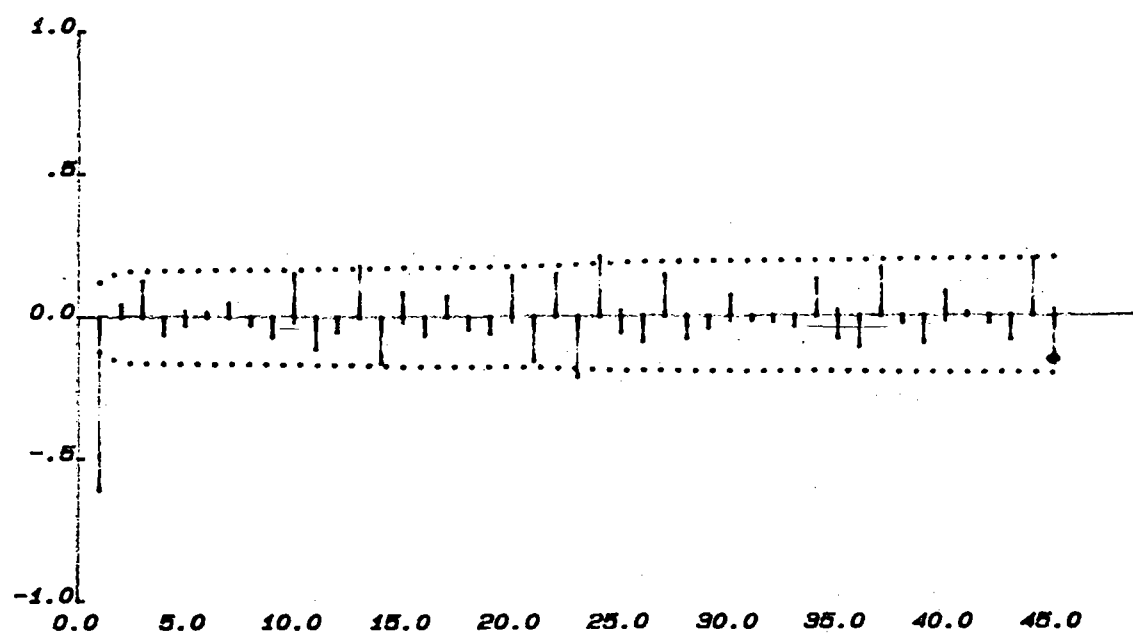


圖 8.3 測站 D 冬季第二次差分自相關及偏自相關函數圖

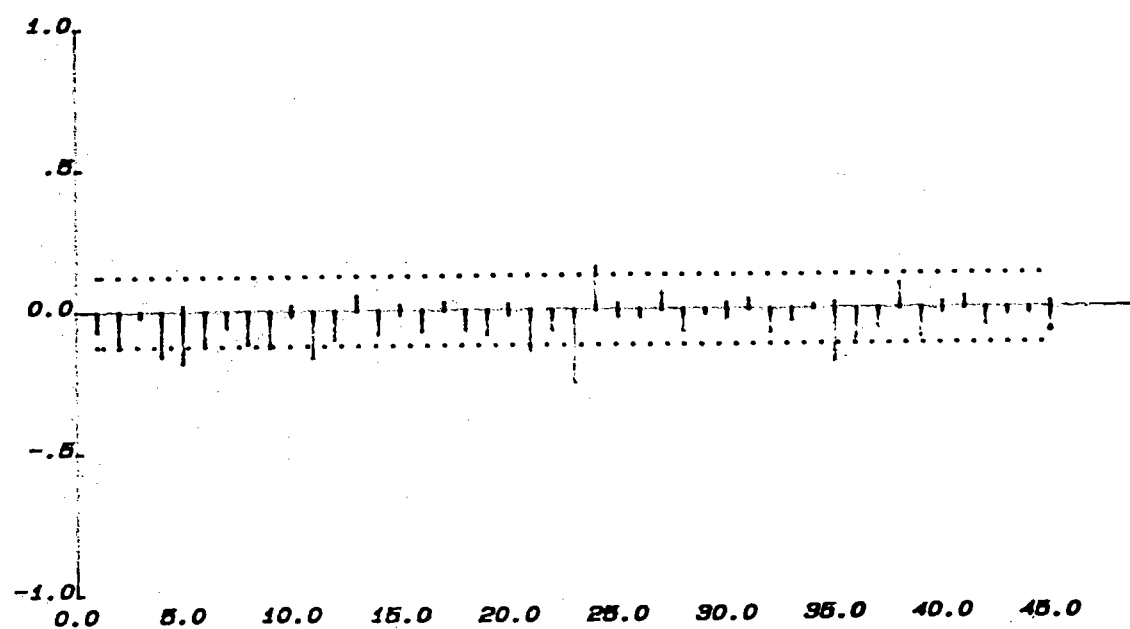
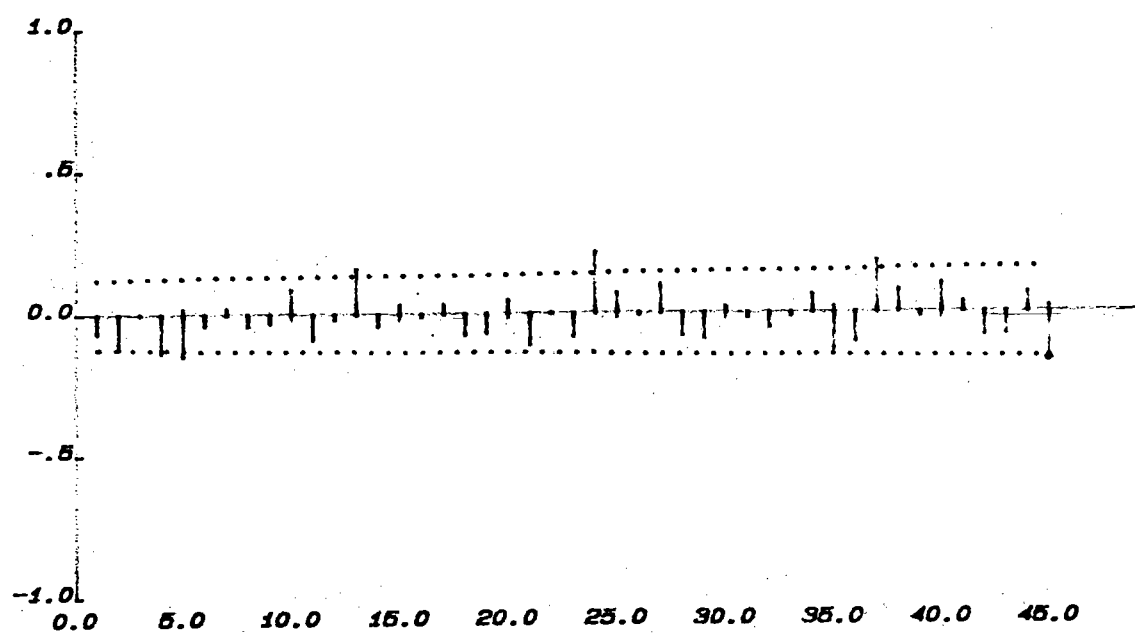


圖 8·4 測站 D 冬季殘差值自相關及偏自相關函數圖

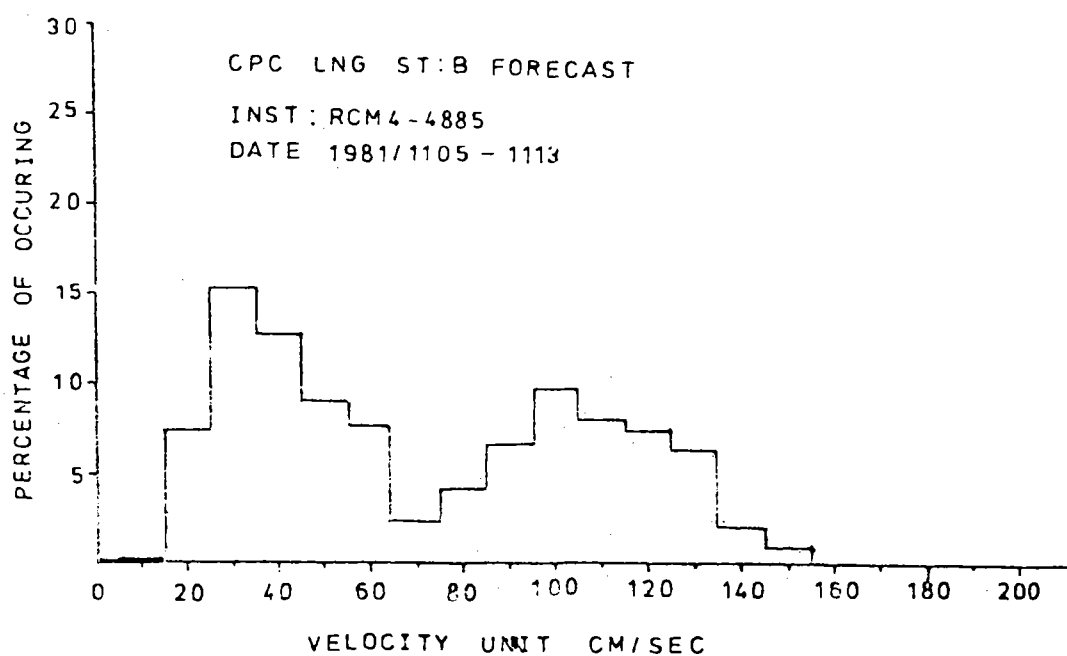
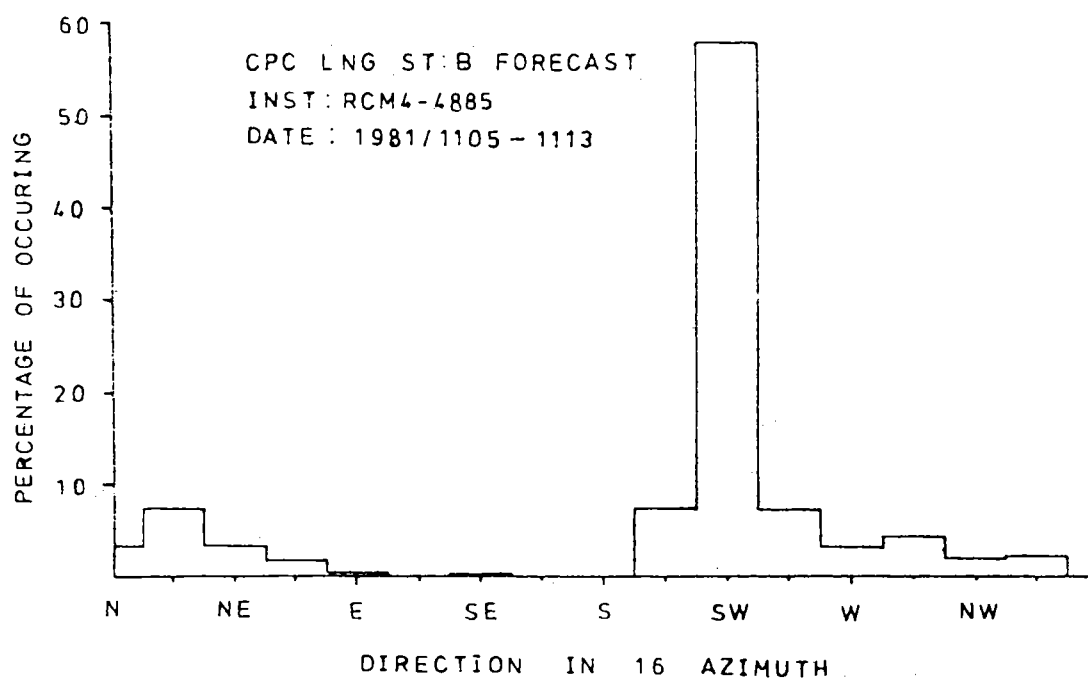


圖 9.1 海流流向、流速統計圖

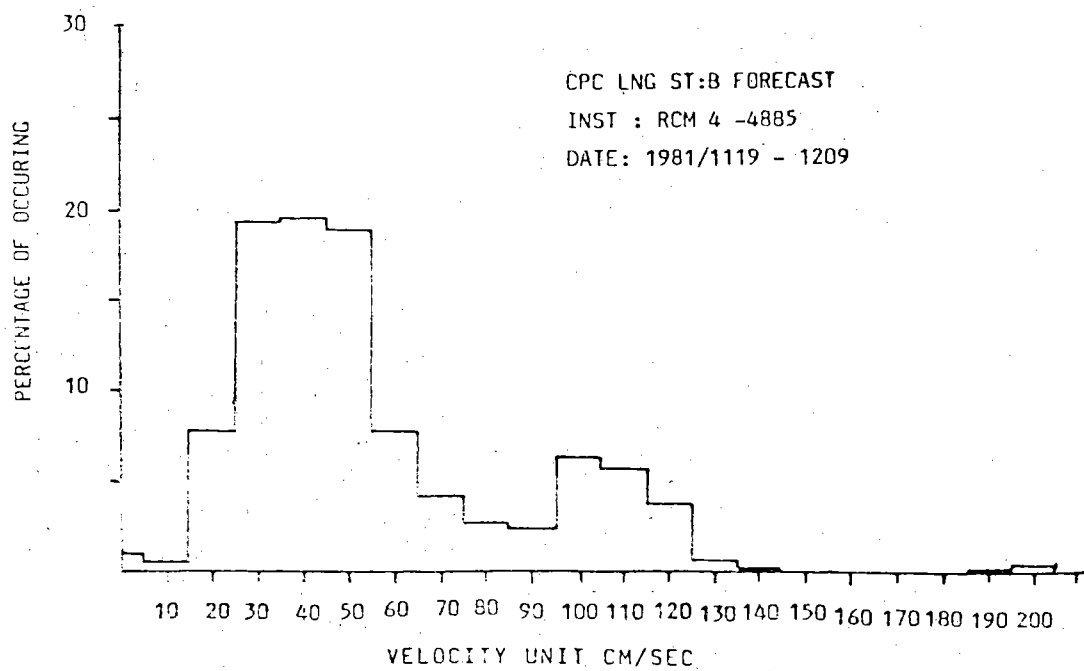
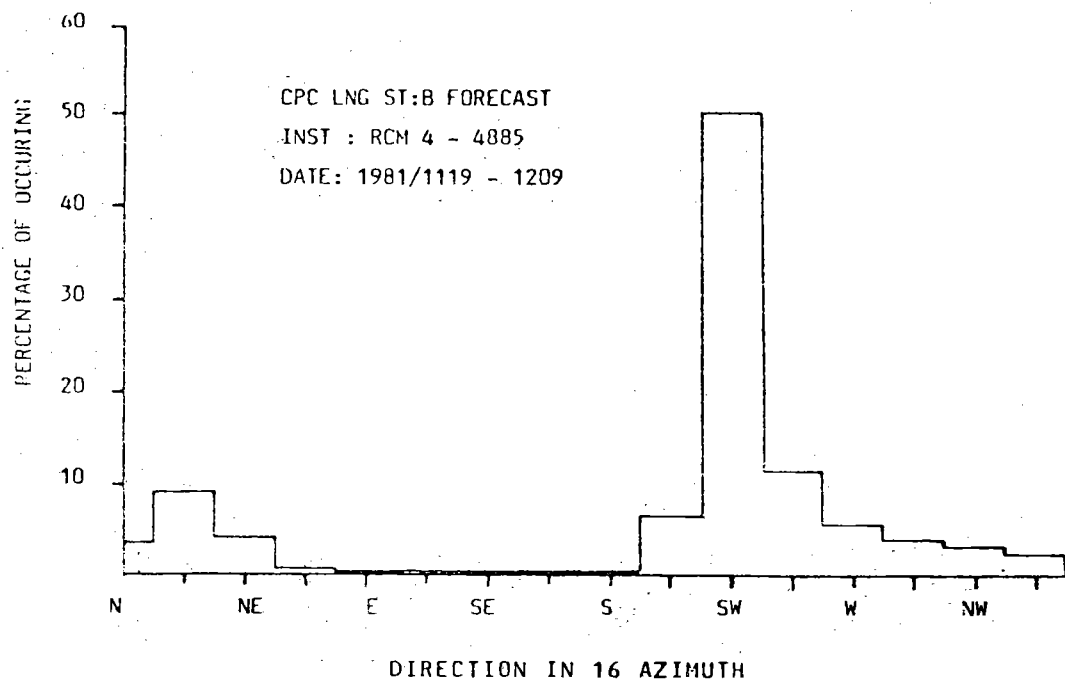


圖 9・2 海流流向、流速統計圖

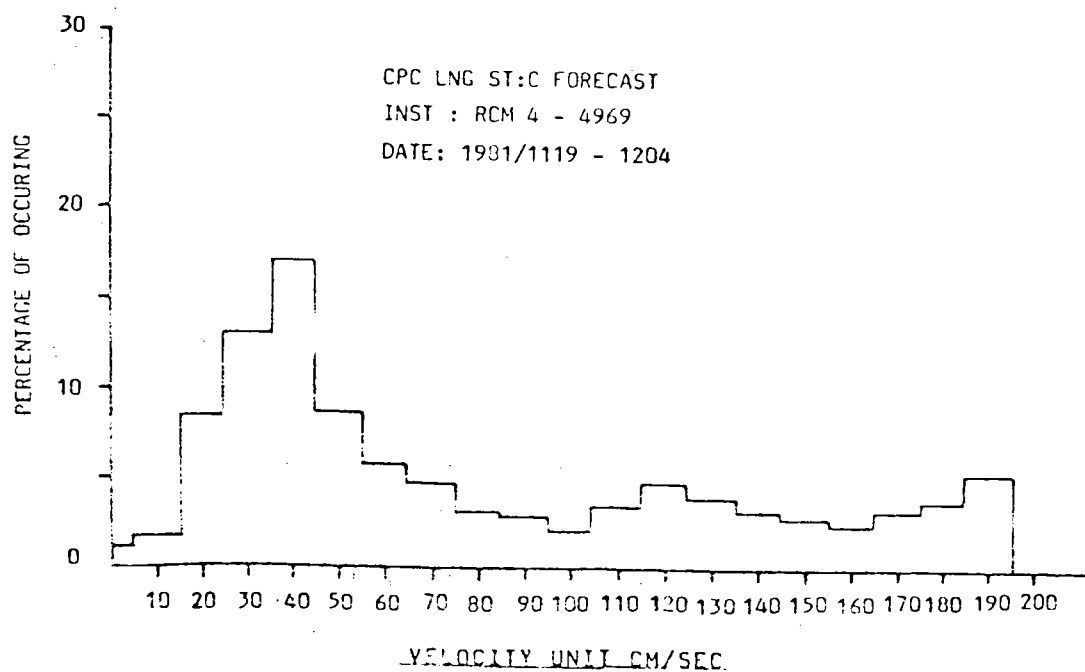
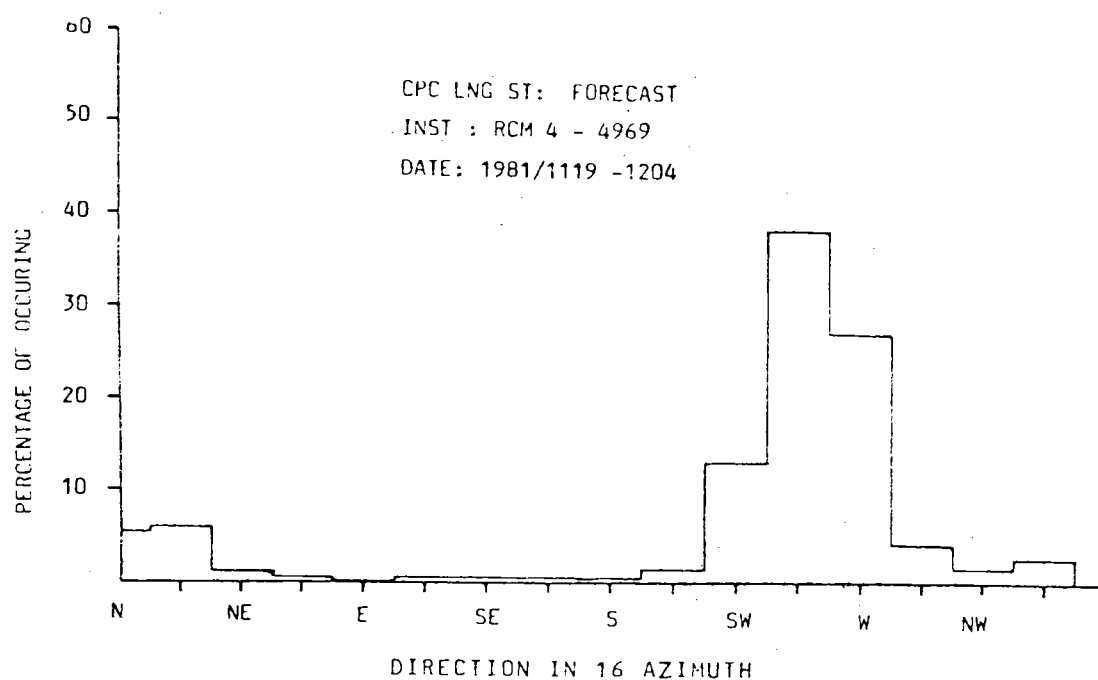


圖 9・3 海流流向、流速統計圖

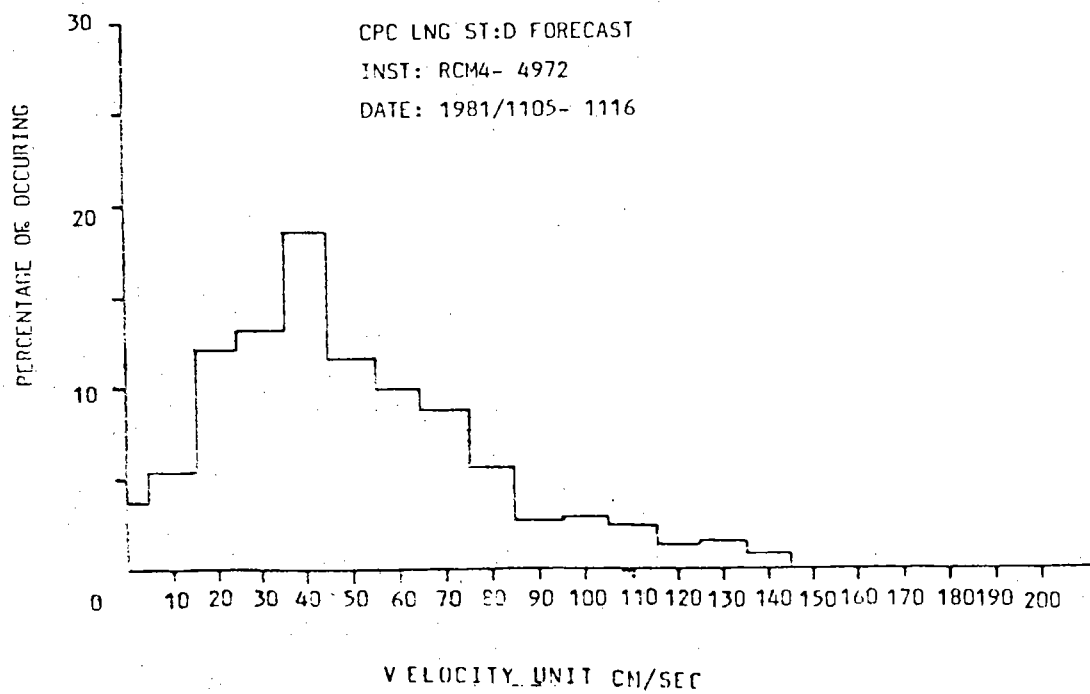
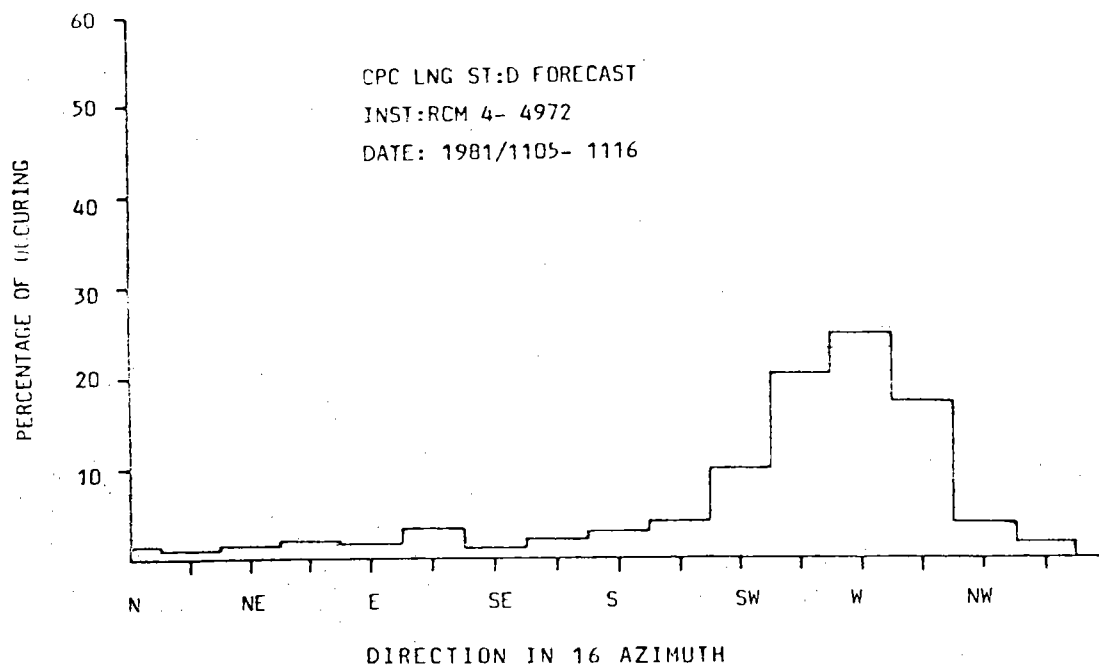


圖 9・4 海流流向、流速統計圖

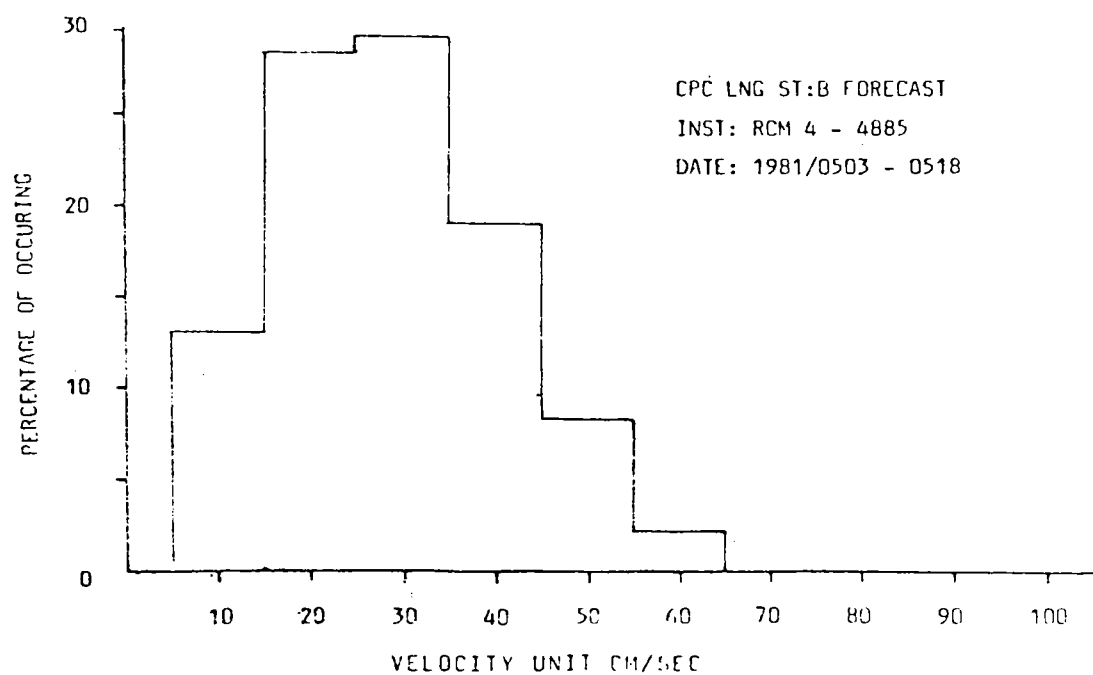
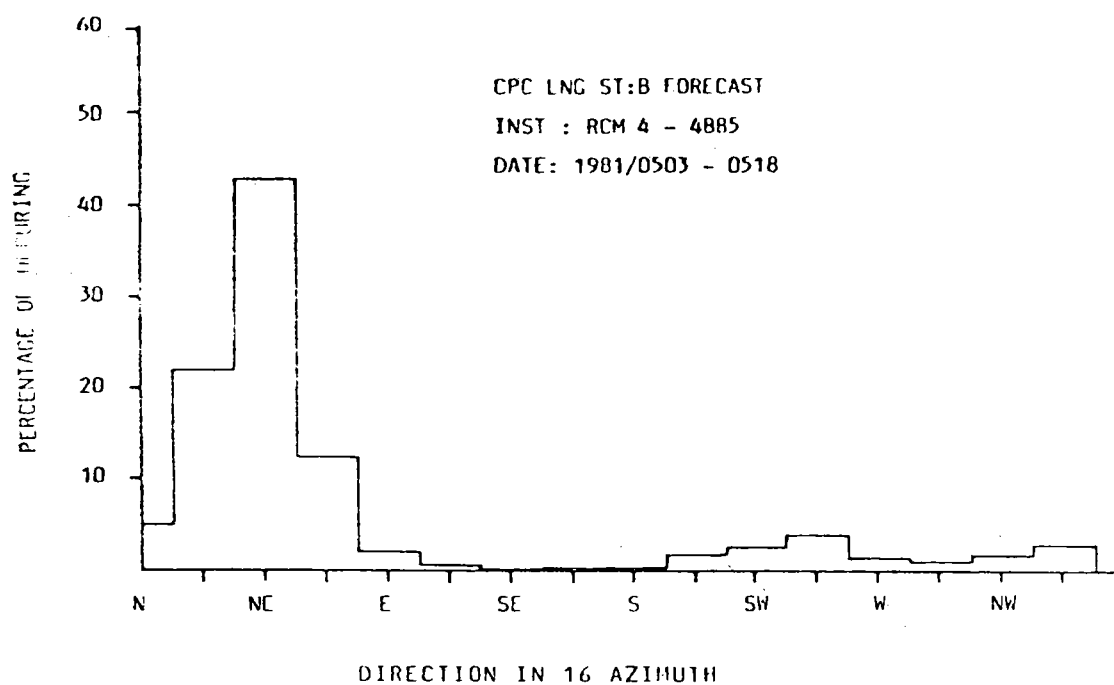


圖 9.5 海流流向、流速統計圖

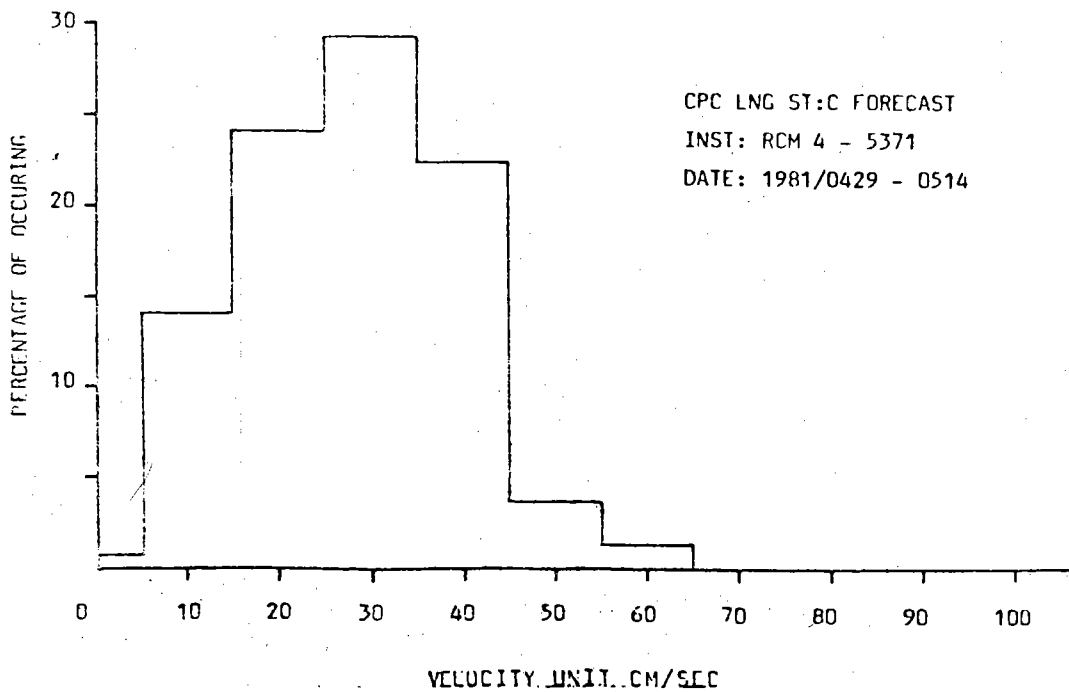
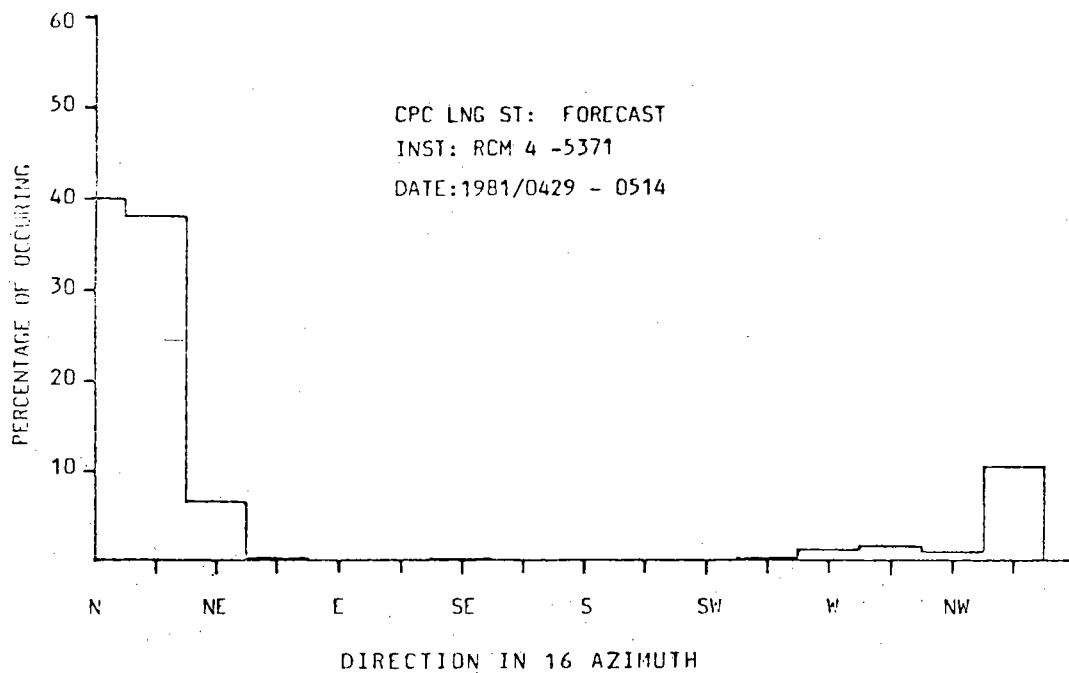


圖 9-6 海流流向、流速統計圖

(12) 9.6

PROGRESS TRACK DIAGRAM

ANDERSON RIVER OBSERVATION AT TAIHUNG UNDER PROJECT
 DELPOWAL 1981-11-15-1982-01-15 DEPTH-200M NO. DEPTH-200M
 GOOD. WIND. SENSITIVE NO. 1-1000. FILE NAME: A-PRCA-1982-01-15-1982-01-15

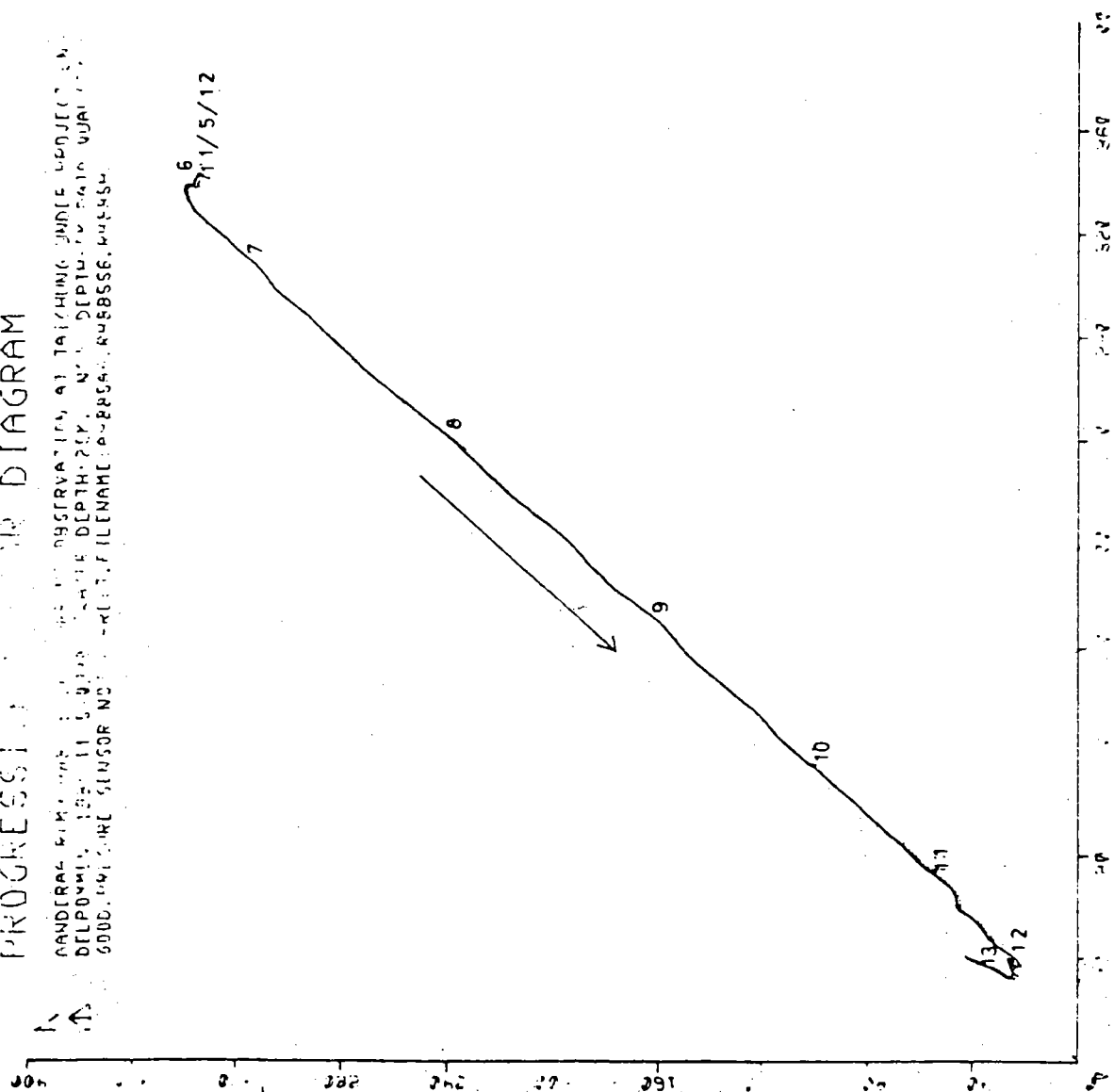


圖 10.1 海流向量行進圖

10.1

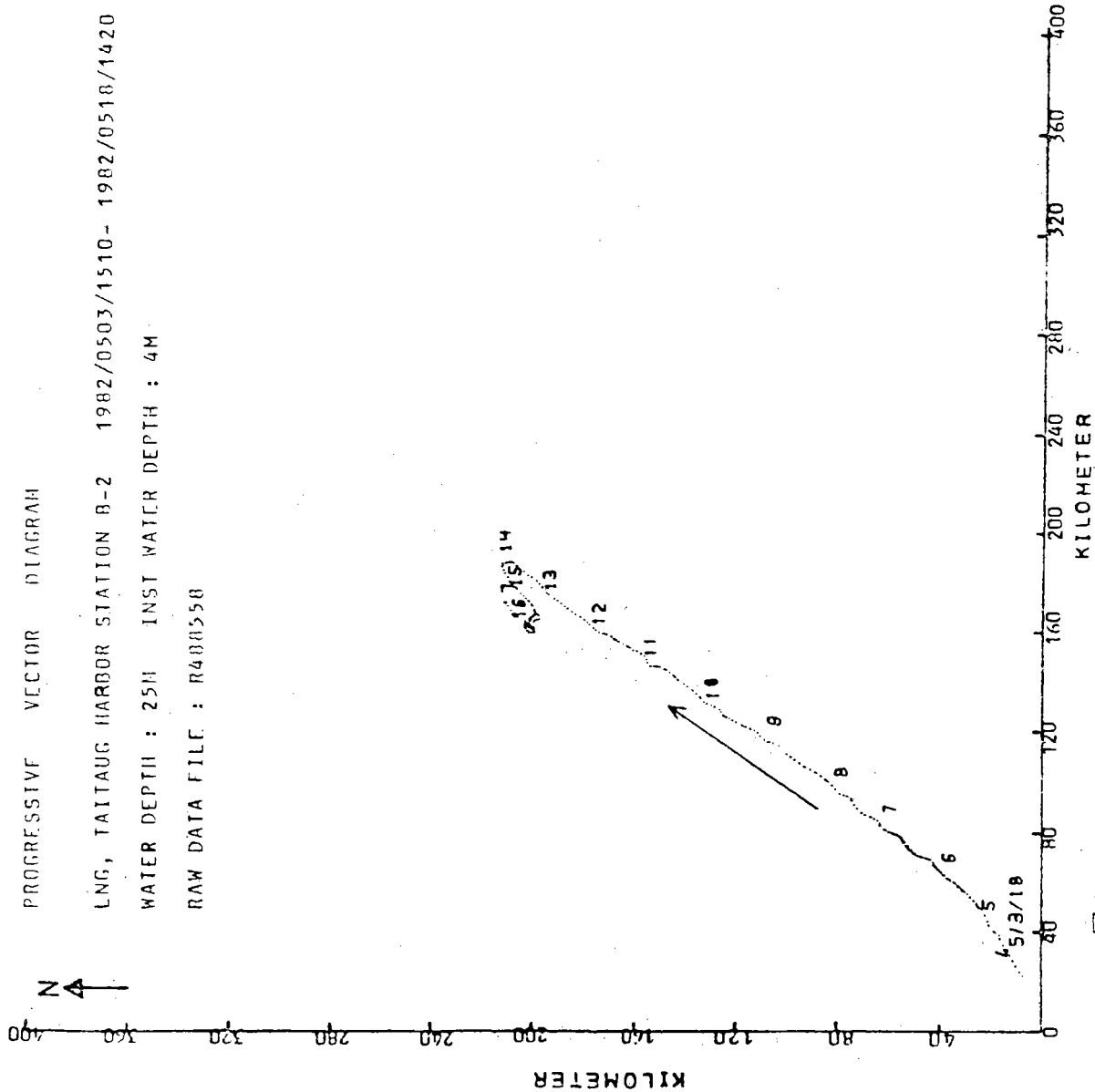


圖 10.2 海流向量行進圖

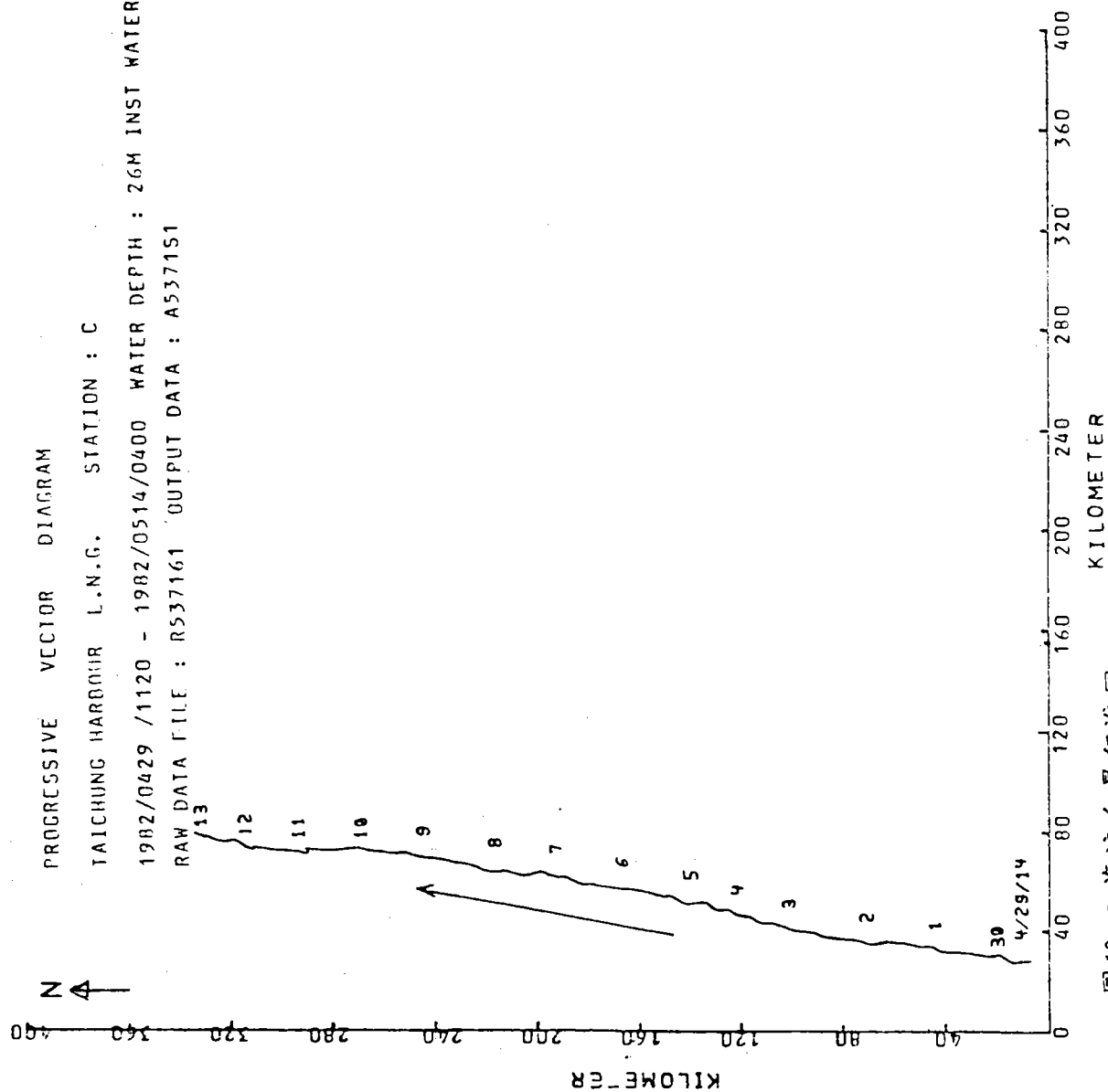


圖10.3 海流向量行進圖

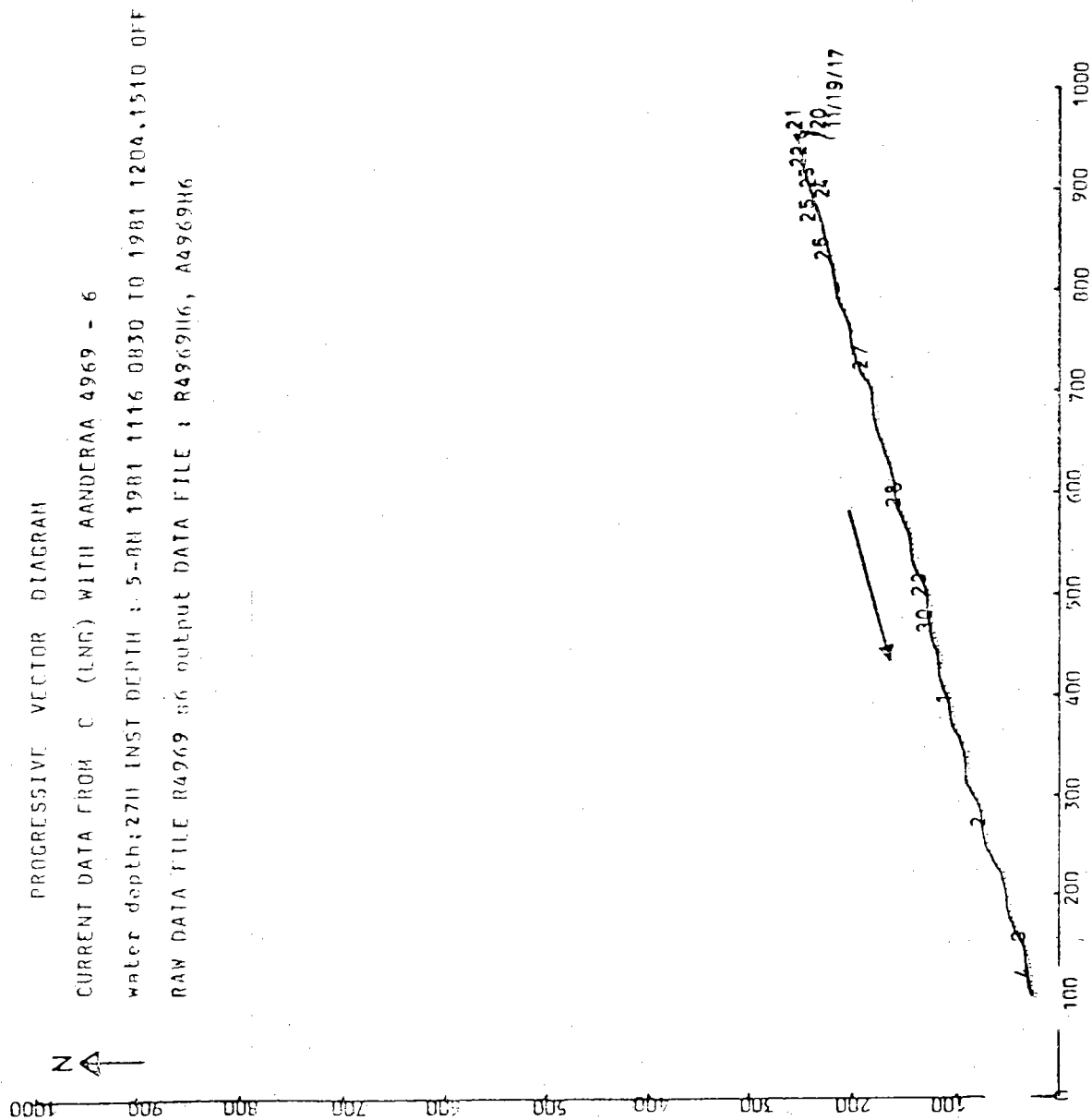
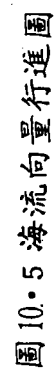
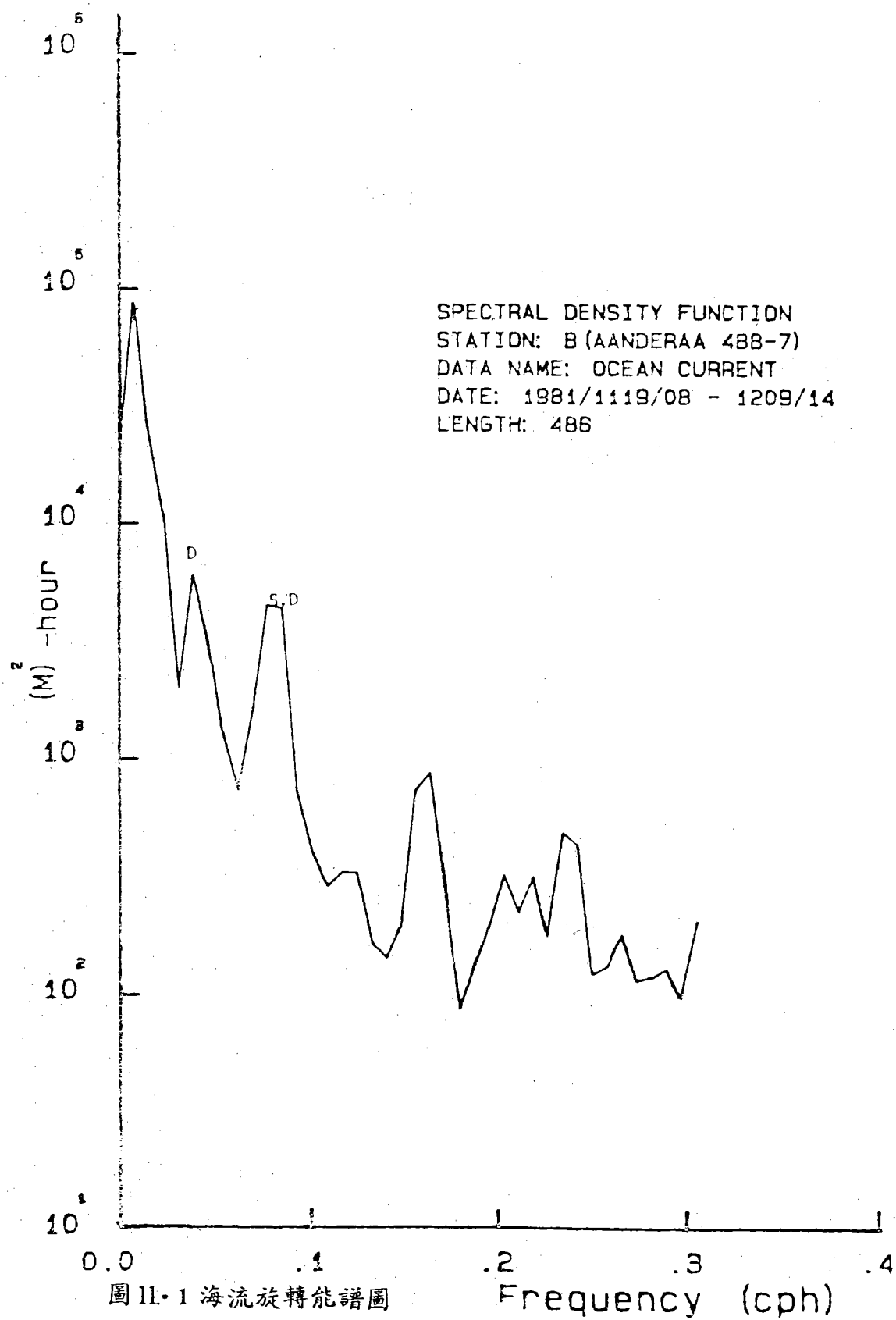
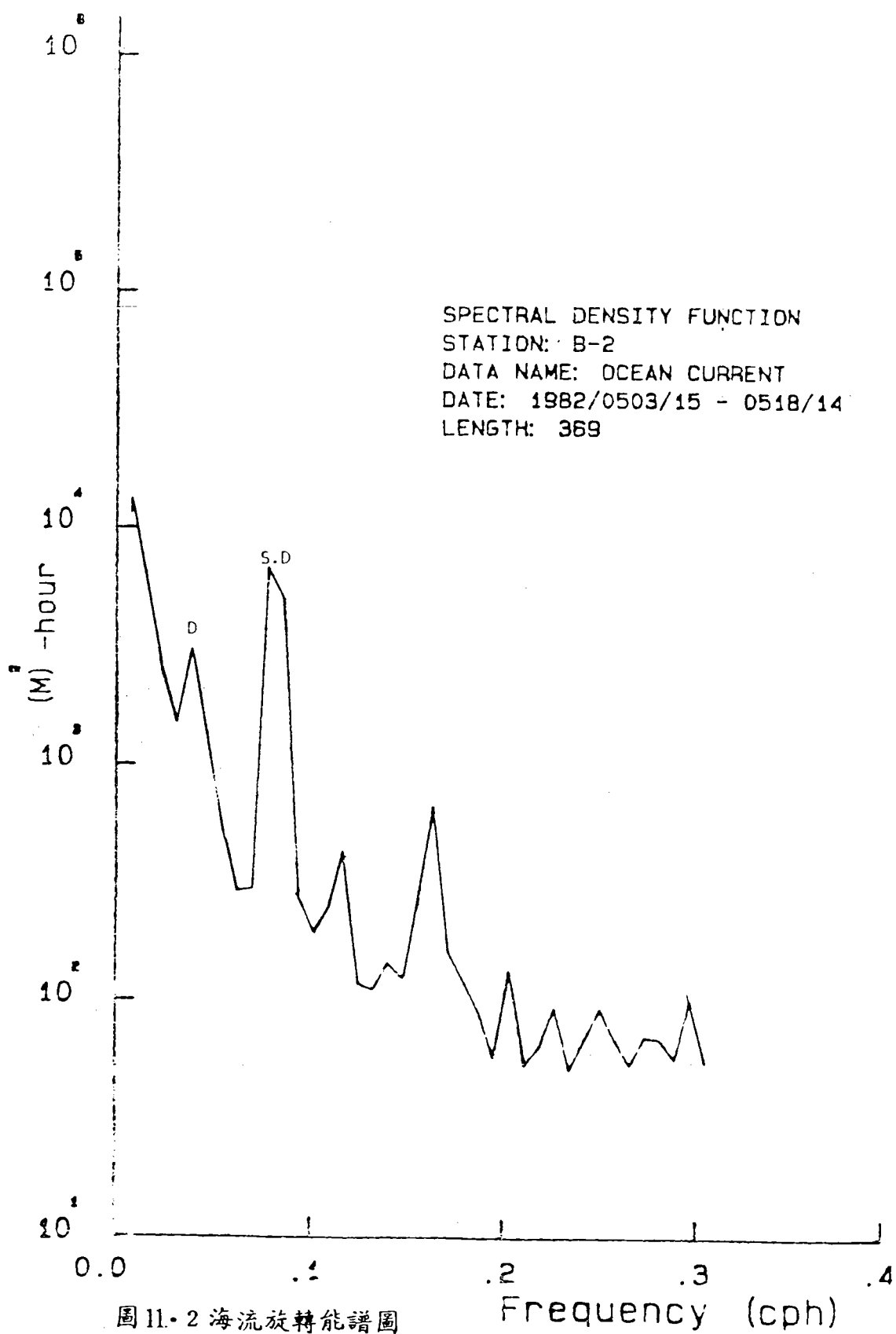
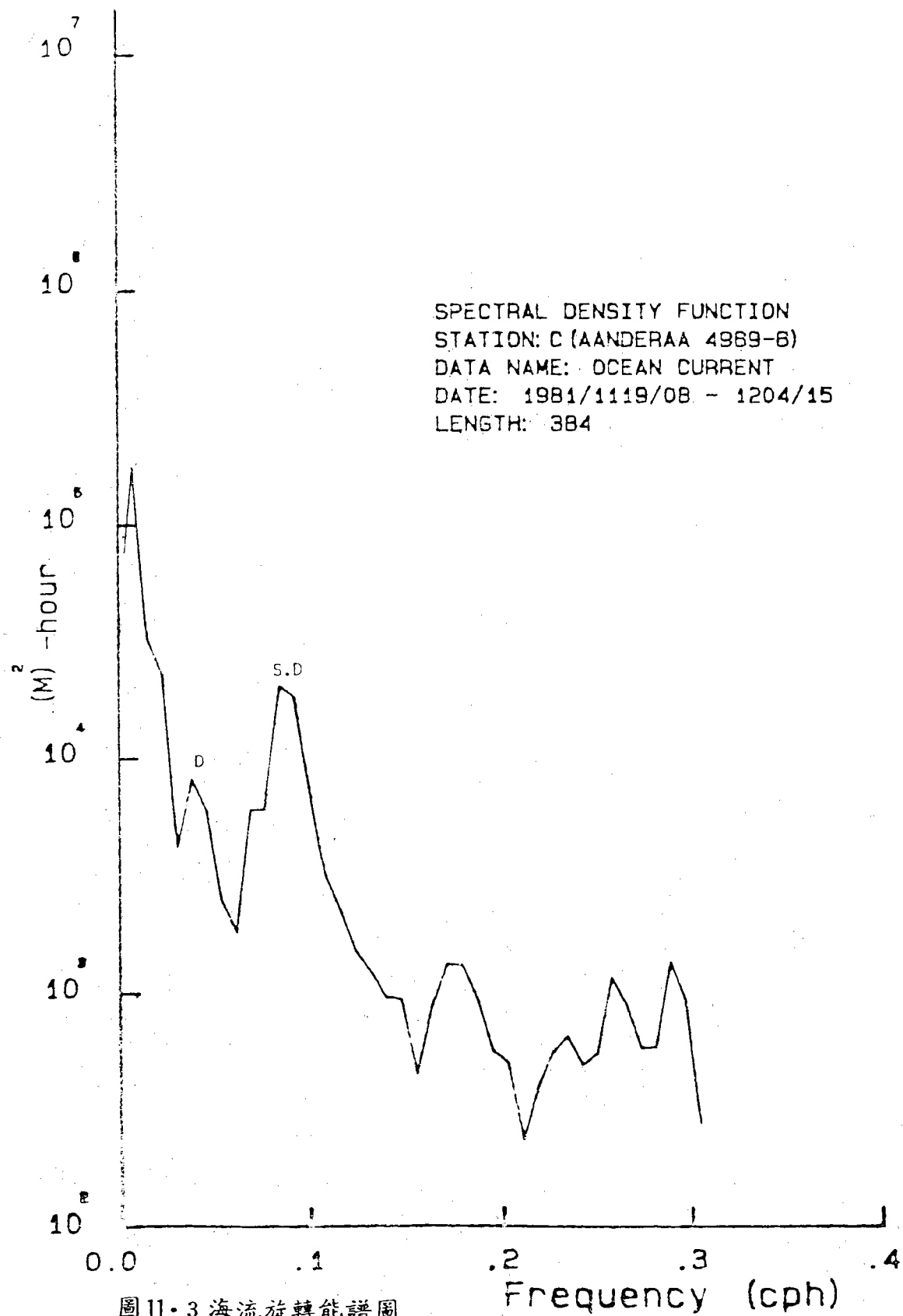


圖 10.4 海流向量行進圖

[illegible]







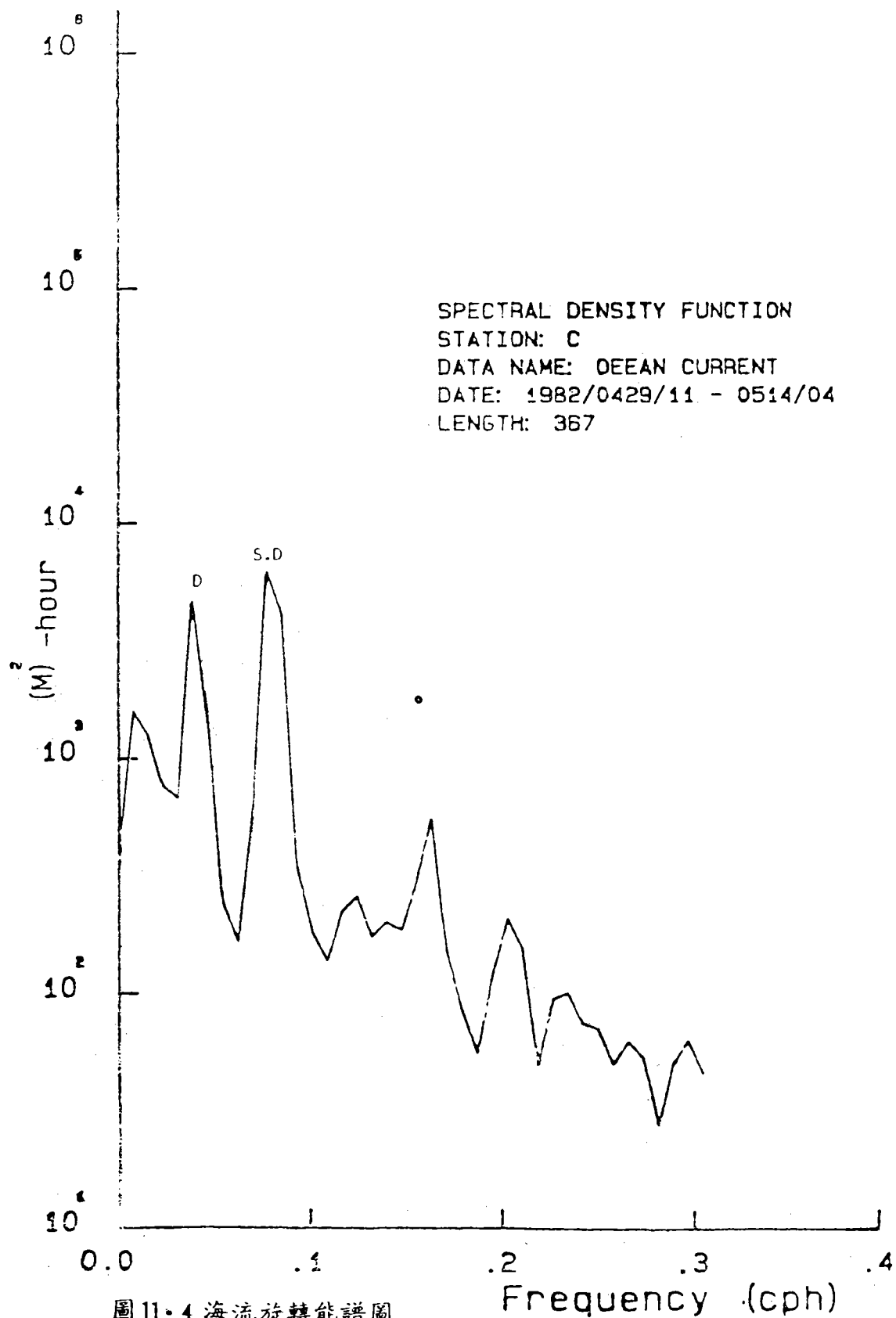


圖 11.4 海流旋轉能譜圖

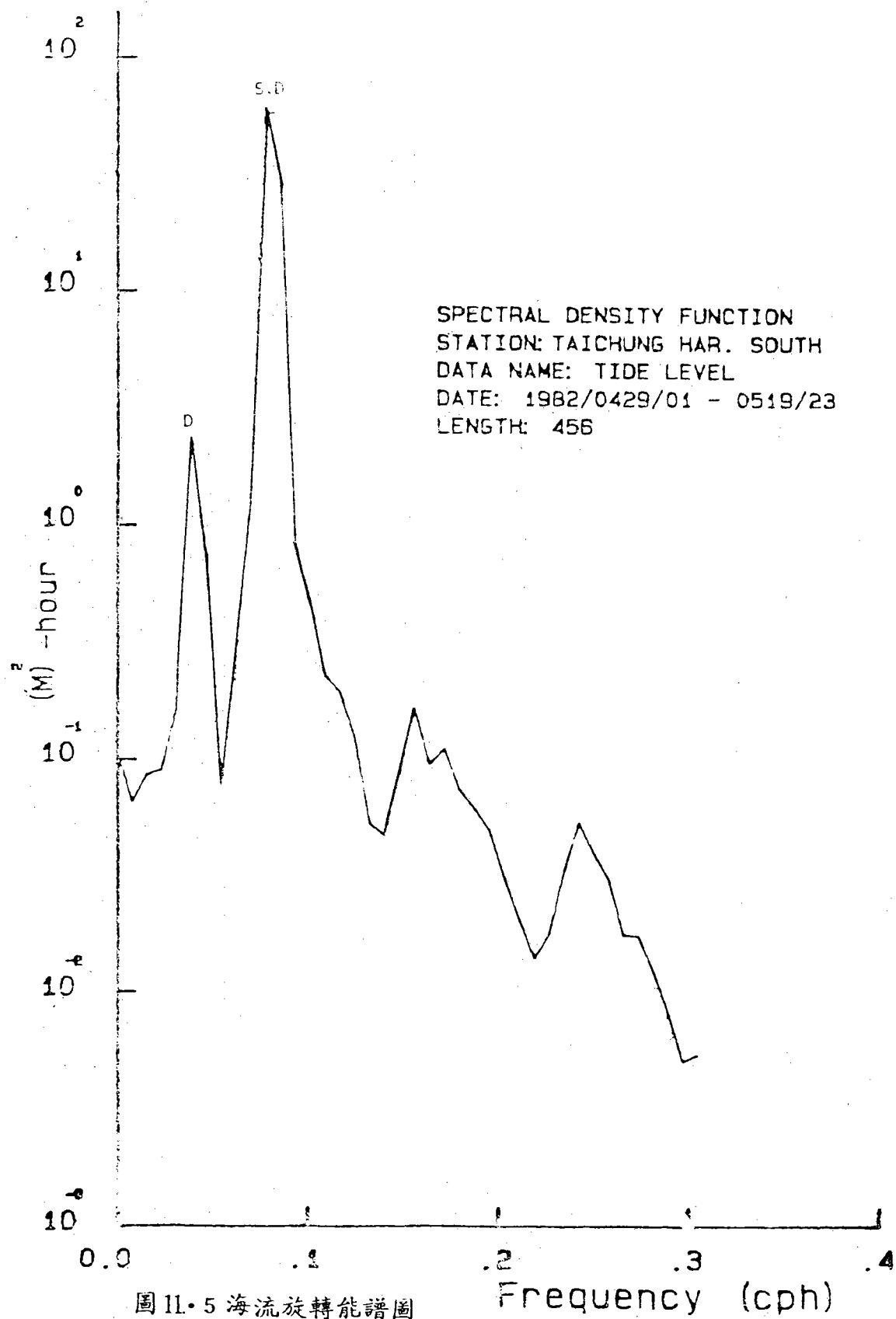
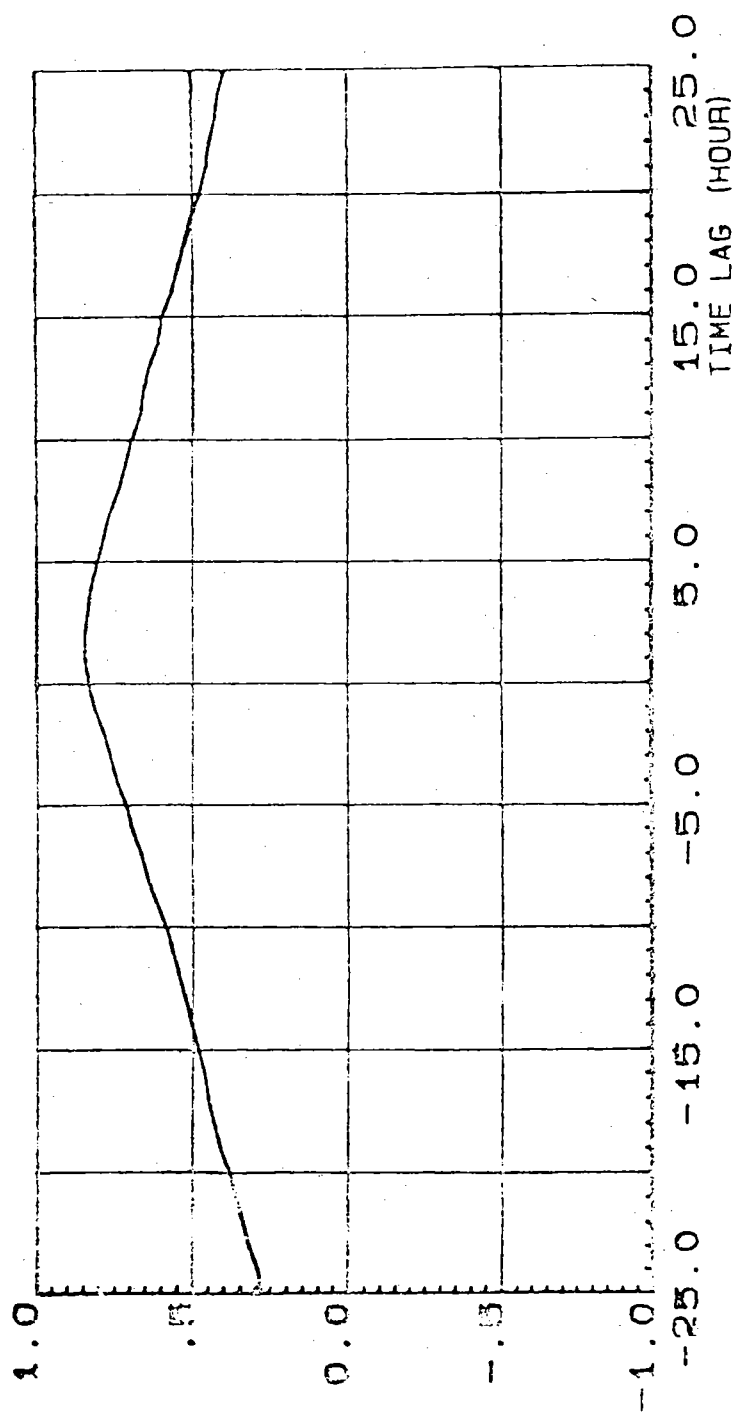


圖 11.5 海流旋轉能譜圖

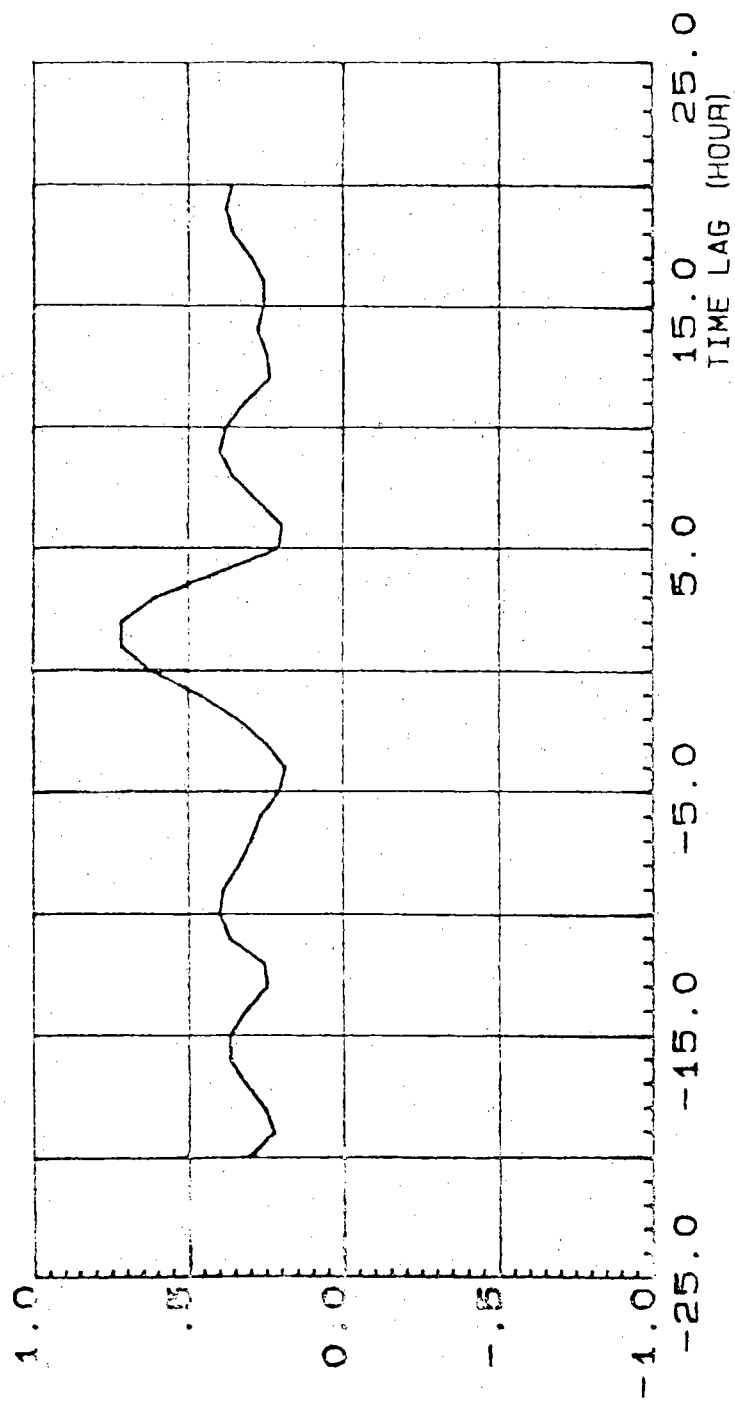
CORRELATION FUNCTION OF SERIES X WITH SERIES Y
 X SERIES: OCEAN CURRENT AT STATION: B (AANDERAA 4885-7)
 Y SERIES: OCEAN CURRENT AT STATION: C (AANDERAA 4983-8)



THE DATA DURATION : 1381/1119/17 - 1204/15

圖12.1 B站與C站冬季海流之互相關函數圖

CORRELATION FUNCTION OF SERIES X WITH SERIES Y
 X SERIES: OCEAN CURRENT AT STATION: C
 Y SERIES: OCEAN CURRENT AT STATION: B-2



THE DATA DURATION : 1982/0503/14 - 0514/04

圖 12.2 C 管與 B 站夏季海流之互相關函數圖

附 錄

ASHW1 T=00004 IS ON CR00012 USING 00011 BLKS R=0000

```

0001 FTN4.L
0002 $EMA(XYZ,0)
0003 PROGRAM HW1
0004 C PROGRAM FOR FINDING THE SAMPLE AUTOCORRELATION, THE
0005 C PARTIAL AUTOCORRELATION AND THEIR ATANDARD ERRORS
0006 C CODED BY CHING-HER HWANG
0007 C COMMON /XYZ/X(500),RO(300),PHI(120,120),SRO(300)
0008 READ(1,100)N
0009 100 FORMAT(I3)
0010 READ(46,110)(X(I),I=1,N)
0011 110 FORMAT(10F8,2)
0012 READ(1,120)K
0013 120 FORMAT(I3)
0014 C TO COMPUTE THE HISTORICAL DATA ADVERAGED VALUE XBAR
0015 SUM=0.
0016 DO 20 I=1,N
0017 20 SUM=SUM+X(I)
0018 XBAR=SUM/N
0019 C TO COMPUTE THE HISTORICAL DATA VARIANCE VALUE VAR
0020 SUM=0.
0021 DO 30 I=1,N
0022 30 SUM=SUM+(X(I)-XBAR)**2
0023 VAR=SUM/N
0024 C TO COMPUTE THE SAMPLE AUTOCORRELATION FUNCTION RO(K) AT LAG K
0025 DO 40 I=1,K
0026 SUM=0.
0027 DO 50 J=1,N-I
0028 50 SUM=SUM+(X(J)-XBAR)*(X(J+I)-XBAR)
0029 40 RO(I)=SUM/(N-I)/VAR
0030 WRITE(6,130)
0031 130 FORMAT(" THE FOLLOWING VALUES ARE THE VALUES OF AUTOCORRELATION CO
0032 *EFFICIENTS AT LAG K")
0033 WRITE(6,200)(RO(I),I=1,K)
0034 200 FORMAT(1X,10F7,3)
0035 C TO COMPUTE THE PARTIAL AUTOCORRELATION COEFFICIENTS PHI(K,K) AT
0036 C LAG K
0037 WRITE(6,210)
0038 210 FORMAT(" THE FOLLOWING VALUES ARE THE PARTIAL AUTOCORRELATION COEF
0039 *FICIENTS AT LAG K")
0040 PHI(1,1)=RO(1)
0041 PHI(2,2)=(RO(2)-RO(1)**2)/(1.-RO(1)**2)
0042 WRITE(6,220) PHI(1,1),PHI(2,2)
0043 220 FORMAT(2F7,3)
0044 DO 80 L=3,K
0045 DO 70 J=1,L-2
0046 70 PHI(L-1,J)=PHI(L-2,J)-PHI(L-1,L-1)*PHI(L-2,L-J-1)
0047 C TO COMPUTE THE SIGMA PHI(K-1,J)*RO(K-J) VALUES
0048 SUM1=0.
0049 DO 85 L1=1,L-1
0050 85 SUM1=SUM1+PHI(L-1,L1)*RO(L-L1)
0051 C TO COMPUTE THE SIGMA PHI(K-1,J)*RO(J) VALUES
0052 SUM2=0.
0053 DO 90 L2=1,L-1
0054 90 SUM2=SUM2+PHI(L-1,L2)*RO(L2)
0055 80 PHI(L,L)=(RO(L)-SUM1)/(1-SUM2)
0056 WRITE(6,300)(PHI(I,I),I=3,K)
0057 300 FORMAT(10F7,3)
0058 C THIS STEP IS TO COMPUTE THE AUTOCORRELATION COEFFICIENT'S

```

```

0059 C      AND PARTIAL AUTOCORRELATION COEFFICIENT'S STANDARD ERRORS
0060      FN=N
0061      ST=SQRT(FN)
0062      SRO(1)=1/ST
0063      DO 96 I=2,K
0064      SUM=0.
0065      DO 97 II=1,I-1
0066 97      SUM=SUM+RO(II)*RO(II)
0067 96      SRO(I)=SQRT(1.+2*SUM)/ST
0068      WRITE(6,230)
0069 230      FORMAT(" THE FOLLOWING VALUES ARE THE AUTOCORRELATION COEFFICIENT'
0070      *S STANDARD ERRORS AT LAG K")
0071      WRITE(6,500)(SRO(I),I=1,K)
0072 500      FORMAT(10F7.3)
0073      END
0074      END$

```

ΔHW2 T=00004 IS ON CR00012 USING 00003 BLKS R=0000

```
0001 FTN4.L
0002 PROGRAM HW2
0003 C THIS PROGRAM IS USED TO COMPUTE THE FIRST DIFFERENCE
0004 C VALUES OF FIELD DATA
0005 DIMENSION X(500),Y(500)
0006 READ(1,100)N
0007 100 FORMAT(I3)
0008 READ(46,110) (X(I),I=1,N)
0009 110 FORMAT(10F8.2)
0010 WRITE(6,120)
0011 120 FORMAT("THE FOLLOWING YVALUES ARE THE FIRST DIFFERENCE
0012 *VALUES OF FIELD DATA AT STATION ")
0013 DO 130 I=1,N-1
0014 130 Y(I)=X(I+1)-X(I)
0015 WRITE(6,140) (Y(I),I=1,N-1)
0016 WRITE(47,140) (Y(I),I=1,N-1)
0017 140 FORMAT(10,F8.2)
0018 END
0019 END$
```

SHW3 T=00004 IS ON CR00012 USING 00007 BLKS R=0000

```
0001 FTN4.L
0002 PROGRAM HW3
0003 C PROGRAM FOR FINDING THE ESTIMATED VALUES OF FIELD DATA
0004 C AND THEIR RESIDUALS WITH FIELD DATA BY ARIMA MODEL
0005 C CODED BY CHING-HER HWANG
0006 DIMENSION X(500),XCUPA(500),E(500)
0007 READ(1,100) N
0008 100 FORMAT(I3)
0009 READ(46,110) (X(I),I=1,N)
0010 110 FORMAT(10F8.2)
0011 READ(1,120) THIDA
0012 120 FORMAT(F5.2)
0013 READ(1,130) NDELTA
0014 130 FORMAT(I2)
0015 IF(NDELTA-1) 40,40,50
0016 40 XCUPA(1)=X(1)
0017 E(1)=0.
0018 DO 190 IT=2,N
0019 E(IT)=0.
0020 XCUPA(IT)=X(IT-1)+E(IT)-THIDA*X(IT-1)
0021 E(IT)=X(IT)-XCUPA(IT)
0022 190 CONTINUE
0023 GO TO 60
0024 50 XCUPA(1)=X(1)
0025 XCUPA(2)=X(2)
0026 E(1)=0.
0027 E(2)=0.
0028 DO 180 IT=3,N
0029 E(IT)=0.
0030 XCUPA(IT)=2.*X(IT-1)-X(IT-2)+E(IT)-THIDA*X(IT-1)
0031 E(IT)=X(IT)-XCUPA(IT)
0032 180 CONTINUE
0033 60 WRITE(6,140)
0034 140 FORMAT("THE FOLLOWING VALUES ARE THE ESTIMATED VALUES
0035 *OF FIELD DATA BY USING ARIMA(0, .1) MODEL")
0036 WRITE(6,160) (XCUPA(I),I=1,N)
0037 WRITE(47,160) (XCUPA(I),I=1,N)
0038 WRITE(6,101)
0039 101 FORMAT("1")
0040 WRITE(6,150)
0041 150 FORMAT("THE FOLLOWING VALUES ARE THE RESIDUALS
0042 *BETWEEN ESTIMATED VALUES AND FIELD DATA")
0043 WRITE(6,160) (E(I),I=1,N)
0044 WRITE(48,160) (E(I),I=1,N)
0045 160 FORMAT(10F8.2)
0046 END
0047 END*
```

&HWPL T=00004 IS ON CR00012 USING 00016 BLKS R=0000

```

0001 FTN4.L
0002 $EMA(XYZ,0)
0003 PROGRAM HWPL
0004 C PROGRAM FOR FINDING THE SAMPLE AUTOCORRELATION, THE
0005 C PARTIAL AUTOCORRELATION AND THEIR ATANDARD ERRORS
0006 C CODED BY CHING-HER HWANG
0007 COMMON /XYZ/X(500),RO(300),PHI(120,120),SRO(300)
0008 DIMENSION IGCB(192)
0009 READ(1,100)N
0010 100 FORMAT(I3)
0011 READ(46,110)(X(I),I=1,N)
0012 110 FORMAT(10F8,2)
0013 READ(1,120)K
0014 120 FORMAT(I3)
0015 LU=21
0016 ID=2
0017 CALL PLOTR(IGCB,ID,1,LU)
0018 CALL SETAR(IGCB,1,52)
0019 CALL PEN(IGCB,1)
0020 CALL CSIZE(IGCB,1,4,0,6,0,3,0)
0021 CALL FXD(IGCB,1)
0022 CALL VIEWP(IGCB,10,66,60,90)
0023 CALL WINDW(IGCB,0,49,-1,0,1)
0024 CALL LAXES(IGCB,-5,0,5,0,0,1,1,0,3)
0025 CALL PEN(IGCB,2)
0026 C TO COMPUTE THE HISTORICAL DATA ADVERAGED VALUE XBAR
0027 SUM=0.
0028 DO 20 I=1,N
0029 20 SUM=SUM+X(I)
0030 XBAR=SUM/N
0031 C TO COMPUTE THE HISTORICAL DATA VARIANCE VALUE VAR
0032 SUM=0.
0033 DO 30 I=1,N
0034 30 SUM=SUM+(X(I)-XBAR)**2
0035 VAR=SUM/N
0036 C TO COMPUTE THE SAMPLE AUTOCORRELATION FUNCTION RO(K) AT LAG K
0037 DO 40 I=1,K
0038 SUM=0.
0039 DO 50 J=1,N-I
0040 50 SUM=SUM+(X(J)-XBAR)*(X(J+I)-XBAR)
0041 40 RO(I)=SUM/(N-I)/VAR
0042 C WRITE(6,130)
0043 C130 FORMAT(" THE FOLLOWING VALUES ARE THE VALUES OF AUTOCORRELATION CO
0044 C *EFFICIENTS AT LAG K")
0045 C WRITE(6,200)(RO(I),I=1,K)
0046 C200 FORMAT(1X,10F7,3)
0047 DO 31 LK=1,45
0048 ALK=LK
0049 ARO=RO(LK)
0050 CALL MOVE(IGCB,ALK,0)
0051 CALL DRAW(IGCB,ALK,ARO)
0052 31 CONTINUE
0053 C TO COMPUTE THE PARTIAL AUTOCORRELATION COEFFICIENTS PHI(K,K) AT
0054 C LAG K
0055 C WRITE(6,210)
0056 C210 FORMAT(" THE FOLLOWING VALUES ARE THE PARTIAL AUTOCORRELATION COEF
0057 C *FICIENTS AT LAG K")
0058 PHI(1,1)=RO(1)

```

```

0059      PHI(2,2)=(RO(2)-RO(1)**2)/(1.-RO(1)**2)
0060 C      WRITE(6,220) PHI(1,1),PHI(2,2)
0061 C220  FORMAT(2F7.3)
0062      DO 80 L=3,K
0063      DO 70 J=1,L-2
0064 70     PHI(L-1,J)=PHI(L-2,J)-PHI(L-1,L-1)*PHI(L-2,L-J-1)
0065 C      TO COMPUTE THE SIGMA PHI(K-1,J)*RO(K-J) VALUES
0066      SUM1=0.
0067      DO 85 L1=1,L-1
0068 85     SUM1=SUM1+PHI(L-1,L1)*RO(L-L1)
0069 C      TO COMPUTE THE SIGMA PHI(K-1,J)*RO(J) VALUES
0070      SUM2=0.
0071      DO 90 L2=1,L-1
0072 90     SUM2=SUM2+PHI(L-1,L2)*RO(L2)
0073 80     PHI(L,L)=(RO(L)-SUM1)/(1-SUM2)
0074 C      WRITE(6,300) (PHI(I,J),I=3,K)
0075 C300  FORMAT(10F7.3)
0076      CALL VIEWP(IGCB,10.,66.,10.,40.)
0077      CALL WINDOW(IGCB,0.,49.,-1.0,1.0)
0078      CALL PEN(IGCB,1)
0079      CALL LAXES(IGCB,-5.,0.5,0.,0.,1.,1.,0.3)
0080      CALL PEN(IGCB,2)
0081      DO 32 LP=1.45
0082      ALP=LP
0083      APMI=PHI(LP,LP)
0084      CALL MOVE(IGCB,ALP,0.)
0085      CALL DRAW(IGCB,ALP,APMI)
0086 32     CONTINUE
0087 C      THIS STEP IS TO COMPUTE THE AUTOCORRELATION COEFFICIENT'S
0088 C      AND PARTIAL AUTOCORRELATION COEFFICIENT'S STANDARD ERRORS
0089 C      FN=N
0090      ST=SQRT(FN)
0091      SRO(1)=2/ST
0092      DO 96 I=2,K
0093      SUM=0.
0094      DO 97 II=1,I-1
0095 97     SUM=SUM+RO(II)*RO(II)
0096 96     SRO(I)=2.*SQRT(1.+C*SUM)/ST
0097 C      WRITE(6,230)
0098 C230  FORMAT(" THE FOLLOWING VALUES ARE THE AUTOCORRELATION COEFFICIENT
0099 C      *S STANDARD ERRORS AT LAG K")
0100 C      WRITE(6,500) (SRO(I),I=1,K)
0101 C500  FORMAT(10F7.3)
0102      CALL VIEWP(IGCB,10.,66.,60.,90.)
0103      CALL WINDOW(IGCB,0.,49.,-1.0,1.0)
0104      CALL LINE(IGCB,1)
0105      ASRO=SRO(1)
0106      CALL MOVE(IGCB,1.,ASRO)
0107      DO 33 LO=2.45
0108      ALO=LO
0109      ASRO=SRO(LO)
0110      CALL DRAW(IGCB,ALO,ASRO)
0111 33     CONTINUE
0112      ASRO=SRO(1)
0113      CALL MOVE(IGCB,1.,-ASRO)
0114      DO 34 LW=2.45
0115      ALW=LW
0116      ASRO=SRO(LW)
0117      CALL DRAW(IGCB,ALW,-ASRO)
0118 34     CONTINUE

```

```
0119      CALL VIEWP(IGCB,10.,66.,10.,40.)
0120      CALL WINDW(IGCB,0.,49.,-1.,1.)
0121      ASRO=SRO(1)
0122      CALL MOVE(IGCB,1.,ASRO)
0123      CALL DRAW(IGCB,45.,ASRO)
0124      CALL MOVE(IGCB,1.,-ASRO)
0125      CALL DRAW(IGCB,45.,-ASRO)
0126      CALL PEN(IGCB,0)
0127      CALL PLOT(IGCB,ID,0)
0128      END
0129      END$
```

&HWP5 T=00004 IS ON CR00012 USING 00006 BLKS R=0000

```
0001  FTN4.L
0002      PROGRAM HWP5
0003  C      PROGRAM FOR FINDING THE SAMPLE AUTOCORRELATION, THE
0004  C      PARTIAL AUTOCORRELATION AND THEIR ATANDARD ERRORS
0005  C      CODED BY CHING-HER HWANG
0006      DIMENSION X(500),IGCB(192),Y(500)
0007      WRITE(1,101)
0008 101    FORMAT("INPUT TOTAL NO. OF POINTS WITH I3 .MIN Y VALUE MAX Y VALUE
0009      * 2F5.2")
0010      READ(1,100)N,X1,Y1
0011 100    FORMAT(I3,2F5.2)
0012      READ(46,110)(X(I),I=1,N)
0013 110    FORMAT(10F8.2)
0014      READ(47,110)(Y(I),I=1,N)
0015      LU=21
0016      ID=2
0017      CALL PLOTR(IGCB,ID,1,LU)
0018      CALL SETAR(IGCB,1,52)
0019      CALL PEN(IGCB,1)
0020      CALL CSIZE(IGCB,1.4,0.6,0.3,0)
0021      CALL VIEWP(IGCB,10,142,10,90)
0022      CALL WINDOW(IGCB,0,500,X1,Y1)
0023      CALL LAXES(IGCB,-20,20,0,0,1,1,0.3)
0024      CALL CSIZE(IGCB,0.2,0.4,1,0)
0025      CALL PEN(IGCB,2)
0026      CALL MOVE(IGCB,1,X(1))
0027      DO 23 LO=2,N
0028      ALO=LO
0029      CALL DRAW(IGCB,ALO,X(LO))
0030 23    CONTINUE
0031      CALL PEN(IGCB,3)
0032      CALL MOVE(IGCB,1,Y(1))
0033      DO 24 LO=2,N
0034      ALO=LO
0035      CALL DRAW(IGCB,ALO,Y(LO))
0036 24    CONTINUE
0037      CALL PEN(IGCB,0)
0038      CALL PLOTR(IGCB,ID,0)
0039      END
0040      END*
```