

序

船的興波阻力是船舶流體動力學中最困難的一環，而如果船在行進中所造成的波浪已知，則興波阻力就比較容易求出，因此船波是造船工程中重要的課題。目前航運的船舶有大型化的趨勢，船越大所造成的波浪也越大，在港灣裡大型船所造波浪可能引起小船的不便，這是港研所進行本計畫的動機。

本所數學模式組組長陳陽益博士的數學造詣很高，主持本計畫，並獨立完成理論的推導，本計畫將在下年度，以模型試驗加以驗證。本文為本計畫之期中報告，尚祈造船工程界先進不吝指正。

梁乃匡 謹識

民國75年 6.月

目 錄

ABSTRACT	1
摘 要	2
第一章 緒論	3
第二章 必要積分的展開	9
第三章 平靜水面擾動點所生之波	26
第四章 平靜水面上移動衝擊點所生之波（或船波）	34
第五章 波浪水面上移動衝擊點所生之波	47
第六章 結論與建議	65
附錄A	69
附錄B	73
參考文獻	75

THE STUDY ON WAVES MOTION PRODUCED BY AN IMPULSE
ON THE SURFACE IN DEEP WATER;
APPLICATION TO THE WAVES PRODUCED
BY SHIP MOVING ON WAVES SURFACE

by

Chen Yang-Yih

ABSTRACT

To appropriately analyze and interpret the phenomena about the waves motion produced by a moving impulse on the surface of water waves, this paper is first to consider in an ordinary way the most relative basic problems "the waves motion produced by an impulse on water surface" and "the waves motion produced by a moving impulse on water surface (or called ship waves)". Under checking the previous studies about these problems, a more appropriate formulation with the aid of the further expansion result by steepest Descent Method has been submitted in the present paper. In this formulation the whole system of ship waves has anew been described, and the two severe defects occurred in the previous studies which are the discontinuities of wave pattern and the infinity of wave amplitude near the lines of cusps in the waves system has reasonably been solved. To the analysis about the waves motion produced by a moving impulse (or ship) on the surface of water waves, this paper has also avoided the unbounded difficulty in mathematical transform and adjustably choose the surface of water waves existed in preceding as the reference surface to proceed fitly. Then, by the new formulation of ship waves being cited, the considered waves motion system has been stated. From the results by our analysis, in the considered waves motion, it has existed an important term which is to be occurred by the action of the water waves existed in preceding on the surface. In quality, the characteristics of this term is directly proportional to the steepness of the existed water waves and the ratio of its wave speed to the ship speed. In general, the influenced region effectively by the term is approximately embraced within the region of the wave pattern in ship waves.

摘 要

針對“移動衝擊（或船）行於波浪水面所生之水理現象”給予充分適當的解析與描述，本文首先對其最直接有關的基本問題“平靜水面受擾動作用所生之水理現象”及“移動衝擊行於平靜水面所生之波動（或所謂船波）”的整體系統先行給予做通案性的考慮。於檢核并突破往昔對此等船波相關問題之理論研究缺失的瓶頸，本文利用最速陡降法（Steepest Descent Method）之進一步展開結果做配合引證，來對船波相關問題之解析中所關係到的必要積分式進行適當的處理，適足地提出一簡單、妥當且合於精確要求的新近似式。在這新近似式的引用下，整個船波波動系統重新被更合理地詮釋。往昔之船波理論解析結果的三大嚴重性失真的缺失：一為波動系統於邊界綫處發生有幾何結構上的跳躍不連續之矛盾現象（如波峯綫於該處有 $\frac{\pi}{4}$ 值的相位差異的不合理解析結果），二是該處對應的波動振幅趨於無限大的不合理結果，皆於本文之新解析中被恰當地解決。對於“船行於波浪水面所生之水理現象”的解析，本文避免重蹈往昔求解時遭遇到數學轉移產生之非有界性的（Unbounded）嚴重阻擾，適當地選取原存在之波浪水面做為基準參考面進行處理。然後再由前所解得的船波波動系統特性之直接推廣應用，適足地描述出其整個波動系統的水理現象。依所得之解，船行於波浪水面所生之波動系統，除了原存在的水面波浪及船行於平靜水面之“船波”系統外，尚有一其間的相互作用項的產生，稱之為波浪作用效應項。此波浪作用效應項的波動量可與“船波”者相匹比，其特性直接正比於原存在於水面之波浪的尖銳度及波速與船速之比，且其影響的範圍被包絡在“船波”之波動系統範圍內。最後於文末的討論中，給予本文的解析結果可適足地應用到實際船體所生之真實船波做進一步充分地說明。

第一章 緒論

1 - 1 泛論與研究目的

自從自給自足式的封閉農業社會被產物流通型的開放工商社會所取代以來，貨物的運輸已佔整個人類生活必要的一環，然由於世界各國散佈在地球的五大洋洲上，因此各地間貨品的流通需以海運為大宗，當然這可由世界上各種大小港口數的衆多而為人們所共知曉；甚之，這尤其以島國的對外貿易而言更是不爭的事實。既然海運對於國際貿易與經濟之發展及人類生活之改善如此地息息相關，因此其主要的運輸工具“船”之航行於海洋上的安全、穩定必然為大眾所極度關切。由於船行於水面時，須衝破水（或水波）的阻擋，劃出一條水道，故於船頭、左右舷兩側及船後必會因船之衝擊水面而產生擾動的波浪，謂之“船波（Ship Waves）”。這是必然的，船行於水面上之穩定程度，除了受水面原有的波浪影響外，亦必會受到其所生之船波波動的大小與否所左右；甚者，當船行至近岸時，例如出入港口等，則其所生之船波波動必會干擾海域與衝擊海岸設施。由此可知，一般最常影響人類在海洋上活動的最主要海洋波浪，除了由自然力所生之重力波動類外，餘者當以船波類為最。亦因此之故，為促使人類之海事活動更為安全，易於掌握起見，有關之海洋工程與研究人員當應另撥心思致力於船波有關問題之水理現象的研究，俾使其一般主要特性為有關從業人員所熟識。

雖然從多方面的目的，如航海、軍事、造船、土木、海洋與港灣工程等，船波有關問題的研究勢屬必要且已被很廣泛地展開，然由前人們的衆多寶貴論著，此處吾人似可對此類問題給予一明確的歸屬；至少就理論解析方面而言該為如此，基本上它是類屬“水面受衝擊作用所生之波動”。

對此種波動問題的解析，很不幸地至今仍停留在原水面為平靜者，尚無法對原水面為起伏狀態者給予適當的處理；除此之外，在有效地描述出其波動系統結構的方法上，雖然 Kelvin (1887) 的固定相位法 (Stationary phase method) 頗為適足，且為學者們所樂道與普遍應用及推廣，但是有一衆所皆知不容置疑的事實是，固定相位法失敗於所謂尖端的邊界綫處 (the lines of cusps)，即是在波動系統範圍之二外邊的邊界綫近處。於該處不僅是發生其幾何結構的相位角有跳躍不連續的不滿足現象（如該處之波峯綫有 $\frac{\pi}{4}$ 值相位差的斷續），並且其對應之波動振幅的解析值亦有趨於無限大之不合理的缺失。換言之，傳統的 Kelvin 固定相位法對所考慮的波動問題之解析，其滿足性是不足的。事實上，對實際船波情況而言，如圖 1 a, b 所示，其尖端邊界綫近處之波動變化是連續的且為有限，而所對應之振幅為整個系統中之頗明顯的大者，即對一般目的而言幾為最重要者，因此，就實際描述與應用之目的，Kelvin 之固定相位法的解析結果就不得不須被特加留意與進行修正處理。對 Kelvin 結果的缺失，很不幸地，至今似僅見 Peter (1949) 所提之“船波問題新處理”在理論解析上有所避免而已，抑或有者，亦不過散見諸於一些數值計算的取代品中，如 Ursell (1960), Salvesen (1981) 等；然而當我們探討這些論著時，我們立即頓感如入五里迷霧般，蓋因其整個描述皆被表示在不可避免的高度難積的積分式中，而非如 Kelvin 般地將之簡化求值，來顯現出令我們直覺上即刻可知曉、接受與利用的顯然結果，此點尤其對實際從業的有關工程人員是極為迫切需要的。至此，這應是很確切地被知道，基於對船波有關問題之充足描述，一種能避免 Kelvin 結果的嚴重缺失且又能兼顧到可提供出簡單、明顯，而其結果又可被直接利用的可行性解析法當是需要的；甚至被推廣應用來幫助解決至今仍未被解析出，然被極度關注的“船行於波浪水面所生之水理現象”，俾提供給有關之港灣工程者做參考，這顯然就是本文研究之主要目的所在。

1 - 2 研究進展

船波有關問題之研究，最早見之於文獻者爲 Rankine (1868) 所公佈的船生波資料，從此之後，此種問題就被很多學者所關注且廣泛地進行研究。對於船行於平靜水面所生之波動，已經由 Froude (1877) 之試驗觀察歸納出其主要特性：船波波動系統是被侷限在兩條直線之內，由二種不同的波浪系統稱之爲橫向與分散波者 (transverse and diverging waves systems) 所組成，如圖 1 a、b 所示。至於對它有效地展開理論解析，直至 Kelvin (1887 a, b) 在哲學期刊上 (Phil. Mag.) 公佈其“任一深度水中之單一衝擊點所生之波”的突破性論文及在蘇格蘭愛丁堡 (Edinburgh) 科學與藝術博物館 (The Science and Art Museum) 之座談會上發表船波 (On Ship Waves) 之演說後，此種船波問題之解析方向才曝露一道明顯的曙光，尤其在解析上更是提供了一種爲日後學者們所常遵循的卓越方法，即爲所熟知的“固定相位法 (The method of stationary phase)”。繼之以後，學者們對有關船波問題的研究，可說皆以 Kelvin 的方法做爲主要根據的準則，而續之擴展延伸而已；這蓋因 Kelvin 所解得之波浪系統結構，如圖 2 所示，與所考慮的船波之真實波動現象於外貌上頗爲符合之故。船波有關問題早期的研究，在理論解析方面，包括 Kelvin (1904 a, b, 1905, 1906, 1907) 本身的延續，及 Havelock (1908, 1914, 1928, 1932 a, b), Lamb (1912, 1932), Hogner (1922) 與 Inui (1936) 等；至於試驗與現場觀測方面有 Froude (1889) 與 Hovgaard (1909) 等爲代表。近年來由於電腦數值計算與電子偵測、攝影的迅速發展，對此等問題的研究，於理論解析與試驗或現場測定兩方面皆有很大的進展，如可見諸於 Johnson (1958, 1968)、Ursell (1960)、Guillton (1960)、Brebner (1966)、Hay (1968)、Das (1970)、Sorensen (1966、1967、1968、1969、1973、1974)、Neumann (1970) 與 Salvesen (1981) 等。由於 Kelvin 之固定相位法是描述船波系統的主要方法，因此，本文特對其做進一步的展開，求解出更適足的船波波動，詳見於二、三、四章所述。

至於“船行於波浪水面所生之波動”的描述，由於理論解析法的不易及所造成的整個波動水面過於複雜混淆致使試驗與現場觀測難於分析與掌握，因此，至今對此種波動的研究尚無明確有效地進展；即使有關者，亦不過是注重於船身的運動狀態罷了，如 Peter & Stoker (1954) 及 Neumann (1962)，而無給予波動之水理現象應有的描述。對此波動問題，本文特予適當地進行解析，見於第五章中。

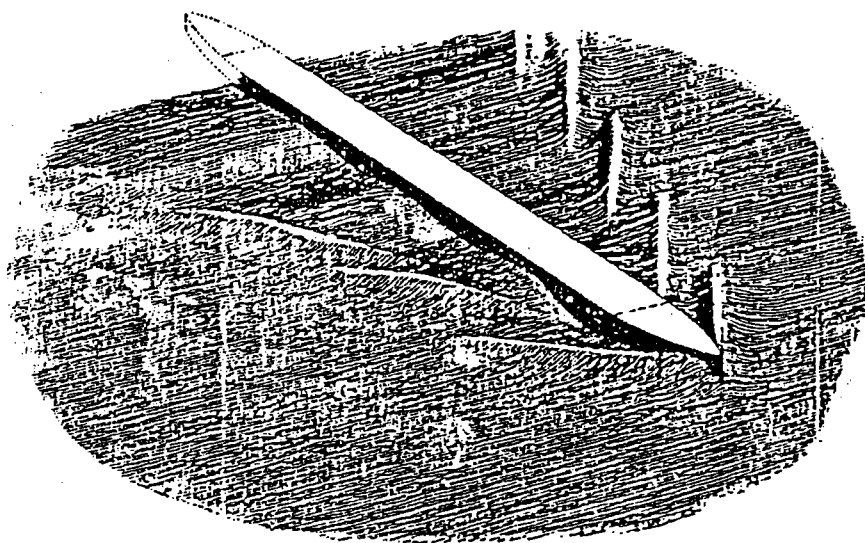


圖 1a. Froude (1877) 船波試驗結果之描述

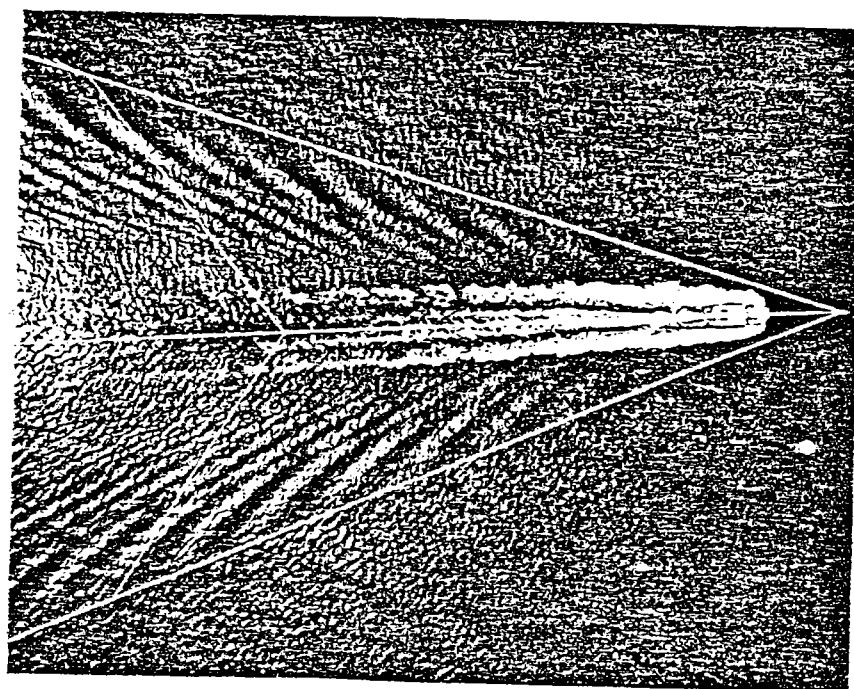


圖 1b. 真實船波波動之航空照相圖 (引自 Neumann (1970))

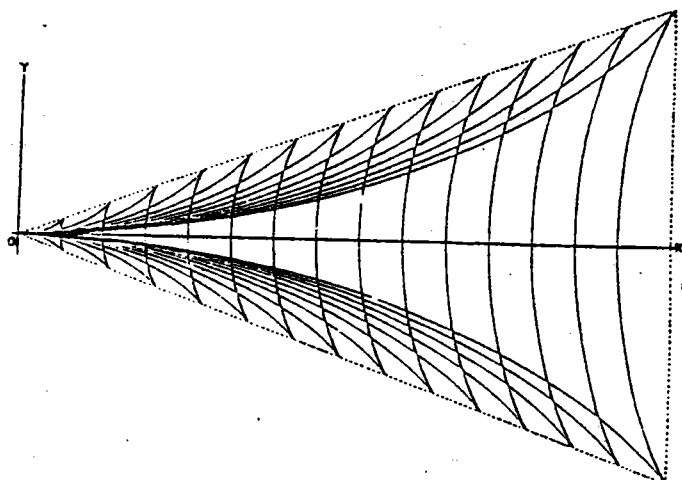


圖 2a. Kelvin 固定相位法解析所得之深海船波系統幾何外貌（引自 Taylor, 1943）。

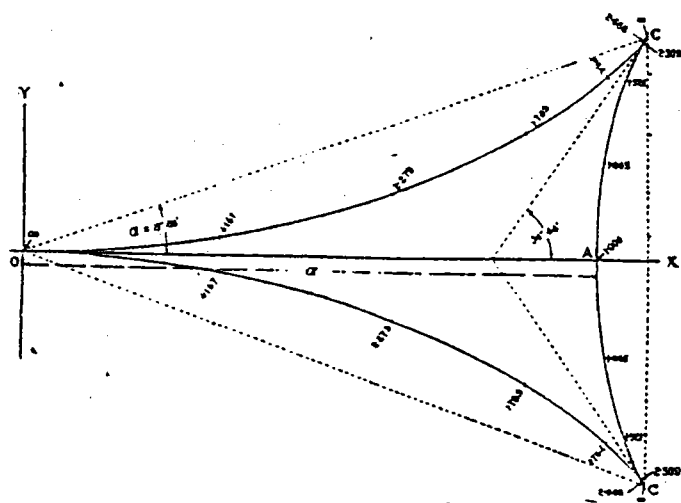


圖 2 b. 橫向與分散系統中一條波峯線上各點的相對高度（由數字所示者）（引自 Taylor, 1943）。

1 - 3 本文組織

由於在較深水中之船波波動現象佔整個船波有關問題研究的主要部份（因避免船之擱淺，故在水淺時非屬必要，否則淺水船波實際上較少發生），因此，本文如同往昔般，從最基本的理論觀點，即依水面上之移動衝擊點所生之波動的觀點來對深海船波進行解析。本文分六章、兩附錄來對所考慮的波動做一貫整體的論述，各章的內容簡述之如下：

第二章，首先對必要的積分式進行考慮，並將之展開成較往昔者（如 Kelvin, Havelock, Copson 等）更為適足的近似結果，同時擴展最速陡降法（Steepest Descent Method）之進一步展開結果做配合引證。

第三章，對船波之基礎問題進行論述：敘述由衝擊壓力作用在水面上所生之波所必需滿足的基本條件式，隨之引入 Hankel 轉移法來求解。

第四章，將第三章所求得的结果直接應用至衝擊作用點移行於平靜水面上所生之波動的求解，即一般所謂的船波之解。之後，對其波動系統內

的橫向與分散波系統及尖端邊界綫分別進行處理；同時與古典結果做比較說明之。

第五章，論述到以波浪水面做為參考面來解析作用在其上之衝擊點所生之波動，隨後再由第四章之解析的直接引用來描述出本文所着重的船行於波浪水面所生之水理現象，並與第四章之船行於平靜水面所生之波動者進行比較，以說明原存在於水面上之波浪對行之於上之船所生之波動的影響。

第六章，對本文做一扼要性的結論，並給予些討論以便本文的結果適之於實際船波有關問題的應用。

最後，於兩附錄中，對第五章所得之解另以不同方法進行印證與說明。

第二章 必要積分的展開

簡 要

爲對所考慮的船波波動給予更適足地解析，本章將針對其所關連到的必要積式做進一步地處理，並由最速陡降法 (Steepest Descent Method) 推導出其在一般情況下之進一步展開結果做爲引證，來提出一簡單、精確又適足的新近似式，以避免往昔不充分與矛盾不合理的船波解析結果的缺失發生。

2 - 1 前 言

由於水面受擾動而生之波動，其是由各種頻率的成份波所組成的，最早對它的解析爲Cauchy與Poisson，故有時稱之爲Cauchy-Poisson problem，迄今此問題已被廣泛的研究，蓋因於真實的海洋波動中，其常會被產生，諸如海嘯、氣象暴潮等；甚至涉及到船波有關問題之研究，此見之於下章之論述。自從Cauchy & Poisson開始，對此種波動的解析，就引入了積分的型式來涵括所有頻率的成份波，至Kelvin爲了更清楚地求出其時空變化的明顯特性，特發明了一良好的積分式近似展開法，謂之Kelvin固定相位法，在此方法之應用下，此種波動的特性已被很滿足地描述出。自此之後，Kelvin固定相位法被日後學者廣泛地應用且已成功地解析出很多有關的波動問題，包括船波者。雖然如此，依Kelvin固定相位法來解析所關連到的波動問題，其結果是具有嚴重不滿足之處，見於前章緒論之論述。因此，爲獲得被所考慮的有關波動問題更圓滿地解決，Kelvin固定相位法有給予修正的必要，本章將針對此點進行頗詳盡地論述。

於 2-2 節中，先對所欲解析的波動問題必會關連到的積分式的通式進行考慮，並提出一適足的新近似展開結果。

於 2-3 節，描述最速陡降法 (Steepest Descent Method) 並獨自推導出其進一步展開結果，並說明 Kelvin 固定相位法的結果僅為本法之級數結果中的首項而已。

於 2-4 節中，以 2-3 節所得的進一步展開結果來比較並驗證 2-2 節所提出之新近似展開結果的適足性。

於 2-5 節中，將所必要的積分通式以被印證後的新近似展開式直接代入而求其值。

於 2-6 節中，對本章的論述給予結論與評語。

2-2 $I = \int \Psi(x) e^{i\varphi(x)} dx$ 之展開

由於有關船波問題之解析，一般皆涉及到多重積分的表示，因此，往昔迄今對它的解析工作皆側重在如何良好地尋找出這些積分的結果。如吾們所知，Kelvin (1887) 雖然已發展出良如的固定相位近似展開法，然它應用在船波解析上的嚴重缺失至今仍未被滿足地修正，基此，一種更符合需要的積分式近似展開求解實應被考慮。為順利進行這種工作，此處列出船波解析中所關連到的積分式之一般通式，為

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) e^{i\varphi(x)} dx \quad (2.1)$$

式中 x_1 與 x_2 為積分之上下限常數， $\varphi(x)$ 為可解析 (analytic) 的實函數， $\Psi(x)$ 為任一函數且較 $\varphi(x)$ 頗為緩慢地變化。當 x_1 與 x_2 間存在一 x_0 值使得 $\varphi'(x_0) = 0$ 時，則依 Taylor 式展開，令 $x = x_0 + u$ ，有

$$\Psi(x) = \Psi(x_0 + u) = \Psi(x_0) [1 + h(u)] \quad (2.2)$$

* 本文第二至第四章直接引用 Chen (1986) 之論述。

$$\begin{aligned}
\text{與} \quad \varphi(x) &= \varphi(x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 \\
&\quad + \frac{\varphi'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \\
&= \varphi(x_0) + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots \\
&= \varphi(x_0) + w(u)
\end{aligned}$$

$$\text{此處} \quad a_n = \varphi^{(n)}(x_0) / n! \quad , \quad n \geq 2 \quad (2.3)$$

因此上式的積分變為

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x_1 - x_0}^{x_2 - x_0} \Psi(x_0 + u) e^{i[\varphi(x_0) + w(u)]} du \\
&= \Psi(x_0) e^{i\varphi(x_0)} \int_{x_1 - x_0}^{x_2 - x_0} [1 + h(u)] \cdot e^{i w(u)} du
\end{aligned} \quad (2.4)$$

今令

$$w(u) = at^2 + bt^3 = a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots \quad (2.5)$$

$$\text{與} \quad u = c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n \quad , \quad h(u) = q(t) \quad (2.6)$$

上式中因 $w(u)$ (或 $\varphi(x)$) 為實函數, a, b, c_n 皆為實數; 得有

$$\begin{aligned}
at^2 + bt^3 &= a_2 (c_1 t + c_2 t^2 + \dots)^2 \\
&\quad + a_3 (c_1 t + c_2 t^2 + \dots)^3 + \dots
\end{aligned} \quad (2.7)$$

因此, 得

$$a = a_2 c_1^2 \quad , \quad b = 2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3 \quad (2.8)$$

$$\text{與} \quad \frac{du}{dt} = c_1 + 2c_2 t + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \quad (2.9)$$

將上幾式代入 (2.1) 式中, 可得 I 為

$$I = \Psi(x_0) e^{i\varphi(x_0)} \int_{t_1}^{t_2} [1 + q(t)] \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \right) e^{i(a t^2 + b t^3)} dt \quad (2.10)$$

由於 $\Psi(x)$ 相對於 $\varphi(x)$ 為頗緩慢地變化，因此，在近似的考慮下，或相對貢獻量的比較下，(2.10) 式中之 $q(t)$ 可被略去，且 $du/dt \sim c_1$ ，此可見諸於 Poincare 與 Copson 中（引自 Stoker (1968) 第 6.8 節），同時積分式的上下限可被擴伸至 $\pm\infty$ ，此於 Havelock (1908, 1914) 中亦有陳述。故 (2.10) 式可近似地寫為

$$I = c_1 \Psi(x_0) e^{i\varphi(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a t^2 + b t^3)} dt \quad (2.11)$$

至此，這是很明顯的，只要能將 (2.11) 式中之積分值求得（或近似值），則所欲望展開的積分式就可獲得。由於當 $b = 0$ （或較於 a 為很小）時，則可依 Fresnel Integral 的應用得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a t^2 + b t^3)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i a t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{+\frac{\pi}{4} i} \quad , \quad \text{當 } \frac{b}{a} \rightarrow 0 \quad , \\ & \text{或 } b = 0, a \neq 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) 式中之 $\pm$ 號隨 a 值之正負而取定。另者，當 $a = 0$ （即 $a_2 = \varphi''(x_0)/2 = 0$ ）時，則有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a t^2 + b t^3)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i b t^3} dt \\ &= 2\pi (3|b|)^{-1/3} \text{Ai}(0) = \frac{2\pi}{3|b|^{1/3}} \frac{1}{\Gamma(2/3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(2/3)}{|b|^{1/3}} \quad , \quad \text{當 } a = 0, b \neq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

此處 Airy Integral $\text{Ai}[\pm(3|b|)^{-1/3}x] = (3|b|)^{1/3}/\pi \cdot$

$\int_0^{\infty} \cos(bt^3 \pm xt) dt$ 及 Gama 公式 $\Gamma(n)\Gamma(1-n) =$

$\pi / \sin(n\pi)$ ， n 非為整數，已被利用。因此，由 (2.12) 式與 (2.13) 式之應用，即可合理地給定

$$\begin{aligned}
 I &= \text{Function of Fresnel's and Airy's Integral} \\
 &= \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} / \sqrt{a + i\pi \frac{3|b|^{2/3}}{[\Gamma(1/3)]^2}} + \text{Remainder} \\
 &= \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4} / \sqrt{|a| \pm i\pi \frac{3|b|^{2/3}}{[\Gamma(1/3)]^2}} \\
 &\quad + \text{Remainder}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.14) 式中之士號之取定恰如 (2.12) 式中者，是隨 a 值的正負而定，即 $a \geq 0$ 時取正， $a < 0$ 時取負。

2 - 3 最速陡降法 (Steepest Descent or Saddle Point Method) 之進一步展開

(1) 一般考慮與公式的推導

為了尋求 I 值之更適足地近似展開，或言較完整地求出 (2.14) 式中的 Remainder 部份，於此處我們將利用最速陡降法之進一步展開的結果做為補助，特別是以 $|a|$ 為大的情形為然。今對 (2.14) 式之一般型式進行處理，考慮

$$J(z) = \int_c e^{zf(t)} dt \tag{2.15}$$

此處 c 表示積分的路徑線 (contour)，當 $|z|$ 為大時，它是可被適當地取定或變形，如 Morse & Feshbach (1978) 之 437 ~ 441 中所示。

一般而言，積分路徑線 c 可被如此地取定，使得在所考慮的範圍裡 $[zf(t)]$ 之虛數部分 ($\text{Im}[zf(t)]$) 為常數而對應之 $zf(t)$ 的實數部分 ($\text{Re}[zf(t)]$) 為最大，顯示此種取定的幾何意義為圖 3 所示，因此，對貢獻至 $J(z)$ 的最後結果中以此種範圍為最主要的部份 (因於此範圍裡，已無由於虛數部之變化而引起之正負相消的因素)，故 (2.15) 式可寫為

$$\begin{aligned}
 J(z) &= \int_c e^{zf(t)} dt \\
 &= e^{i \operatorname{Im}[zf(t)]} \int_c e^{\operatorname{Re}[zf(t)]} dt, \quad |z| \rightarrow \text{大}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

(當然若為需要的話，於 $\operatorname{Re}[zf(t)]$ 為小的附近範圍，可給定通過的路徑線 c 是使得 $\operatorname{Im}[zf(t)]$ 頗快的變化，故於該範圍裡就產生正負相消的結果。)

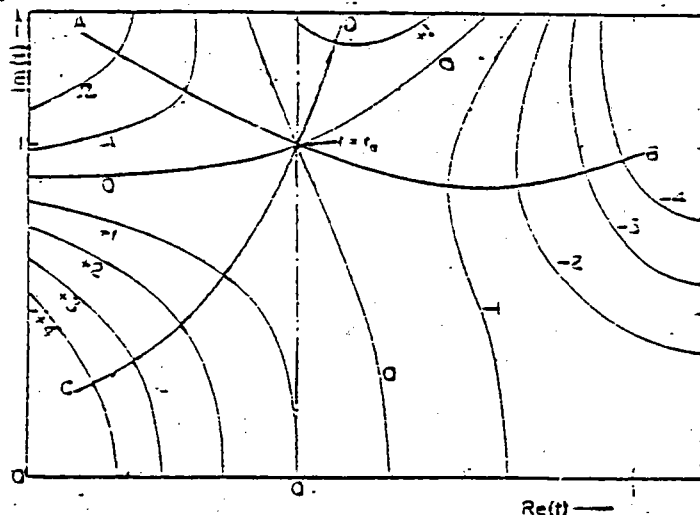


圖 3：函數 $f(t)$ 之實數部近於鞍點 (saddle point) $t = t_0$ 之路徑線圖。水平 x 軸為 $\operatorname{Re}(t)$ ， y 軸為 $\operatorname{Im}(t)$ ，垂直 xy 平面之座標為 $\operatorname{Re}[f(t)]$ ，圖中曲線表示曲面 $\operatorname{Re}[f(t)]$ 之對應值 (引自 Morse & Feshbach 之圖 4.29)。

Fig 3 : Contour plot of real part of function $f(t)$ near a saddle point $t = t_0$. The x coordinate is $\operatorname{Re}(t)$ the y coordinate $\operatorname{Im}(t)$, and the vertical coordinate $= \operatorname{Re}[f(t)]$, at very point t in the x, y plane the surface is at a height above the horizontal given by $\operatorname{Re}[f(t)]$ at that point. (Referring to Morse & Feshbach(1978) Fig. 4.29 at p. 439).

由於 $\operatorname{Re}[zf(t)]$ 最大值之點是 $f(t)$ 的極大點，如說是 $t = t_0$ ，故於該處有

$$f'(t) = 0 \quad \text{在 } t = t_0 \quad (2.17)$$

在這種點的附近，對 $J(z)$ 的結果是特別重要的，因於該處上下振盪的情形已被壓低，故貢獻至 $J(z)$ 的量主要歸於該處；就是在固定相位 (stationary phase) 點處。如此我們必要的是，於 t_0 點附近處取定的路徑線使得

$$\text{Im}[zf(t)] = \text{Im}[zf(t_0)] \quad (2.18)$$

基於簡化探討，然對最後結果與應用並不失其正當性下，此處可讓 z (可為複數) 的相位 (phase) 被併入在 $f(t)$ 中，使得以下推導中之 z 皆被考慮為正實數 (當然於最後結果 z 是可復原為任意值的)。依 Taylor 的展開，於 t_0 點附近處有

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2} (t - t_0)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(t_0)}{3!} (t - t_0)^3 + \dots \\ &= f(t_0) - v^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

顯然地，(2.19) 式中的 v 為實數，此乃依據 $\text{Im}[f(t)] = \text{Im}[f(t_0)]$ 之結果及 $f(t_0)$ 為 $f(t)$ 之極大值之故。將 (2.19) 式代入 $J(z)$ 中，則產生

$$\begin{aligned} J(z) &= e^{zf(t_0)} \int_c e^{-zv^2} dt \\ &= e^{zf(t_0)} \int_c e^{-zv^2} \frac{dt}{dv} dv \end{aligned} \quad (2.20)$$

於一般目的下，可給定沿路徑線積分的方向是使得 v 的積分從 $-\infty$ 至 $+\infty$ ，因此於 $|z|$ 充足大時，(2.20) 式可被簡化寫為

$$\begin{aligned} J(z) &= e^{zf(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zv^2} \frac{dt}{dv} dv, \quad |z| \rightarrow \text{大} \end{aligned} \quad (2.21)$$

由 (2.21) 式知，要完成我們的論述，剩餘者則須對 dt/dv 計算之，即是要倒逆 (2.19) 式來求出 dt/dv 表示在 v 的關係裡。對這種

工作的處理，我們於此處先寫下 dt / dv 之冪級數式的一般式，至於其倒逆的過程留待至下小節中論述，為

$$\frac{dt}{dv} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n v^n \quad (2.22)$$

將 (2.22) 式代入 (2.21) 式中，很明顯地可知僅有 v 的偶冪次方項存在，即得

$$\begin{aligned} J(z) &= e^{zf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zv^2} v^{2n} dv \\ &= e^{zf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_{2n} \frac{d^n}{dz^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zv^2} dv \end{aligned} \quad (2.23)$$

由於 $\text{Re}(z) > 0$ 時（見 Spiegel (1964) 298 頁之問題 78），有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zv^2} dv &= 2 \int_0^{\infty} e^{-zv^2} dv \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\lambda}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

而且

$$\begin{aligned} &(-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zv^2} dv \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\sqrt{\frac{\pi}{z}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{z}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (2.25)$$

此處引入了 Gamma function $\Gamma(n+1/2) = (n+1/2-1)\Gamma(n+1/2-1)$ ， $n \geq 1$ 。因此，得所考慮的 $J(z)$ 之近似展開的級數式為

$$\begin{aligned} J(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \text{大}} e^{zf(t_0)} \sqrt{\frac{\pi b_0^2}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_{2n}}{b_0} \right) \\ \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (2.26)$$

依本小節獨自所推導出的這 (2.26) 式結果恰與前人所得者相同，如

可參見Morse & Feshbach (1978) 之 442 頁中的 (4.6.17) 式知。

至此可知，對計算 $|z|$ 為大時之 (2.15) 式 (或相對應的 (2.14) 式) 的工作，剩下來的僅是決定出其相關的係數 b_n 者，這些可由冪級數間的倒逆處理而獲得解決，緊接著述之如下。

(2) 級數之倒逆 (Inversion of series)

基於前節之目的所在 (其實這是一般常遭遇到的)，於本小節中，函數之級數式表示間的倒逆一般處理將被闡述。今已知一函數表示在冪級數的型式裡，為

$$\zeta = f(\xi) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\xi - \xi_0)^n, \alpha_1 \neq 0 \quad (2.27)$$

基於需要起見，我們須求出其倒逆函數 (inversion function) $\xi = \xi(\zeta)$ ，使得 $f(\xi) - \zeta = 0$ ，依可析函數的理論，如同 (2.27) 式般，我們可將其倒逆函數表示在一冪級數式裡，有

$$\xi(\zeta) = \xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (\zeta - \zeta_0)^n \quad (2.28)$$

實際上，係數 β_n 是可直接由 (2.28) 式代入 (2.27) 式中而求出其表示在係數 α_n 項裡，然而此種操作過程的繁長與不明顯是直覺可知的，因此，為尋求其有系統地被表示在一明確的公式裡，此處將引用 Cauchy 原理對它進行更優美的推導。首先，我們設定出一路徑線積分式 (contour integral)，使其殘餘數 (residue) 恰等於函數 $\xi(\zeta)$ 。利用 $f(\xi)$ 為獨立變數時，則此積分表示恰為 $(1/2\pi i) \oint [\xi(f) df / (f - \zeta)]$ ；此乃因所取定的積分路徑線是包圍了 $f = \zeta$ 點，除此之外無含其他的 $(f - \zeta)$ 為零之點，因此，在 ξ 項表示下，此積分式可寫為

$$\xi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\xi f'(\xi) d\xi}{f(\xi) - \zeta} \quad (2.29)$$

上式對 ζ 微分後，再部份積分之 (part integration)，則可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta} \xi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\xi f'(\xi) d\xi}{[f(\xi) - \zeta]^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{-\xi}{f(\xi) - \zeta} \right]_{\text{原點}}^{\text{原點}} \\
&\quad + \oint \frac{d\xi}{f(\xi) - \zeta} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{f(\xi) - \zeta} \tag{2.30}
\end{aligned}$$

上式之部份積分中，已令 $u = \xi$ ， $dv = (f - \zeta)^{-2} df$ 。在 (2.30) 式之表示裡，其積分值是可被評價的。首先寫出

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(\xi) - \zeta} &= \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \zeta_0}{f(\xi) - \zeta_0}} \cdot \frac{1}{f(\xi) - \zeta_0} \\
&= \frac{1}{f(\xi) - \zeta_0} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_0)^n}{[f(\xi) - \zeta_0]^n} \right\} \tag{2.31}
\end{aligned}$$

今將 (2.28) 式之級數式對 ζ 微分之，所得之結果再與 (2.30) 式與 (2.31) 式之結果進行 $(\zeta - \zeta_0)$ 之幕次方比較，可得係數 β_n 為

$$n\beta_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{[f(\xi) - \zeta_0]^n} \tag{2.32}$$

由於 (2.32) 式中的被積分式有 $-n$ 階 (order n) 的極點在 $\xi = \xi_0$ 處，故其積分值可依殘餘定理 (residue theorem) 求得為

$$\frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left\{ \frac{(\xi - \xi_0)^n}{[f(\xi) - \zeta_0]^n} \right\} \right]_{\xi=\xi_0} \tag{2.33}$$

則 β_n 依 (2.27) 式之代入，得與 α_n 之關係為

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} [\alpha_1 + \alpha_2 (\xi - \xi_0) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_3 (\xi - \xi_0)^2 + \dots]^{-n} \right\}_{\xi=\xi_0}
\end{aligned}$$

或

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_1 n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x^2 + \dots)^{-n} \right]_{x=0} \tag{2.34}$$

(2.34) 式中之導式可由多項式展開定理 (multinomial theorem) 的應用而計算出，即利用

$$\begin{aligned} & (1 + a + b + c + \dots)^{-m} \\ &= \sum_{s, t, \dots} (-1)^{s+t+\dots} \left[\frac{(m-1+s+t+\dots)!}{(m-1)! s! t! \dots} \right] \cdot \\ & a^s b^t \dots, \quad m > 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

引入上式多項式展開且執行必要的微分，最後得 β_n 之通式為

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{n \alpha_1^n} \sum_{s, t, u, \dots} (-1)^{s+t+u+\dots} \cdot \\ & \frac{(n)(n+1)\dots(n-1+s+t+u+\dots)}{s! t! u!} \cdot \\ & \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^s \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^t \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

此處 $s + 2t + 3u + \dots = n - 1$

依 (2.36) 式，於此列出前幾個 β_n ，如下

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \\ \beta_2 &= -\frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} \\ \beta_3 &= \frac{1}{3\alpha_1^3} \left[\frac{3 \cdot 4}{2!} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 - \frac{3}{1!} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha_1^3} \left[2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \right] \\ \beta_4 &= \frac{1}{4\alpha_1^4} \left[-\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^3 + \right. \\ & \quad \left. \frac{4 \cdot 5}{1! 1!} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) - \frac{4}{1!} \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha_1^4} \left[-5 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^3 + 5 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) - \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) \right] \end{aligned}$$

(2.37)

由此可知，當這些 β_n 係數被代入 (2.28) 式中時，則所需要的倒逆級數即可被寫出。

(3) 必要的係數 b_{2n} 之評價

雖然 (2.26) 式中之係數 b_{2n} 原則上可依前小節所述的倒逆級數的處理過程來計算，然一些修飾仍是必要的。由 (2.19) 式與 (2.22) 式，我們有

$$v = \sqrt{f(t_0) - f(t)} = g(t)$$

與
$$t - t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} v^{n+1}$$

故由 (2.32) 式之應用，得

$$b_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{t - t_0}{g(t)} \right]^{n+1} \right\}_{t=t_0} \quad (2.38)$$

由於 $f'(t_0) = 0$ ，因此可利用級數展開之型式來處理上式，即寫下

$$\left[\frac{g(t)}{t - t_0} \right]^2 = \frac{f(t_0) - f(t)}{(t - t_0)^2} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (t - t_0)^m \quad (2.39)$$

此處 $A_m = -f^{(m+2)}(t_0) / (m+2)!$ ， $f^{(m+2)}$ 表示 $f(t)$ 之第 $(m+2)$ 次的微分，由此 (2.38) 式變為

$$b_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m \right]^{-n/2-1/2} \right\}_{x=0} \quad (2.40)$$

或言 b_n 是 $\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m \right)^{-n/2-1/2}$ 之幕級數展開式裡的 x 第 n 次方項的係

數。當 (2.35) 式的多項式展開再被應用時，則係數 b_n 之最後結果即可被寫出為

$$b_n = \frac{1}{A_0^{n/2+1/2}} \sum_{s, t, u, \dots} (-1)^{s+t+u+\dots} \cdot \frac{(n/2 + 1/2 - 1 + s + t + u + \dots)!}{\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - 1\right)! s! t! u! \dots}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^s \left(\frac{A_2}{A_0} \right)^t \dots\dots\dots \\
&= \frac{1}{A_0^{n/2+1/2}} \sum_{s \ t \ u \dots} (-1)^{s+t+u+\dots} \cdot \\
& \frac{1 \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2} \right) \dots \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - 1 + s + t + u + \dots \right)!}{s! t! u! \dots\dots} \cdot \\
& \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^s \left(\frac{A_2}{A_0} \right)^t \dots\dots
\end{aligned}$$

此處 $A_n = -f^{(n+2)}(t_0) / (n+2)!$, $b_0 = 1 / \sqrt{A_0}$,

$$s + 2t + 3u + \dots = n \quad (2.41)$$

如同前小節般，於此我們列出前幾個係數 b_{2n} （表示在 A_m 項裡）以資下節中的運用，如下：

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 / \sqrt{A_0} \\
b_2 / b_0 &= \frac{15}{8} A_1^2 A_0^{-3} - \frac{3}{2} A_2 A_0^{-2} \\
b_4 / b_0 &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7 \cdot 3} A_1^4 A_0^{-6} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2^4} A_2 A_1^2 A_0^{-5} \\
&+ \frac{5 \cdot 7}{2^3} (A_2^2 + 2A_3 A_1) A_0^{-4} - \frac{5}{2} A_4 A_0^{-3}
\end{aligned} \quad (2.42)$$

因此，當被表示在 (2.41) 式中之係數 b_{2n} 被代入 (2.26) 式中時，則本節依最速陡降法來進一步展開之近似級數的整個論述就可了結。此處值得一提的是，若僅第一個係數 b_0 被考慮時，則此近似展開被簡化成

$$\begin{aligned}
J(z) &\simeq e^{zf(t_0)} \sqrt{2\pi / [ze^{i\pi f''(t_0)}]} \\
&, |z| \rightarrow \text{大}
\end{aligned} \quad (2.43)$$

這恰與一般所得的結果相同，如示之於 Morse & Feshbach (1978) 441 頁中之 (4.8.13) 式與 Stoker (1968) 186 頁中之 (6.8.16) 式；因此可知，Kelvin 之固定相位法當然僅是本節所述之展開法的一個特例情況而已。

2-4 計算 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i a (t^2 + a t^3 / b)} dt$, $|a| \rightarrow \text{大}$, $|\frac{b}{a}| \rightarrow \text{小}$, 及比較

(1) 計 算

今，我們將應用所導出的 (2.26) 式與 (2.41) 式來計算本文所要求的必要積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a t^2 + b t^3)} dt$, 當 $|a| \rightarrow \text{大}$ $|b/a| \rightarrow \text{小}$ 的情況，以利與 (14) 式進行比較說明。由前節結果的應用，可取

$$f(t) = t^2 + \frac{b}{a} t^3 ,$$

$$f'(t) = 2t + 3 \frac{b}{a} t^2 \quad (2.44)$$

因此，其固定相位點發生在 $t_0 = 0$ 與 $t_0 = -2/3 \cdot a/b$, 然依所給定 $|a/b|$ 為很大，故點 $t_0 = -2/3 \cdot a/b$ 對積分而言不具什麼意義，因此，僅有點 $t_0 = 0$ 是必要被考慮。由 (2.39) 式與 (2.41) 式即刻可得

$$A_0 = -\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = -1 , \quad A_1 = -\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = -\frac{b}{a}$$

$$A_2 = A_3 = \dots = 0 \quad (2.45)$$

與 $b_0 = i , \quad b_2 / b_0 = -\frac{15 b^2}{8 a^2} ,$

$$b_4 / b_0 = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7 \cdot 3} \frac{b^4}{a^4} \dots \quad (2.46)$$

因此，依 (2.26) 式之應用，得所考慮的積分為

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i a (t^2 + b/a t^3)} dt$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{i \frac{\pi}{4}} \left[1 + i \frac{15 b^2}{16 a^3} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^9} \frac{b^4}{a^6} + \dots \right] \quad (2.47)$$

(2) 比 較

爲對本文所必要的積分式求出適當的展開結果，或言對 (2.14) 式有明確的近似展開，即適足地定出該式中的 Remainder 部份，於此處引入 (2.14) 式與前節的結果進行比較說明。茲分二種情況討論：

(i) 當 $|a| \rightarrow$ 大， $|b/a| \rightarrow$ 小時，展開 (2.14) 式中之右邊第一項，得

$$\begin{aligned} & \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} / \sqrt{a + i\pi \frac{3|b|^{2/3}}{[\Gamma(1/3)]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ 1 - \frac{i}{2} \frac{3\pi}{[\Gamma(1/3)]^2} \frac{|b|^{2/3}}{a} - \right. \\ & \quad \frac{3}{8} \frac{9\pi^2}{[\Gamma(1/3)]^4} \frac{|b|^{4/3}}{a^2} \\ & \quad \left. + i \frac{15}{16} \frac{9\pi^3}{[\Gamma(1/3)]^6} \frac{b^2}{a^3} + \dots \right\} \quad (2.48) \end{aligned}$$

當 $\Gamma(1/3) = 2.6789387$ 被代入且因給定 $|a| \rightarrow$ 大， $|b/a| \rightarrow$ 小，故知在此情況下，(2.48) 式實質上與 (2.47) 式有很相近似的結果。

(ii) 當 $|a| \rightarrow$ 小， $|b/a| \rightarrow$ 大時，則 (2.14) 式之積分恰退化至趨於 Airy Integral 的情況，如 2-1 節所述，即有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2+bt^3)} dt \longrightarrow \\ & \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibt^3} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(1/3)}{|b|^{1/3}} \longrightarrow \\ & \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} / \sqrt{a + i\pi \frac{3|b|^{2/3}}{[\Gamma(1/3)]^2}}, \\ & |a| \rightarrow \text{小}, \quad \left| \frac{b}{a} \right| \rightarrow \text{大} \quad (2.49) \end{aligned}$$

總括以上二種情況的討論及加上任一函數之近似級數並非爲唯一之特性，因此，於考慮有適足精確結果的本文目的下，此處當可充分地取定 (2.14) 式之 Remainder = 0，而寫出所必要的 (2.14) 式之充足的近似結果爲

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2+bt^3)} dt$$

$$= \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} / \sqrt{a + i\pi \frac{3|b|^{2/3}}{[\Gamma(1/3)]^2}} \quad (2.50)$$

2-5 I之結果

爲完成本文所必要的積分 I 之充分精確的評價，於此處我們須對其所包含的常數 a 與 b 進行最後推求的工作。事實上，於上述我們所考慮的充分精確的近似表示裡，這是無失其一般性的，就是當 $a_3 = 0$ 時，則可取定 $b = 0$ ，此乃因此時的積分式恰退化成一般船波與擾動表面水波等有關問題的基本結果之故。因此，我們原則上可給定 $c_2 = 0$ ，使得 (2.8) 式有

$$a = a_2 c_1^2 \quad \text{與} \quad b = a_3 c_1^3 \quad (2.51)$$

故得積分 I 之結果爲

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) e^{i\varphi(x)} dx \sim$$

$$c_1 \Psi(x_0) e^{i\varphi(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2+bt^3)} dt \quad (2.52)$$

$$= \sqrt{\pi} \Psi(x_0) e^{i[\varphi(x_0)+\pi/4]} / \sqrt{a_2 + i\pi \frac{3|a_3|^{2/3}}{[\Gamma(1/3)]^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \Psi(x_0) e^{i[\varphi(x_0)+\pi/4]}}{\sqrt{\frac{\varphi''(x_0)}{2!} + i \frac{3\pi}{[\Gamma(1/3)]^2} \left[\frac{|\varphi'''(x_0)|}{3!} \right]^{2/3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \Psi(x_0)}{\left\{ \left[\frac{\varphi''(x_0)}{2!} \right]^2 + \frac{9\pi^2}{[\Gamma(1/3)]^4} \left[\frac{|\varphi'''(x_0)|}{3!} \right]^{4/3} \right\}^{1/4}}$$

$$\exp \left\{ i \left[\varphi(x_0) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \right. \right.$$

$$\left(\frac{6\pi}{[\Gamma(1/3)]^2} \left[\frac{|\varphi'''(x_0)|}{3!} \right]^{2/3} / \varphi''(x_0) \right) \} \quad (2.52)$$

此處須注意，當固定相位點恰等於積分之上限或下限時，則其結果為上式之一半，如往昔者所述。

這是顯然的，(2.52)式是較所有前人們的結果，如Kelvin (1887)、Poincare與Copson (見Stoker (1968)之6.8節)等，更為一般化或進一步的；例如，於Stoker中之186頁所示的(6.8.16)式與(6.8.17)式的往昔結果恰分別是(2.52)式之 $\varphi'(x_0) = 0$ 與 $\varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = 0$ 時之特殊情況。這也是當然的，以(2.52)式來解析船波問題時自不會產生Kelvin結果的缺失，此可由本文之第四章的論述見知。

2 - 6 結 語

依本章之頗為充足與詳盡的整個論述可知，對所考慮的有關波動所關連到的必要積分式，一新的適足近似展開也被提出，在此新展開下，積分式可能會有的必要的結果已被包括，換言之，較Kelvin固定相位法的結果是更廣泛與更進一步地；同時值得一言的是，此新表示亦頗為簡潔。

第三章 平靜水面擾動點所生之波

簡 要

本章對有關船波波動之基礎問題，即平靜水面受衝擊作用產生之波動現象，進行處理。首先對此種波動所必要滿足的基本控制方程式，包括衝擊作用之起始條件式等，論述之。之後，引入Hankel transform來求波動之積分通解，緊接著由第二章所求得的積分結果之直接應用，求解出波動之顯然時空變化解，並與往昔結果相互比較之。

3 - 1 前 言

因水面受衝擊作用所生之波動問題於解析上為船波波動問題的基礎問題，即解析船波波動必需利用水面受衝擊作用所生之波動的解析結果，因此，為對船波有關問題做詳盡的解析與探討，如本文研究之主題者，則需先對此種波動現象給予適足地解決。本章基於本文對船行於水面所生之波動研究有一貫性的解析結果與描述，特對基礎問題之平靜水面擾動點所生之波動先給予合理地解析與適足地說明。

於3 - 2節中，首先將波動必要滿足的所有基本控制方程式進行論述，其中除了波動必需滿足的流場基本式與邊界條件式外，還包括了在開始時平靜水面受衝擊作用而引生出之波動所必要的起源衝量及起始條件等。

於3 - 3節中，直接引入Hankel transform來求波動通解的積分式，然後，再以第二章所得的積分式之近似展開結果的應用，求解出波動之顯然變化特性之解。

於3 - 4節中，對本章做一結語。

3 - 2 運動控制方程式

於本小節裡，我們將對平靜水面上某一點之小範圍裡（說是以原點為圓心，而半徑為 a 。之小圓）受擾動時（說時間為 $t = 0$ 時）所衍生出的三度空間的波動現象進行解析。一般目的下，我們假設水深 h 為常數，且水域是無限延伸的。令 x 、 y 平面是平靜的海水平面， z 軸垂直向上；因此，在圓柱座標系統（cylindrical coordinate system）裡，極軸 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。由於擾動之對稱性關係，故其對應的流速勢（velocity potential） $\Phi(x, y, z; t)$ 可寫成 $\Phi(r, z; t)$ 之函數型式；當然依非旋轉流（irrotational flow）的條件，其必需滿足 Laplace's equation 為

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right) + \Phi_{zz} = 0, \\ 0 \leq r < \infty, -h \leq z \leq 0, t \geq 0 \quad (3.1)$$

因水底不透水性，故有

$$\Phi_z = 0, z = -h, t \geq 0 \quad (3.2)$$

於線性化下，自由表面邊界條件（合併了動力與運動條件）為

$$\Phi_{tt} + g \Phi_z = 0, z = 0, t > 0 \quad (3.3)$$

當然這個條件已表示自由表面上的壓力於 $t = 0$ 時之擾動作用後，為均勻分佈且為零（對應時間為 $t > 0$ ）。

為完整地描述起見，接著來考慮波動的起始情況（initial conditions）。假設在起始的時間階段 $t = 0$ 至 $t = \tau \rightarrow 0$ 時，一擾動壓力 P_s 作用在平靜的水面上，如上所考慮的範圍裡。依線性化的自由表面動力與運動邊界條件，我們有

$$\left. \begin{aligned} \Phi_t + g \eta &= -P_s / \rho \\ -\Phi_z + \eta_t &= 0 \end{aligned} \right\}, z = 0, t = 0 \sim \tau \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

上式中 g 為重力加速度， η 為自由表面水位， ρ 為密度。對獲得適於一起源壓力衝量（pressure impulse）的條件，此處須對 (3.4) 式中之第

一式積分在 $0 \leq t \leq \tau \rightarrow 0$ 之小時間區間裡，結果為

$$\int_0^\tau p_s dt = -\rho \Phi(x, y, 0; \tau) - \rho g \int_0^\tau \eta dt \quad (3.5)$$

上式因在剛開始 $t = 0$ 時 $\Phi(x, y, z; 0) = 0$ 之故。基於一般理論論述的目的，我們假想 $\tau \rightarrow 0+$ ，而 $p_s \rightarrow \infty$ ，使得 (3.5) 式之左邊的積分值趨至一有限值——此即是每單位面積的衝量 I_0 。由於吾們可理所當然地給定自由表面水位 η 為有限者，因此，(3.5) 式右邊的積分值趨於零，因 $\tau \rightarrow 0$ 。故得水面上之起始衝擊條件為

$$I_0 = -\rho \Phi(x, y, 0; 0+) \quad (3.6)$$

這是顯然的，當 I_0 被給定時（及加上其他適當的邊界條件），則 $\Phi(x, y, z; 0+)$ 就可被決定；換言之，所有質點的起始速度就被決定。

接著，敘述在衝擊壓力擾動水面的情況下，自由表面水位 η 之起始條件式，此可由 (3.4) 式之第一式得

$$\eta(x, y; 0+) = -\frac{1}{g} \Phi_t(x, y, 0; 0+) \quad (3.7)$$

此乃因 $t > \tau$ （或 $t > 0+$ ）時， $p_s = 0$ 之故。今於簡潔的目的下，此後的論述中，將 $0+$ 符號略去，而以 0 取代之，來表示起始條件。

最後，考慮自由表面上之衝擊壓力的分佈，於基本上，其有

$$I_0(r) = \begin{cases} P = \text{const.}, & |r| < a_0, \\ 0, & |r| > a_0. \end{cases} \quad t = 0, \quad (3.8)$$

此即表示一均勻的起始衝擊壓力僅分佈在 $r < a_0$ 之圓面上，其他處則無受擾動。

由以上的論述可得知，由水面上之擾動壓力所衍生出的波動現象，其運動控制方程式為基本的 Laplace's equation (3.1) 式，水底與自由表面邊界條件式 (3.2) 式與 (3.3) 式，起始條件式 (3.6) 式與 (3.7) 式，及給定的壓力分佈式 (3.8) 式。

3 - 3 Hankel transform 與波動求解

(1) Hankel transform

便於本文對所考慮的波動系統進行解析起見，我們引入 Hankel transform (此 transform 亦可接連至 Fourier transform) 來求解。通常而言，應用 Hankel transform 至一給定的方程式時，我們常會遭遇到下式型式的處理，即

$$\int_0^{\infty} r J_n(\lambda r) \left[f_{,rr} + \frac{1}{r} f_{,r} - \frac{n^2}{r^2} f \right] dr \\ = -\lambda^2 F(\lambda) + \left[r f_{,r} J_n(\lambda r) - \lambda r f J_n'(\lambda r) \right]_{r=0}^{r=\infty} \quad (3.9)$$

此處 Hankel transform $F(\lambda)$ 是

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} r J_n(\lambda r) f(r) dr ; \\ n \geq 0, \lambda = \text{任一常數參數} \geq 0 \quad (3.10)$$

而其倒逆式 (inversion) 為

$$f(r) = \int_0^{\infty} \lambda J_n(\lambda r) F(\lambda) d\lambda ; n \geq 0 \quad (3.11)$$

(3.9)式的結果是經由二次部份積分及 n 階 (order n) Bessel function $J_n(x)$ 之性質，即 $x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$ ，之應用而得。

以零階 (zero-order) Hankel transform 應用至 (3.1) 式；在 (3.9) 式之觀點下，我們對 (3.1) 式乘上 $r J_0(\lambda r)$ 且對 r 由 0 積分至 ∞ 。先定義 $\Phi(r, z; t)$ 之 Hankel transform 為 $\phi(\lambda, z; t)$ ，則依 (3.10) 式知

$$\phi(\lambda, z; t) = \int_0^{\infty} r J_0(\lambda r) \Phi(r, z; t) dr \quad (3.12)$$

應用 (3.9) 式之結果，且引入在 $r = 0$ 處 Φ 與 Φ_r 皆為有限值及在 $r = \infty$ 處 $\Phi = \Phi_r = 0$ 之邊界條件，得 (3.1) 式之 Hankel transform 的結果

爲

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \lambda^2 \Phi = 0 \quad (3.13)$$

爲能圓滿地求出所考慮的波動解，則其對應的底部與自由表面邊界條件及起始條件亦須一併被 Hankel transform 之，它們由 (3.2) 式、(3.3) 式、(3.6) 式與 (3.7) 式分別得

$$\phi_z = 0, \quad z = -h, \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\phi_{tt} + g \phi_z = 0, \quad z = 0, \quad t > 0 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, 0; 0) &= -1/\rho \int_0^\infty r J_0(\lambda r) I_0(r) dr \\ &= -\frac{1}{\rho} \bar{I}_0(\lambda) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\phi_t(\lambda, 0; 0) = 0 \quad (3.17)$$

(2) 波動求解

如前言所述，所考慮的波動一般以深海情況最爲常見。當水深 $h \rightarrow \infty$ 時，由 (3.13) 式與 (3.14) 式得知其通解 (general solution) 型式爲

$$\phi(\lambda, z; t) = A(\lambda, t) e^{\lambda z}, \quad \lambda \geq 0, \quad -\infty \leq z \leq 0 \quad (3.18)$$

將 (3.18) 式代入 (3.15) 式中，即可求出控制 $A(\lambda, t)$ 之微分式爲

$$A_{tt} + g \lambda A = 0, \quad t > 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.19)$$

最後，起始條件 (initial conditions) 被考慮；顯然依 (3.17) 式可得 $A_t(\lambda, 0) = 0$ ，因此滿足此條件下的 (3.19) 式的解 $A(\lambda, t)$ 爲

$$A(\lambda, t) = a(\lambda) \cos(\sqrt{g \lambda} t) \quad (3.20)$$

此處 $a(\lambda)$ 仍須由 (3.16) 式之應用而決定；聯合 (3.16) 式、(3.18) 式與 (3.20) 式得 $a(\lambda) = -(\frac{1}{\rho}) \bar{I}_0(\lambda)$ 。因此， $\phi(\lambda, z; t)$ 之解爲

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, z; t) &= -\frac{1}{\rho} \bar{I}_0(\lambda) e^{\lambda z} \cos(\sqrt{g \lambda} t), \\ \lambda &\geq 0, \quad -\infty \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

依倒逆公式(3.11)式之應用，即刻可得所考慮的波動流場其流速勢 (velocity potential) $\Phi(r, z; t)$ 之解為

$$\Phi(r, z; t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) \bar{I}_0(\lambda) e^{\lambda z} \cos(\sqrt{g\lambda} t) d\lambda \quad (3.22)$$

當擾動壓力是被考慮集中作用在原點處時，即 $a_0 \rightarrow 0$ ，且使得 (如往昔所常給定的)

$$\bar{I}_0(\lambda) = \lim_{a_0 \rightarrow 0} \int_0^{a_0} r J_0(\lambda r) P dr = \frac{1}{2\pi} \quad (3.23)$$

因此，最後得波動場之流速勢解為

$$\Phi(r, z; t) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \cos(\sqrt{g\lambda} t) d\lambda \quad (3.24)$$

且其對應的自由表面水位 $\eta(r, t)$ 依自由表面動力邊界條件式 $\Phi_t + g\eta = 0$ ， $t > 0$ 之應用，即刻可被寫出為

$$\eta(r, t) = -\frac{1}{2\pi\rho\sqrt{g}} \int_0^{\infty} \lambda^{3/2} J_0(\lambda r) \sin(\sqrt{g\lambda} t) d\lambda \quad (3.25)$$

對於(3.25)式之積分的評價，可依前章所導出的(2.52)式之應用來處理，然其內所含的 Bessel function $J_0(\lambda r)$ 須先表示在積分的型式裡，即

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\lambda r \cos \beta) d\beta \quad (3.26)$$

然後再依(2.52)式之連續二次的應用即可求得之。首先對上式之 $J_0(\lambda r)$ 處理，則(3.25)式變為

$$\eta(r, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^{1/2} \rho \sqrt{g}} \int_0^{\infty} \lambda \left[\sin\left(\lambda r + \sqrt{g\lambda} t - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\lambda r - \sqrt{g\lambda} t - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\lambda \quad (3.27)$$

由於僅有 $\lambda \geq 0$ 貢獻至(3.27)式的積分中，故被積分式中的第二項僅須

被考慮，其固定相位點發生在

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{g} t}{2r} \quad \text{或} \quad \lambda = \frac{g t^2}{4 r^2} \quad (3.28)$$

而其對應的 $\varphi(\lambda) = -(\lambda r - \sqrt{g \lambda} t - \frac{\pi}{4})$ 在該點處之 $\varphi''(\lambda)$ 與 $\varphi'''(\lambda)$

(λ) 值分別是

$$\varphi''(\lambda) = -\frac{2 r^3}{g t^2} \quad \text{與} \quad \varphi'''(\lambda) = \frac{12 r^5}{g^2 t^4} \quad (3.29)$$

因此，由(2.52)式得當 $\frac{g t^2}{4 r}$ 不小時， $\eta(r, t)$ 之結果為

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= \text{Im} \left\{ \frac{-1}{(2\pi)^{3/2} r^{1/2} \rho \sqrt{g}} \frac{\sqrt{\pi} \frac{g t^2}{4 r^2}}{\left[\frac{r^6}{g^2 t^4} + \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{2 r^5}{g^2 t^4} \right)^{4/3} \right]^{1/4}} \right. \\ &\quad \cdot \exp \left(i \frac{g t^2}{4 r} + \frac{i}{2} \tan^{-1} \left(\frac{3 \pi g t^2}{r^3 (\Gamma(1/3))^2} \left[\frac{2 r^5}{g^2 t^4} \right]^{2/3} \right) \right) \Big\} \\ &= -\frac{g t^3}{2^{7/2} \pi \rho r^4} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right)^4 \left(\frac{4 r}{g t^2} \right)^{2/3} \right]^{-1/4} \\ &\quad \cdot \sin \left\{ \frac{g t^2}{4 r} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right)^2 \left(\frac{4 r}{g t^2} \right)^{1/3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

這是很明顯地，由於 $\frac{g t^2}{4 r}$ 充分的大（如往昔所考慮者一般），故(3.30)

式可簡化成

$$\eta(r, t) = -\frac{g t^3}{2^{7/2} \pi \rho r^4} \sin \frac{g t^2}{4 r}, \quad \text{當} \frac{g t^2}{4 r} \rightarrow \text{大時} \quad (3.31)$$

這恰與往昔所得的結果相同，可見諸於 Havelock (1908.1914)、Lamb (1932) 等。當然，於此進一步可言，往昔所得的結果恰是(3.30)式所示之特例而已。

3 - 4 結 語

依本章利用第二章之積分式近似展開結果來求得之波動解得知，往昔之結果僅為我們所得者之特例而已，即本章解析所得的新結果是包容了往昔所得者，由此，這亦說明了第二章之新近似展開式(2.14)式，是為適足的且優於往昔之 Kelvin 固定相位法者。

第四章 平靜水面上移動衝擊點所生之波(或船波)

簡 要

本章直接利用前章所得之平靜水面上受衝擊點所生之波動解，於考慮衝擊點等速直線前進之運動座標系統下，對經過的時間積分之，再應用第二章之積分結果，求解出船波之波動解並分橫向與分散波系統分別給予說明，同時與往昔結果進行比較。於本章對船波波動系統所得之新描述中，往昔結果於波動邊界線處之二大嚴重性失真的缺失：一為幾何結構之不連續，另一為對應振幅之趨近於無限大，皆被適足合理地解決。在這新描述下，船波波動之整體特性已重新被論述。

4 - 1 前 言

這是理所當然的，欲對船行於波浪水面所生之波動獲得適足的解析，則是需要先對於船行於平靜水面所生之波動（或謂純船波）有適當的結果。因此，於本文之研究主題下，為對船行於波浪水面所生之水理現象給予滿足的描述，於本章將特予對此先必要的問題解析之，並藉此可與往昔之解析結果進行比較，同時補足往昔結果之缺失，即第一章緒論中所言者，以更確立本文所得的新近似展開式之優良性。

於 4 - 2 節中，對船行平靜水面所關連到的運動系統先給予描述，於此系統中已適當地將前章之固定衝擊點座標系統轉換為移動衝擊點座標系統，並由所得之固定相位點值的特性，說明出深海船波波動系統是被侷限在交角成 $2 \cos^{-1}(\sqrt{8}/3)$ 之二條直線所圍成的領域，且依固定相位點值的大小分有橫向與分散波系統。

於 4 - 3 節中，對橫向波系統進行論述，說明其系統的幾何結構外貌

(即同相位線者)及振幅之變化特性。

於 4 - 4 節中，對分散波系統進行論述，如上節。

於 4 - 5 節中，對船波波動之整體特性變化進行說明，包括整個幾何結構外貌，各系統內之波浪振幅隨位置間的相對變化等。

於 4 - 6 節中，對本章之論述做結論與討論。

4 - 2 運動系統之描述

今若作用在平靜水面上之衝擊壓力點是沿著一條直線水道，說 OX 軸，以等速 c 前進；令其於時間 t 時位於點 B 處，而先前任一時間 t_0 時位於 A 點處，且假設此運動系統已發生甚久，如船在大海中航行或進出港口的情形，其系統圖如圖 4 所示。

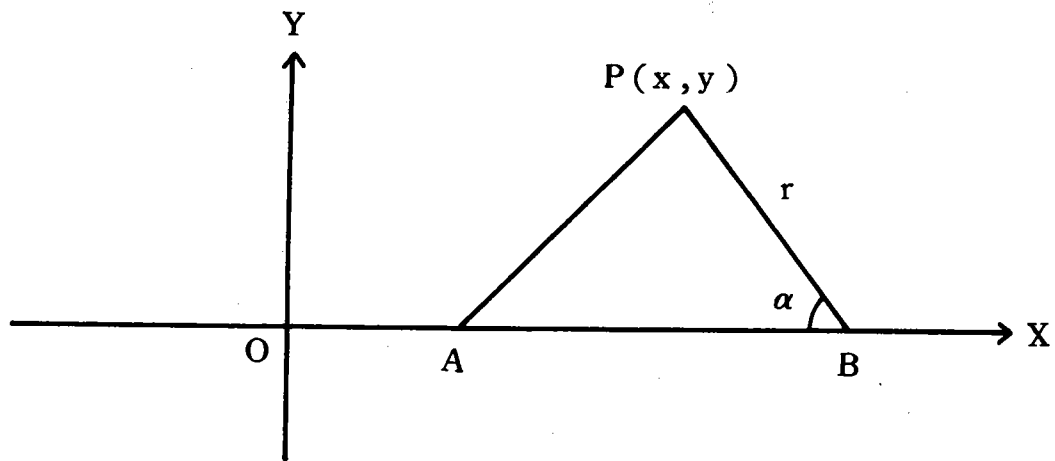


圖 4 移動衝擊壓力點之運動系統，其沿 OX 軸，於 t 時在 B 點，先前 t_0 時在 A 點，P 為波動考慮點。

Fig.4 The coordinate system of a moving impulse-point along OX axis, time t at B, previous time t_0 at A, P the considered waves point.

依所定義的運動系統，我們有

$$OA = ct_0; OB = ct$$

$$PB = r = \{ (ct - x)^2 + y^2 \}^{1/2}$$

$$\cos \alpha = (ct - x) / r \quad (4.1)$$

因此，對此種移動衝擊壓力點所生之波動水位 η 的推求，我們須於(3.31)式中以 $\{(x - ct_0)^2 + y^2\}^{1/2} = \{r^2 - 2cr(t - t_0)\cos\alpha + c^2(t - t_0)^2\}^{1/2}$ 取代 r ，以 $t - t_0$ 取代 t ，且對 t_0 由 $-\infty$ 積分至 t ，可得

$$\eta(r, t) = -\frac{g}{2^{7/2}\pi\rho} \int_0^\infty \frac{u^3 du}{(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^2} \cdot \sin \frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}} \quad (4.2)$$

此結果完全與 Havelock(1908) 之(72)式相同。

最後，再次依(2.52)式之應用，我們可求得貢獻至(4.2)式之積分值的主要 u 值部份，即其固定相位點處，必需滿足

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}} \right\} = 0 \quad (4.3)$$

即是

$$c^2u^2 - 3cur\cos\alpha + 2r^2 = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{或} \quad cu = \frac{1}{2}r \{ 3\cos\alpha \pm (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2} \} \quad (4.5)$$

依據(4.5)式所得之 cu 值的性質，於此我們必須對兩種不同的情況進行考慮；回憶到 cu 值是表示在先前時間 $u = t - t_0$ 時移動衝擊壓力點所在的位置，而由它所發送出的波浪在時間 t 時增強 (r, α) 點處的波動。

(1)當 $9\cos^2\alpha - 8 < 0$ 時， cu 之二根皆為複數，此即表示無實際對應的移動衝擊壓力點位置的存在，當然此時對(4.2)式的積分就無實際的貢獻值。因此可知，由所考慮的移動衝擊壓力點所產生之整體的波動系統實際上是被侷限在由衝擊壓力點所劃出的二條直線之內；每條直線皆與衝擊壓力點之運動路徑（說是 OX 軸）夾 $\cos^{-1}(\sqrt{8}/3)$ 之角度，近似等於 $19^\circ 28'$ 。

(2)當 $9 \cos^2 \alpha - 8 > 0$ 時，則 cu 有二個不同的實根，此即表示對 (4.5) 式有二個主要實際的貢獻值，且每一者各自產生其對應的波動系統；當然由所考慮的移動衝擊壓力點所生之整體的波動現象是由此二波動系統之疊交而成者。

為清楚說明起見，今考慮 P 點是位於所言的二條邊界線之內。此處之水波擾動現象，如上言所述，是由二部份所組成：一部份是由在先前時間 u_1 時從 A 點處所發出之波者，而其有

$$OA = \frac{1}{2} r \{ 3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} \}, u_1 = OA / c \quad (4.6)$$

另一部份是由先前時間 u_2 時從 B 點處所發出之波者，而其有

$$OB = \frac{1}{2} r \{ 3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} \}, u_2 = OB / c \quad (4.7)$$

上述如圖 5 所示。

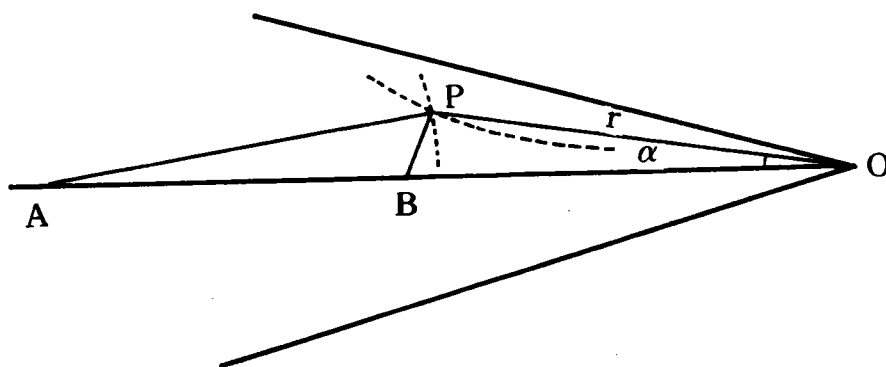


圖 5 t 時傳至 P 點之波動的起源位置 A 、 B 之關係示意圖， O 點為該時移動衝擊壓力所在之位置。

Fig. 5 At time t the original waves created at A and B respectively transport to P when O is the moving impulse point.

因此整個波動系統可被分之為二，分別稱為橫向與分散系統，它們將被描述如下。

4 - 3 橫向波系統

橫向波系統 (The transverse system) —— 其對應的 cu 值為較大者，即 (4.6) 式所示者，此時我們可得

$$\begin{aligned} & r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2 \\ &= \frac{1}{2}r^2\{3\cos^2\alpha - 2 + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}} \\ &= \frac{gr\sqrt{2}}{16c^2} \frac{18\cos^2\alpha - 8 + 6\cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}}{\{3\cos^2\alpha - 2 + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}\}^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

進一步地，當 $\varphi'(u) = 0$ ，則我們有

$$\begin{aligned} \varphi''(u) &= \frac{gcu(2cu - 3r\cos\alpha)}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{g}{2\sqrt{2}r} \frac{(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2} [3\cos\alpha + (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]}{[3\cos^2\alpha - 2 + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

與

$$\begin{aligned} \varphi'''(u) &= \frac{gc(6cu - 6r\cos\alpha)}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{6}{4} \frac{gc^2u(cu - r\cos\alpha)(2cu - 3r\cos\alpha)}{(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{5/2}} \\ &= \frac{6gc}{4} \frac{-c^3u^3 + cur^2 - r^3\cos\alpha + 2c^2u^2r\cos\alpha - cur^2\cos^2\alpha}{(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{5/2}} \\ &= \frac{6gc}{4} \frac{(cu - r\cos\alpha)(r^2 + cur\cos\alpha - c^2u^2)}{(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{5/2}} \\ &= 3\sqrt{2}gc \frac{[\cos\alpha + (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}][3 - 3\cos^2\alpha - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]}{r^2\{3\cos^2\alpha - 2 + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}\}^{5/2}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

應用(2.52)式，最後可得所考慮之波動的橫向波系統為

$$\begin{aligned}
 \eta(r, t) &= \frac{g}{2^{9/2} \sqrt{\pi} \rho c^3 r} \frac{[3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2} \\
 &\cdot \left\{ \frac{g^2}{32 r^2} \frac{(9 \cos^2 \alpha - 8) [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3} \right. \\
 &+ \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{gc}{\sqrt{2} r^2} \right)^{4/3} \\
 &\frac{|[\cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}][3 - 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]|^{4/3}}{|3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}|^{10/3}} \\
 &\left. \right\}^{-1/4} \cdot \cos \left\{ \frac{gr \sqrt{2}}{16 c^2} \frac{18 \cos^2 \alpha - 8 + 6 \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \right. \\
 &- \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right)^2 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} \right. \\
 &\frac{|[\cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}][3 - 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]|^{2/3}}{(9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]} \\
 &\left. \left. \cdot \frac{1}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

在中心線 OX 軸上，即在移動衝擊壓力點之運動路徑線上， $\alpha = 0$ ，則

(4.12) 式簡化成

$$\begin{aligned}
 \eta(r, t) &= -\frac{g}{2^{1/2} \sqrt{\pi} \rho c^3 r} \left\{ \frac{g^2}{16 r^2} + \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{gc}{4 r^2} \right)^{4/3} \right\}^{-1/4} \\
 &\cos \left\{ \frac{gr}{c^2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right)^2 \left(\frac{4c^2}{gr} \right)^{1/3} \right] \right\} \\
 &= -\frac{2^{1/2} g^{1/2}}{\sqrt{\pi} \rho c^3 r^{1/2}} \left\{ 1 + \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{4c^2}{gr} \right)^{2/3} \right\}^{-1/4} \\
 &\cos \left\{ \frac{gr}{c^2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right)^2 \left(\frac{4c^2}{gr} \right)^{1/3} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

又當 r 充足大時，則 (4.13) 式又變為

$$\eta(r, t) = -\frac{2^{1/2} g^{1/2}}{\sqrt{\pi} \rho c^3 r^{1/2}} \cos\left(\frac{gr}{c^2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.14)$$

這恰與 Havelock(1908) 的結果相同，且是表示深海中波數 (wave number) 恰為 g/c^2 之簡單線性波者，但其振幅隨距離 $r^{-1/2}$ 而遞減之。

至於橫向波系統的外觀型式，即同相位線如其波峯線之幾何圖樣，可由 (4.12) 式有

$$\begin{aligned} & \frac{gr\sqrt{2}}{16c^2} \frac{18\cos^2\alpha - 8 + 6\cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}}{[3\cos^2\alpha - 2 + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \\ & - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left\{\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(1/3)}\right]^2 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr}\right)^{1/3}\right. \\ & \left. \frac{|\cos\alpha + (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}| [3 - 3\cos^2\alpha - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{2/3}}{(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2} [3\cos\alpha + (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]} \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{[3\cos^2\alpha - 2 + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}}\right\} = \left(2n + \frac{5}{4}\right) \pi \end{aligned} \quad (4.15)$$

此處 n 為正整數。由 (4.15) 式可得知波峯線與 OX 軸之交點位於

$$\frac{gr}{c^2} - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left\{\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(1/3)}\right]^2 \left(\frac{4c^2}{gr}\right)^{1/3}\right\} = \left(n + \frac{5}{4}\right) \pi \quad (4.16)$$

當然在 r 為很大處，上式變為

$$r = c^2 \left(2n + \frac{5}{4}\right) \pi / g \quad (4.17)$$

對於在邊界線上 (角度 $\alpha = \pm \cos^{-1}(\sqrt{8}/3)$ 之二條射線)，由 (4.15) 式得波峯發生在

$$r = 2c^2 \left(2n + \frac{3}{2}\right) \pi / \sqrt{3} g \quad (4.18)$$

4 - 4 分散波系統

分散波系統 (The diverging system) —— 由 (4.7) 式所示之

較小的 cu 值，得分散波系統。在此情況中，其對應的 $\varphi(u)$ ， $\varphi''(u)$ 與 $\varphi'''(u)$ 值分別為

$$\varphi(u) = \frac{gr\sqrt{2}}{16c^2} \frac{[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \quad (4.19)$$

$$\varphi''(u) = -\frac{g}{2\sqrt{2}r} \frac{(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{3/2}} \quad (4.20)$$

與 $\varphi'''(u)$

$$= 3\sqrt{2}gc \frac{[\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}][3 - 3\cos^2\alpha + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]}{r^2[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{5/2}} \quad (4.21)$$

因此將上三式代入 (4.2) 式中且應用 (2.52) 式，得分散波系統的波動為

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= -\frac{g}{2^{9/2}\sqrt{\pi}\rho c^3 r} \frac{[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^3}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^2} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{g^2}{32r^2} \frac{(9\cos^2\alpha - 8)[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^3} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{gc}{\sqrt{2}r^2} \right)^{4/3} \cdot \frac{|[\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}][3 - 3\cos^2\alpha + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]|^{4/3}}{|3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}|^{10/3}} \right\}^{-1/4} \\ &\quad \cdot \sin \left\{ \frac{gr\sqrt{2}}{16c^2} \frac{[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right)^2 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{|[\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}][3 - 3\cos^2\alpha + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]|^{2/3}}{(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]} \right] \right\} \\ &\quad \left. \frac{1}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} \right\} \quad (4.22) \end{aligned}$$

此處須注意， $\varphi''(u)$ 於分散波系統之波動範圍裡（即 $0 \leq |\alpha| \leq \cos^{-1}$ ）

• $(\sqrt{8}/3)$ 內) 爲負值者, 然此點於 Havelock(1908)之推求中爲其所忽略(參見其論文 420 頁), 因此, 其對船波解析所得之整體的波動系統, 於其所考慮的近似下(或言以 Kelvin 之固定相位法), 其結果的恰當性當應給予特加酌慮與修飾的必要。

至於分散波系統之波峯線的幾何外貌, 由 (4.22) 式得爲

$$\begin{aligned} & \frac{gr\sqrt{2}}{16c^2} \frac{[3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \\ & + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(1/3)} \right]^2 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} \right. \\ & \left. \frac{|\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}| [3 - 3\cos^2\alpha + \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{2/3}}{(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2} [3\cos\alpha - (9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \right\} \\ & \frac{1}{[3\cos^2\alpha - 2 - \cos\alpha(9\cos^2\alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} = \left(2n + \frac{7}{4} \right) \pi \end{aligned} \quad (4.23)$$

依 (4.23) 式即刻可知, 當 $\alpha = 0$, 則須 $r = 0$, 因此, 此系統之所有的波峯線(或是同相位線)皆是由原點(即移動衝擊壓力點處)分散而出的, 亦因此而被名之。進一步地, 在邊界線上, 波峯線位於

$$\alpha = \pm \cos^{-1}(\sqrt{8}/3), \quad r = 2c^2 \left(2n + \frac{3}{2} \right) \pi / \sqrt{3} g \quad (4.24)$$

這恰與橫向波系統之波峯線相會合於邊界線處, 由此得知, 於邊界線附近處之波動現象應是相當規則與明顯可見的, 此事實可由真實船波系統圖而見知, 如於圖 1 中所示; 蓋因於該處, 分散波與橫向波二系統之波峯線(或同相位線)近至脗合而使得其波動相互增強, 不致於產生交錯疊合混淆的現象。實質上分散波系統之振幅一般是頗大於橫向波系統之對應者, 可見於 (4.12) 式與 (4.22) 式之正弦函數前的係數的比較, 加上橫向波系統之振幅僅於近邊界線處較大些而已, 可見於圖 7 所示, 因此, 就船波之整體波動的外觀上來看, 當然以分散波系統之外貌爲主, 見圖 1b 可知, 此即爲大家對船波的觀察於直覺上所共識的主要特性所在。

4 - 5 船波波動之整體特性變化

由以上所解析得的整個船波波動的幾何結構型式被示之於圖 6 中，此是表示波峯位置線。

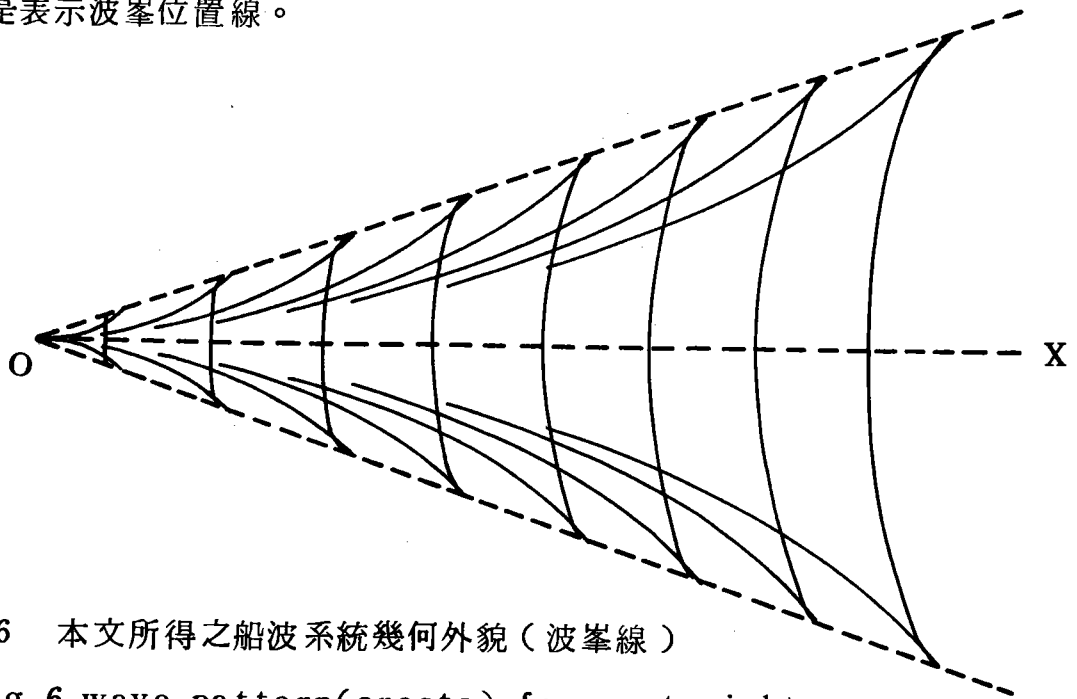


圖 6 本文所得之船波系統幾何外貌（波峯線）

Fig.6 wave pattern(crests) for a straight course, derived from present paper.

至於橫向波與分散波系統之振幅隨波峯線位置之相對變化，分別示於圖 7、8、9 中。

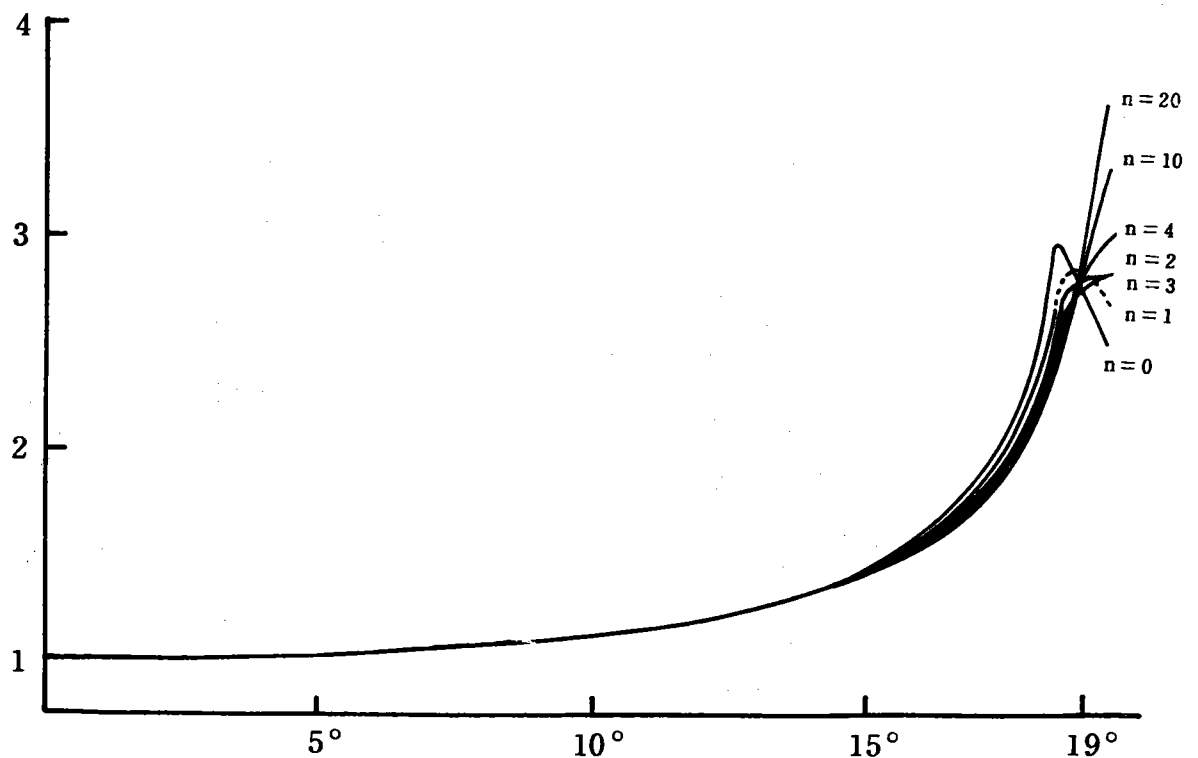


圖 7 橫向波系統之相對振幅隨 n 值及角度 α 之變化

Fig.7 The variation of relative amplitude with n and α (which indicate position of crest) in the transverse wave system.

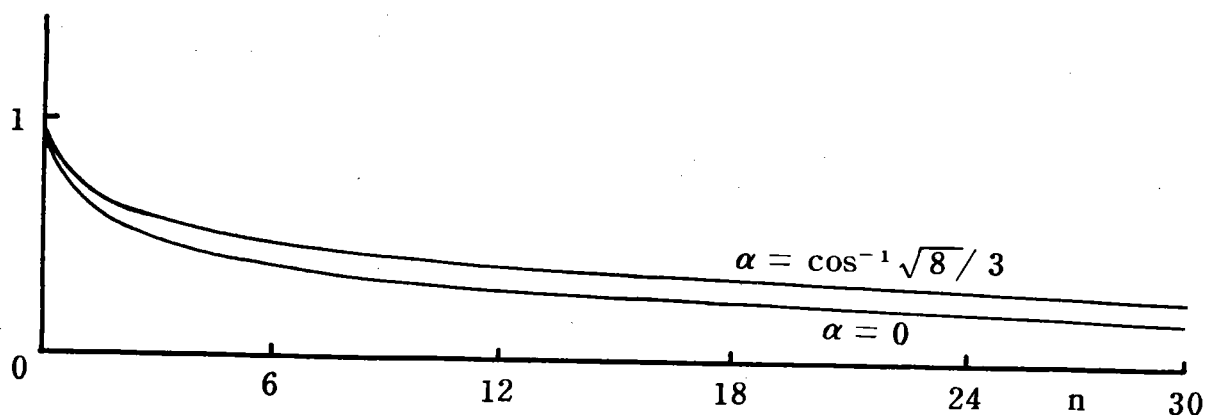


圖 8 橫向波系統之相對振幅（以 $n = 0$ 為基本單位）變化

Fig.8 The variation of the relative amplitude with n in the transverse system.

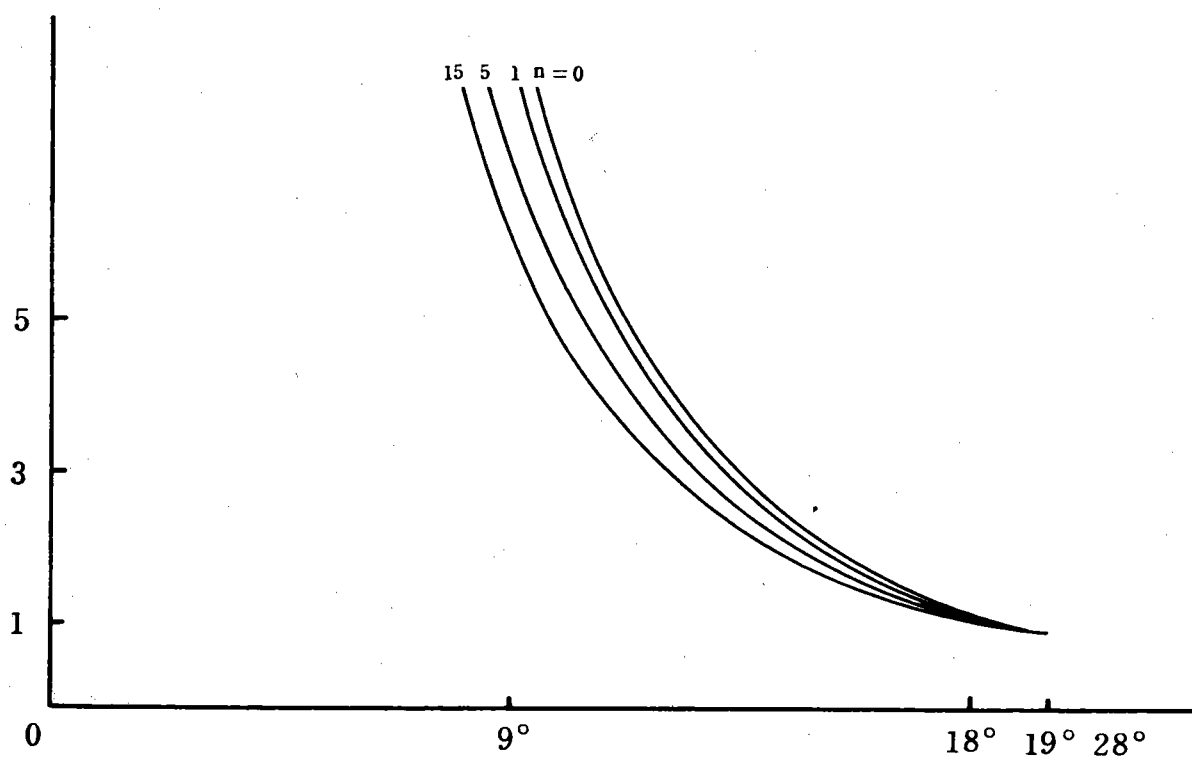


圖 9 分散波系統之相對振幅隨 n 與角度 α 之變化

Fig.9 The variation of the relative amplitude with n and α (which indicate the position of crest) in the diverging system.

4 - 6 結論與討論

依據本章對所謂的“船波”於深海中之波動現象的整個論述可知，本章的解析與結果是有超越往昔所有研究者之處，尤其對以前所留下來的缺失也都能給予頗適足的解決與說明。整體而言，本章可有二點明確的重要結論如下：

(1)適足性：本章所得的結果不僅於幾何外貌上與真實船波及往昔結果幾為一致，如圖1、圖2與圖6所示，而且於波動量之起伏變化特性上，如相對振幅者，亦與往昔研究所得有相同之勢，可參見Have lock(1908)之對應結果。

(2)合理性：由本章之解析得知，在我們所得的新結果中，往昔結果的嚴重缺失皆已被解決且給予更滿足的描述，如對波動系統之幾何結構在邊界線處產生相位的跳躍不連續現象（如波峯線有 $\pi/4$ 值的不連續跳躍）及於該處波動振幅趨於無限大之不合理結果皆消失在本章的結果中。

雖然本章之論述對往昔研究所遭遇到的瓶頸已給予應有的疏解，然對於船波問題的處理在本質上仍須有二大點討論的必要；這是基於數學解析與理論觀點上完全圓滿地對實際船體航行所生之波動的真實性做整體的描述而言的。

(1)數學解析上：其實對一般有關船波解析的積分是高度不可積的，因此，非利用近似展開不可。事實上，這種的近似展開於較完整的型式要求下應為一級數式，如本文第二節中所解析的，或Chester、Friedman & Ursell(1966)與Peter(1949)等所述，然利用級數式時，斷然不可避免的是所要顯示出的波動主要特性會更為混雜不明顯，蓋因其處理過程更形複雜之故；何況級數式以其前幾項為主要，因餘者於所考慮下皆相當近於零，這乃為本文取(2.52)式來解析之道理所在。

(2)理論觀點上：由於本文是對通案性的船波問題進行理論上的通則解析，因此所考慮的衝擊壓力是密集作用在一點處，這就不可避免地，此點

變成了數學上的本質奇異點 (essential singular point)，故於該點附近處所有的波動性質如往昔者般變成不可預測的；這也就是說本文的結果與往昔者一樣是處理距衝擊點較遠處的波動現象。雖然如此，本章的解析結果對真實船體航行所生之波動現象的說明仍是頗為適足的；暫且避開航行船體近處之波動對港灣、海岸工程目的上的影響很小外，事實上，本章所引入的奇異點是可被移開的，而以真實船體所佔之水面做為其衝擊範圍代之，如此於 (3.8) 式之 $I_0(r) = P$ 被 $I_0(r, d)$ 之函數 (以船之載重及其所佔的水面來考慮) 所取代，(3.23) 式代以面積分，對應的 $\bar{I}$ 為 λ 之函數而非常數，其餘過程皆保持不變；這是顯然的，依此所得之結果實際上僅是量的大小改變而已，尤其是近於船體水面處 (當然變為可預測的有限)，其餘處大致上不受影響。

依上之討論可知，整體而言，本章之論述實質上是與真實船波事實相去不遠的！當然若為必要時，本章的解析可被推廣應用至有限水深之船波解析中。

本章中一些計算數值得助於成功大學台南水工試驗所助理研究員唐公群先生，在此致衷心的感謝。

第五章

波浪水面上移動衝擊點所生之波

(或船行於波浪水面所生之水理現象)

簡 要

爲解決往昔之轉換解析法遭受到非有界性的 (unbounded) 嚴重阻撓，本章直接以波浪水面做爲基準參考面，來對波浪水面受衝擊作用而生之波動做初創性的解析。隨後應用第四章的論述，推廣至船行波浪水面所生之水理現象的解析中，得一可與純船波波動量 (即第四章者) 相匹配的重要項，謂之波浪作用項，存在於波動中。波浪作用項所生之波動量，依解析得知，是直接正比於原存於水面上之波浪的尖銳度及波速與船速之比，且其有效的範圍被包絡在“純船波”之扇形 (角度爲 $2 \cos^{-1}(\sqrt{8/3})$) 的波動系統範圍內；同時，此作用項之起伏變化受波浪與船前進間之夾角及相對的週波率 (都卜勒效應的結果) 之影響亦一併被明確地描述。

5 - 1 一般認識

如一般所知，於海洋、港灣工程領域中，船舶於起伏之波浪水面上航行是屬必然且極爲通常的事件，是故由此所衍生出的水理現象當然爲不可避免且常會面臨到的課題；這也就是說，此種現象的考慮於實務方面上當有其存在的必要性。據瞭解，對這經常出現於水道上的“船行於起伏波浪水面上所造成的波動現象”，就其外觀而言雖已被吾們所司空見慣，然就其內部整體之水理特性的掌握上，可言至今仍然是撲朔迷離，令人有不知所措之感；此乃因長久以來對它的處理與瞭解猶僅屬皮毛且爲數寥寥之故。這是頗值得讓人疑惑與省思的，爲何這如此經常出現於吾們週遭的“船行於水波”現象，吾人對其所產生之水理特性仍還是如此地陌生呢？探究其因，概可分二點說明：一是，往昔迄今對“船行於水波”問題的研究中

，幾乎全部皆着重在船本身運動狀態及其所受阻力的處理，如見Michell (1898)、Havelock (1909, 1950)等之波浪阻力論著，實已不勝枚舉，及Pierson & Denis (1953)、Peter & Stoker (1954)、Neumann (1962)等之船在波浪中運動的研究；另一是，尙無一適足的解析法被找出，而妥當地解出流場解（此點之進一步說明，詳見於下節中）。這是顯然的，上述之第一點說明中，可知基於船行之安全、穩定與經濟起見，對造成船體運動狀態及其受阻力之研究的被側重是無可厚非的，然而這當亦可被預見的是，對港灣、海岸工程結構或設施而言，船行於波浪水面上所造成之水理特性是應需被注意與瞭解的，蓋因它會影響整個海域的平穩及產生額加的衝擊之故。其實，就海岸設施的實際目的，理所當然地，為避免海域內受水面波動的干擾及對結構物造成危害，則自當需對這必然且經常發生在其水域內之“船生波”波動的水理現象給予有效的認知與掌握，以發揮船舶可正常出入之應有的功能。因此，對船行波浪水面所生之水理現象的研究，其需要性自不待言，基此，本章將對此波動特予闡述，以期獲得其主要特性的瞭解，提供給有關者做參考。

如上段所言，由於往昔迄今對“船行於波浪水面所生之水理現象”的研究頗為稀少，且加上直接利用一般傳統的轉移解析法來求解時，如Fourier、Laplace轉移或前章的Hankel transform等，會遭遇到有界性（boundedness）不滿足問題的嚴重困擾，尤其在無限遠處（以Laplace transform會發生在原點）有發散之夷（見下節之論述可知），因此，它的流場解至今仍未被合理地解出；亦因此之故，一般處理此種問題時，是將水面上原存在之波動與由船行於平靜水面上所生之波動（即第四章所述之純船波）直接線性合成之。然這當可很明顯地發現到，如此之處理必當會遺失掉問題中需被考量的某些重要因素，即水面波浪對行之於其上之船所生之波動的影響，因而將致使問題的解析喪失了應有的必要意義，而無法顯現出待解的問題中欲被知曉的主要特性之“水面原存的波浪於整體的水理現象中所扮演的特有角色”。至此，這是很顯然的，為能針對問題所具有的特質而給予有效的考量及適足的解決，則另行引入些

適當可行的處理來突破瓶頸是必需的。事實上，依解析的觀點而言，此問題主要是受惑於被衝擊作用面是起伏性的波浪水面，而造成轉移法失敗所致。因此，為避免重蹈覆轍，首先必須適當地移開起伏之波浪水面的困擾，以便使解析變成簡單與明朗化，甚而由此易於應用一般往昔之解析法，如前章所述者，來處理。基此觀點，本章將直接以原存之波浪水面做為參考面來解析所考慮的運動系統，即以原存在的波浪水面為基準來解析船行於其上所生之波動現象（另以原存波浪之變動水位做為一新座標系統之基準來求解所考慮之波動系統，將述之於附錄A中），之後再聯合與引用前章之解析結果，以完成對“船行於波浪水面所生之水理現象”的解析與描述。

基於本研究之整體連貫且有系統地論述起見，本章將直接利用並推廣前幾章之有關解析結果來對所考慮的波動闡述之。

於5-2節中，首先對“船行波浪水面所生之水理現象”的基礎問題“波浪水面受衝擊作用所生之水理特性”進行解析；於吾人所利用之已知波浪水面為參考面下，把第三章所述的有關控制方程式轉移到此參考面上來求解。

5-3節中，直接引入上節所得的解並利用第四章之有關論述，來列出“船行於波浪水面所生之波動”的解析結果。

5-4節中，將對“船行於波浪水面（本章）”與“船行於平靜水面（第四章）”所解析出的波動結果進行比較，以說明原存之水面波浪對行於其上之船所生之波動的影響。

最後，於5-5節中，對本章之論述給予結語與簡評。

5-2 波浪水面受衝擊作用所生之波動

如同一般有關船波的解析，為求得所考慮的“船行於波浪水面所生之波動”的流場解，得須先對其所關連的基本問題“波浪水面受衝擊作用所生之波動”進行解析之，茲述之於下。

(a)控制方程式

與此類有關問題的傳統處理一樣，此處所考慮的水面上之衝擊作用點的性質恰如同第三章所述者，其所不同者僅是此處的衝擊作用是發生在一已知的波浪水面 $z = \eta_w$ 上，取代第三章之平靜水面 $z = 0$ 者。因此，在與第三章所取用的座標系統一致下（ x, y 為平均靜水面， z 軸垂直向上），且因衝擊作用本身為對稱分佈者，則其所衍生出的波動流場之流速勢 $\Phi_m(x, y, z; t) = \Phi_m(r, z; t)$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，必需滿足 Laplace's equation

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi_m &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_m + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_m + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_m \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \Phi_m \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_m = 0 \\ 0 \leq r < \infty, -h \leq z \leq \eta_w, t \geq 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

及水底與自由水面邊界條件，其分別為

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_m = 0; z = -h, t \geq 0 \quad (5.2)$$

$$\text{與} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_m + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_m = 0; z = \eta_w, t > 0 \quad (5.3)$$

當然 (5.3) 式是經線性化之考慮下而得者。

這亦如第三章之處理一樣，對於所考慮的被衍生出的波動，其起始情況為

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Phi_m + g \eta_m &= -\frac{p_s}{\rho} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \Phi_m + \frac{\partial}{\partial t} \eta_m &= 0\end{aligned}\quad z = \eta_w, t = 0 \sim \tau \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

此處須注意，由於本章所處理的波動是發生在一已知的波浪水面上，於 5-1 節已言及，吾人是以此已知的波浪水面做為參考面來觀察所被衍生出的波動現象，故此處之 $\eta_m = \eta_m(x, y; t)$ 當是以已知的波浪水面 $z = \eta_w(x, y; t)$ 做為基準的水位。因此，可得衝擊作用下

之波動起源衝量式爲

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ p_s \rightarrow \infty}} \int_0^\tau p_s dt \\
 &= -\rho \Phi_m(x, y, \eta_w; 0) - \rho g \int_0^\tau \eta_m dt \\
 &= -\rho \Phi_m(x, y, \eta_w; 0) \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

如同一般的考慮，自由表面上之衝擊作用是均勻分佈在小圓 $r < a_0$ 上者，則吾們有

$$I_0(r, \eta_w) = \begin{cases} P = \text{const}, & r < a_0 \\ 0, & r > a_0 \end{cases} \quad (5.6)$$

最後，由 (5.4) 式之第一式得受衝擊作用後之水位 η_m 的起始值爲

$$\eta_m(x, y, 0) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m; z = \eta_w, t = 0 \quad (5.7)$$

由上述之描述得知，所欲先求解的“波浪水面受衝擊作用所生之波動現象”的基本控制方程式已被適當地列出而置於被做爲參考面之已知的波浪水面，它們分別是基本式 (5.1) 式、邊界條件式 (5.2) 式與 (5.3) 式、衝擊作用分佈式 (5.6) 式及起始條件式 (5.7) 式。

(b) 波動求解

如同 3-2 節所述的求解過程，此時吾人可直接利用 Hankel transform 來求解所欲知的 Φ_m ，因此時已消掉受已知波浪水面之起伏影響而致使轉移時在 $r = \infty$ 有無限大發生之非有界性 (unboundedness) 的困擾；此乃由於在以波浪水面爲參考面下 (即無含波浪 η_w 者)， Φ_m 及 $\frac{\partial}{\partial r} \Phi_m$ 在 $r = \infty$ 處爲零而在 $r = 0$ 處爲有限值，因此，於代入 (3.9) 式中，其右邊第二項消掉之故。由於船需於有足夠深的水域中航行，故一般以 $h \rightarrow \infty$ 之深海中來處理其所生之波動，因此，上節所述之待解問題的控制方程式，經 Hankel transform 後，其結果分別爲

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_m - \lambda^2 \phi_m = 0; \lambda \geq 0, -\infty < z \leq \eta_w, t \geq 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi_m = 0 ; z = -\infty, t \geq 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_m + g \frac{\partial}{\partial z} \phi_m = 0 ; z = \eta_w, t > 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_m(\lambda, \eta_w; 0) &= -\frac{1}{\rho} \int_0^\infty r J_0(\lambda r) I_0(r, \eta_w) dr \\ &= -\frac{1}{\rho} \bar{I}_0(\lambda, \eta_w) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_m = 0 ; z = \eta_w, t = 0 \quad (5.12)$$

上式中 ϕ_m 與 $\bar{I}_0$ 各為 Φ_m 與 I_0 之 Hankel transform，如同 (3.10) 式所定義者。

如同往昔對船波有關問題所常考慮的，當衝擊作用被視為集中在 $a_0 \rightarrow 0$ 時，使得可給定

$$\bar{I}_0(\lambda, \eta_w) = \lim_{a_0 \rightarrow 0} \int_0^{a_0} r J_0(\lambda r) P dr = \frac{1}{2\pi} \quad (5.13)$$

至此， ϕ_m 之解即刻可由 (5.8) 式至 (5.13) 式之應用，求得為（此過程完全相同於 3-2 節中所述者）

$$\phi_m(\lambda, z; t) = -\frac{1}{2\pi\rho} e^{\lambda(z-\eta_w)} \cos(\sqrt{g\lambda} t) \quad (5.14)$$

故，所處理的波動流場解 Φ_m^* 為

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, z; t) &= -\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) e^{\lambda(z-\eta_w)} \\ &\quad \cos(\sqrt{g\lambda} t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

而其對應的波動水位 η_m 可依自由表面動力邊界條件式 $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_m + g \eta_m = 0$ ，在 $z = \eta_w, t > 0$ 之應用，得為

* 為求使解析能有更明朗化的過程與結果更為確切起見，(5.15) 式所示之 Φ_m 解將另以已知之波浪水面為基準之變動座標系統來求解之，其導論過程詳述於附錄 A 中。

$$\begin{aligned}
& \eta_m(r, t) \\
&= -\frac{1}{2\pi\rho\sqrt{g}} \int_0^\infty \lambda^{3/2} J_0(\lambda r) \sin(\sqrt{g\lambda}t) d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi\rho g} \frac{\partial \eta_w}{\partial t} \int_0^\infty \lambda^2 J_0(\lambda r) \cos(\sqrt{g\lambda}t) d\lambda
\end{aligned} \tag{5.16}$$

此處，我們即刻可由所得之解(5.15)式之 Φ_m 及(5.16)式之 η_m 與第三章中之對應者(3.24)式之 Φ 及(3.25)式之 η 進行比較，發現得知衝擊作用發生在波浪水面上與在平靜水面上所產生的波動情況是顯然不同的，且如吾們所可預期般地，原存的水面波浪將對發生在其上之衝擊作用所生之水利現象有給予直接的影響的效應，而其影響的程度恰與原波浪本身之起伏變化特性成正比的關係，此可見諸於 Φ_m 中含有 $e^{\lambda\eta_w}$ 及 η_m 中含有 $\frac{\partial}{\partial t} \eta_w$ 之因素而得知。這當是理所當然地，當水面上之原起伏波浪消失時，則上述之 Φ_m 與 η_m 必須退化成第三章中之平靜水面時的 Φ 與 η ，此點的必然現象顯然地已被包容在我們所得之(5.15)式與(5.16)式的結果中。

如同前幾章的處理，為明確地求出波浪水面受衝擊作用下所生出之波動的主要特性，得須對上式之積分進行評價。直接依本文重新所導述的固定相位法(Stationary phase method)之應用，首先對其所含有的Bessel function $J_0(\lambda r)$ 評價得(如第三章中(3.26)式至(3.27)式之處)

$$\begin{aligned}
& \eta_m(r, t) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^{1/2} \rho \sqrt{g}} \int_0^\infty \lambda \left[\sin\left(\lambda r + \sqrt{g\lambda}t - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
&\quad \left. - \sin\left(\lambda r - \sqrt{g\lambda}t - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^{1/2} \rho g} \frac{\partial \eta_w}{\partial t} \int_0^\infty \lambda^{3/2} \left[\cos\left(\lambda r + \sqrt{g\lambda}t - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
&\quad \left. + \cos\left(\lambda r - \sqrt{g\lambda}t - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\lambda
\end{aligned} \tag{5.17}$$

亦如同第三章之情況，因僅有 $\lambda \geq 0$ 貢獻至積分中，故依固定相位法的處理僅須對積分式中的第二項進行考慮。由於其固定相位點處之 λ 值為

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{g} t}{2r} \quad \text{或} \quad \lambda = \frac{gt^2}{4r^2} \quad (5.18)$$

因此，依 (2.52) 之結果的應用得，當 $\frac{gt^2}{4r^2}$ 不小時，其對應之 η_m 為

$$\begin{aligned} & \eta_m(r, t) \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{-1}{(2\pi)^{3/2} r^{1/2} \rho \sqrt{g}} \frac{\sqrt{\pi} \frac{gt^2}{4r^2}}{\left[\frac{r^6}{g^2 t^4} + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^4 \left(\frac{2r^5}{g^2 t^4} \right)^{4/3} \right]^{1/4}} \right. \\ & \quad \left. \exp \left[i \frac{gt^2}{4r} + \frac{i}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^2 \left(\frac{4r}{gt^2} \right)^{1/3} \right] \right\} \\ & \quad + \text{Re} \left\{ \frac{-1}{(2\pi)^{3/2} r^{1/2} \rho g} \frac{\partial \eta_w}{\partial t} \frac{\sqrt{\pi} \frac{g^{3/2} t^3}{8r^3}}{\left[\frac{r^6}{g^2 t^4} + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^4 \left(\frac{2r^5}{g^2 t^4} \right)^{4/3} \right]^{1/4}} \right. \\ & \quad \left. \exp \left[i \frac{gt^2}{4r} + \frac{i}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^2 \left(\frac{4r}{gt^2} \right)^{1/3} \right] \right\} \\ &= -\frac{gt^3}{2^{7/2} \pi \rho r^4} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^4 \left(\frac{4r}{gt^2} \right)^{2/3} \right]^{-1/4} \cdot \\ & \quad \sin \left\{ \frac{gt^2}{4r} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^2 \left(\frac{4r}{gt^2} \right)^{1/3} \right] \right\} \\ & \quad - \frac{gt^4}{2^{9/2} \pi \rho r^5} \frac{\partial \eta_w}{\partial t} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^4 \left(\frac{4r}{gt^2} \right)^{2/3} \right]^{-1/4} \cdot \\ & \quad \cos \left\{ \frac{gt^2}{4r} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^2 \left(\frac{4r}{gt^2} \right)^{1/3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

又依往昔般的考慮，因 $\frac{gt^2}{4r}$ 充分大，故 (5.19) 式可簡化為

$$\begin{aligned} \eta_m(r, t) &= -\frac{gt^3}{2^{7/2}\pi\rho r^4} \sin\left(\frac{gt^2}{4r}\right) - \frac{gt^4}{2^{9/2}\pi\rho r^5} \frac{\partial\eta_w}{\partial t} \cos\left(\frac{gt^2}{4r}\right) \\ &\quad (5.20) \end{aligned}$$

(5.20) 式的結果是可被預期的，當衝擊作用在波浪水面時，其所衍生出的波動除了具有平靜水面受衝擊作用所生之波動特性部份外，即

(5.20) 式中右邊第一項（或 (3.31) 式）者（所謂純擾動波），另須包含有關連到原存於水面上之波浪起伏變化特性的部份，即 (5.20) 式中右邊之第二項者，稱之為受水面波浪起伏之作用部份。換言之，

(5.20) 式可依力學之一般原則之觀點的歸附，寫為

$$\begin{aligned} &\text{波浪水面受衝擊作用所生之波動} \\ &= \text{衝擊作用在平靜水面上所生之純波動（純部份）} \\ &\quad + \text{原水面波浪作用而生之波動（波浪作用部份）} \quad (5.21) \end{aligned}$$

5 - 3 波浪水面上移動衝擊作用所生之波動（或船行於波浪水面所生之波動）

如同第四章所給予的運動座標系統的定義及有關之符號的物理意義，此所不同的僅是船行之水路為波浪水面取代第四章之平靜水面。首先便於處理起見，設水道上之波浪 η_w 為一規則進行波列，其前進方向與 OX 軸（即船行之方向）成 θ 之夾角，如圖 10 所示。

依所定義，則於運動系統中，我們有

$$\begin{aligned} OA &= ct_0; OB = ct \\ PB &= r = \{(ct - x)^2 + y^2\}^{1/2} \\ \cos \alpha &= \frac{(ct - x)}{r}; \vec{X} = -\vec{i} r \cos \alpha + \vec{j} r \sin \alpha \end{aligned}$$

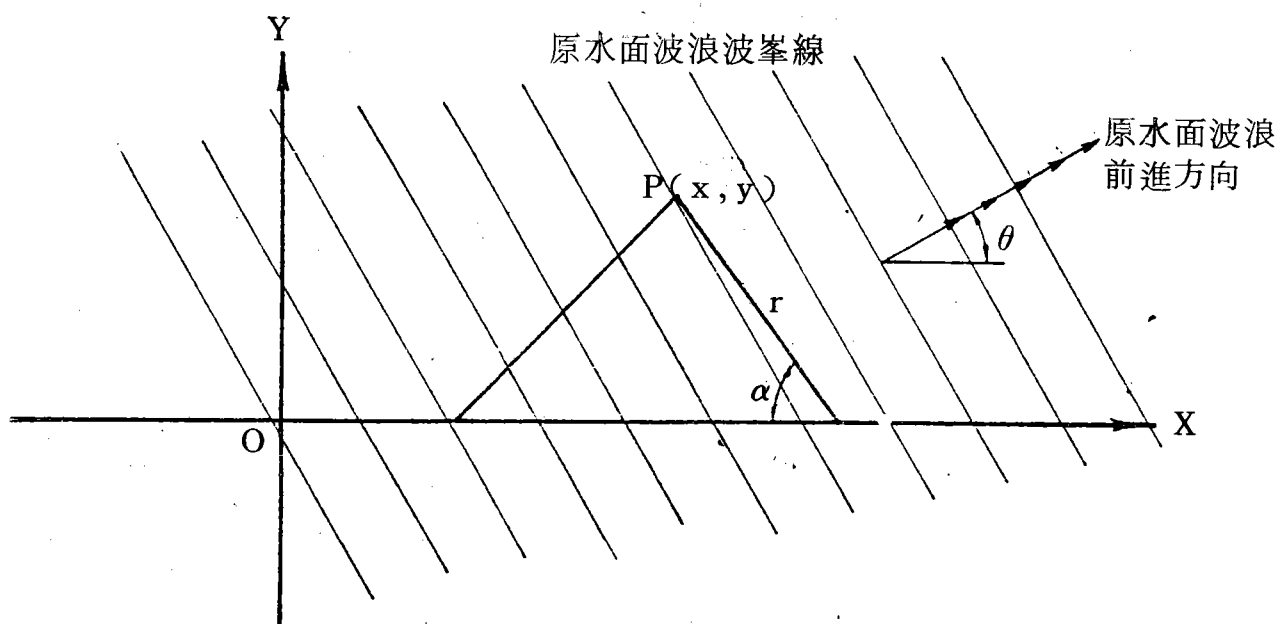


圖 10 船行於波浪水面之運動系統座標圖

$$\begin{aligned}
 \text{與} \quad \eta_w &= \frac{H}{2} \cos \left[\vec{k} \cdot \vec{X} - \left(\sigma - c\sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) t + \epsilon \right] \\
 &= \frac{H}{2} \cos \left[-kr \cos(\theta + \alpha) - \left(\sigma - c\sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) t - \epsilon \right] \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

上式中 H 為水面上原有之波浪的波高， $k = |\vec{k}|$ 為其波數 (wave number)， σ 為其週波率 (angular frequency)， $(\sigma - c\sigma^2 \cos \theta / g)$ 顯然為深海波浪相對於船以速度 c 航行下 (即在船頭觀看下) 之相對週波率，常數 ϵ 為波浪之相位角 (即表示在 $\vec{X} = 0$ ， $t = 0$ 時船頭位於波浪 η_w 中之位置)。這是很顯然地，對波浪水面受移動衝擊作用所生之波動水位 η_m 的推求，我們即刻可如同第四章的處理，於 (5.20) 式中之 r 須被 $\{(x - ct_0)^2 + y^2\}^{1/2} = \{r^2 - 2cr(t - t_0) \cos \alpha + c^2(t - t_0)^2\}^{1/2}$ 所取代，而 t 須被 $t - t_0$ 所取代，且對 t_0 由 $-\infty$ 積分至 t (即表船行之歷時)，得

$$\begin{aligned}
 \eta_m(r, t) &= -\frac{g}{2^{7/2} \pi \rho} \int_0^\infty \frac{u^3 du}{(r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2}} \\
& + \frac{\sigma H g}{2^{11/2} \pi \rho} \int_0^\infty \frac{u^4 du}{(r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^{5/2}} \cdot \\
& \cos \left[\frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2}} \right] \times \\
& \sin [k(r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2} \cos(\theta + \alpha) \\
& + (\sigma - c\sigma^2 \frac{\cos \theta}{g})u - \epsilon] \quad (5.23)
\end{aligned}$$

至此須注意，為充足地化解出所考慮的波動水位 η_m 之積分式，雖然直接可利用第二章所重新導得的固定相位法之新近似結果來處理，然此處得須先對該式中之第二項內所含有的水面波浪影響因素給予適當的處理與說明。因水面上可存在的重力波浪，其尖銳度或言時空變率 $\partial \eta_w / \partial x$ 與 $\partial \eta_w / \partial t$ （正弦波時，其 $|\frac{\partial \eta_w}{\partial t}| = |c_w \frac{\partial \eta_w}{\partial x}|$ ， c_w 為其波速）皆在一小值之範圍，故(5.23)式之第二項積分式中，有關水面上原波浪之正弦因素（即 $\sin$ 者）較之於有關船波之餘弦因素（即 $\cos$ 者）的變率為小，因此，依固定相位法評價的基本原則，即依(2.1)式之型式來考量的適可性，得知貢獻至 η_m 之積分中的固定相位點是由 $gu^2 / 4(r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2}$ 所給予的，因此，得所考慮的波動 η_m 其固定相位點發生在*

$$cu = \frac{1}{2} r \{ 3 \cos \alpha \pm (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} \} \quad (5.24)$$

由此顯然得知，船行於波浪水面所生之波動系統的範圍恰如同船行於平靜水面所生之波動系統者，皆侷限在夾角為 $2 \cos^{-1}(\sqrt{8}/3)$ 之二條直線所圍成的領域內，即在 $9 \cos^2 \alpha - 8 \geq 0$ 之範圍內。其實，這是容易被理解的，因所考慮的波動 Φ_m 其起源是因船行所致，因此，當然在船波波動的範圍內（即第四章之純船波者）方有明顯的受原水面波浪作用的特性量出現。

* 此點的論述於附錄 B 中將另以一不同的導述來說明，以互為呼應之。

依(5.24)式所得之固定相位點，則所考慮的船行於波浪水面所生之波動 η_m ，即刻可由(5.23)式寫出之；便於分別起見，如同第四章之處理般，依 cu 值的大小，分橫向波與分散系統來描述，如下。

(a)橫向波系統

此系統所對應的 cu ， $r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2$ ， $\varphi(u) = gu^2 / 4 (r^2 - 2cur \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2}$ ， $\varphi''(u)$ 與 $\varphi'''(u)$ 等值皆如同(4.6)式，(4.8)式~(4.11)式所示者，因此，其對應的波動 η_m 為

$$\eta_m(r, t)$$

$$= \frac{g}{2^{9/2} \sqrt{\pi} \rho c^3 r} \frac{[3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2} \\ \left\{ \frac{g^2}{32 r^2} \frac{(9 \cos^2 \alpha - 8) [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3} \right. \\ \left. + \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right]^4 \left(\frac{gc}{\sqrt{2} r^2} \right)^{4/3} \right. \\ \left. \frac{|[\cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}][3 - 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]|^{4/3}}{|3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}|^{10/3}} \right\}^{-1/4} \\ \cos \left\{ \frac{gr \sqrt{2}}{16 c^2} \frac{18 \cos^2 \alpha - 8 + 6 \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \right. \\ \left. - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^2 \cdot 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} \right] \right. \\ \left. \frac{|[\cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}][3 - 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]|^{2/3}}{(9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \right. \\ \left. \frac{1}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} \right\} \\ + \frac{\sigma g H}{2^7 \sqrt{\pi} \rho c^4 r} \frac{[3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^4}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{5/2}} \\ \left\{ \frac{g^2}{32 r^2} \frac{(9 \cos^2 \alpha - 8) [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3} \right. \\ \left. + \left[\frac{\sqrt{3\pi}}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{gc}{\sqrt{2} r^2} \right)^{4/3} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{|\left[\cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}\right][3 - 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]|^{4/3}}{|3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}|^{10/3}} \}^{-1/4} \cdot \\
& \cos \left\{ \frac{gr \sqrt{2}}{16c^2} \frac{18 \cos^2 \alpha - 8 + 6 \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \right. \\
& + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3} \pi}{\Gamma(1/3)} \right)^2 \cdot 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} \right. \\
& \left. \left. \frac{|\left[\cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}\right][3 - 3 \cos^2 \alpha - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]|^{2/3}}{(9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} \right] \right\} \cdot \\
& \sin \left\{ \frac{kr}{\sqrt{2}} [3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2} \cos(\theta + \alpha) \right. \\
& + \frac{r}{2c} \left(\sigma - c \sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}] - \epsilon \} \\
& \quad \quad \quad (5.25)
\end{aligned}$$

於船行之路徑線OX軸上，即 $\alpha = 0$ 處，當 r 充分大時，則上式之 η_m 可簡化為

$$\begin{aligned}
\eta_m(r, t) = & -\frac{\sqrt{2}g}{\sqrt{\pi} \rho c^3 r^{1/2}} \cos\left(\frac{gr}{c^2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{g} \sigma H}{\sqrt{2} \pi \rho c^4 r^{1/2}} \cdot \\
& \cos\left(\frac{gr}{c^2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin[kr \cos \theta \\
& + \frac{2r}{c} \left(\sigma - c \sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) - \epsilon] \quad (5.26)
\end{aligned}$$

(b) 分散波系統

此系統所對應的 cu ， $\varphi(u)$ ， $\varphi''(u)$ 與 $\varphi'''(u)$ 分別為(4.7)式，(4.19)式至(4.21)式所示，則其波動 η_m 有

$$\begin{aligned}
\eta_m(r, t) = & -\frac{g}{2^{9/2} \sqrt{\pi} \rho c^3 r} \frac{[3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2} \cdot \\
& \left\{ \frac{g^2}{32 r^2} \frac{(9 \cos^2 \alpha - 8) [3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3} \right. \\
& + \left[\frac{\sqrt{3} \pi}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{gc}{\sqrt{2} r^2} \right)^{4/3} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{|\cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}| [3 - 3 \cos^2 \alpha + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{4/3}}{|3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}|^{10/3}} \}^{-1/4} . \\
& \sin \left\{ \frac{gr \sqrt{2}}{16 c^2} \frac{[3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} - \frac{\pi}{4} \right. \\
& + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3} \pi}{\Gamma(1/3)} \right)^2 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} . \right. \\
& \left. \frac{|\cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}| [3 - 3 \cos^2 \alpha + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{2/3}}{(9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} [3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]} \right. \\
& \left. \frac{1}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} \right\} \\
& + \frac{\sigma g H}{2^7 \sqrt{\pi} \rho c^4 r} \frac{[3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^4}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{5/2}} . \\
& \left\{ \frac{g^2}{32 r^2} \frac{(9 \cos^2 \alpha - 8) [3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^3} \right. \\
& + \left[\frac{\sqrt{3} \pi}{\Gamma(1/3)} \right]^4 \left(\frac{g c}{\sqrt{2} r^2} \right)^{4/3} . \\
& \left. \frac{|\cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}| [3 - 3 \cos^2 \alpha + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{4/3}}{|3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}|^{10/3}} \right\}^{-1/4} . \\
& \cos \left\{ \frac{gr \sqrt{2}}{16 c^2} \frac{[3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^2}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} - \frac{\pi}{4} \right. \\
& + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(\frac{\sqrt{3} \pi}{\Gamma(1/3)} \right)^2 \cdot 2^{13/6} \left(\frac{c^2}{gr} \right)^{1/3} . \right. \\
& \left. \frac{|\cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}| [3 - 3 \cos^2 \alpha + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{2/3}}{(9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2} [3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]} \right. \\
& \left. \frac{1}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/6}} \right\} . \\
& \sin \left\{ \frac{kr}{\sqrt{2}} [3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2} \cos(\theta + \alpha) \right. \\
& + \frac{r}{2c} \left(\sigma - c \sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) [3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}] - \epsilon \}
\end{aligned}$$

(5.26)

顯然地，由(5.26)式可知，當 $\alpha = 0$ ，則 $r = 0$ ，如同純船波者，故謂之分散波系統 (diverging waves system)。

5 - 4 比較與水面波浪之影響效應

於第四與第五章之解析中，這是顯然且必然的，在直覺上我們即刻可預期到移動衝擊作用點（或謂船）行於平靜水面與波動水面所生之水理現象，其特性是顯著不同的；它們間的差異除了水面上所原先給定的已知之波浪本質外，又當會發生有由此水面上所原先給定的波浪對船行於其上所生之波動給予作用而衍生出額外的水面波動項，稱之為波浪作用效應項。誠然，若欲對船行於波浪水面所生之水理現象獲得較為充足合理的描述與有效的掌握，則對此項所產生之影響的瞭解應是不可或缺的。換言之，波浪作用效應於本研究所考慮的主題中是佔有舉足輕重的地位，否則吾人將又落入往昔之處理般，直接以船行於平靜水面所生之純船波與原先所給定的水面波浪線性相加之不充足性解析的缺失，即不顧到其間必會產生之作用效應之力學應有的原則。因此，基於更清楚船行於波浪水面所生之水理現象的力學機構起見，於本節，吾人將對此波浪作用效應項特予論述，以說明其與原給定的水面波浪之特性（如波高、波速等）及船行之速度等之關係，與其特有的時空變化。

由(4.2)式與(5.23)式之比較得知，波浪作用效應項 η_{mw} 為

$$\begin{aligned} & \eta_{mw}(r, t) \\ &= \frac{\sigma H g}{2^{11/2} \pi \rho} \int_0^\infty \frac{u^4 du}{(r^2 - 2 c u r \cos \alpha + c^2 u^2)^{5/2}} \cdot \\ & \quad \cos \left[\frac{g u^2}{4 (r^2 - 2 c u r \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2}} \right] \cdot \\ & \quad \sin \left[k (r^2 - 2 c u r \cos \alpha + c^2 u^2)^{1/2} \cos (\theta + \alpha) \right. \\ & \quad \left. + \left(\sigma - c \sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) u - \epsilon \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

又依(5.24)式所示之固定相位點 $c u$ 值的大小， η_{mw} 可分橫向與分散波情況討論之，因其結果已分別被表示在(5.25)式與(5.26)式中，因此，此處將可引用這些結果來與純船波者進行比較，並闡述其特性，茲述之

於下。

(a) 橫向波情況

由 (5.25) 式與 (5.26) 式得知，波浪作用效應所生之波動 η_{mw} 其相位與純船波之對應者相差 $\pi/2$ 值，此即表示在純船波波動最高與最低處，對應的 η_{mw} 為零；反之在純船波波動之零水位線（即反曲點處，因波動為正弦）上，對應的 η_{mw} 產生最大的脈動起伏。至於橫向波情況之 η_{mw} 之振幅變化相對於純船波者可被得之為

$$\begin{aligned} & \frac{\text{波浪作用效應所生之波動 } \eta_{mw} \text{ 之振幅}}{\text{純船波波動之振幅}} \\ &= \frac{\pi \delta}{2^{3/2}} \frac{c_w}{c} \frac{[3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]}{[3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \cdot \\ & \quad \sin \left\{ \frac{kr}{\sqrt{2}} [3 \cos^2 \alpha - 2 + \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2} \right. \\ & \quad \left. \cos(\theta + \alpha) + \frac{r}{2c} (\sigma - c\sigma^2 \frac{\cos \theta}{g}) \right\} \cdot \\ & \quad [3 \cos \alpha + (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}] - \epsilon \quad (5.28) \end{aligned}$$

上式中 $\delta = H/L$ 為原先所給定之水面波浪的尖銳度， L 為其波長， c_w 為其波速。由 (5.28) 式可得知，波浪作用效應所造成的波動，其振幅直接正比於原水面波浪的尖銳度與波速對船速之比，且隨所在的空間位置 (r, α) （以船首為極座標原點，如圖10所示）與原水面波浪前進方向與船行方向之夾角 θ 之餘弦做正弦性的變化，同時其對時間的變率含有都卜勒效應的影響。由於 $0 \leq |\alpha| \leq \cos^{-1}(\sqrt{8}/3)$ ，故由 (5.28) 式之計算得知，在邊界線處（即在 $\alpha = \cos^{-1}(\sqrt{8}/3)$ 處）波浪作用效應所生之波動振幅最大，而在中心 OX 軸上（即 $\alpha = 0$ 處）為最小；其實，這是必然的結果，因純船波之橫向波動系統在邊界線處起伏變動最大而在中心軸為最小，因此，其與原水面之波浪間的相互作用結果亦當應如是之故。

(b) 分散波情況

此情況與上述之橫向波情況相似，由 (5.26) 式得知，波浪作用效應所生之波動 η_{mw} 其相位恰與純船波之對應者相差 $\pi/2$ 值，故其與純

船波之對應者間的脈動特性恰如上述(a)節中所述者。至於分散波情況之 η_{mw} 其振幅變化相對於純船波之對應者亦可被寫出為

$$\frac{\text{波浪作用效應所生之波動 } \eta_{mw} \text{ 之振幅}}{\text{純船波波動之振幅}} = \frac{\pi \delta}{2^{3/2}} \frac{c_w}{c} \frac{[3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]}{[3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2}} \cdot \sin \left\{ \frac{kr}{\sqrt{2}} [3 \cos^2 \alpha - 2 - \cos \alpha (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}]^{1/2} \cdot \cos(\theta + \alpha) + \frac{r}{2c} \left(\sigma - c\sigma^2 \frac{\cos \theta}{g} \right) \cdot [3 \cos \alpha - (9 \cos^2 \alpha - 8)^{1/2}] - \epsilon \right\} \quad (5.29)$$

顯然地由 (5.29) 式所表示的分散波情況之 η_{mw} 的振幅變化特性與 (5.28) 式所示的橫向波情況者相似；其所不同的在於分散波情況隨 $|\alpha|$ 之增加而減少，此恰與橫向波情況者反之，當然這依本文所得的純船波結果而言是符合了一般力學作用的原則。

5 - 5 結語與短評

依本章之整個論述過程得知，為能有效地對所考慮的船行於波浪水面所生之水理現象之通案（或原則）性的問題進行整體性的考量，及得到較充足合理的解析結果，本章已適當地避開往昔解析所遭遇到的轉移非有界性的嚴重阻撓，提出一新的可行簡單解析法，並在直接應用前幾章對純船波解析所得的新結果下，即在本文論述所秉持的一貫性原則下，適足地給予解析出。依解析所得的結果，可確知整個波動中存在有原先所給定的水面波浪作用效應項，其影響程度正比於此原水面波浪的尖銳度與它的波速對船速之比，而作用有效的範圍包絡在純船波系統之範圍內，並依橫向與分散波情況各差純船波之對應者 $\pi / 2$ 相位且脈動振幅隨之做正弦性的起伏變化。此處，為更清楚知曉整個水面波動起伏變化起見，可寫出整個水面水位 η_T 為

$$\begin{aligned}
& \text{整個水面水位 (} \eta_T \text{)} \\
& = \text{原先所給定的水面波浪水位 (} \eta_w \text{)} \\
& \quad + \text{船行於其上所生之波浪水位 (} \eta_m \text{)} \\
& = \text{原先所給定的水面波浪水位 (} \eta_w \text{)} + \text{純船波水位 (} \eta_{m0} \text{)} \\
& \quad + \text{原波浪作用所生之波動水位 (} \eta_{mw} \text{)} \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

這是很明顯的，由於三組波動（即 η_w ， η_{m0} 與 η_{mw} ）的相位並非一致，因此，致使整個水面水位的起伏是相當混亂的。於整個波動中，由於 η_{mw} 與 η_{m0} 有 $\pi/2$ 相位的差異，且 η_{mw} 之振幅隨位置（ r ， α ）做正弦性的脈動起伏，因此，整個系統內的波浪於某些地方變大（尤其近於邊界線處），某些地方變小，甚而會有連續的大浪緊跟著出現，且易生碎波，尤其在邊界線處為甚，此乃一般船行於波浪水面所生之波動常會產生的真實現象；蓋其因由在此乎。

就整體現象描述之完全性而言，船行於波浪水面所生之水理現象，其特性必然會受到原先所給定的水面波浪進行方向與船行方向間的角度 θ 影響，然依解析結果得知，此因素僅對波浪作用效應所生之波動產生其起伏變率（包含有相對週波率之都卜勒效應）的影響，與波動量本身的大小無實質關連，至於波長與週期（波速除外）之影響亦是如此；其實這些影響的結果是相當顯然可被預知。

這如純船波之解析結果般的，船行於波浪水面所生之波動，其於原點近處（ $\alpha = 0$ ， $r = 0$ ）是不適的（即波動趨於無限大），因此點於我們通案性的解析中是一本質的奇異點（essential singularity）之故，當然這是如往昔之解析一樣是不可避免的。

至於本章之論述應用至實際船行所生之波動的描述及推廣至淺水中之解析，可參看前章之結論與討論中的論述。

第六章 結論與建議

簡 要

依本文對船行於深海水面所生之波動的整個論述過程，包括前人對純“船波”波動描述的不足與無法對船行於波浪水面所生之波動的解析，以及由本文對這些波動所得到的適足的解析結果，於本章將給予幾點明確的結論，之後對真實船體行於真實海面所會產生的各種可能的真實波動現象給予應有的注意與討論，並建議日後解析時可行的途徑。最後再論及本文解析過程推廣應用至淺水情況的處理。

6 - 1 結 論

雖然自十九世紀中葉船波有關問題的研究已被揭開，繼之日後衆多學者們的致力探討，對其中之純“船波”波動（即移動衝擊作用點行於平靜水面所生之波動）特性的描述已有相當良好的結果；尤其在 Kelvin（1887）所發展出的固定相位法之應用下，更進一步地解析出此種純“船波”波動的整體幾何外貌結構（於一般需常被考慮的深海情況中）而足能與真實現象者相匹比，因而給予了此種有關問題於解析上供日後學者們一種可遵循的良好途徑，換言之，至今它為描述“船波”波動現象最常被應用且被公認最為有效的方法者。然而，這是明顯且不容置疑的，在 Kelvin 固定相位法之解析下，所描述出的純“船波”波動特性其恰當性仍還不足的；尤其在波動系統之邊界綫處發生有幾何結構上之相位角斷續跳躍不連續的矛盾現象及對應的波動量趨於無限大的不合理結果，如第一、四章中所述；亦因此之故，阻撓了與船波相關問題的研究與進展，如對船行於波浪水面所生之水理現象的研究，則勢必需先突破此阻撓，否則所得之解析

結果將又落入不合理的矛盾中，如純“船波”波動者，而無法應用至實際的真實波動中，以供實務工程上的參考與解決。再者，往昔迄今對波浪水面受移動衝擊點（或謂船）作用所生之波動問題，於解析上，因受到數學轉移上產生非有界限性的嚴重阻擾，無法給予適當的解決，因而對此種於港灣工程上很常見的波動之水理現象的研究，至今可說仍乏人問津，況言有適足的描述乎！可見第五章之述。這是理所當然地，為顧及港灣工程日後有更合理、精確的安全設計與防護，此種常發生於其海域中的波動現象應有被注意的必要，是故本文方給予應當的闡論與解析之。由本文之前幾章的解析過程得知，為能對所考慮的船行於波浪水面所生之水理現象給予整體性的適足描述，本文已首先突破 Kelvin 固定相位法不足性的瓶頸，重新給予更滿足的純“船波”波動之新詮釋，之後再與所提的波浪水面做為參考面以避免數學轉移之非有界性轉移結果的配合下，得到船行波浪水面所生之波動的適當解析。因此，綜觀本文之整個論述，於此處可給予幾點明確的結論，如下。

(1) 對必要積分式的近似展開，本文提出的新處理法較傳統的 Kelvin 固定相位法更為滿足，且於一般情況下可與一般化的最速陡降法 (Steepest Descent Method) 之進一步展開者相媲美；甚而，當變動的相位函數，即 (2.1) 式中之 $\varphi(x)$ ，在 $\varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = 0$ ， $\varphi'''(x_0) \neq 0$ 之特殊情況下，固定相位法與最速陡降法兩者皆無法應用，然却能被包容在本文的新處理法中且有相當良好的結果，因此，更顯示出本文之新處理法的廣泛性；再者本文新處理法所得的結果是簡單的，於應用上有如固定相位法者般的簡易與方便。總之，對必要積分式的處理，本文新處理法提供了一簡單、精確、且更為廣泛化的近似展開新描述式，見 (2.52) 式所示。

(2) 在新描述式之直接應用解析下，純“船波”波動特性被一氣呵成地直接解析出，而往昔之於邊界綫處產生幾何結構之波動相位跳躍不連續與振幅趨於無限大的嚴重缺失皆被本文恰當地解決。其餘波動應有的特性，如幾何外貌，振幅變化特性等，本文之結果是與往昔者幾相一致而互可對

照呼應之，見第 4 — 5 節所述。

(3) 往昔對解析波動水面受衝擊作用所生之波動，於數學轉移上所受到非有界性的嚴重阻撓，已於本文以波動水面做為基準參考面而給予適當地解決，可見 5 — 3 節與附錄 A 中之論述；同時解得，整個波動系統中多存在有一原存於水面之波浪作用效應項，其特性與此原存於水面之波浪的時間變化率成正比。因此，波浪水面受衝擊作用所生之波動的整體系統特性在符合力學作用原則下已被合理地描述，如見 (5.21) 式知。

(4) 船 (或移動性衝擊作用點) 行於波浪水面所生之波動，其整體系統於本文所提的必要積分式之新描述式與所得的純船波之解析結果聯合應用下，已被適足地描述。其中波浪作用效應項是直接正比原水面波浪之尖銳度與波速對船速之比，且其影響範圍亦被包絡在一般純“船波”波動系統的 $2 \cos^{-1} (\sqrt{8}/3)$ 夾角的二條邊界綫所圍成的範圍內，可見 5 — 5 節與附錄 B 之論述。

(5) 由於波浪作用效應所生之波動與純“船波”波動之對應者相差 $\frac{\pi}{4}$ 相位，加上其時空之變化受原水面波浪之波數，前進行方向與相對週波率 (即船行與前進波浪間的都卜勒效應) 之影響而隨位置做正弦性的起伏，造成了整個船行於波浪水面所生之波動系統更為混淆；尤其在邊界綫處所有波動項的起伏量皆大下，易生碎破，此恰給予實際現象適當地描述。

(6) 本文給予船行於深海水面所生之波動簡單、適當又精確之一貫系統性的新解析，於理論與數學之適足性觀點上，可說至今最為恰當者。

6 - 2 討論與建議

為能更適切地應用本文解析所得的結果至實際現象中，於此給予幾點討論與建議以結束本文之論述，如下。

(1) 由於本文是對船波有關問題做通案性的考慮，故衝擊作用範圍 (即船接觸水面之面積在水面上投影的部份) 被縮為一點，因而此點不可避免地變為奇異點。今對實際船體而言，吾人可以其實際衝擊作用範圍取代本

文的作用點，且如 4 — 6 節的討論中般定出其起源衝擊衝量的大小，即（3 . 8）式之 $I_0(r, \alpha)$ 者，如此，依各種實際船體的情況將可定量性地求出其航行時所生之波動量。

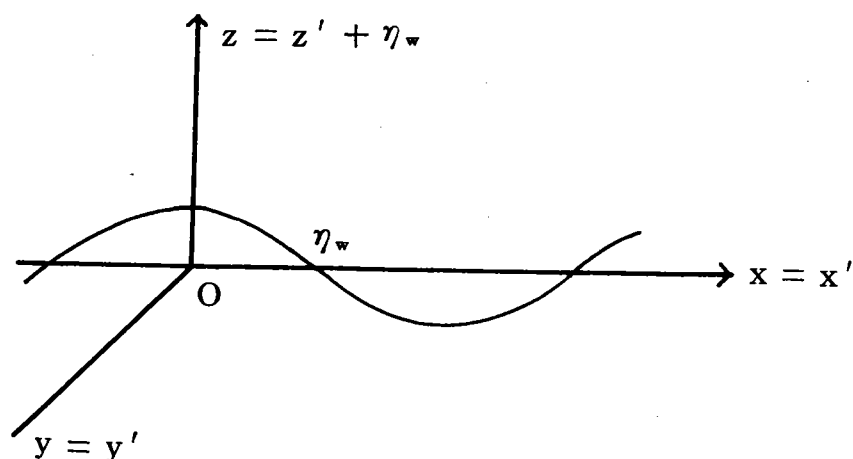
(2) 船行開始時，水面及其起始衝擊情況需併入（或另加考慮），同時對應的必要積分式亦得另需額加修正處理，如此方可解析當船速很慢時之特殊情況下的波動，否則此情況仍無法被描述，可見（4.12）式與（4.22）式在 $c \rightarrow 0$ 時其對應之 η 振幅趨於很大而知。

(3) 由於真實海面波浪總是紛紜不規則的，因此，船行於其上所造成的波動亦為紛紜不規則者。故欲以本文之對船行於規則波浪水面上所生之波動的論述應用至船行於真實紛紜海面所生之波動的解析，則需輔以統計之功先對原存的紛紜海面波浪給予描述後，方足闡述船行於其上所生之波動的紛紜水理特性。

(4) 雖然本文僅對一般常被考慮的船行於深海水面所生之波動給予論述，然這是即刻顯然地，本文之整個解析處理過程是直接可被應用至淺水情況的解析，其間僅是需考慮波浪的分散關係（dispersion relation）而已，可參見 Havelock（1908）之論述，此解析將留待日後處理之。

爲使本文對船行於波浪水面所生之水利現象的研究，於所考慮的解析下有適足恰當的結果起見，此處將直接以包容原先存在於水面上之波浪的真實起伏變化特性的變動座標系統，即以原存於水面上之波浪做爲基準面之變動性的新座標系統，來對船行於波浪水面所生之波動解析中的基本式 (5.15) 式之 Φ_m 解重新求解，以便更確立本文對船行波浪水面所生之水利現象之整個論述結果的正當性。

以原存於水面上之波浪 η_w 做爲基準面的變動性新座標系統 (x' , y' , z') 與以平均靜水面爲水平基準面的一般固定性座標系統 (x , y , z) (如第五章中者) 間的關係，如圖附 1 所示。



附圖一

即有

$$\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y, \quad z' = z - \eta_w, \quad \partial x' = \partial x, \\ \partial y' &= \partial y, \quad \partial z' = \partial z - \partial \eta_w, \quad \eta_w = \eta_w(x, y, t) \end{aligned} \quad (A.1)$$

在此新座標系統之描述下，所欲求解的波動場中，有關之物理量，如 5-2 節中所定義者，可寫爲

$$\begin{aligned} \Phi_m(x, y, z; t) &= \Phi'_m(x', y', z'; t) \\ \eta_m(x, y; t) &= \eta'_m(x', y'; t) \end{aligned}$$

$$\eta_w(x, y; t) = \eta'_w(x', y'; t) \quad (A.2)$$

至於波動場之控制方程式；Laplace's equation，顯然依(A.1)式為

$$\nabla^2 \Phi_m = \nabla'^2 \Phi'_m, \quad \nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

，在所考慮的水域中。

(A.3)

自由表面邊界條件（經線性化處理後）， $\Phi_{mtt} + g\Phi_{mz} = 0$ ， $z = \eta_w$ ，如(5.3)式所示者，則變為（因 $\Phi_{mt} = \Phi'_{mt} - \Phi'_{mz'} \eta'_{wt}$ ）

$$\Phi'_{mtt} - 2\Phi'_{mz't} \eta'_{wt} - \Phi'_{mz'} \eta'_{wt t} + \Phi'_{mz'z'} \eta'^2_{wt} + g\Phi'_{mz'} = 0$$

， $z' = 0$

(A.4)

上式亦可直接由自由表面動力與運動邊界條件 $\Phi_{mt} + g\eta_m = 0$ 與 $\Phi_{mz} - \eta_{mt} = 0$ 在 $z = \eta_w$ ，及 $\Phi_{mt} = \Phi'_m - \Phi'_{mz'} \eta'_{wt}$ ， $\Phi_{mz} = \Phi'_{mz'}$ 之轉換的應用，消去 η_{mz} 項而獲得之。

由於船行需於夠深的水域中，故一般以深水來考慮之，如本文之解析者。因此，在Hankel transform下，且 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， Φ'_m 之解即刻可被寫出（注意，因被考慮的波動發生在 $z' = 0$ 上，因此當然在transform時沒含 η_w 因素在內，故得知只要 Φ'_m 在 $r = 0$ 與 ∞ 處有適當性，即為5-2節中所述者，則 Φ'_m 有其transform量存在。），如5-2節之求解過程般，為

$$\Phi'_m = \int_0^\infty A(\lambda, t) e^{\lambda z'} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \quad (A.5)$$

$A(\lambda, t)$ 之解可由(A.5)式代入(A.4)式求解之，得其方程式為

$$A_{tt} - 2\lambda \eta'_{wt} A_t + (g\lambda + \lambda^2 \eta'^2_{wt} - \lambda \eta'_{wt t}) A = 0$$
(A.6)

令 $A(\lambda, t) = a_+(\lambda) e^{i\sqrt{g\lambda}t + f}$

(A.7)

代入(A.6)式中，則得

$$f_{tt} + 2i\sqrt{g\lambda} f_t + f_t^2 - 2\lambda \eta'_{wt} (i\sqrt{g\lambda} + f_t)$$

$$+\lambda^2 \eta_w'^2 - \lambda \eta_w' t = 0 \quad (\text{A.8})$$

上式之解 f 即刻可求得為

$$f_t = \lambda \eta_w' \quad \text{或} \quad f = \lambda \eta_w + c \quad (\text{A.9})$$

f 中的常數可被併入在 $a_+(\lambda)$ 中，故可去之（或取為零）。

$$\text{相似地，當令 } A(\lambda, t) = a_-(\lambda) e^{-1\sqrt{g\lambda}t+f} \quad (\text{A.10})$$

則亦可得到（A.9）式所示之 f 的解。

因此，得 $A(\lambda, t)$ 之解為

$$\begin{aligned} A(\lambda, t) &= [a_+(\lambda) e^{1\sqrt{g\lambda}t} + a_-(\lambda) e^{-1\sqrt{g\lambda}t}] e^{\lambda\eta_w} \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

今由所考慮的波動之起始條件，如（5.12）式所示者的應用，即刻可得知 $a_+(\lambda) = a_-(\lambda) = 1/2 a(\lambda)$ ，即 Φ_m' 之解為

$$\begin{aligned} \Phi_m' &= \int_0^\infty a(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) e^{\lambda z' + \lambda \eta_w'} \cdot \\ &\quad \cos \sqrt{g\lambda} t d\lambda \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

換言之，在 x, y, z 座標系統下所考慮的波動解 Φ_m 為

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_0^\infty a(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \cos \sqrt{g\lambda} t d\lambda \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

因此， Φ_m' 與 Φ_m 之對應的 Hankel transform ϕ_m' 與 ϕ_m 各為

$$\begin{aligned} \phi_m'(\lambda, z'; t) &= a(\lambda) e^{\lambda z' + \lambda \eta_w'} \cos \sqrt{g\lambda} t \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

$$\text{與} \quad \phi_m(\lambda, z; t) = a(\lambda) e^{\lambda z} \cos \sqrt{g\lambda} t \quad (\text{A.15})$$

至此，僅未知者為 $a(\lambda)$ ，其可由所考慮的波動的起源衝擊條件來處理，即可依（5.11）式與（5.13）式之應用來求之，可寫為

$$\begin{aligned} \phi_m'(\lambda, 0; 0) &= \phi_m(\lambda, \eta_w; 0) = a(\lambda) e^{\lambda \eta_w} \\ &= -\frac{1}{\rho} I_0(\lambda, \eta_w) \\ &= -\frac{1}{2\pi\rho} \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

故得
$$a(\lambda) = -\frac{1}{2\pi\rho} e^{-\lambda\eta_w} \quad (\text{A.17})$$

將 (A. 17) 代入 (A. 13) 式中，最後得所考慮的波動流場解 Φ_m 為

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, z; t) \\ = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) e^{\lambda(z-\eta_w)} \cos \sqrt{g\lambda} t d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

因此，得到與 (5.15) 式相同的結果，故可確論本文所解析的結果正當無誤。

於此刻所欲進行的工作，是另以具體、明晰的解析處理來闡述 5-3 節所得的波動解之適足性，即明確地說明出 (5.23) 式之 η_m 其固定相位點為 (5.24) 式所示之適可性。為能較圓滿地達成此目的，此處吾們以波動流場之整體特性描述的觀點來處理之，即對流場流速解進行解析，述之如下。

首先來對 5-2 節所考慮的波浪水面受衝擊作用所生之波動，推求其流場解 Φ_m 。由 (5.15) 式得，於 $gt^2 / 4r \rightarrow$ 大時，有

$$\begin{aligned}\Phi_m &= -\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) e^{\lambda(z-\eta_w)} \cos(\sqrt{g\lambda}t) d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \rho r^{1/2}} \int_0^\infty \lambda^{1/2} e^{\lambda(z-\eta_w)} \cdot \\ &\quad \left[\cos\left(\lambda r - \sqrt{g\lambda}t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\lambda r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{g\lambda}t - \frac{\pi}{4}\right) \right] d\lambda \\ &= -\frac{gt^2}{2^{5/2} \pi \rho r^3} \exp\left\{-\frac{gt^2}{4r^2}(z-\eta_w)\right\} \cos\left(\frac{gt^2}{4r}\right) \\ &\quad (B.1)\end{aligned}$$

其對應的 η_m 可由上式代入 $(\partial/\partial t)\Phi_m + g\eta_m = 0$ 在 $z = \eta_w$ ，直接求之，並於所考慮之 $gt^2 / 4r \rightarrow$ 大下，得到恰與 (5.20) 式所示者一致的結果。

接著來推求波浪水面受移動衝擊作用所生之波動的流場解 Φ_m ，即 5-3 節所考慮之波動者。在 (5.21) 式所描述的運動座標系統下，則所考慮的 Φ_m 變為

$$\Phi_m = -\frac{g}{2^{5/2} \pi \rho} \int_0^\infty \frac{u^2 du}{(r^2 - 2c r \cos \alpha + c^2 u^2)^{3/2}} \cdot$$

$$\exp \left[\frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)} \left\{ z - \frac{H}{2} \right. \right. \\ \left. \left. \cos \left[k(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2} \cos(\theta + \alpha) + (\sigma - c\sigma^2\cos\theta/g)u - \epsilon \right] \right\} \right] \\ \cos \left[\frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}} \right] \quad (B.2)$$

且其 $(\partial \Phi_m / \partial t)_{z=\eta_w}$ 在如同往昔一般的考慮 $gt^2 / 4r \rightarrow$ 大下，可寫為

$$\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right)_{z=\eta_w} \\ = \frac{g^2}{2^{7/2} \pi \rho} \int_0^\infty \frac{u^3 du}{(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^2} \cdot \\ \sin \left[\frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}} \right] \\ - \left(\frac{g}{2^{5/2} \pi \rho} \int_0^\infty \frac{u^2}{(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{3/2}} \cdot \right. \\ \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \exp \left[\frac{gt^2}{4r_1^2} (z - \eta_w) \right] \right\}_{t=u} \right. \\ \left. \cdot \cos \left[\frac{gu^2}{4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}} \right] \right)_{z=\eta_w} \quad (B.3)$$

至此，由上述之 (B. 2) 式與 (B. 3) 式即刻可清楚地得知，對波動流場整體特性之影響最主要者為 $\varphi(u) = gu^2 / [4(r^2 - 2cur\cos\alpha + c^2u^2)^{1/2}]$ 之固定相位點，即為 $\varphi'(u) = 0$ 者，這當然亦是對其波動水波 $\eta_m = - (1/g) \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right)_{z=\eta_w}$ 者為然，因此 (5. 24) 式之適當性是可被確定的。

參考文獻

- Brebner, A., Helwig, P.C., and Carruthers, J. "Waves produced by ocean-going vessels: a laboratory and field study", Proc. conf. Coastal Eng., 10th, Tokyo, pp.455-465, 1966.
- Chen, Y.Y., "A new analysis on water waves produced by a moving impulse on surface (or called ship waves)", Harbour Technology, vol. 2, pp.69-97, 1986.
- Chester, C., Friedman, N. and Ursell, F. "An extension of the method of steepest descents", Proc. Camb. Phil. Soc. 53, 599-611, 1957.
- Das, M.M. and Johnson, J.W., "Waves generated by large ships and small boats", Proc. Conf. Coastal Eng., 13th, Washington, D.C. pp. 2281-2286, 1970.
- Froude, R.E., "On the leading phenomena of wave-making resistance of ships", Transactions, Institute of Naval Architects, 22, pp. 220-224, 1889.
- Froude, W. "On experiments upon the effect produced on the wave making resistance of ships by length of parallel middle body", Transactions, Institute of Naval Architects, Vol.18, pp.77-87, 1877.
- Guillton, R.S., "The waves generated by a moving body", Transactions, Institute of Naval Architects, 102, pp.157-173, 1960.
- Havelock, T.H., "The propagation of groups of waves in dispersive media, with application to waves on water produced by a traveling disturbance", Proc. Roy. Soc., Ser. A81, pp.398-430, 1908.
- Havelock, T.H., "The wave-making resistance of ship", Proc. R.S. Lond. A. 82, pp.276-300, 1909.
- Havelock, T.H., "The propagation of groups of waves in dispersive media", Cambridge Tracts, No.17, the University Press, Cambridge, 1914.
- Havelock, T.H., "The wave pattern of a doublet in a stream", Proc. Roy. Soc., Ser. A121, pp.515-523, 1928.
- Havelock, T.H., "Ship-waves: The calculation of wave profiles", Proc. Roy. Soc., Ser. A135, 1-13, 1932.
- Havelock, T.H., "Ship waves: their variation with certain systematic changes in form", Proc. Roy. Soc., Ser. A136, pp.465-471, 1932.

- Hay, D., "Ship waves in navigable waterways", Proc. Conf. Coastal Eng., 11th, London, pp.1472-1487, 1968.
- Hogner, E., "A contribution to the theory of ship waves", Ark. Mat., Astron. Fys. 17, pp.1-50, 1922.
- Hovgaard, W. "Diverging waves", Transactions, Institute of Naval Architects, 51, pp.251-263, 1909.
- Inui, T., "On deformation, wave patterns and resonance phenomena of water surface due to a moving disturbance", Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 18, 60-98, 1936.
- Inui, T., "On deformation, wave patterns and resonance phenomena of water surface due to a moving disturbance", Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 18, pp.60-98, 1936.
- Johnson, J.W., "Ship waves in navigation channels", Proc. Conf. Coastal Eng., 6th, Miami Beach, Florida, pp.666-690, 1958.
- Johnson, J.W., "Ship waves in shoaling water", Proc. Conf. Coastal Eng., 11th, London, pp.1488-1498, 1968.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium", Phil. Mag. (5)XXII, pp.252-255, 1887.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "On ship waves", Proceedings, Institute of Mechanical Engineers, pp.409-433, 1887.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "On deep-water two-dimensional waves produced by any given initiating disturbance", Phil. Mag. (6)LXVII, pp.609-619, 1904.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "On the front and rear of a free procession of waves in deep water", Phil. Mag. (6)XLIV, pp.454-470, 1904.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "Deep sea ship-waves", Phil. Mag. (6)LXXI, pp.733-757, 1905.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "Deep sea ship-waves", Phil. Mag. (6)I, pp.1-25, 1906.
- Kelvin, Lord (Sir, W. Thomson), "Initiation of deep sea waves of three cases: (1) From a single displacement; (2) from a group of equal and similar displacements; (3) by a periodically varying surface-pressure", Phil. Mag.(6)I, pp.1-36, 1907.
- Lamb, H. "On wave-trains due to a single impulse", Proc. Inter. Congress of Math., II, pp.279, 1912.

- Lamb, H., "Hydrodynamics", Dover Publications, New York, 1945;
Cambridge University Press, 1932.
- Michell, J.H., "The wave resistance of a ship", Phil. Mag. 5, 45,
1898.
- Morse, P.M. and Feshbach, H., "Methods of theoretical physics",
McGraw-Hill Book Company, Inc. 1978.
- Neumann, J.N., "Recent research on ship waves", In Eighth sym-
posium on Naval Hydrodynamics, eds. M.S. Pleassett, T.Y. Wu, and
S.W. Doroff, pp.519-545, Washington: U.S. Government Printing
Office, 1970.
- Person, W.J. Jr. & M. St. Penis, "On the motion of ship in confused
sea", S. of Naval Architects & Marine Engineers, 1953.
- Peter, A.S., "A new treatment of the ship wave problem", Communi-
cations on Pure and Applied Mathematics. Vol.2, pp.123-148, 1949.
- Rankine, W.J.M., "On waves which travel along with ships", Trans-
actions, Institute of Naval Architecture, Vol.9, pp. 123-142,
1868.
- Salvesen, N., "Five years of numerical naval ship hydrodynamics
at DTNSRDC", J. Ship Research, Vol.25, pp.219-235, 1981.
- Sorensen, R.M., "Ship waves", Tech. Rech. Rep. HEL-12-2, University
of California, Berkeley, California, 1966.
- Sorensen, R.M., "Investigation of ship-generated waves", Proc.
Amer. Soc. Civil Eng., 93(WWI), pp.85-99, 1967.
- Sorensen, R.M., "Stereophotogrammetric analysis of wave surface",
Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 94(HY1), pp.181-194, 1968.
- Sorensen, R.M., "Waves generated by model ship hull", Proc. Amer.
Soc. Civil Eng., 95(WW4), pp.513-538, 1969.
- Sorensen, R.M., "Water waves produced by ship", Proc. Amer. Soc.
Civil Eng., (WW2), pp.254-256, 1973.
- Sorensen, R.M., "Ship-generated waves", Advances in Hydroscience,
Academic press, New York, N.Y., Vol.9, pp. 49-83, 1974.
- Spiegel, M.R., "Theory and problem of complex variables", McGraw-
Hill Book Company, Inc. 1964.
- Stoker, J.J., "Water waves", Institute of mathematical Sciences,
New York University, New York, 1968.
- Ursell, F., "On Kelvin's ship-wave pattern", J. Fluid Mech. 8,
pp.418-431, 1960.