

目錄

一、 前進重力波與駐波 — — — — —	1
二、 非線性重力波之數值解析 — — — — —	41
三、 駐波之數值計算 — — — — —	69
四、 多孔岸壁之港池共振特性研究 — — — — —	91
五、 淺水波之有限元素法 — — — — —	131
六、 台灣鄰近海域潮汐預報數值模式 — — — — —	179

前進重力波與駐波

陳陽益*

莊文傑**

摘 要

於攝動展開法至第五階解下，自由表面單一規則前進重力波與其經全反射所形成之重力駐波，兩波動流場特性間的關連已被本文闡述。依本文所得結果顯示，重力駐波流場的脈動特性，並非僅依其來源的入射波與全反射波之直接線性合成者所能予以充分地描述，得對它們交會間之相互作用所衍生的非線性影響因素給予考慮方可，這才足以說明自由表面單一規則前進重力波與其經全反射而成之重力駐波，兩波動流場所呈現出之脈動特性頗相迥異之因由所在。

* 港灣技術研究所研究員兼組長

**港灣技術研究所助理研究員

一、前 言

衆所皆知，自由表面單一規則前進重力波爲水波波動現象中之基本成份波者，因此，探究水波波動特性而適足地給予描述，則需得先對此基本成份波波動之本質特性有深刻的認識，以爲基礎，自是不待言。雖然如此，於真實海面波動實況中，既使是一單一規則前進波之波動，然由其而迸發出對週遭的衝擊，常是因它受到阻擋而生反射或折射、繞射、淺化等等之額加促進因素所造成的，當然由此所產生的衝擊作用量是包括了這些因素糾纏在一起的結果，而並非祇可由來源的單一規則前進波者所能完全涵蓋；顯然地，此種衍生出的衝擊作用影響中，以單一規則前進波經完全反射而形成駐波者爲最。因此，評估一單一規則前進波經反射形成駐波所生之衝擊，得必要對此前進波與所造成之駐波兩者間的關連先做確切的描述方可；這即表示，由一給定的單一規則前進波，則由其經完全反射而成之駐波所生之衝擊就可被確切地掌握之。

如吾人所熟知的，近二百年來，自由表面單一規則前進重力波，從淺水至深海，由微小振幅至近於極端碎波之整個可存在的領域中各種情況，其波動特性已被相當詳盡地闡述；諸如可見 Cokelet (1977)、Williams (1981)、Rienecker & Fenton (1981)、Chen (1983)與 Lin (1988)等。至於對重力駐波波動特性的探討，相較於單一規則前進重力波者而言，迄今爲數並不多，且其中特定於深

海情況者不少，如見 Penney & Price (1952)、Schwartz & Whitney (1981) 等爲代表；而較廣泛地擴及至有限等水深者，則以 Tadjbakhsh & Keller (1960)、Goda & Kakizaki (1966) 與 Chen (1988) 等較詳之。溯此原因，乃由於對重力駐波之解析其繁雜的程度遠甚於單一規則前進波者之故。更亦此因，所以深入探究單一規則前進波與其經完全反射所成之駐波間的關連，至今幾無人問津。

由於駐波波動是可由單一規則前進波經完全反射而形成，故此兩者之間當然存有直接密切的關連。對此，這如所共知的，往昔皆以直接線性合成 (Linear Superposition) 的方式來對它描述。然，由於水波波動本身具有非線性的本質，故其所呈現出的特性並非純以線性結果所能圓滿地闡論；這尤其是對駐波波動場中，入射與全反射兩波列間會產生非線性相互作用，而更是使然。此種現象是可由單一規則前進波與駐波兩者之波動特性的不同，甚至迥然差異而得知；如前進波之週波率於任何等深水中皆隨其波浪尖銳度之增加而遞增，然重力駐波者却於較深水時隨其波浪尖銳度之增加而遞減，而於較淺水時才反變爲遞增，謂之重力駐波週波率的逆變特性 (Frequency Reversal

Effect)，詳見 Fultz (1962)、Edge & Walters (1964) 之試驗證實。由此可知，欲對單一規則前進重力波與其經完全反射所造成重力駐波間的關連，有較確切的描述，尤其掌握其間因果關係的主要特性趨勢，則得對入射波與反射波間的相互作用所產生的效應有充分地考量方可，如筆者前所探討的兩波列相交會情況般，這亦即是本

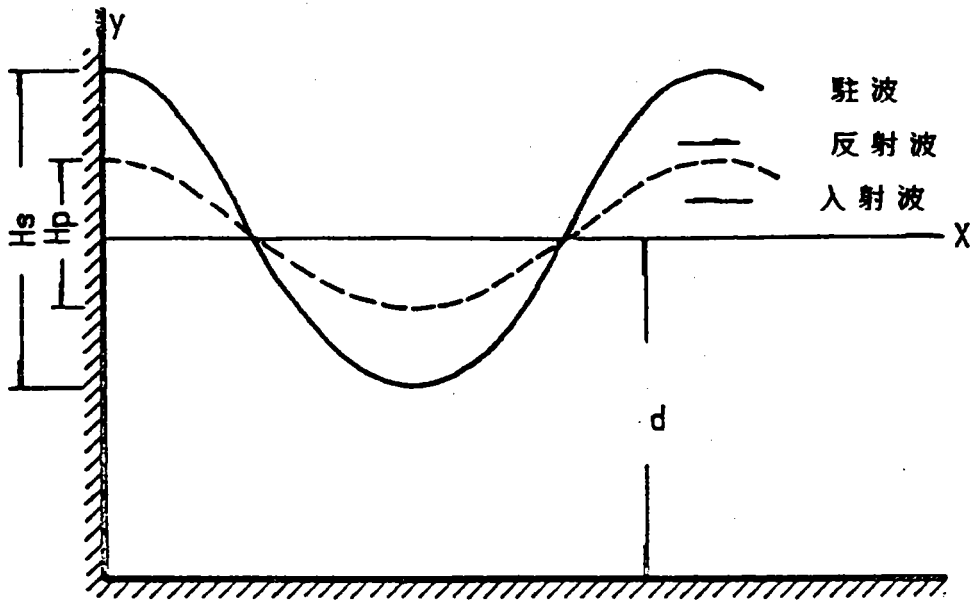
文所必要論述的主旨所在。

雖然均勻等深水中任兩自由表面規則前進重力波列相交會所構成之波動系統，其通案性的流場結構已被闡述，並求得至第三階的解析解，詳見拙作（1989），其中當然含括了重力駐波之特例情況。然，對於單一自由表面規則前進重力波與其經完全反射所形成之重力駐波，其間關連的細節則尚未被深入地探究，針對於此，本文將給予論述之。文中第二節，對均勻等深水中所言的前進波與其經反射所形成的駐波，分別給予其波動系統必要的描述；陳述它們各需滿足的基本控制條件式並無因次化之。第三節，則列述前進重力波與由其所形成之重力駐波者，於其可自然存在的情況下，各自至第五階的解析解，之後，再對它們二者的關連深入地申論之。對單一規則前進重力波與其經完全反射而形成之重力駐波，兩波動流場間基本物理量的關連隨給定的入射單一規則波之波浪條件的變化特性，則於第四節中說明之。第五節，給予本文一些扼要的結語與討論。

二、波動系統之陳述

於二度空間之均勻等深 d 水中，考慮一自由表面單一規則前進重力波列經一直立壁面完全反射形成重力駐波，其波動情況如圖(一)所示。描述此波動系統，今取水平 x 軸恰位於平均靜水位線處，其正方向指完全反射波的傳遞方向（即與入射波之前進方向反向者）；垂直 y 軸是沿著光滑的直立壁面且向上取正， d 為波動之平均靜水深；見圖

(一)中所定義。



圖(一) 波動系統示意圖

假設流體為不可壓縮與無黏性者 (Incompressible and Inviscid)，且其運動為非旋轉性的 (Irrotational)，則波動下之流體運動場中可定義一流速勢函數 (Velocity potential)，俾於滿足波動之所有的必要條件下，來描述波動的情況。依此，本文所欲闡論的單一規則前進重力波與其經反射而形成的重力駐波間的關連，如圖(一)所示者，得分波動兩種情況來陳述之，於下。

(一)單一規則前進重力波情況

對原先存在於平均靜水深 d 中之單一規則前進重力波，即尚未經反射影響的入射波者，以 ϕ 表示其波動場中之流速勢函數

，則其基本控制方程式為

$$\nabla^2 \phi_p = \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

此處 $\phi_p = \phi_p(x, y, t)$ ， t 為時間。

至於此波動之邊界條件有：

(1) 在底部 $y = -d$ 處之不透水性 (Rigid Bottom)

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial y} = 0, \quad y = -d \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

(2) 在波動表面 $y = \eta_p$ 處，其運動與動力邊界條件 (The Kinematic and Dynamic Boundary Conditions) 各為

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial y} = \frac{d\eta_p}{dt} = \frac{\partial \eta_p}{\partial t} + \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial \eta_p}{\partial x}, \quad y = \eta_p \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\text{與 } \frac{p_p}{\rho} + \frac{\partial \phi_p}{\partial t} + gy + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad y = \eta_p \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

上式中 $\eta_p = \eta_p(x, t)$ 為以 x 軸為基準的單一規則前進重力波之波動水位，即其波形者， p_p 為此波動場中之壓力， ρ 為流體之密度， g 為重力加速度。注意，關於此波動流場解中僅涉及到時間 t 的項 (包括任意常數) 已被併入在 ϕ_p 中。

(3)另，由於 x 軸是被取在平均靜止的水位線處，因此，依質量守衡 (Conservation of Mass) 及波動之空間週期性 (Periodicity in Space and Time)，再有一必要的條件式為

$$\int_0^L \eta_p (x, t) dx = 0 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

L 為單一規則前進重力波之波長，即為圖(一)中所示之入射與全反射波共有的波長，亦為由此兩波之空間疊合而成的重力駐波之波長。

(二)重力駐波情況

如單一規則前進重力波情況，以 $\phi_s (x, t)$ 為入射波與其經直立壁面之全反射波所形成之重力駐波流場的流速勢函數，則此波動場必要滿足的基本必要條件式各為

$$\nabla^2 \phi_s = \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

(1)在底部 $y = -d$ 與壁面 y 軸處

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial y} = 0 \quad , \quad y = -d \quad ; \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = 0 \quad (2.7)$$

(2)在其波動表面 $y = \eta_s$ 處之運動與動力邊界條件

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial y} = \frac{d\eta_s}{dt} = \frac{\partial \eta_s}{\partial t} + \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial \eta_s}{\partial x}, \quad y = \eta_s \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

與
$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} + gy + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad y = \eta_s$$

\dots\dots\dots (2.9)

(3) 依質量守衡及重力駐波波動的空間週期性

$$\int_0^L \eta_s(x, t) dx = 0 \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

上式中 $\eta_s = \eta_s(x, t)$ 為入射波與其經直立壁面之全反射波相交會後所形成之重力駐波的波動水位，即其波形且以 x 軸為其基準線，如圖(一)中所示； p_s 為此波動場中之壓力。如同單一規則前進重力波者般，有關重力駐波波動流場解中僅涉及到時間 t 之項（包括任意常數）已被併入在 ϕ_s 中。

為對上述之兩波動情況方便進行其流場解析與描述起見，今將以無因次化型式來處理之。依入射波與全反射波在其脈動所佔領的等波長內之會合而形成駐波之同空間週期性的波動下，以 $k = 2\pi/L$ 為它們所共同的波數（Wave Number），而 $\sigma_p = 2\pi/T_p$ 與 $\sigma_s = 2\pi/T_s$ 各為前進入射波與所造成之駐波的週波率（Angular Frequency），其中 T_p 與 T_s 各為所對應的週期；注意，於兩波相交會的波動場中會發生週波率影響效應，見拙作（1989），故此處之 σ_p 與 σ_s （或 T_p 與 T_s ）間

稍有差異，亦因如此，單一自由表面規則前進重力波與駐波兩者之週波率變化特性方有不同，如前言中所述之前人研究結果，或參見下文之解析描述。於這些基本量的引入下，則本節所述之單一規則前進重力波與其經全反射所形成之駐波兩情況，其有關之物理量的無因次型式，可被寫之

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{x} &= kx, \bar{y} = ky, \bar{t}_p = \sigma_p t, \bar{t}_s = \sigma_s t, \bar{d} = kd \\
 \bar{\phi}_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}_p) &= \frac{k^2}{\sqrt{gk}} \phi_p(x, y, t), \\
 \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}_s) &= \frac{k^2}{\sqrt{gk}} \phi_s(x, y, t) \\
 \bar{\eta}_p(\bar{x}, \bar{t}_p) &= k\eta_p(x, t), \bar{\eta}_s(\bar{x}, \bar{t}_s) = k\eta_s(x, t), \\
 \bar{H}_p &= kH_p, \bar{H}_s = kH_s \\
 \bar{p}_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}_p) &= \frac{k}{\rho g} p_p(x, y, t), \bar{p}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}_s) \\
 &= \frac{k}{\rho g} p_s(x, y, t), \bar{\omega}_p = \frac{\sigma_p}{\sqrt{gk}}, \bar{\omega}_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{gk}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11)$$

上式中 H_p 與 H_s 各為單一規則前進重力波與其經全反射所形成之駐波的波高，且式中之符號上有“—”者表示無因次量；為簡潔起見，於下文中將“—”省去，如無特別說明者，均表示為無因次化者。因此，單一規則前進重力波與其經全反射而形成之駐波，兩情況之波動控制方程式 (2.1) ~ (2.5) 式與

(2.6)~(2.10) 式，於 (2.11) 式之無因次化的引入下，可分別被寫為

1. 單一規則前進重力波情況（即尚未被反射的入射波者）：

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \phi_p &= 0 \quad , \quad -d \leq y \leq \eta_p \\
 \frac{\partial \phi_p}{\partial y} &= 0 \quad , \quad y = -d \\
 \frac{\partial \phi_p}{\partial y} &= \omega_p \frac{\partial \eta_p}{\partial t_p} + \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial \eta_p}{\partial x} \quad , \quad y = \eta_p \\
 p_p + y + \omega_p \frac{\partial \phi_p}{\partial t_p} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial y} \right)^2 \right] &= 0 \quad , \quad y = \eta_p \\
 \int_0^{2\pi} \eta_p dx &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.12)$$

2. 重力駐波情況：

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \phi_s &= 0 \quad , \quad -d \leq y \leq \eta_s \\
 \frac{\partial \phi_s}{\partial y} &= 0 \quad ; \quad y = -d \quad ; \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = 0 \\
 \frac{\partial \phi_s}{\partial y} &= \omega_s \frac{\partial \eta_s}{\partial t_s} + \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \quad , \quad y = \eta_s \\
 p_s + y + \omega_s \frac{\partial \phi_s}{\partial t_s} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right)^2 \right] &= 0 \quad , \quad y = \eta_s \\
 \int_0^{2\pi} \eta_s dx &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.13)$$

三、波動流場解析

由上節列述的單一規則前進重力波與其經全反射而成的駐波，兩波動之所有必要滿足的控制條件式可知，它們是爲非線性問題者。因此一般而言，欲求其完全滿足之正確解是極爲困難的，或可言，於數學解析上，至目前爲止這猶尚不太可能；當然這也是對有關的週期性規則波動之研究的主要障礙所在。是故無論以純解析或數值求解上，對如此之波動的描述，唯賴求其近似解來進行之。這也是當然的，本文欲對自由表面單一規則前進重力波與其經全反射而形成之駐波，兩波動的流場進行解析並進而闡述其間的關連，亦得以此方式來處理；今依一般所循用的傳統攝動解析法，來對其至第五階近似的情況分述於下：

(一)自由表面單一規則前進重力波之流場解

依攝動解析之級數展開，單一規則前進重力波流場中之各物理量，則可被寫之爲

$$\left. \begin{aligned} \phi_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_p^n \phi_{pn} \\ \eta_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_p^n \eta_{pn} \\ p_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_p^n p_{pn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\omega_p = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \omega_{pn}$$

式中 $\epsilon_p^n \phi_{pn}$ 、 $\epsilon_p^n \eta_{pn}$ 、 $\epsilon_p^n p_{pn}$ 、 $\epsilon_p^n \omega_{pn}$ 等表示此波動場中各對應物理量之第 n 階解， ϵ_p 為其攝動展開之參數是正比於其波浪尖銳度。

今考慮單一規則前進重力波，或言圖(一)中之入射波，是具自由表面波動者 (Free Surface Waves)，即其波動表面處之壓力是等於大氣常壓者，亦即是

$$p_p = 0, \quad y = \eta_p \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

將 (3.1) 式及自由表面條件 (3.2) 式代入其波動條件式 (2.12) 各式中，且依 Taylor 級數展開在 $y = 0$ 來滿足其表面波形 $y = \eta_p$ 處之邊界條件，則可得 ϵ_p 之各階次的控制方程式，因而可逐次地求解出所考慮的波動流場由低階至高階的解析解。至第五階 (即至 ϵ_p^5 者) 的自由表面單一規則前進重力波之流場解的求解過程，請詳見拙作 (1988) 之處理，此處為簡便論述起見，謹將其結果引述於下。

(1) 第一階 (或線性) 解

$$\phi_{p1} = - \frac{1}{\omega_o} \frac{\cosh (d+y)}{\cosh d} \sin (x+t_p) \quad \dots\dots\dots (3.3a)$$

$$\eta_{p1} = \cos (x+t_p) \quad \dots\dots\dots (3.3b)$$

$$\omega_{p0}^2 = \omega_0^2 = \tanh d \quad \dots\dots\dots (3.3c)$$

(2)第二階解

$$\begin{aligned} \phi_{p2} = & -\frac{1}{4} (\omega_0^{-3} - \omega_0) t_p - \frac{3}{8} (\omega_0^{-7} - \omega_0) \\ & \cdot \frac{\cosh 2(d+y)}{\cosh 2d} \sin 2(x+t_p) \quad \dots\dots\dots (3.4a) \end{aligned}$$

$$\eta_{p2} = \frac{1}{4} (3\omega_0^{-6} - \omega_0^{-2}) \cos 2(x+t_p) \quad \dots\dots\dots (3.4b)$$

$$\omega_{p1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.4c)$$

(3)第三階解

$$\begin{aligned} \phi_{p3} = & -\frac{1}{64} (9\omega_0^{-13} + 5\omega_0^{-9} - 53\omega_0^{-5} + 39\omega_0^{-1}) \\ & \cdot \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \sin 3(x+t_p) \quad \dots\dots\dots (3.5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{p3} = & \frac{1}{16} (3\omega_0^{-8} + 8\omega_0^{-4} - 9) \cos(x+t_p) + \frac{1}{64} (27\omega_0^{-12} \\ & - 9\omega_0^{-8} + 9\omega_0^{-4} - 3) \cos 3(x+t_p) \quad \dots\dots\dots (3.5b) \end{aligned}$$

$$\omega_{p2} = \frac{1}{16} (9\omega_0^{-7} - 10\omega_0^{-3} + 9\omega_0) \quad \dots\dots\dots (3.5c)$$

(4)第四階解

$$\phi_{p4} = -\frac{1}{64} (9\omega_0^{-15} - 45\omega_0^{-11} + 73\omega_0^{-7} - 55\omega_0^{-3} + 18\omega_0) t_p$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{768} (81\omega_0^{-19} + 135\omega_0^{-15} - 810\omega_0^{-11} - 182\omega_0^{-7} \\
& + 537\omega_0^{-3} - 145\omega_0) \frac{\cosh 2(d+y)}{\cosh 2d} \sin 2(x+t_p) \\
& + \frac{1}{3072} \frac{1}{5+\omega_0^4} (-810\omega_0^{-19} - 1512\omega_0^{-15} + 15246\omega_0^{-11} \\
& - 19744\omega_0^{-7} + 2962\omega_0^{-3} + 3464\omega_0 + 394\omega_0^5) \\
& \cdot \frac{\cosh 4(d+y)}{\cosh 4d} \sin 4(x+t_p) \dots\dots\dots (3.6a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{p4} = & -\frac{1}{384} (81\omega_0^{-18} + 54\omega_0^{-14} - 1152\omega_0^{-10} + 826\omega_0^{-6} \\
& - 129\omega_0^{-2}) \cos 2(x+t_p) - \frac{1}{384} (135\omega_0^{-14} - 1656\omega_0^{-10} \\
& + 2358\omega_0^{-6} - 768\omega_0^{-2} - 197\omega_0^2) \cos 4(x+t_p) \\
& - \frac{1}{768} \frac{1}{5+\omega_0^4} (-810\omega_0^{-18} - 1512\omega_0^{-14} + 15246\omega_0^{-10} \\
& - 19744\omega_0^{-6} + 2962\omega_0^{-2} + 3464\omega_0^2 + 394\omega_0^6) \cos 4(x+t_p) \\
& \dots\dots\dots (3.6b)
\end{aligned}$$

$$\omega_{p3} = 0 \dots\dots\dots (3.6c)$$

(5)第五階解

$$\begin{aligned}
\phi_{p5} = & -\frac{1}{4096} \frac{1}{5+\omega_0^4} (-1215\omega_0^{-25} - 4293\omega_0^{-21} + 18369\omega_0^{-17} \\
& + 30531\omega_0^{-13} - 78069\omega_0^{-9} + 39609\omega_0^{-5} - 397\omega_0^{-1} - 2487\omega_0^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \sin 3(x+t_p) - \frac{1+10\omega_0^4+5\omega_0^8}{4096(5+\omega_0^4)(5+3\omega_0^4)} \\
& \cdot (2025\omega_0^{-25} - 11880\omega_0^{-21} + 20097\omega_0^{-17} - 6280\omega_0^{-13} \\
& - 9445\omega_0^{-9} + 4400\omega_0^{-5} + 1083\omega_0^{-1}) \frac{\cosh 5(d+y)}{\cosh 5d} \\
& \cdot \sin 5(x+t_p) \dots\dots\dots (3.7a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{p5} = & \frac{1}{3072} (81\omega_0^{-20} + 891\omega_0^{-16} - 540\omega_0^{-12} + 6016\omega_0^{-8} \\
& - 7437\omega_0^{-4} + 2925) \cos(x+t_p) \\
& + \frac{1}{4096} \frac{1}{5+\omega_0^4} (-3645\omega_0^{-24} - 8019\omega_0^{-20} + 66339\omega_0^{-16} \\
& - 23499\omega_0^{-12} + 7137\omega_0^{-8} - 5985\omega_0^{-4} + 153 + 351\omega_0^4) \\
& \cdot \cos 3(x+t_p) + \frac{1}{12288(5+\omega_0^4)(5+3\omega_0^4)} \\
& \cdot (30375\omega_0^{-24} + 44550\omega_0^{-20} + 129330\omega_0^{-16} - 2490\omega_0^{-12} \\
& - 19480\omega_0^{-8} + 13090\omega_0^{-4} - 2850 - 750\omega_0^4 + 225\omega_0^8) \\
& \cdot \cos 5(x+t_p) \dots\dots\dots (3.7b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{p4} = & \frac{1}{1024} (81\omega_0^{-19} - 603\omega_0^{-15} + 3618\omega_0^{-11} - 3662\omega_0^{-7} \\
& + 1869\omega_0^{-3} - 663\omega_0) \dots\dots\dots (3.7c)
\end{aligned}$$

以上所列之自由表面單一規則前進重力波至第五階的流場解，於所選用的攝動展開參數做適當的轉換處理下，是可得與Fenton (1985

) 之以穩定化運動 (Steady Motion) 處理下所解出的結果完全一致之，詳情參見拙作 (1988) 之說明。

(二) 重力駐波之流場解

如同自由表面單一規則前進重力波般，由其經直立壁面之全反射所形成之重力駐波的波動流場中，其有關的各物理量可依攝動解析之級數展開為

$$\left. \begin{aligned} \phi_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_s^n \phi_{sn} \\ \eta_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_s^n \eta_{sn} \\ p_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_s^n p_{sn} \\ \omega_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_s^n \omega_{sn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

式中 $\epsilon_s^n \phi_{sn}$ 、 $\epsilon_s^n \eta_{sn}$ 、 $\epsilon_s^n p_{sn}$ 、 $\epsilon_s^n \omega_{sn}$ 等表示重力駐波波動場中各對應物理量之第 n 階解，而 ϵ_s 為其攝動展開之參數是正比於其波浪尖銳度。

雖然所考慮的重力駐波是由自由表面單一規則前進重力波經全反射所形成，然其表面波動的情況却與來源的前進波者不同，尤其是入射與反射波間存有非線性相互作用更是使然。因此，如

筆者 (1988) 先前之探討般，在考慮重力駐波可自然存在下，或以 Fultz (1962)、Goda & Kakizaki (1966) 之試驗結果的引證下，可給定其波動表面處之壓力尚爲一未知量者 (注意；並未排除自由表面型態，如深海情況就是此型態者)，即以

$$p_s = p_s (x, t), \quad y = \eta_s \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

將 (3.8) 式及自由表面條件 (3.9) 式代入重力駐波波動條件 (2.13) 各式中，且如同上述之對前進波者的解析處理般，則重力駐波波動流場至第五階解 (即至 ϵ_s^5 者)，可被列述於下，或詳見拙作 (1988)。

(1) 第一階 (或線性) 解

$$\phi_{s1} = -\frac{1}{\omega_0} \frac{\cosh (d+y)}{\cosh d} \cos x \sin t_s \quad \dots\dots\dots (3.10a)$$

$$\eta_{s1} = \cos x \cos t_s \quad \dots\dots\dots (3.10b)$$

$$\omega_{s0}^2 = \omega_0^2 = \tanh d \quad \dots\dots\dots (3.10c)$$

$$p_{s1} (x, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.10d)$$

(2) 第二階解

$$\begin{aligned} \phi_{s2} = & -\frac{1}{8} (\omega_0^{-3} - \omega_0) t_s + \frac{1}{16} (\omega_0^{-3} + 3\omega_0) \sin 2t_s \\ & - \frac{3}{16} (\omega_0^{-7} - \omega_0) \frac{\cosh 2 (d+y)}{\cosh 2d} \cos 2x \sin 2t_s, \quad (3.11a) \end{aligned}$$

$$\eta_{s2} = \frac{1}{8} (\omega_0^{-2} + \omega_0^2) \cos 2x + \frac{1}{8} (3\omega_0^{-6} - \omega_0^{-2}) \cos 2x \cos 2t_s, \quad \dots\dots\dots (3.11b)$$

$$\omega_{s1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.11c)$$

$$p_{s2}(x, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.11d)$$

(3)第三階解

$$\begin{aligned} \phi_{s3} = & \frac{1}{256} (9\omega_0^{-9} + 62\omega_0^{-5} - 31\omega_0^{-1}) \frac{\cosh(d+y)}{\cosh d} \cos x \sin 3t_s \\ & - \frac{1}{256} (3\omega_0^{-9} + 9\omega_0^{-5} - 5\omega_0^{-1} - 13\omega_0^3 + 6\omega_0^7) \\ & \cdot \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \cos 3x \sin t_s - \frac{1}{256} (9\omega_0^{-13} + 5\omega_0^{-9} \\ & - 53\omega_0^{-5} + 39\omega_0^{-1}) \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \cos 3x \sin 3t_s \quad (3.12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{s3} = & \frac{1}{64} (3\omega_0^{-8} + 6\omega_0^{-4} - 5 + 2\omega_0^4) \cos x \cos t_s \\ & + \frac{1}{256} (-3\omega_0^{-8} - 18\omega_0^{-4} + 5) \cos x \cos 3t_s \\ & + \frac{1}{256} (27\omega_0^{-8} + 81\omega_0^{-4} - 45 + 3\omega_0^4 + 6\omega_0^8) \cos 3x \cos t_s \\ & + \frac{1}{256} (27\omega_0^{-12} - 9\omega_0^{-8} + 9\omega_0^{-4} - 3) \cos 3x \cos 3t_s \quad (3.12b) \end{aligned}$$

$$\omega_{s2} = \frac{1}{64} (9\omega_0^{-7} - 12\omega_0^{-3} - 3\omega_0 - 2\omega_0^5) \dots\dots\dots (3.12c)$$

$$p_{s3} (x, t) = 0 \dots\dots\dots (3.12d)$$

(4) 第四階解

$$\begin{aligned} \phi_{s4} = & -\frac{1}{512} (9\omega_0^{-15} - 45\omega_0^{-11} + 75\omega_0^{-7} - 45\omega_0^{-3} + 8\omega_0 - 2\omega_0^5)t_s \\ & + \frac{1}{2048} (-9\omega_0^{-11} + 299\omega_0^{-7} - 119\omega_0^{-3} - 87\omega_0 + 12\omega_0^5)\sin 2t_s \\ & + \frac{1}{4096} (18\omega_0^{-15} + 207\omega_0^{-11} - 185\omega_0^{-7} - 235\omega_0^{-3} + 67\omega_0)\sin 4t_s \\ & + \frac{1}{6144} (1 + \omega_0^4) (81\omega_0^{-19} + 54\omega_0^{-15} - 171\omega_0^{-11} + 469\omega_0^{-7} \\ & - 184\omega_0^{-3} + 81\omega_0 + 54\omega_0^5) \frac{\cosh 2(d+y)}{\cosh 2d} \cos 2x \sin 2t_s \\ & + \frac{1}{6144} \frac{(1 + \omega_0^4)}{(3 + 4\omega_0^4)} (162\omega_0^{-15} + 2214\omega_0^{-11} - 1926\omega_0^{-7} \\ & - 670\omega_0^{-3} + 796\omega_0) \frac{\cosh 2(d+y)}{\cosh 2d} \cos 2x \sin 4t_s \\ & + \frac{1}{6144} \frac{1}{(3 + \omega_0^4)} (-81\omega_0^{-15} - 648\omega_0^{-11} - 207\omega_0^{-7} \\ & + 4502\omega_0^{-3} - 1743\omega_0 - 1060\omega_0^5 + 207\omega_0^9 + 54\omega_0^{13}) \cdot \\ & \frac{\cosh 4(d+y)}{\cosh 4d} \cos 4x \sin 2t_s + \frac{1}{24576} \frac{1}{(5 + \omega_0^4)} (-810\omega_0^{-19} \end{aligned}$$

$$-1512\omega_0^{-15} + 15246\omega_0^{-11} - 19744\omega_0^{-7} + 2962\omega_0^{-3} + 3464\omega_0 \\ + 394\omega_0^5) \frac{\cosh 4(d+y)}{\cosh 4d} \cos 4x \sin 4t_s \dots\dots\dots (3.13a)$$

$$\eta_{s4} = -\frac{1}{1024} (9\omega_0^{-10} - 96\omega_0^{-6} - 56\omega_0^{-2} + 70\omega_0^2 + 15\omega_0^6 \\ - 6\omega_0^{10}) \cos 2x + \frac{1}{1024} (18\omega_0^{-14} + 81\omega_0^{-10} + 66\omega_0^{-6} + 2\omega_0^{-2} \\ - 66\omega_0^2 + 21\omega_0^6 + 6\omega_0^{10}) \cos 4x + \frac{1}{3072} (-81\omega_0^{-18} - 54\omega_0^{-14} \\ + 423\omega_0^{-10} - 583\omega_0^{-6} + 108\omega_0^{-2} - 195\omega_0^2 - 18\omega_0^6) \cos 2x \cos 2t_s \\ + \frac{1}{3072} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (-81\omega_0^{-14} - 1053\omega_0^{-10} + 351\omega_0^{-6} \\ - 283\omega_0^{-2} - 6\omega_0^2) \cos 2x \cos 4t_s + \frac{1}{3072} \frac{1}{(3+\omega_0^4)} (324\omega_0^{-14} \\ + 2484\omega_0^{-10} - 1152\omega_0^{-6} - 2072\omega_0^{-2} + 1092\omega_0^2 + 420\omega_0^6 \\ - 72\omega_0^{10}) \cos 4x \cos 2t_s + \frac{1}{6144} \frac{1}{(5+\omega_0^4)} (810\omega_0^{-18} \\ + 162\omega_0^{-14} + 1044\omega_0^{-10} - 524\omega_0^{-6} + 2\omega_0^{-2} + 42\omega_0^2) \cos 4x \cos 4t_s \\ \dots\dots\dots (3.13b)$$

$$\omega_{s3} = 0 \dots\dots\dots (3.13c)$$

$$p_{s4}(x, t) = 0 \dots\dots\dots (3.13d)$$

(5)第五階解

$$\begin{aligned}
\phi_{s5} = & \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (-486\omega_0^{-21} - 5292\omega_0^{-17} + 21969\omega_0^{-13} \\
& + 27174\omega_0^{-9} - 14304\omega_0^{-5} - 59476\omega_0^{-1} + 8053\omega_0^3 - 9838\omega_0^7 \\
& - 2040\omega_0^{11}) \frac{\cosh(d+y)}{\cosh d} \cos x \sin 3t_s \\
& + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (405\omega_0^{-21} + 8100\omega_0^{-17} + 594\omega_0^{-13} \\
& - 35788\omega_0^{-9} + 10757\omega_0^{-5} - 352\omega_0^{-1} - 1828\omega_0^3) \cdot \\
& \frac{\cosh(d+y)}{\cosh d} \cos x \sin 5t_s + \frac{1}{65536} \frac{(1+3\omega_0^4)}{(3+\omega_0^4)} (162\omega_0^{-21} \\
& + 594\omega_0^{-17} + 1251\omega_0^{-13} - 2359\omega_0^{-9} - 17816\omega_0^{-5} + 11064\omega_0^{-1} \\
& + 2419\omega_0^3 - 1375\omega_0^7 - 48\omega_0^{11} - 36\omega_0^{15}) \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \cos 3x \sin t_s \\
& + \frac{1}{65536} \frac{(1+3\omega_0^4)}{(3+4\omega_0^4)(3+\omega_0^4)(5+\omega_0^4)} (10935\omega_0^{-25} \\
& + 24057\omega_0^{-21} - 42687\omega_0^{-17} + 41229\omega_0^{-13} + 140343\omega_0^{-9} \\
& - 367617\omega_0^{-5} - 150973\omega_0^{-1} + 134903\omega_0^3 + 38206\omega_0^7 \\
& - 12028\omega_0^{11} - 2736\omega_0^{15}) \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \cos 3x \sin 3t_s \\
& + \frac{1}{65536} \frac{(1+3\omega_0^4)}{(3+4\omega_0^4)(5+\omega_0^4)(2+9\omega_0^4)} (4050\omega_0^{-21} \\
& + 102735\omega_0^{-17} + 50445\omega_0^{-13} - 483682\omega_0^{-9} + 289028\omega_0^{-5} \\
& + 201267\omega_0^{-1} - 112707\omega_0^3 - 26048\omega_0^7) \frac{\cosh 3(d+y)}{\cosh 3d} \cos 3x \sin 5t_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{65536} \frac{(1+10\omega_0^4+5\omega_0^8)}{(3+\omega_0^4)(3+5\omega_0^4)} (-243\omega_0^{-21} - 81\omega_0^{-17} \\
& - 1107\omega_0^{-13} + 7611\omega_0^{-9} - 8033\omega_0^{-5} + 1481\omega_0^{-1} + 279\omega_0^3 \\
& - 15\omega_0^7 + 144\omega_0^{11} - 36\omega_0^{15}) \frac{\cosh 5(d+y)}{\cosh 5d} \cos 5x \sin t_s \\
& + \frac{1}{65536} \frac{(1+10\omega_0^4+5\omega_0^8)}{(5+\omega_0^4)(5+3\omega_0^4)} (-2025\omega_0^{-25} + 11880\omega_0^{-21} \\
& - 20097\omega_0^{-17} + 6280\omega_0^{-13} + 9445\omega_0^{-9} - 4400\omega_0^{-5} \\
& - 1083\omega_0^{-1}) \frac{\cosh 5(d+y)}{\cosh 5d} \cos 5x \sin 5t_s, \quad \dots (3.14a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{s5} = & \frac{1}{49152} (81\omega_0^{-20} + 675\omega_0^{-16} - 2025\omega_0^{-12} + 4270\omega_0^{-8} \\
& - 3819\omega_0^{-4} + 1155 - 2397\omega_0^4 - 240\omega_0^8 + 108\omega_0^{12}) \cos x \cos t_s \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (486\omega_0^{-20} + 4536\omega_0^{-16} - 29889\omega_0^{-12} \\
& - 37254\omega_0^{-8} - 5576\omega_0^{-4} + 65224 - 3453\omega_0^4 + 7086\omega_0^8 \\
& + 1656\omega_0^{12}) \cos x \cos 3t_s + \frac{1}{196608} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (-243\omega_0^{-20} \\
& - 4212\omega_0^{-16} - 4158\omega_0^{-12} + 16476\omega_0^{-8} + 781\omega_0^{-4} + 1728 \\
& + 60\omega_0^4) \cos x \cos 5t_s + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+\omega_0^4)} (-1458\omega_0^{-20} \\
& - 8748\omega_0^{-16} + 24543\omega_0^{-12} + 15426\omega_0^{-8} + 8709\omega_0^{-4} + 16812 \\
& - 35739\omega_0^4 - 7878\omega_0^8 + 3069\omega_0^{12} + 516\omega_0^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +108\omega_0^{20}) \cos 3x \sin t_s + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)(3+\omega_0^4)(5+\omega_0^4)} (\\
& -32805\omega_0^{-24} - 126846\omega_0^{-20} + 75816\omega_0^{-16} + 45684\omega_0^{-12} \\
& - 475038\omega_0^{-8} + 203088\omega_0^{-4} - 129084 - 302580\omega_0^4 - 196629\omega_0^8 \\
& - 56322\omega_0^{12} - 3348\omega_0^{16} + 432\omega_0^{20}) \cos 3x \cos 3t_s \\
& + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)(5+\omega_0^4)(2+9\omega_0^4)} (-7290\omega_0^{-20} \\
& - 187353\omega_0^{-16} - 337770\omega_0^{-12} - 75609\omega_0^{-8} - 472110\omega_0^{-4} \\
& + 25773 + 13170\omega_0^4 - 5211\omega_0^8 - 960\omega_0^{12}) \cos 3x \cos 5t_s \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(3+\omega_0^4)(3+5\omega_0^4)} (18225\omega_0^{-20} + 188325\omega_0^{-16} \\
& + 481140\omega_0^{-12} + 848160\omega_0^{-8} - 159450\omega_0^{-4} - 1282730 \\
& + 94140\omega_0^4 + 422460\omega_0^8 + 29265\omega_0^{12} - 18675\omega_0^{16} \\
& + 3240\omega_0^{20} + 540\omega_0^{24}) \cos 5x \cos t_s \\
& + \frac{1}{24576} \frac{1}{(3+\omega_0^4)(5+\omega_0^4)} (2430\omega_0^{-20} + 34101\omega_0^{-16} \\
& - 27540\omega_0^{-12} + 178194\omega_0^{-8} - 133225\omega_0^{-4} - 182049 \\
& + 91210\omega_0^4 + 45360\omega_0^8 - 7563\omega_0^{12} - 2358\omega_0^{16}) \cos 5x \cos 3t_s \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(5+\omega_0^5)(5+3\omega_0^4)} (30375\omega_0^{-24} + 44550\omega_0^{-20} \\
& + 129330\omega_0^{-16} - 2490\omega_0^{-12} - 19480\omega_0^{-8} + 13090\omega_0^{-4} \\
& - 2850 - 750\omega_0^4 + 225\omega_0^8) \cos 5x \cos 5t_s, \quad \dots\dots (3.14b)
\end{aligned}$$

$$\omega_{s4} = \frac{1}{16384} (81\omega_0^{-19} - 675\omega_0^{-15} + 1197\omega_0^{-11} - 2730\omega_0^{-7} \\ + 747\omega_0^{-3} - 363\omega_0 + 723\omega_0^5 + 96\omega_0^9 - 36\omega_0^{13}) \\ \dots\dots\dots (3.14c)$$

$$p_{s5} (x , t) = \frac{1}{24576} \frac{1}{(3 + \omega_0^4) (5 + \omega_0^4)} (2430\omega_0^{-20} \\ + 7101\omega_0^{-16} - 104715\omega_0^{-12} + 167439\omega_0^{-8} + 72345\omega_0^{-4} \\ - 215279 + 33095\omega_0^4 + 44205\omega_0^8 - 4563\omega_0^{12} \\ - 2058\omega_0^{16}) \cos 5x \cos 3t, \quad \dots\dots\dots (3.14d)$$

以上所列之重力駐波波動流場至第五階解，至第三階時與 Tadjbakhsh & Keller (1960) 者完全一致，而至第四階時則與 Goda & Kakizaki (1966) 者雷同，詳見拙作 (1988) 中與往昔者之比較與印證的論述。

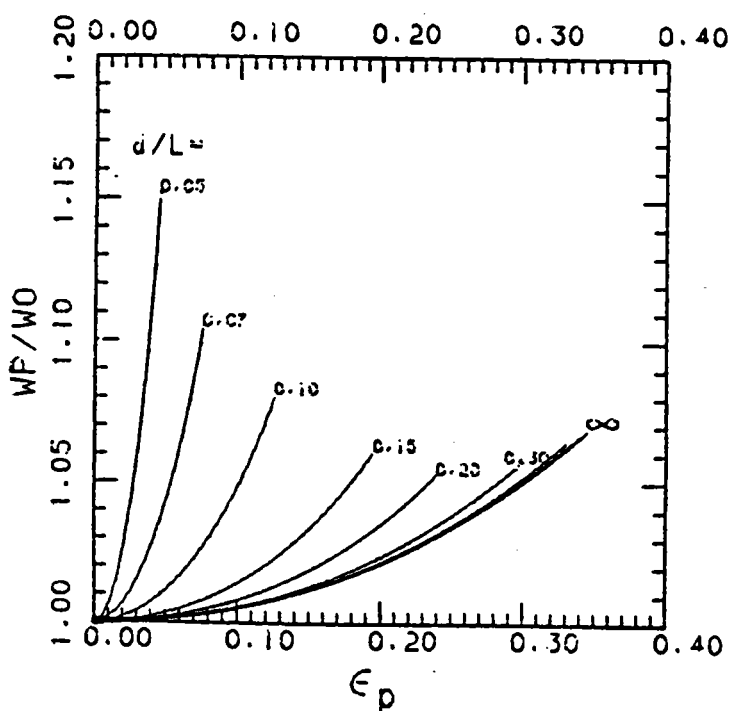
(三)比較與關連

由上二小節所列之自由表面單一規則前進重力波與其經全反射所形成之重力駐波，兩波動流場同至第 5 階之解可知，它們間的波動現象是相當差異的。其中可被直接觀察得知之較顯著者有：

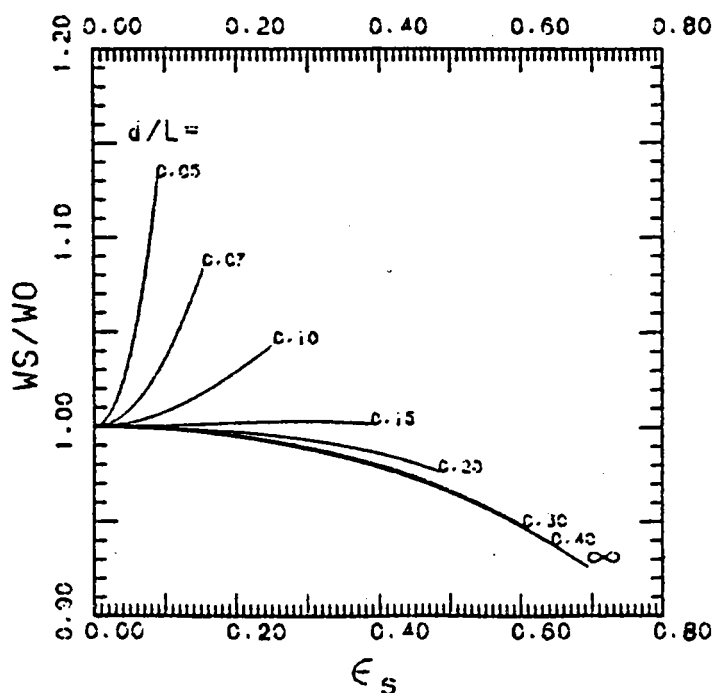
- (1) 波形之時空脈動變化，前進波者是時間與空間連在一起的起伏，且其對時間或空間之週期平均皆同是為零；然對駐波者，其

是時間與空間分隔式的脈動，且對時間之週期平均是隨空間位置而變，並未如對空間之週期平均般於任一瞬間皆為零。

- (2) 週波率變化特性，依此兩波動流場至第五階解，則其週波率 ω_p 與 ω_s 隨其各自的攝動展開參數 ϵ_p 與 ϵ_s (或各自的波浪尖銳度) 之變化，即刻可被描述，如圖(二)所示。由此可明顯地得知，前進波者其週波率於各種水深中皆隨其波浪尖銳度之增加而遞增；然駐波者却於水深較深時反有隨之遞減的逆變現象。



圖(二) — a 前進重力波週波率之變化特性



圖(二)－b 重力駐波週波率之變化特性

雖然由上述之比較明確地得知，自由表面單一規則前進重力波與重力駐波兩者之波動特性是頗相迥異，然由於重力駐波是這前進重力波者經全反射後所造成的，因此，此兩波動場間當然必有其關連，自是不必費言。其實，對自由表面單一規則前進重力波經全反射而形成之重力駐波，其波動流場的解析，可由入射波與全反射波之兩波交會相互作用的波動系統求解之，如見拙作（1985，1989）之論，或更詳者容見稍後。今為便潔，對此兩波動關連的描述，於不失其一般性下，可以很直接簡單的觀點對其闡論於下。在第一階次量的考慮裏，基於重力駐波之流場解是直接

由入射前進波者與其全反射波者之線性合成，因此，由 (3.3a) 至 (3.3c) 式之前進波線性解（其全反射波者為以 $-x$ 取代 x 與 (3.10a) 至 (3.10d) 式之重力駐波線性解比較，即刻可得此兩波動基本關連所在的攝動展開參數 ϵ_p 與 ϵ_s 之間有

$$\epsilon_s = 2 \epsilon_p \dots\dots\dots (3.15)$$

顯然地，於 (3.15) 式的應用下，則自由表面單一規則前進重力波與其經全反射所形成之重力駐波，兩波動流場之整體特性間的關連就可被描述；或言以 (3.15) 式代入 (3.1) 至 (3.14d) 式中，就可得出兩波動流場解至第五階的關連。然，就實際波動現象的說明，或實用目的上，對此兩波動之關連，吾人以描述其各自基本物理量間的關係最為直接明確的必要；這即是，在已知的水深中，給定前進入射波者之波高與週波率，則由其全反射而成之駐波的波高與週波率就可被求知，或反之亦然，進而其波動流場之整體特性亦可被描述。做此解析，則得對前進入射波與重力駐波兩者之波高和週波率與其攝動展開參數 ϵ_p 與 ϵ_s 之函數關係陳述之。由上二小節所述之兩波動流場解及波峯與波谷發生之時空相位；波峯時，前進波者為 $\cos(x + t_p) = 1$ 而駐波者為 $\cos x \cos t_s = 1$ ；波谷時，前進波者為 $\cos(x + t_p) = -1$ 而駐波者是 $\cos x \cos t_s = -1$ ，因此，至第五階下，得前進入射波之波高 H_p 、週波率 ω_p 與重力駐波者之波高 H_s 、週波率 ω_s 各為

$$H_p = 2 B_{p1} \epsilon_p + 2 B_{p3} \epsilon_p^3 + 2 B_{p5} \epsilon_p^5 \dots\dots\dots (3.16)$$

此處係數 B_{pi} 各為

$$B_{p1} = 1, \omega_0^2 = \tanh d$$

$$B_{p3} = \frac{1}{64} (27 \omega_0^{-12} + 3 \omega_0^{-8} + 41 \omega_0^{-4} - 39)$$

$$B_{p5} = \frac{1}{1024 (5 + \omega_0^4) (5 + 3 \omega_0^4)} (-2025 \omega_0^{-24} - 8370 \omega_0^{-20} \\ + 95652 \omega_0^{-16} + 21694 \omega_0^{-12} + 37098 \omega_0^{-8} - 23446 \omega_0^{-4} \\ - 23724 + 12554 \omega_0^4 + 3207 \omega_0^8) \dots\dots\dots (3.17)$$

$$\omega_p = \omega_0 + \frac{1}{16} \epsilon_p^2 (9 \omega_0^{-7} - 10 \omega_0^{-3} + 9 \omega_0) + \frac{1}{1024} \epsilon_p^4 (81 \omega_0^{-19} \\ - 603 \omega_0^{-15} + 3618 \omega_0^{-11} - 3662 \omega_0^{-7} + 1869 \omega_0^{-3} - 663 \omega_0) \dots\dots\dots (3.18)$$

與 $H_s = 2 B_{s1} \epsilon_s + 2 B_{s3} \epsilon_s^3 + 2 B_{s5} \epsilon_s^5$

此處係數 B_{si} 為

$$B_{s1} = 1, \omega_0^2 = \tanh d$$

$$B_{s3} = \frac{1}{256} (27 \omega_0^{-12} + 27 \omega_0^{-8} + 96 \omega_0^{-4} - 63 + 11 \omega_0^4 + 6 \omega_0^8)$$

$$B_{s5} = \frac{1}{49152} (81 \omega_0^{-20} + 675 \omega_0^{-16} - 2025 \omega_0^{-12} + 4270 \omega_0^{-8}$$

$$\begin{aligned}
& -3819\omega_0^{-4} + 1155 - 2397\omega_0^4 - 240\omega_0^8 + 108\omega_0^{12}) \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (486\omega_0^{-20} + 4536\omega_0^{-16} - 29889\omega_0^{-12} \\
& - 37254\omega_0^{-8} - 5576\omega_0^{-4} + 65224 - 3453\omega_0^4 + 7086\omega_0^8 + 1656\omega_0^{12}) \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)} (-243\omega_0^{-20} - 4212\omega_0^{-16} - 4158\omega_0^{-12} \\
& + 16476\omega_0^{-8} + 781\omega_0^{-4} + 1728 + 60\omega_0^4) \\
& + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+\omega_0^4)} (-1458\omega_0^{-20} - 8748\omega_0^{-16} + 24543\omega_0^{-12} \\
& + 15426\omega_0^{-8} + 8709\omega_0^{-4} + 16812 - 35739\omega_0^4 - 7878\omega_0^8 \\
& + 3069\omega_0^{12} + 516\omega_0^{16} + 108\omega_0^{20}) \\
& + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)(3+\omega_0^4)(5+\omega_0^4)} (-32805\omega_0^{-24} \\
& - 126846\omega_0^{-20} + 75816\omega_0^{-16} + 45684\omega_0^{-12} - 475038\omega_0^{-8} \\
& + 203088\omega_0^{-4} - 129084 - 302580\omega_0^4 - 196629\omega_0^8 \\
& - 56322\omega_0^{12} - 3348\omega_0^{16} + 432\omega_0^{20}) \\
& + \frac{1}{65536} \frac{1}{(3+4\omega_0^4)(5+\omega_0^4)(2+9\omega_0^4)} (-7290\omega_0^{-20} \\
& - 187353\omega_0^{-16} - 337770\omega_0^{-12} - 75609\omega_0^{-8} - 472110\omega_0^{-4} \\
& + 25773 + 13170\omega_0^4 - 5211\omega_0^8 - 960\omega_0^{12}) \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(3+\omega_0^4)(3+5\omega_0^4)} (18225\omega_0^{-20} + 188325\omega_0^{-16} \\
& + 481140\omega_0^{-12} + 848160\omega_0^{-8} - 159450\omega_0^{-4} - 1282730
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +94140\omega_0^4 + 422460\omega_0^8 + 29265\omega_0^{12} - 18675\omega_0^{16} + 3240\omega_0^{20} \\
& + 540\omega_0^{24}) + \frac{1}{24576} \frac{1}{(3+\omega_0^4)(5+\omega_0^4)} (2430\omega_0^{-20} \\
& + 34101\omega_0^{-16} - 27540\omega_0^{-12} + 178194\omega_0^{-8} - 133225\omega_0^{-4} \\
& - 182049 + 91210\omega_0^4 + 45360\omega_0^8 - 7563\omega_0^{12} - 2358\omega_0^{16}) \\
& + \frac{1}{196608} \frac{1}{(5+\omega_0^4)(5+3\omega_0^4)} (30375\omega_0^{-24} + 44550\omega_0^{-20} \\
& + 129330\omega_0^{-16} - 2490\omega_0^{-12} - 19480\omega_0^{-8} + 13090\omega_0^{-4} \\
& - 2850 - 750\omega_0^4 + 225\omega_0^8) \dots\dots\dots (3.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_s = \omega_0 + \frac{1}{64} \epsilon_s^2 (9\omega_0^{-7} - 12\omega_0^{-3} - 3\omega_0 - 2\omega_0^5) \\
+ \frac{1}{16384} \epsilon_s^4 (81\omega_0^{-19} - 675\omega_0^{-15} + 1197\omega_0^{-11} - 2730\omega_0^{-7} \\
+ 747\omega_0^{-3} - 363\omega_0 + 723\omega_0^5 + 96\omega_0^9 - 36\omega_0^{13}) \dots (3.20)
\end{aligned}$$

至此，明顯地依(3.15)式代入(3.16)~(3.20)式中，可得自由表面單一規則前進重力波與其經全反射所形成之重力駐波間基本物理量的函數關係為

$$H_s / 2H_p = (1 + 4B_{s3}\epsilon_p^2 + 16B_{s5}\epsilon_p^4) / (1 + B_{p3}\epsilon_p^2 + B_{p5}\epsilon_p^4) \dots\dots\dots (3.21)$$

與

$$\omega_s / \omega_p = (\omega_0 + 4\omega_{s2}\epsilon_p^2 + 16\omega_{s4}\epsilon_p^4) / (\omega_0 + \omega_{p2}\epsilon_p^2 + \omega_{p4}\epsilon_p^4) \dots\dots\dots (3.22)$$

此二式即是表示，於已知水深中，當給定來源的入射前進波者之波高與波長（或週期）時，由（3.16）與（3.17）式（或給定週期時需再應用到（3.18）式）先求算出其對應的攝動展開參數 ϵ_p ，後，則因其經全反射所形成之重力駐波的波高與波長（或週期）之基本特性量，至第5階下，就可直接被求得；反之亦然。

四、計算與結果

茲為對上節所述之自由表面單一規則前進重力波與其經全反射後所形成之重力駐波，兩波動流場間基本物理的關連做具體的描述，清楚起見，於此將涉及到的必要求算過程與獲得的結果，分述如下：

(一)計算過程：

在真實的物理因次考量下，當水深已知時，則可依給定的來源入射前進重力波之波浪條件，即其波高與波長或波高與週期之給定，而分兩種情況來求算之。

- (1)當來源入射前進重力波之波高與波長給定者：此情況先算出所對應的無因次水深 d 與波高 H_p ，後，則可依（3.16）與（3.17）兩式之應用求得所對應之無因次攝動展開參數 ϵ_p ，即從中解出 ϵ_p 之一元五次方程式之合理的正實根。如此，所欲求的兩波動流場間的關連，則可由 ϵ_p 值代入（3.19）至（3.23）式求得之；惟此處，方便數值求解 ϵ_p 之一元五次方程式之根，可依（3.16）式之倒逆級數(Inverse Series) ϵ_p' 做為它的起始近似值(Initial App-

roximation Value)

$$\begin{aligned} \epsilon_p' = & \frac{1}{2} H_p - \frac{1}{512} (27 \omega_0^{-12} + 3 \omega_0^{-8} + 41 \omega_0^{-4} - 39) H_p^3 \\ & + \frac{1}{131072} \frac{1}{(5 + \omega_0^4) (5 + 3 \omega_0^4)} (62775 \omega_0^{-24} + 89370 \omega_0^{-20} \\ & - 199602 \omega_0^{-16} - 91438 \omega_0^{-12} - 131460 \omega_0^{-8} - 75986 \omega_0^{-4} \\ & + 30114 + 12262 \omega_0^4 + 861 \omega_0^8) H_p^5 \quad \dots\dots\dots (4.1) \end{aligned}$$

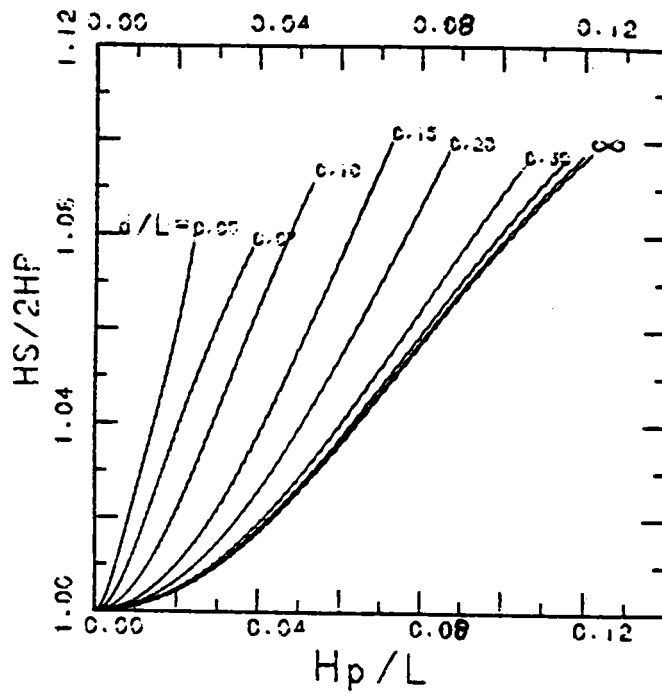
至第五階次的考量下，非很淺水中，(4.1)式之 ϵ_p' 已很接近所欲求之根 ϵ_p 值。

(2)當來源入射前進重力波之波高與週期給定者：此情況下，波動之波長 L 或波動 k 爲未知，因此，得由(3.16)式（包括應用到(3.17)式與(3.18)式，兩式於返回真實物理因次下，代入給定的波高與週期，聯立求解出所欲得的波數 k 與對應的攝動展開參數 ϵ_p 。然後，再應用(3.19)至(3.23)式，即可得所欲描述之兩波動流場間的關連。

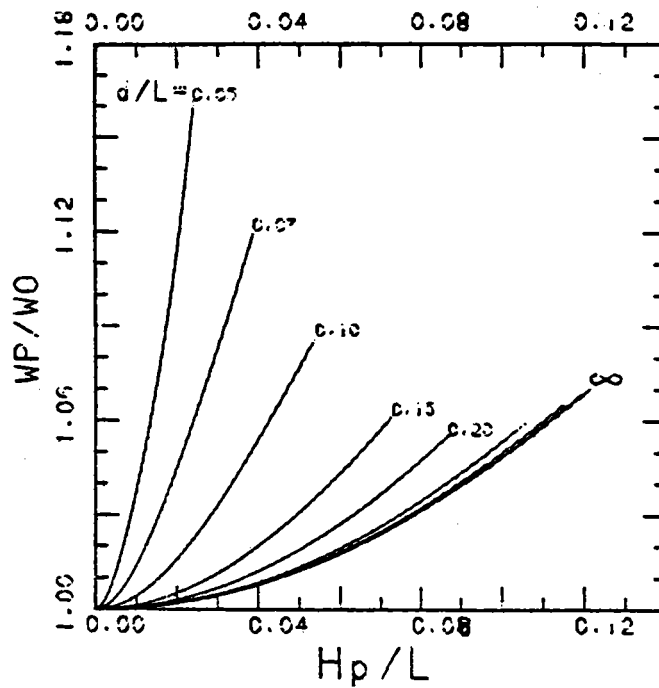
以上兩種情況之數值求算，可用所熟知的 Newton-Raphson 方法行之。

(二)結 果：

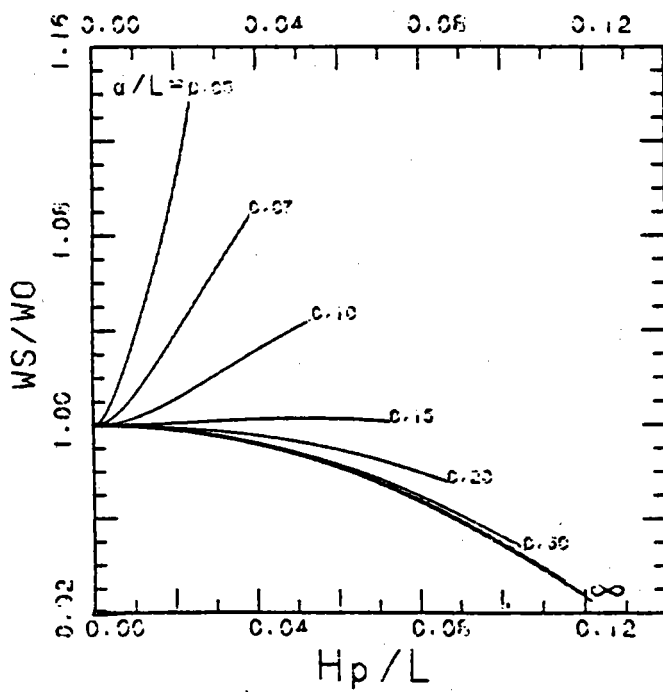
依上述之計算，則得自由表面單一規則前進重力波與其經全反射後所形成之重力駐波，兩波動流場間基本物理量的關連，至第五階次量下隨給定的入射單一規則波之波浪條件而變化，如下圖所示。



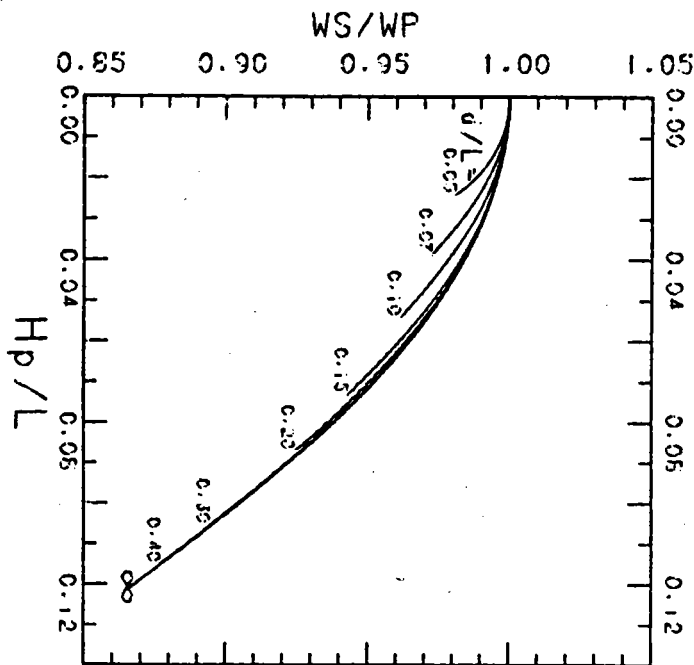
圖(三)－a 駐波與入射波之波高比，隨入射波之波高與波長之變化關係



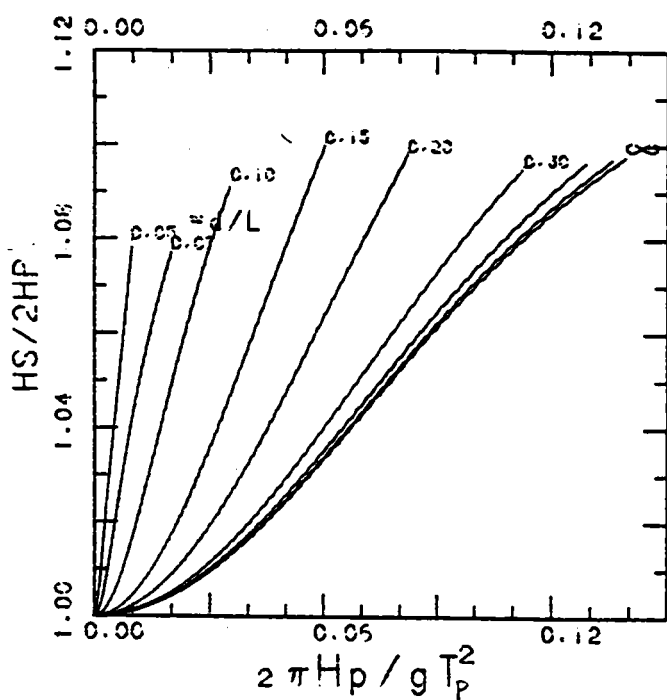
圖(三)－b 入射波之週波率隨其波浪尖銳度之變化



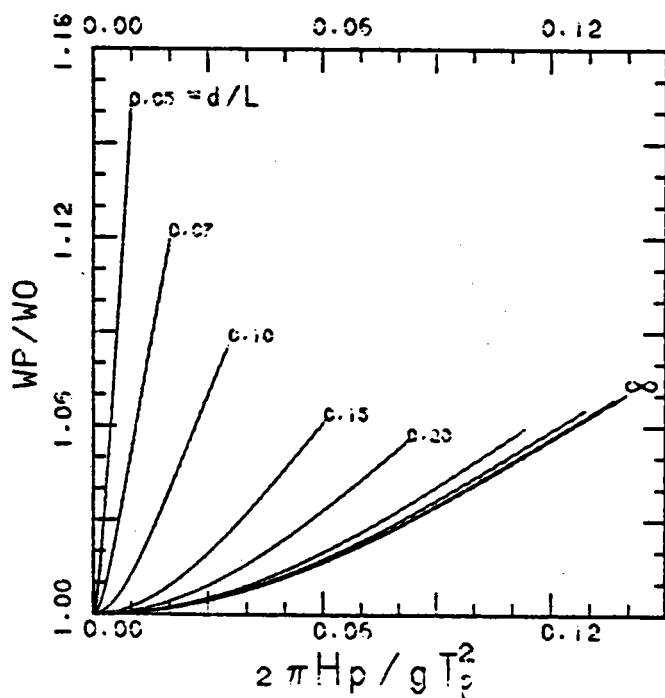
圖(三) - c 駐波之週波率隨入射波之波浪尖銳度之變化



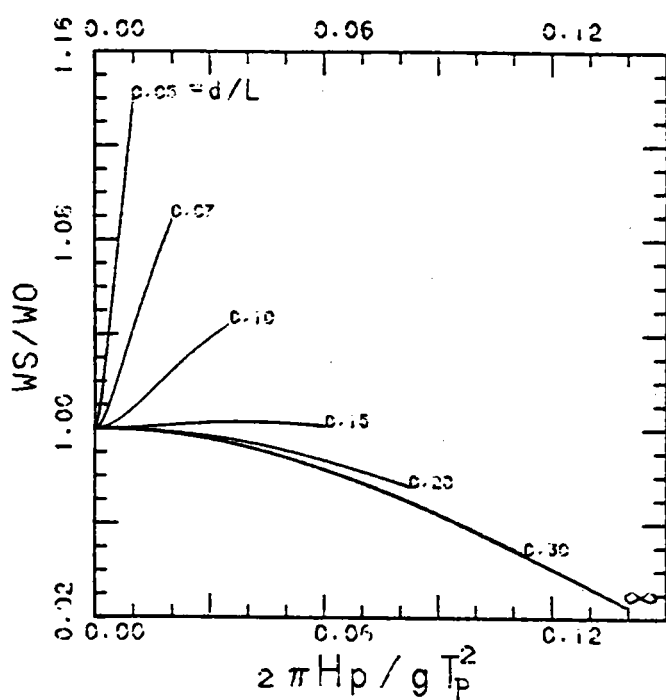
圖(三) - d 駐波與入射波之週波率比，隨入射波之波高與波長之變化關係



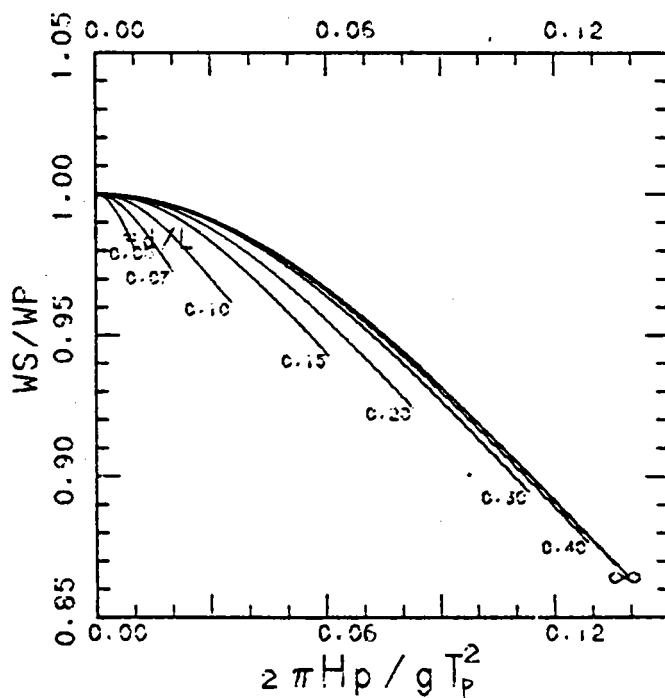
圖(四)－a 駐波與入射波之波高比，隨入射波之波高與週期之變化關係



圖(四)－b 入射波之週波率隨其波高與週期之變化



圖(四)－c 駐波之週波率隨入射波之波高與週期之變化



圖(四)－d 駐波與入射波之週波率比，隨入射波之波高與週期之變化關係

五、結 論

綜合本文以上之整個論述，於此可給予幾點結語，來對所探討的自由表面單一規則前進重力波與其經全反射而成之重力駐波，兩波動流場間關連做較確切性的闡論，於下。

- (一)雖然重力駐波可由自由表面單一規則前進重力波經全反射而形成，然此兩波動所呈現出的脈動特性是頗為迥異，如由第三節所述之它們的解析解或對其比較之論述可明顯得知。
- (二)自由表面單一規則前進重力波與其經全反射而成之重力駐波，兩波動流場特性間的關連，並非僅可依入射波與全反射波兩者之直接線性合成所能充分滿足地描述，應進一步地涵括較高階的非線性影響因素在內才會有較符其真實波動特性的說明。
- (三)自由表面單一規則前進重力波與其經全反射所形成之重力駐波，應有相同的波長，然週期（或週波率）則稍有差異。此表示入射波與反射波交會間發生有非線性相互作用影響，方使之致然；亦即才會有前進波與駐波兩者之週波率特性變化顯然的不同。
- (四)基於攝動展開法之逐階近似處理下，對於波浪尖銳度近於碎波，或者於頗為淺水中（水深對波長之比小於 0.05 以下）之波動，欲得其更高精度的滿足，則得將本文五階解推展至較高階情況。

參考文獻

1. Cokelet, E.D. 1977 Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. Phil. Trans.R. Soc., A.286,183-230.
2. Edge, R.D. and Walters, G. 1964 The period of standing gravity waves of largest amplitude on water. J. Geophys. Res. 69, 1674-1675.
3. Fenton, J.D. 1985 A fifth-order stokes theory for steady waves. Journal of Waterway, Port, Coastal & Ocean Engineering , A.S.C.E. vol.III, No.2,216-234.
4. Fultz. D. 1962 An experimental note on finite amplitude standing gravity waves. J. Fluid Mech. 13, 193-212.
5. Goda, Y. and Kakizaki 1966 Study on finite amplitude standing waves and their pressure on a vertical wall (in Japanese). Rep. Port Harbour Res. Inst. Japan, vol.5, No.10.
6. Penney, W.G. and Price, A.T. 1952 Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. Phil. Trans, R.Soc. Lond. A. 244, 254-284.
7. Rienecker, M.M. and Fenton, J.D. 1981 A fourier approximation method for steady water waves. J. Fluid Mech. 104. 119-137.
8. Schwartz, L.W. and Whitney, A.K. 1981 A semi-analytic

- solution for nonlinear standing waves in deep water. J. Fluid Mech. 107, 141-171.
9. Tadjbakhsh, I. and Keller, J.B. 1960 Standing surface waves of finite amplitude. J. Fluid Mech. 8, 442-451.
10. Williams, J.M. 1981 Limiting gravity waves in water of finite depth. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 302, 139-188.
11. 林西川 1988 非線性重力波之數值解析，國立成功大學土木工程研究所博士論文。
12. 陳陽益 1983 波浪通用模式與最大波之解析，國立成功大學土木工程研究所博士論文。
13. 陳陽益、蔡清標 1985 重力駐波之解析，第八屆海洋工程研討會論文集，303-325。
14. 陳陽益 1988 前進重力波之第五階近似解，港灣技術研究所手稿。
15. 陳陽益 1988 重力駐波，港灣技術第三期，71-107。
16. 陳陽益 1989 兩波交會之系統化與流場機構，港灣技術第四期，27-60。
17. 陳陽益 1989 等深水中兩規則前進重力波列交會之解析，港灣技術第五期（印刷中）。

The Progressive and Standing Gravity Waves

Chen Yang-Yih* Juang, W.J.**

Abstract

Based on fifth-order approximations by the perturbation expansion method, the relationship between the free-surface progressive gravity waves and the standing gravity waves produced by The progressive waves fully reflected is described in this paper. From the evidence indicated in this paper, it reveals that the characteristics about the standing gravity waves motion could not sufficiently be interpreted directly in a way only using the linear superposition of the incident progressive waves and its fully reflected waves, or in more serious speaking, the nonlinear effects due to the interaction between the incident and fully reflected waves must be considered, so will enable to explain the apparent difference about the characteristics between the progressive and standing waves justly.

* Senior Researcher & Division Chief, Institute of Harbour & Marine Technology, Taiwan, R.O.C.

**Assistant Researcher, Institute of Harbour & Marine Technology. Taiwan, R.O.C.

非線性重力波之數值解析

林 西 川

一、概 說

波浪理論之研究迄今已將近有二百年，因受限於波動理論中非線性邊界條件及波形爲自身隱函數，理論解析上甚爲困難。往昔學者或以各種簡化方法，或以各種近似展開法來處理，所得結果已失去原真性，亦因處理手法之不同而求得不同之結果，例如深水之 Airy 波理論，有限水深之 Stokes 波、雙曲函數波、橢圓函數波、孤立波理論等等。各種理論受處理時所加入特定條件之限制而無法貫通。

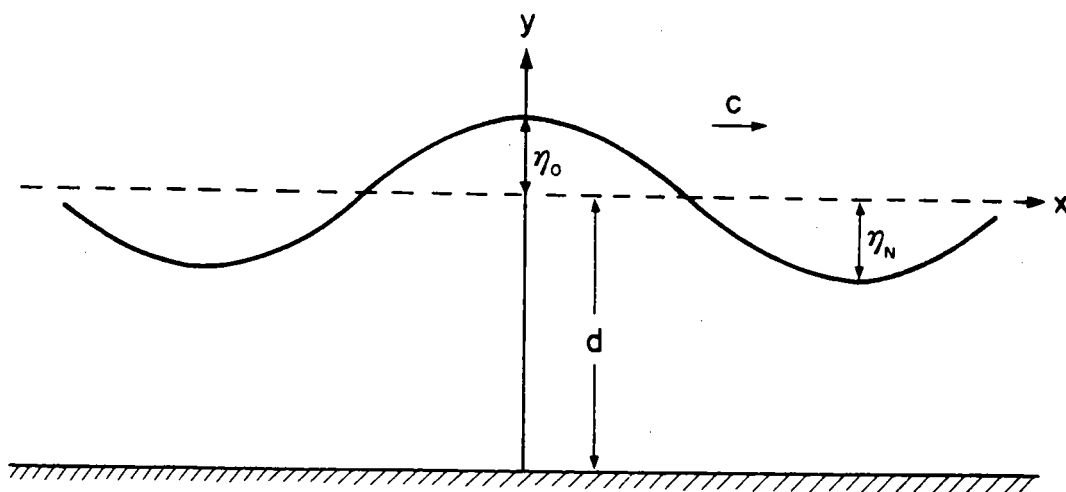
有鑑於此，陳陽益（1983）提出新模式理論以描述各種等水深情況之波浪運動，並且在不用任何近似處理之原則下解出該理論之基本解，亦即一階之正確解。該模式理論可一貫地適用於深水至淺水情況，甚至可展開至孤立波，根據其理論，推導得極限碎波之峯頂夾角爲 90° 而非 Stokes（1880）所推導之 120° 。

爲能更精確地描述淺水情況之波動，陳陽益、張憲國（1984）以 Fourier 近似法數值求解高階解，陳陽益（1985）更進一步探討深海中最高重力波之流場，林西川（1986，1988）遵循其方法求解任意均勻水深中之波動流場。利用 Fourier 近似法可解析深水至淺水之任意波浪，甚至於孤立波，對於碎波之情況亦可直接解析。

有關解析之原理，過程及結果分析如下：

二、波動流場之級數解

二度空間裏任意均勻水深中週期性對稱型之重力波，若將其穩定化，其波動系統之座標如圖(一)所示。沿波浪前進方向為正 x 軸， y 軸通過波峯，向上為正， d 為平均水深。



圖(一) 波動系統座標示意圖

假設流體為不可壓縮性 (Incompressible)，非滯性 (Non-viscous)，且屬非旋性 (Irrotation) 運動，流場中之流函數 (Stream Function) 以 $\Psi(x, y)$ 表示，依流體之連續性 (Continuity) 波動流場之控制方程式為 Laplace 方程式

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

其邊界條件為

(一)底部 $y = -d$ 處

$$v = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{y=-d} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(二)自由表面 $y = \eta$ 處

(1)運動邊界條件

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{y=\eta} &= - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{y=\eta} \\ \text{或 } \Psi_{y=\eta} &= -Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

η 為以 x 軸為基準之自由表面水位， $-Q$ 為自由表面處之流函數值 ($Q \neq 0$)。

(2)動力邊界條件

$$g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right]_{y=\eta} = R \quad \dots\dots\dots (4)$$

R 為 Bernoulli 常數。

滿足 (1)，(2) 二式之解可寫為以下之級數型式

$$\Psi(x, y) = B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh nk(d+y)}{\cosh nkd} \cos n k x \quad \dots\dots\dots (5)$$

$k = \frac{2\pi}{L}$ 爲周波數， L 爲波長。 $B_0, B_1, \dots, B_n$ 爲常數係數，

必須利用自由表面邊界條件 (3), (4) 二式決定之。

於深水情況，則 (5) 式可簡化爲

$$\Psi(x, y) = B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{nky} \cos nkx \quad \dots\dots\dots (6)$$

(5), (6) 二式即所謂之波動理論級數解。

三、Fourier 近似解析法

Fourier 近似解析法爲 Rienecker & Fenton (1981) 所提出，其原理爲將波形等間隔分割後，代入控制方程式及邊界條件式中，使之組成一個非線性聯立方程組，再利用數值方法求解之。詳細過程以 (3) ~ (5) 式爲例說明如下。

將 (5) 式代入 (3) 式之第二式及 (4) 式，且取 n 至 N 項，可得

$$B_0 \eta + \sum_{n=1}^N B_n \frac{\sinh nk(d+\eta)}{\cosh nk d} \cos nkx = -Q_N \quad \dots\dots (7)$$

$$g\eta + \frac{1}{2} [u^2 + v^2] = R_N \quad \dots\dots\dots (8)$$

式中之下標 N 表示取至 N 項時之近似值。 u, v 爲水粒子水平及垂直速度分量。即

$$u = B_0 + \sum_{n=1}^N nk B_n \frac{\cosh nk (d + \eta)}{\cosh nk d} \cos nkx \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$v = \sum_{n=1}^N nk B_n \frac{\sinh nk (d + \eta)}{\cosh nk d} \sin nkx \quad \dots\dots\dots (10)$$

若水深 d ，波高 H ，週期 T ，欲由 (7)，(8) 二式求解流場，因未知數共有 $B_0, B_1 \sim B_N, \eta, k, Q_N, R_N$ 等 $N+5$ 個，且 η 爲一函數，無法求得其適當之值。

爲解決方程式不足及 η 爲一函數之困擾，可沿 x 軸方向將一波長之波形等間隔分割爲 $2N$ 等份，亦即由波峯至波谷間取 $N+1$ 個等 x 間隔點，每點距波峯之橫距爲

$$x_m = \frac{mL}{2N} \quad m = 0, 1, 2, \dots\dots N \quad \dots\dots\dots (11)$$

相對應之自由表面水位爲

$$\eta_m = \eta(x_m) \quad m = 0, 1, 2, \dots\dots N \quad \dots\dots\dots (12)$$

η_m 既爲自由表面水位，故須滿足 (7)，(8) 二式，亦即 (7)，(8) 二式可化爲

$$B_0 \eta_m + \sum_{n=1}^N B_n \frac{\sinh nk (d + \eta_m)}{\cosh nk d} \cos \frac{nm\pi}{N} = -Q_N$$

$$m = 0, 1, 2, \dots\dots N \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$g\eta_m + \frac{1}{2} [u_m^2 + v_m^2] = R_N \quad m=0, 1, 2, \dots, N$$

..... (14)

式中之 u_m , v_m 分別爲

$$u_m = B_0 + \sum_{n=1}^N nk B_n \frac{\cosh nk (d + \eta_m)}{\cosh nkd} \cos \frac{nm\pi}{N}$$

..... (15)

$$v_m = \sum_{n=1}^N nk B_n \frac{\sinh nk (d + \eta_m)}{\cosh nkd} \sin \frac{nm\pi}{N} \quad \dots\dots (16)$$

(13) , (14) 式實際已構成 $2N + 2$ 個方程式，但含有 $\eta_0 \sim \eta_N$, $B_0 \sim B_N$, Q_N , R_N , k 等 $2N + 5$ 個未知數，因此必須再引入三個適當之條件方程式。其一爲平均水位爲零，即

$$\frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \eta dx = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

若以 Simpson $\frac{1}{3}$ 法則對 (17) 式作數值積分，則 (17) 式寫爲

$$\frac{1}{3N} [\eta_0 + \eta_N + 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} \eta_n + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{N-2} \eta_n] = 0 \quad \dots (18)$$

其二爲波高 H 與 η 之關係式

$$H - \eta_0 + \eta_N = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

其三為周波數 k 與周頻率 $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ 之關係式

$$\frac{2\pi}{T} = kc \quad \dots\dots\dots (20)$$

(20) 式中 c 為波速，為新引入之未知數，因此須再增加一條件式，此處引入穩定化運動之條件式，即

$$c = -B_0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

至此，可由 (13)，(14)，(18)~(21) 式組成 $2N+6$ 個方程式之方程組解 $\eta_0 \sim \eta_N$ ， $B_0 \sim B_N$ ， Q_N ， R_N ， k ， c 等 $2N+6$ 個未知數。

上述之方程組為非線性隱函數型態，必須利用數值方法求解。Newton 疊代法被引用來解此問題，其原理如下。若將上述之方程組寫為矩陣之型式，則為

$$F = \{f_i\} \quad , \quad f_i = f_i(Z) \quad i = 1, 2, \dots\dots M \quad \dots\dots\dots (22)$$

f_i 表示方程組中之第 i 個方程式， F 為 f_i 之矩陣， $Z = \{Z_j\}$ ， $j = 1, 2, \dots\dots M$ 為 f_i 中之變數向量， M 為方程式和變數之數目，若用上標 n 和 $n+1$ 代表第 n 次和第 $n+1$ 次疊代計算結果，則 (22) 式第 n 次和第 $n+1$ 次疊代計算結果寫為

$$F^n = \{f_i^n\} \quad , \quad f_i^n = f_i(Z^n) \quad i = 1, 2, \dots\dots M \quad \dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{n+1} &= \{f_i^{n+1}\} \\ f_i^{n+1} &= f_i(Z^{n+1}) = f_i(Z^n + \Delta Z^n) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

將 f_i^{n+1} 以 Taylor 級數展開，且取至第一次微分項，得

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial f_i}{\partial Z_j} \right)^n \Delta Z_j^n, \quad i=1, 2, \dots, M$$

..... (25)

若 Z_j^{n+1} 為正確解，則 $f_i^{n+1} = 0$ ，以 a_{ij} 代表 $\frac{\partial f_i}{\partial Z_j}$ ，則 (25) 可寫為

$$[a_{ij}^n] \{\Delta Z_j^n\} = -\{f_i^n\} \quad \text{..... (26)}$$

因此 (22) 式之疊代公式，用矩陣可表示為

$$A^n \cdot \Delta Z^n = -F^n, \quad Z^{n+1} = Z^n + \Delta Z^n \quad \text{..... (27)}$$

以 (13)，(14) 和 (18) ~ (21) 式為例， A ， F ， Z 矩陣分別為

$$Z = \{ \eta_0 \sim \eta_N, B_0 \sim B_N, Q_N, R_N, k, c \} \quad \dots (28)$$

$$F = \begin{cases} B_0 \eta_0 + \sum_{n=1}^N B_n \frac{\sinh nk(d + \eta_0)}{\cosh nk d} \cos 0 + Q_N \\ \dots \dots \dots \\ B_0 \eta_N + \sum_{n=1}^N B_n \frac{\sinh nk(d + \eta_N)}{\cosh nk d} \cos n\pi + Q_N \\ g \eta_0 + \frac{1}{2} [u_0^2 + v_0^2] - R_N \end{cases} \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & g\eta_N + \frac{1}{2} [u_N^2 + v_N^2] - R_N \\
 & \frac{1}{3N} [\eta_0 + \eta_N + 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} \eta_n + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{N-2} \eta_n] \\
 & H - \eta_0 + \eta_N \\
 & 2\pi - kcT \\
 & c + B_0
 \end{aligned}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 u_0 & 0 & \dots\dots & 0 & \eta_0 & SC_{01} & \dots\dots & SC_{0N} & 1 & 0 & CC_0 & 0 \\
 0 & u_1 & \dots\dots & 0 & \eta_1 & SC_{11} & \dots\dots & SC_{1N} & 1 & 0 & CC_1 & 0 \\
 \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots & & & \\
 0 & 0 & \dots\dots & u_N & \eta_N & SC_{N1} & \dots\dots & SC_{NN} & 1 & 0 & CC_N & 0 \\
 \hline
 ss_0 & 0 & \dots\dots & 0 & u_0 & CS_{01} & \dots\dots & CS_{0N} & 0 & -1 & SCS_0 & 0 \\
 0 & ss_1 & \dots\dots & 0 & u_1 & CS_{11} & \dots\dots & CS_{1N} & 0 & -1 & SCS_1 & 0 \\
 \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots & & & & \dots\dots\dots & & & \\
 0 & 0 & \dots\dots & ss_N & u_N & CS_{N1} & \dots\dots & CS_{NN} & 0 & -1 & SCS_N & 0 \\
 \hline
 \frac{1}{3N} & \frac{4}{3N} & \frac{2}{3N} & \frac{1}{3N} & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & \dots\dots & 1 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & -cT & -kT \\
 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]$$

$$sc_{ij} = \frac{\sinh jk (d + \eta_i)}{\cosh jkd} \cos \left(\frac{ji\pi}{N} \right)$$

$$ss_i = g + u_i k^2 \left[\sum_{n=1}^N n^2 \frac{\sinh nk (d + \eta_i)}{\cosh nkd} \cos \left(\frac{ni\pi}{N} \right) \right] \\ + v_i k^2 \left[\sum_{n=1}^N n^2 \frac{\cosh nk (d + \eta_i)}{\cosh nkd} \sin \left(\frac{ni\pi}{N} \right) \right]$$

$$cs_{ij} = u_i \left[jk \frac{\cosh jk (d + \eta_i)}{\cosh jkd} \cos \left(\frac{ji\pi}{N} \right) \right] \\ + v_i \left[jk \frac{\sinh jk (d + \eta_i)}{\cosh jkd} \sin \left(\frac{ji\pi}{N} \right) \right]$$

$$cc_i = \sum_{n=1}^N n B_n \frac{\cos \left(\frac{ni\pi}{N} \right)}{\cosh nkd} \left[(d + \eta_i) \cosh nk (d + \eta_i) \right. \\ \left. - d \sinh nk (d + \eta_i) \tanh nkd \right]$$

$$scs_i = u_i \left\{ \sum_{n=1}^N n B_n \frac{\cos \left(\frac{ni\pi}{N} \right)}{\cosh nkd} \left[\cosh nk (d + \eta_i) \right. \right. \\ \left. \left. + nk (d + \eta_i) \sinh nk (d + \eta_i) - nkd \cosh nk (d \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_i) \tanh nkd \right] \right\} + v_i \left\{ \sum_{n=1}^N n B_n \frac{\sin \left(\frac{ni\pi}{N} \right)}{\cosh nkd} \right. \\ \left. \cdot \left[\sinh nk (d + \eta_i) + nk (d + \eta_i) \cosh nk (d + \eta_i) \right. \right. \\ \left. \left. - nkd \sinh nk (d + \eta_i) \tanh nkd \right] \right\}$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

$\frac{\partial f_i}{\partial Z_j}$ 之推導有時甚為繁雜，可利用數值方法計算，其公式為

$$\frac{\partial f_i}{\partial Z_j} = \frac{f_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_j + \Delta Z, \dots, Z_N) - f_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_N)}{\Delta Z} \dots\dots\dots (31)$$

ΔZ 為一微小量，可取 $\text{MIN}(0.01Z_j, 0.01)$ 。以數值方法求 $\frac{\partial f_i}{\partial Z_j}$ 雖可避免繁雜之推導，但計算機之計算時間則相對增加。

實際計算時，須先給予各變數適當之起始值，代入疊代公式中，計算下一次之變數值，一直疊代至計算結果收斂於所要求之精確度為止。

計算時間之快慢當然與所要求之收斂精確度有關，更重要的還是要依賴適當之起始值，一般可直接利用線性波理論作為計算之起始值，如下所示：

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_m = \frac{H}{2} \cos \frac{m\pi}{N} \quad m = 0, 1, \dots, N \\ \frac{2\pi}{T} = [gk \tanh kd]^{\frac{1}{2}} \\ c = \frac{2\pi}{kT} \\ B_o = -c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{gTH}{4\pi} \\ B_j = 0 \quad j = 2, 3, \dots, N \\ Q_N = 0 \\ R_N = \frac{1}{2} c^2 \end{array} \right. \dots\dots\dots (32)$$

由於受線性波之適用性限制，實際計算時(32)式僅適用於小波之情況。對非線性顯著之高波進行計算，須先以(32)式當作起始值，先求小波時之解，再以所求得之解做下一個較大波之起始值，循序逐次解至所欲求之高波為止。

收斂條件之控制方式，通常有下列二種

$$\begin{array}{ll} (1) & |\Delta Z_j| \leq \epsilon \quad j = 1, 2, \dots, M \\ (2) & |f_i| \leq \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, M \end{array} \dots\dots\dots (33)$$

ϵ 為計算過程中，所要求之精確度。應用 $|\Delta Z_j|$ 之收斂條件為依疊代計算前後兩次之變數值其差應小於要求之精確度 ϵ ，而應用 $|f_i|$ 之收斂條件則依計算函數值控制之。

四、解析項數N之選取

計算時，選取之項數N應為多少才適當？事先應做一檢定。Rienecker & Fenton (1981) 對一般尖銳度不大之有限振幅波計算時

，選取 $N \geq 8$ ，經 5 次疊代計算後即迅速收斂至 10^{-12} 階次量。陳陽益與張憲國（1984）利用 c^2/c_o^2 （ $c_o = \sqrt{g/k}$ ，為對應之深水中線性波波速）計算值之收斂性檢定 N 值，發現只要 $N = 10$ ， c^2/c_o^2 即可收斂至相當精確度。本模式利用不同之 d, H, T ，以不同之 N 廣泛計算後，由係數比 $\frac{B_j}{B_1}$ （ $j = 2, 3, \dots, N$ ）和計算得之 $\frac{H}{L}$ 的相對誤差做檢定。

為能簡明地表示涵蓋波浪自無波至碎波之所有情況，本模式建議一無因次參數 ω ，定義為

$$\omega = \frac{U_c}{c} = \frac{u_c + c}{c} = 1 + \frac{u_c}{c} \quad \dots\dots\dots (34)$$

U_c 為波峯點處之水粒子真正速度， u_c 為波峯點處定常化座標下之水粒子速度。當無波時， $U_c = 0$ ，對應之 $\omega = 0$ ，而於碎波時，依 Rankine—Stokes 之碎波極限運動條件知 $U_c = c$ ，則 $\omega = 1$ 。亦即由無波至極限碎波之各種可能波動情況，皆包含於 $0 \leq \omega \leq 1$ 之範圍內。若以 ω 為已知條件，則（19）式中之 H 為未知，因此於控制方程組須再加入 ω 之條件式，即

$$u_o - (\omega - 1)c = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

利用 B_j/B_1 之收斂性做檢定之結果如表(一)。
以 H/L 計算值之相對誤差做檢定之結果如表(二)。

表(一) $N=32$ ，不同 $\frac{d}{L}$ ， ω 情況下， $\frac{B_j}{B_1} \leq 10^{-8}$ 時之 j 值

$\frac{d}{L}$	ω	$B_i / B_1 \leq 10^{-8}$ 時之 j 值
0.5	0.1	3
	0.5	5
	0.9	7
0.1	0.1	4
	0.5	6
	0.9	10
0.02	0.1	9
	0.5	17
	0.9	22

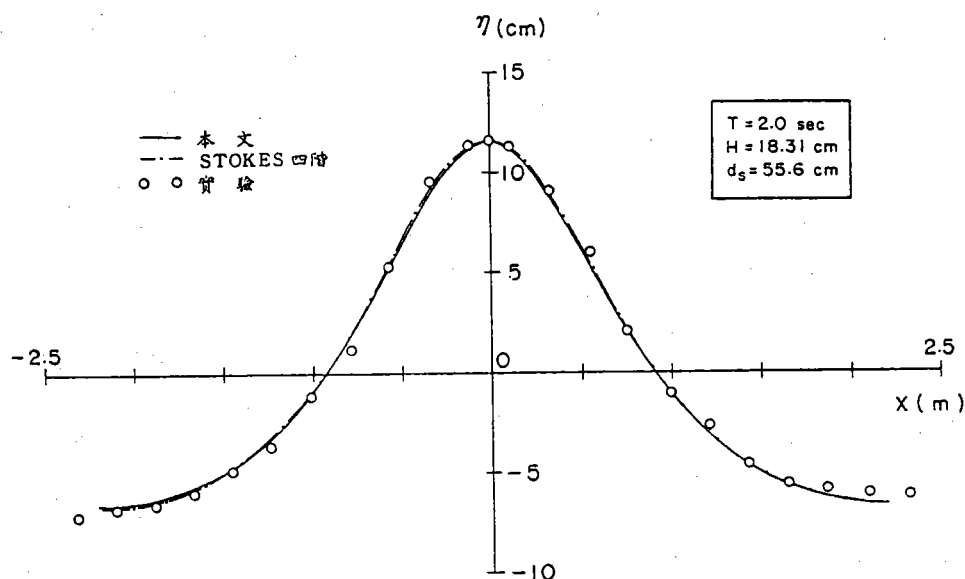
表(二) 不同 $\frac{d}{L}$ ， ω ， N 情況下， $\frac{H}{L}$ 相對誤差小於 0.1 % 時之 N 值

$\frac{d}{L}$	ω	$\frac{H}{L}$ 相對誤差 $\leq 0.1\%$ 時之 N 值
0.5	0.1	4
	0.5	6
	0.9	16
0.1	0.1	8
	0.5	10
	0.9	16
0.02	0.1	10
	0.5	22
	0.9	$N=32$ 時相對誤差仍 0.6 %

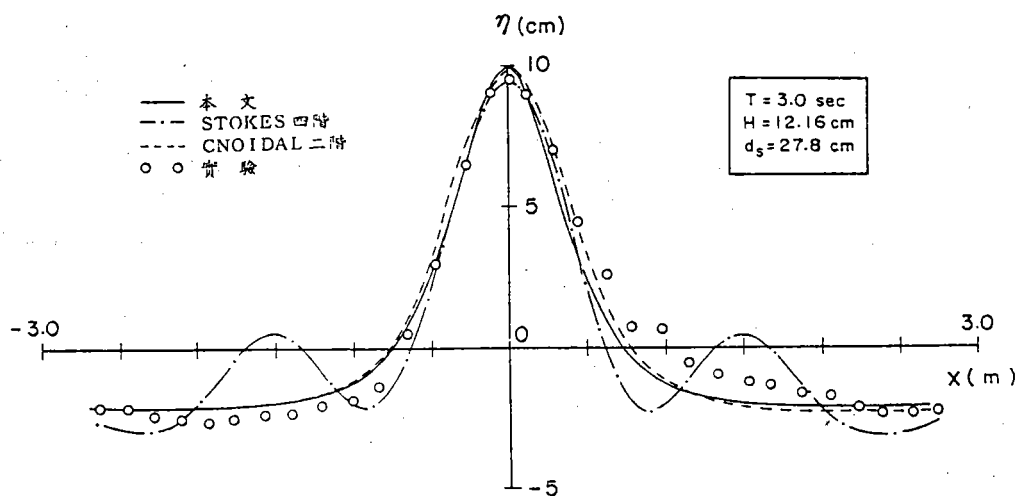
由表(一)、(二)可知，計算項數之選取與 $\frac{d}{L}$ ， ω 有關，深水且小波時，可選取較小之 N ，淺水或大波時，則須選取較大之 N 。

五、數值模式適用性之檢定

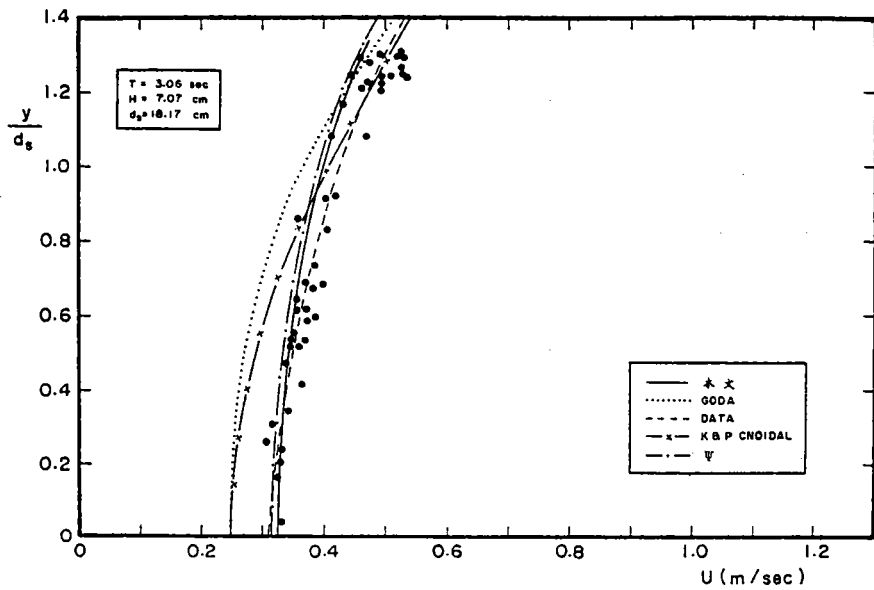
爲檢視本數值模式之適用性，依據上述之理論寫爲程式，取 $N = 32$ 進行計算，首先與Tsuchiya & Yamaguchi (1972)之實驗波形及Stokes波四階解，cnoidal波二階解比較，如圖(二)~(三)。圖(四)~(五)爲波峯下水粒子水平速度與Le Méhauté (1968)實驗值及有關之波浪理論解析結果之比較。圖(二)~(三)顯示Stokes四階解在中度水深時與實驗值十分吻合，然於淺水時則有較大誤差且有二次波動現象，cnoidal波理論解與實驗值較爲一致，本數值模式之結果，中度水深與淺水時均與實驗值十分接近。又由圖(四)~(五)可知本模式之結果與Dean (1965)之流函數理論之結果非常接近，與實驗值亦較一致。根據上述諸圖比較印證可得知本數值模式不論在中度水深或淺水時均極具適用性。



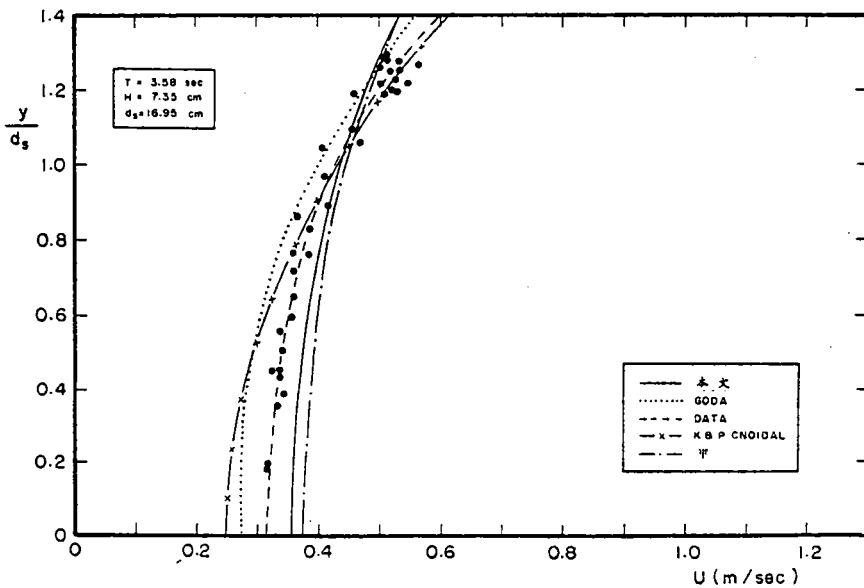
圖(二) 本模式解析之波形與 Tsuchiya & Yamaguchi (1972) 實驗值及 Stokes 四階解之比較 ($\frac{d}{L} = 0.126$, $\frac{H}{L} = 0.0416$)



圖(三) 本模式解析之波形與 Tsuchiya & Yamaguchi (1972) 實驗值及 Stokes 四階解，cnoidal 二階解之比較
($\frac{d}{L} = 0.0517$, $\frac{H}{L} = 0.0226$)



圖(四) 本模式解析之波峯下水粒子水平速度與 Le Méhauté
(1968) 實驗值及各種理論解之比較
($\frac{d}{L} = 0.0406$, $\frac{H}{L} = 0.0158$)



圖(五) 本模式解析之波峯下水粒子水平速度與 Le Méhauté
(1968) 實驗值及各種理論解之比較
($\frac{d}{L} = 0.0326$, $\frac{H}{L} = 0.0141$)

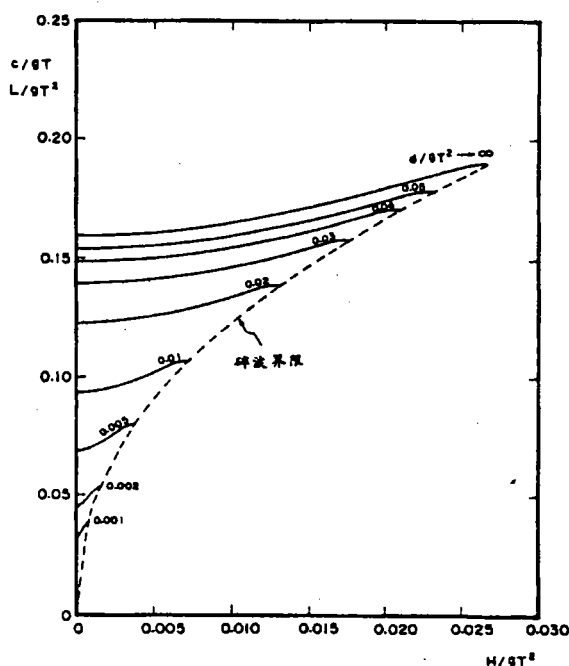
六、本數值模式之解析結果

本數值模式可解析任意均勻水深中，由小波至極限碎波之各種波動情形，茲將解析結果分述如下

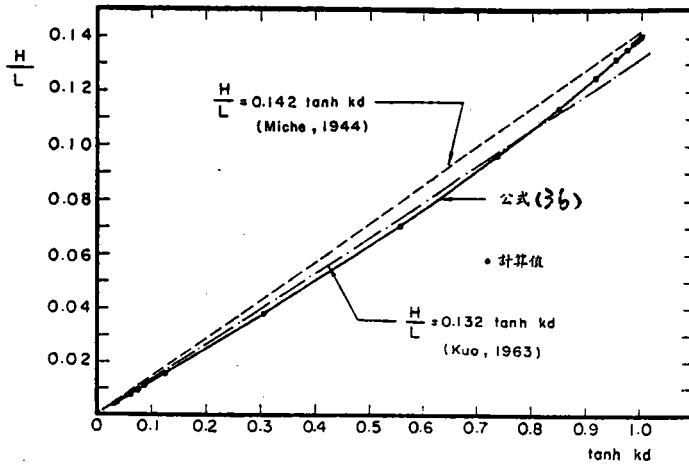
(一)延散關係 (Dispersion Relation)，如圖(六)所示。

(二)任意均勻水深中極限碎波之界限尖銳度，如圖(七)。若以多項式表示，則

$$\begin{aligned} \left(\frac{H}{L} \right)_b = & -0.00001 + 0.12992 \tanh(kd)_b - 0.03349 \tanh^2(kd)_b \\ & + 0.05575 \tanh^3(kd)_b - 0.01172 \tanh^4(kd)_b \\ & + (kd)_b \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$



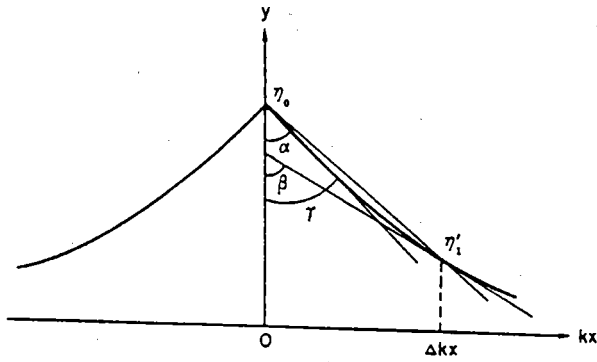
圖(六) 本模式解析之延散關係圖



圖(七) 任意均勻水深中之界限尖銳度

(三) 極限碎波之峯頂夾角接近 90°

極限碎波之峯頂夾角，究為 90° 或 120° ？特以本模式數值結果驗證之。由於波頂處為奇異點，無法直接計算該點之斜率，只能計算極接近波峯頂處之水位，再以計算得之水位近似推算波峯頂處之斜率或夾角。計算時，除等分割點外，另取 $kx = 1 \times 10^{-5}$ ， 2×10^{-5} ， 5×10^{-4} ， 1×10^{-3} 四點來推算波峯頂處之三種夾角 α ， β ， γ 。角 α ， β ， γ 之示意圖及定義如圖(八)和(37)～(39)式。



圖(八) α , β , γ 角示意圖

$$\alpha = 90^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{\eta'_1 - \eta_0}{\Delta kx} \right) \dots\dots\dots (37)$$

$$\beta = 90^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta'_1}{dkx} \right) \dots\dots\dots (38)$$

$$\gamma = 90^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{-3\eta_0 + 4\eta'_1 - \eta'_2}{2\Delta kx} \right) \dots\dots\dots (39)$$

η_0 為波峯點處水位， η'_1 和 η'_2 分別代表等間隔相鄰兩點之水位。 α 表示波峯頂之割線斜率， β 代表 η'_1 處之幾何斜率， γ 則代表波峯頂之二階前向差分斜率。計算條件及結果，如表(三)所示。

表(三) 各種 $\frac{d}{L}$ 下，各計算點之 α ， β ， γ 值

$\frac{d}{L}$	N	$\alpha、\beta、\gamma$ (角 度)	kx			
			1×10^{-5}	2×10^{-5}	5×10^{-4}	1×10^{-3}
∞	32	α	45.002	45.003	45.080	45.160
		β	44.997	45.003	45.160	45.319
		γ	45.000		45.001	
0.5	32	α	45.002	45.004	45.080	45.160
		β	44.999	45.004	45.160	45.319
		γ	45.000		45.001	
0.1	48	α	44.997	45.005	45.121	45.241
		β	45.010	45.010	45.242	45.480
		γ	44.990		45.001	
0.05	64	α	45.001	45.007	45.163	45.323
		β	45.009	45.013	45.325	45.645
		γ	44.996		45.003	
0.025	64	α	45.003	45.007	45.169	45.336
		β	45.007	45.014	45.337	45.670
		γ	44.999		45.003	

由表(三)可知碎波峯頂角度接近 90° ，且碎波波形在峯頂附近為上凹尖陡之曲線。

(四)與 Dean (1968) 利用流函數理論解析碎波之結果比較，如表(四)，由表可知本模式適用於解析碎波。

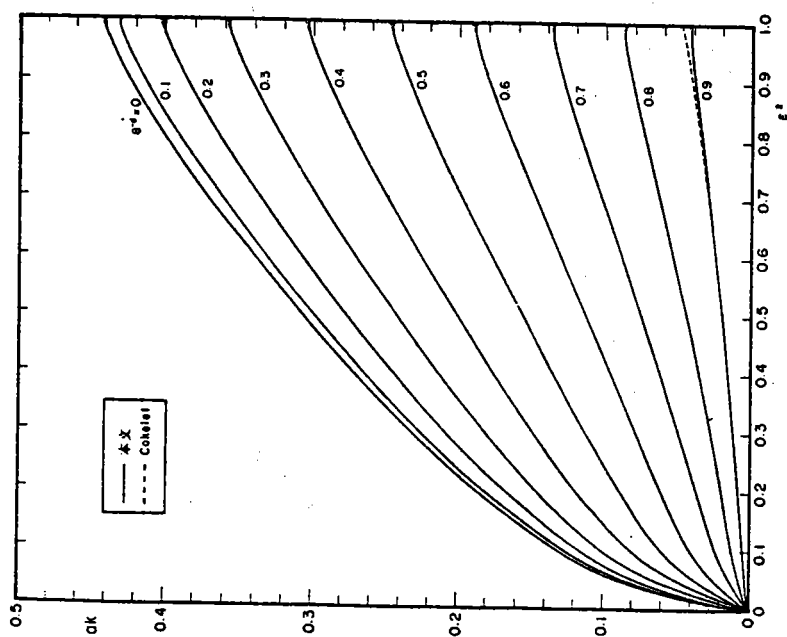
表(四) 本模式與 Dean (1968) 解析極限碎波之結果比較

波 浪 條 件	計 算 結 果					
		H (公尺)	L (公尺)	H/L	H/d	U_c/c
d = 304.8 公尺 T = 10 秒 N = 32	本模式	25.982	185.152	0.140330	0.085243	1.000
	Dean	32.217	187.086	0.172206	0.105700	0.985
d = 6.096 公尺 T = 20 秒 N = 64	本模式	4.692	184.006	0.025515	0.769753	1.000
	Dean	6.072	193.121	0.031439	0.996000	0.973

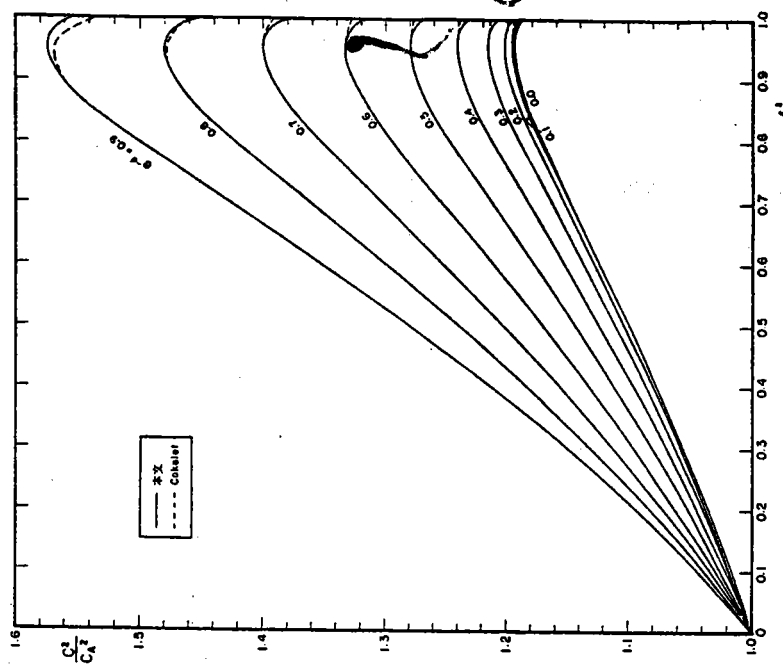
(五)與 Cokelet (1977) 利用攝動參數冪級數展開法，將各物理量展開至 120 階所得之結果比較，如圖(九)~(十)。圖中橫座標 $\epsilon^2 =$

$$1 - \frac{u_c^2 u_t^2}{c^4} \quad (u_t \text{ 爲定常化座標下，波谷處之水粒子速度})$$

，由圖可知除將近極限碎波處外，幾乎完全相同。而 Cokelet 係以峯頂夾角為 120° 做為解析碎波之條件，且因受限於收斂之穩定性，無法直接解析至碎波，而利用外插法推算所得之結果。

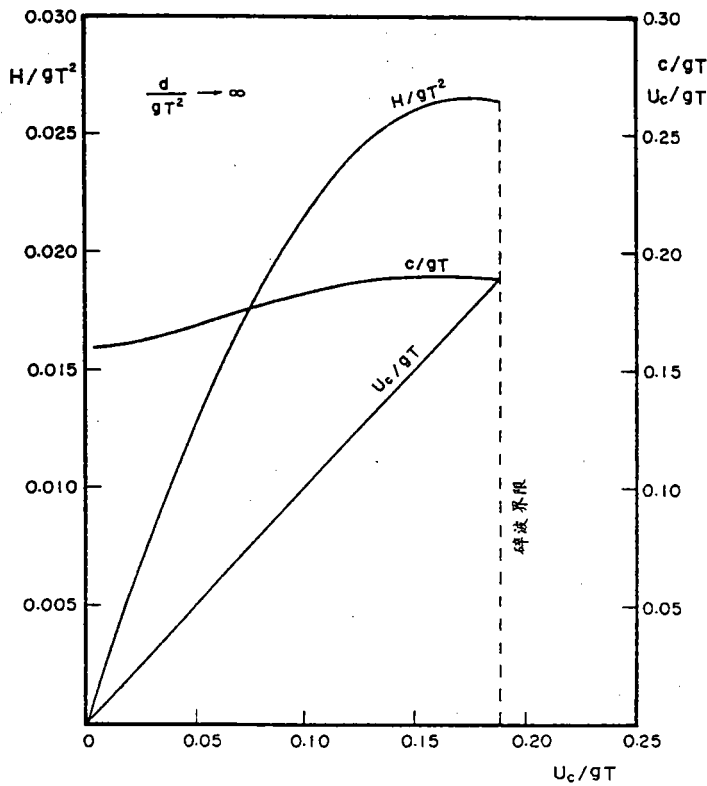


圖(九) 本模式解析之振幅與
Cokelet (1977) 結果
之比較

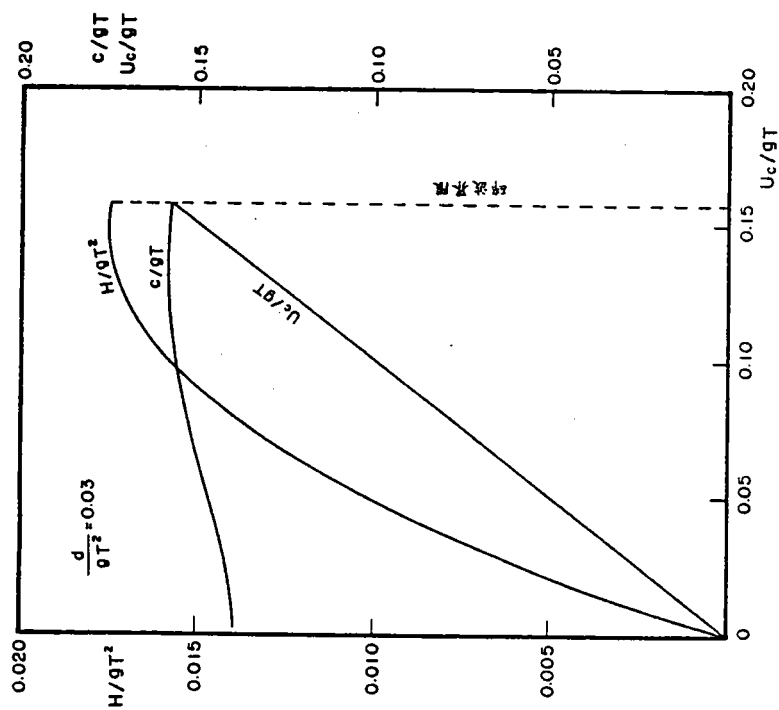


圖(十) 本模式解析之波速與
Cokelet (1977) 結果
之比較

(六) 以 $U_c = c$ 為碎波條件， U_c ， c ， H 之變化情形如圖(廿)~(廿三)。由圖可知 H 之極大值發生於達到 $U_c = c$ 條件之稍前，而並非恰好發生於 $U_c = c$ 之時。

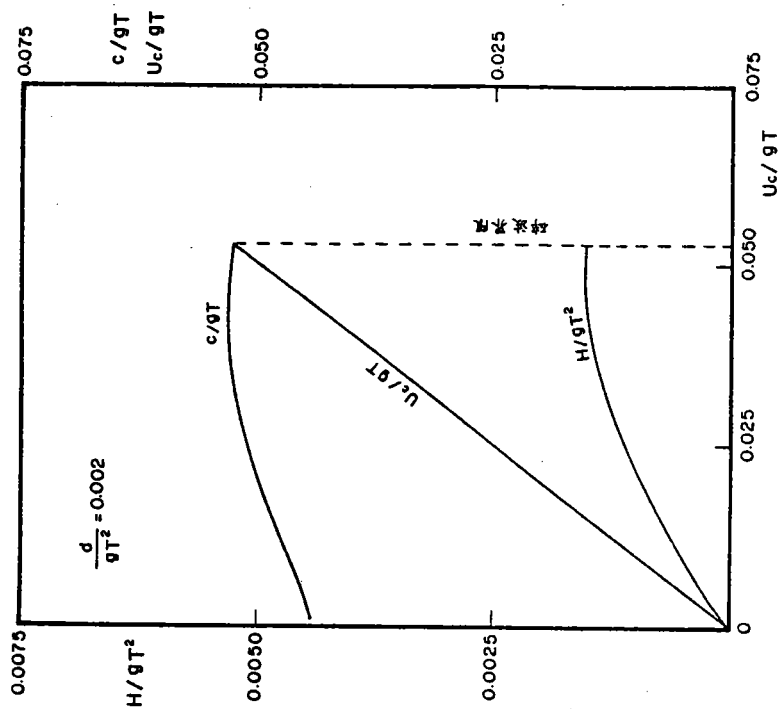


圖(廿) U_c ， c 及 H 之變化圖 ($\frac{d}{gT^2} \rightarrow \infty$)



圖(土) U_c , c 及 H 之變化圖

$$\left(\frac{d}{gT^2} = 0.03 \right)$$



圖(土) U_c , c 及 H 之變化圖

$$\left(\frac{d}{gT^2} = 0.002 \right)$$

(七)深水中極限碎波之動力特性物理量及孤立波極限碎波之動力特性物理量與各學者之比較，如表(五)、(六)。由表可知本模式之解析結果與前人之研究相近，但稍小於前人之結果。

表(五) 深水中極限碎波之動力特性物理量比較

物 理 量 \ 作 者	Longuet-Higgins (1975)	Cokelet (1977)	陳 陽 益 (1985)	本模式
Bernoulli 常數 R/gk^{-1} (平均零水位線為基準)	—	0.59643	0.59367	0.593672
波浪尖銳度 H/L	0.14107	0.14105	0.14033	0.140330
波 速 c^2/gk^{-1}	1.1931	1.1928	1.1871	1.187083
動 量 $I/\rho(gk^{-3})^{\frac{1}{2}}$	0.0701	0.0701	0.06845	0.068447
動 能 $T_L/\rho gk^{-2}$	0.0383	0.03827	0.03729	0.037288
位 能 $E/\rho gk^{-2}$	0.0346	0.03457	0.03389	0.033757
輻射應力 $S_{rr}/\rho gk^{-2}$	—	0.04941	0.04748	0.047878
總 動 壓 $P/\rho gk^{-2}$	—	—	0.00340	0.003530
能通率 $F/\sigma(g^3k^{-5})^{\frac{1}{2}}$	—	0.049903	0.048033	0.048318

表(六) 孤立波極限碎波之動力特性物理量比較

(取 $\rho = 1$, $g = 1$, $h = 1$)

	Longuet-Higgins &Fenton (1974)	Longuet-Higgins & Fox (1977)	Williams(1981)		本模式 $d = 0.2$ $N = 110$
			$d = 0.2$	外插至 $\dot{P}_s = 0$	
H/h	0.827	0.8332	0.833200	0.833197	0.824877
Fr	1.286	1.2909	1.290891	1.290889	1.237667
M_∞	1.897	1.968	1.970323	1.970319	1.963266
C_∞	1.653	1.713	1.714571	1.714569	1.710384
I_∞	2.440	2.540	2.543474	2.543463	2.532421
T_∞	0.5052	0.5339	0.535012	0.535005	0.530175
E_∞	0.413	0.4369	0.437675	0.437670	0.394020

駐波之數值計算

蔡 清 標

一、定 義

物理上，駐波係由振幅及週期相同而運動方向相反之二前進波（或言入射波與全反射波）相交會而成之波浪。駐波波動不僅在空間上具週期性，在各位置上亦均呈不等振幅之時間週期性的變化，故其為一時空相關的波動問題。由於駐波波動不具前進（Propagating）性質，因此在解析重力駐波時，無法以穩定化運動條件處理之。

二、往昔解析法

（一）攝動解析法（Perturbation Method）

見諸於往昔文獻對駐波之數學解析，因時空相關之特性，致使處理上之複雜程度並非單一前進波者所能比擬；Penney & Price（1952）首先以雙重傅立葉級數攝動解析，得有深海五階解及有限水深二階解，於其結果中顯示駐波之特有性質，如深海週波率隨波浪尖銳度之增加而減少，最高波之峰頂處水粒子加速度等於重力加速度，且由峰頂奇異性推估出峰頂點具 90° 夾角；Penney & Price之解析法，則被Aoki（1980）延伸至八階。另，對有限水深駐波之攝動解析，則由Tadjbakhsh & Keller解至三

國立中興大學土木工程研究所副教授

階解，並有 Goda & Kakizaki (1966) 之四階延伸解，Chen (1988) 之五階解或 Tsai & Chen (1986) 之三階系統攝動解析，Tsai et al (1987, 1988) 則以 Lagrange's 級數展開法，提出駐波波動之解析，在保留波形隱函數形式下，結果獲有較小之表面壓力殘差 (Residual Surface Pressure) 。

此法之優點為解之型式易於電腦上執行，缺點為如欲以人力展開解析至相當高階解時，須耗費大量時間且易生推導上之錯誤。

(二) 保角轉換解析法 (Conformal Mapping Method)

利用時間相關之保角轉換解析，首由 Grant (1973) 應用於駐波解析，在保留隱函數下，雖得有最高波特特性，但僅為一階結果；其後 Schwartz & Whitney (1981) 延伸解析，並配合攝動過程，得有 25 階半解析性 (Semi-Analytic) 數值解，Okamura (1986) 則延伸 Schwartz & Whitney 之解析至 58 階結果。但 Schwartz & Whitney 或 Okamura 之解析中，在大於某種波浪尖銳度 (如 $kH/2 > 0.3$) 時，攝動級數解之收斂半徑相當微小，致使必須藉助 Pade' Approximants 收斂之，且於解析過程中必須妥善地避開並解決所謂之共振項 (Resonance Terms) 。

此法之優點為將事先未知 (Priori Unknown) 之波形函數，保角轉換至一已知水平面，使問題易於解析，缺點仍為高階解析時過程煩冗。

(三) 數值解析法 (Numerical Method)

Saffman & Yuen (1979) 雖延伸 Longuet-Higgins &

Cokelet (1976) 之方法對大波浪尖銳度的駐波進行數值解析，但因其初期係以逼入一週期性壓力而生駐波模擬之，一週期後此一壓力並不再復現，故其並不為純駐波。另 Vanden-Broeck & Schwartz (1981) 雖曾以 Fourier 近似數值解析，然係將波形函數亦以級數展開表示，致大波浪尖銳度時亦失却精度。

三、基本控制方程式

假設週期性規則重力駐波係發生於均勻水深為 d 之水域中，令駐波波高為 H ，週期為 T 。波動座標系統令 x 軸恰為平均水位線 (Water Mean Level)， z 軸向上為正且通過波峰點，或 $x = 0$ 恰為光滑之剛體直立壁。考慮流體為均勻非壓縮性 (Incompressible) 且無粘性 (Inviscid)，則波動作用下非旋性 (Irrotational) 流場控制方程式為

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

式中 $\phi \equiv \phi (x, z ; t)$ 為速度勢 (Velocity Potential) 函數， t 為時間。

駐波波動流場之邊界條件分別為

(A) 在底部及壁面之不透水條件：

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -d \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \dots\dots\dots (3)$$

(B)自由表面條件：

(a)動力邊界條件 (DFSBC)

$$g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] = C, \quad z = \eta \dots\dots\dots (4)$$

(b)運動邊界條件 (KFSBC)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\eta}{dt}, \quad z = \eta \dots\dots\dots (5)$$

上二式中， $\eta \equiv \eta(x, t)$ 為以 x 軸為基準之自由表面波形函數， C 為常數。

將 (4) 式對時間全微分後，合併 (5) 式，則得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \right) + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = 0, \\ & z = \eta \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

今為解析上之方便，本文先將所有控制及邊界方程式予以無因次化，在長度、時間上分別以 $1/k$ 及 $1/\sqrt{gk}$ 為無因次化參數， $k (= 2\pi/L)$ 為波數， L 為波長。令

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= kx, & \hat{z} &= kz, & \hat{\eta} &= k\eta \\ \hat{t} &= \sigma t, & \omega &= \frac{\sigma}{\sqrt{gk}} \\ \hat{\phi} &= \frac{k^2}{\sqrt{gk}} \phi, & \hat{H} &= kH \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式中 σ ($= 2\pi/T$) 爲週波率。上式中符號“ $\wedge$ ”表示無因次量，爲簡潔起見，於下文中將“ $\wedge$ ”省去，如無特別說明者，均表示無因次化量。因此，(1)至(4)及(6)式可轉換成無因次方程式爲

$$\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -d \dots\dots\dots (9)$$

$$\phi_x = 0, \quad x = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\eta + \omega \phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) = Q, \quad z = \eta \dots\dots\dots (11)$$

$$\omega^2 \phi_{tt} + \phi_z + 2\omega (\phi_x \phi_{xt} + \phi_z \phi_{zt}) + 2\phi_x \phi_z \phi_{xz} + \phi_x^2 \phi_{xx} + \phi_z^2 \phi_{zz} = 0, \quad z = \eta \dots\dots\dots (12)$$

(11) 式中之 Q 爲無因次常數量。

四、速度勢之基本解

滿足(8)(9)(10)式之速度勢 ϕ ，可依分離變數法求得級數解爲

$$\phi(x, z; t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} f_{mn}(z) \cos nx \sin mt \dots\dots\dots (13)$$

式中 B_{mn} 為待定之傅立葉係數，而 $f_{mn}(z)$ 為

(一)無限水深 $d \rightarrow -\infty$ 時，

$$f_{mn}(z) = e^{nz} \dots\dots\dots (14)$$

(二)有限水深時

$$f_{mn}(z) = \frac{\cosh n(z+d)}{\cosh nd} \dots\dots\dots (15)$$

然(13)式中 m, n 皆取至無限項，於解析上殊屬不可能，故以級數截尾取至某一有限項取代之。而此有限項之選定，通常依其收斂性及電腦容量決定之。為配合下述數值解析，所選取之有限項級數表為

$$\phi = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{2N} B_{mn} f_{mn}(z) \cos nx \sin mt \dots\dots\dots (16)$$

另，因所解析之週期性重力駐波，滿足對稱性質，當 $m+n$ 為奇數時，上式之 $B_{mn} = 0$ ，此可見諸 Chen (1989) 之詳論。

五、數值計算模式

下述數值計算模式以無限水深為例說明之，有限水深情況當可以類推之。將(16)式代入(11)及(12)式，可得

$$\eta + \omega \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{2N} m B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \cos mt + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = Q$$

..... (17)

$$-\omega^2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^{2N} m^2 B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \sin mt + v + 2\omega (uu_t + vv_t) + 2uvu_z + u^2 u_x + v^2 v_z = 0$$

..... (18)

式中

$$u = - \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} n B_{mn} e^{n\eta} \sin nx \sin mt$$

$$v = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} n B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \sin mt$$

$$u_t = - \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} mn B_{mn} e^{n\eta} \sin nx \cos mt$$

$$v_t = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} mn B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \cos mt$$

$$u_x = - \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} n^2 B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \sin mt$$

$$u_z = - \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} n^2 B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \sin mt$$

$$v_z = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{2N} n^2 B_{mn} e^{n\eta} \cos nx \sin mt$$

如波浪條件H為已知時，未知數有 B_{mn} ， η ， ω ， Q 等待解求，而

今可利用之方程式僅有 (17) (18) 二式，故須尋求適當之方式方能求解，其可藉求者乃為波形分割觀念，此觀念係首由 Dean (1965) 提出求解前進波，後由 Rienecker & Fenton (1981) 配合 Fourier 級數另提數值計算模式，國內陳陽益博士、林西川博士等將之發揚光大，解析至最高波特性。

而駐波模式與前進波最大不同者，乃前進波之解析可以穩定化 (Steady Motion) 處理之，故表面波形即為一流函數，即 KFSBC 成為 $\Psi = \eta$ ，經此轉換後，前進波模式即不必遭遇時間 t 之困擾；但駐波者因無法穩定化處理，故其成為一時空相關之問題。波形函數為未知，故於 (5) 式之 $d\eta/dt$ 即為一難題，往昔如 Vanden-Broeck & Schwartz (1981) 或 Roberts & Schwartz (1983) 對雙週期性波動問題之數值處理前即先將 η 亦表為 Fourier 級數，如此雖解決了 $d\eta/dt$ ，然如其文獻所言，在大波浪尖銳度時精度則不佳，故本數值模式為克服此缺失，本著 Rienecker & Fenton (1981) 保留 η 隱函數之觀點，乃有 (6) 式之舉，於 (6) 式中可顯而易見的，由 (16) 式即可表如 (18) 式之 η 隱函數，而毋需有 $d\eta/dt$ 之困境。

因駐波係時空相關之波動，故波形除須空間分割外，時間軸亦需為之，今將 x 軸由波峰點至波谷點取 $2N + 1$ 個等間隔點，而在 t 時間軸上由波峰點至波谷點取 $M + 1$ 個等間隔點，即

$$\left. \begin{aligned} x_i &= i\pi/2N, & i &= 0, 1, \dots, 2N \\ t_j &= j\pi/M, & j &= 0, 1, \dots, M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

則每一格點上對應未知波形函數值爲

$$\eta_{ij} = \eta (x_i , t_j) \quad \dots\dots\dots (20)$$

今將 (19) 式之格點排列，沿任一對角線可將矩形區域分割成二個互爲對稱之直角三角形，故依對稱性波動條件，實際上之格點可減半，今取爲

$$\left. \begin{array}{l} x_i = i\pi / 2N \quad , \quad i = 0, 1, \dots\dots, N \\ t_j = j\pi / M \quad , \quad j = 0, 1, \dots\dots, M \end{array} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

故未知數 B_{mn} , η_{ij} , ω , Q 之個數共爲

$$\begin{aligned} & [(M-1) (2N+1) / 2] + (M+1) (N+1) + 1 + 1 \\ & = 2MN + \frac{3}{2}M + 2 \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

式中 [] 爲高斯符號，由上式 M 當需被限制爲偶數。

(21) 式每一格點當需滿足 DFSBC 及 KFSBC；由 DFSBC (17) 式可得 $(M+1) (N+1)$ 個方程式，令爲

$$\begin{aligned} F_{ij} (B_{mn} , \eta_{ij} , \omega , Q , x_i , t_j) = 0 \quad & \begin{array}{l} i=0, 1, \dots\dots, N \\ j=0, 1, \dots\dots, M \end{array} \\ & \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

但於 (18) 式中，在 $t_j = 0, \pi$ 時之所有 x_i 點上，及當 (x_i , t_j)

$= (\pi/2, \pi/2)$ 之點方程式自動滿足，且在 $x_i = \pi/2$ 軸上之格點，方程式以 $t_j = \pi/2$ 為對稱點，即

$$G(t_{j'}, x_i = \frac{\pi}{2}) = G(t_{M-j'}, x_i = \frac{\pi}{2}), j' = 1, \dots, \frac{M}{2} - 1$$

G 為該方程式值，故實際上可得 $(M-1)N + M/2 - 1$ (此恰相當於 (22) 式中 $[(M-1)(2N+1)/2]$ ， M 為偶數) 個方程式，令為

$$G_{ij}(B_{mn}, \eta_{ij}, \omega, x_i, t_j) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

另，再引入波高條件關係式為

$$H = \eta_{00} - \eta_{0M} \dots\dots\dots (25)$$

而由平均水面為零之條件式，依梯形法則可寫為

$$\frac{\pi^2}{8MN} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} [\eta_{i,j} + \eta_{i+1,j} + \eta_{i,j+1} + \eta_{i+1,j+1}] = 0 \dots\dots\dots (26)$$

故由 (23) ~ (26) 式共可得 $2MN + 3(M/2) + 2$ 個非線性聯立方程式，恰與 $2MN + 3(M/2) + 2$ 個未知數 $B_{mn}, \eta_{ij}, \omega, Q$ 相等，故依上述之波形分割法，駐波數值模式即建立之。

Newton 數值疊代法可被利用求解上列非線性聯立方程組，其計算原理請見諸林西川博士之說明。於實際數值計算中，在小波浪尖銳

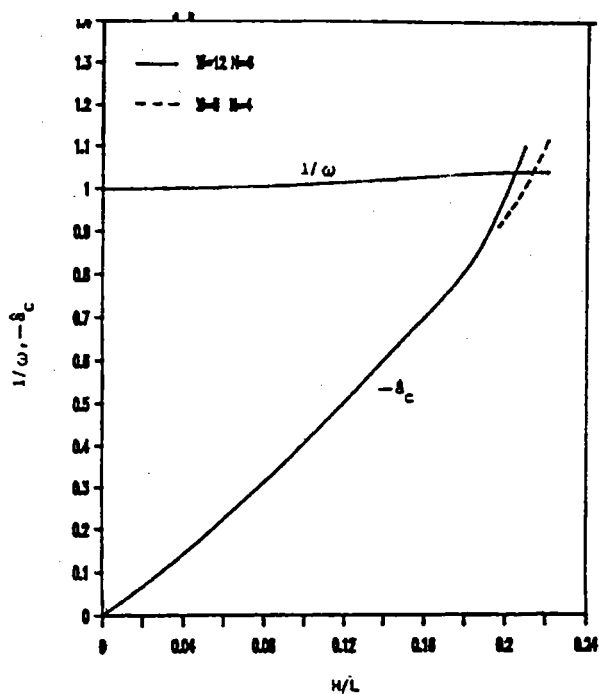
度時，可給予線性波浪值爲起始值進行疊代，然較高波之計算，則一般須以小波之解爲起始值求解之。若起始值適當，則通常只需數值疊代 3 ~ 4 次即可達到小於 10^{-8} 之控制誤差。線性波浪值爲

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ij} &= \frac{H}{2} \cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{M}\right), \quad i=0, 1, 2, \dots, N; \\ &\quad j=0, 1, 2, \dots, M \\ B_{11} &= \frac{H}{2}; \quad B_{mn} = 0, \quad \forall (m, n) \neq (1, 1) \\ \omega &= 1.0; \quad Q = 0.0 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

六、計算結果(下述恢復(7)式符號)

(一)週波率變化：

分別以 $(M, N) = (8, 4)$ 及 $(12, 6)$ 之計算結果，深海駐波週波率隨波浪尖銳度之變化如圖(一)所示， $1/\omega$ 係隨波浪尖銳度之增加而增加，即 $\omega = \sigma/\sqrt{gk}$ 係隨波浪尖銳度之增加而遞減，此特性與前進波週波率隨波浪尖銳度之增加而增加有所不同，稱爲逆變現象 (Reversal Effect)。而此逆變效應亦非所有水深之駐波皆係如此，就本模式之有限水深計算結果，當相對水深 d/L 小於 0.1662 即不再有逆變週波率之現象，即其變化係隨波浪尖銳度之增加而增加。



圖(一) 深海駐波週波率及波峰點向下加速度與波浪尖銳度之關係

Fig 1. Relationship between wave steepness and wave frequency & down acceleration on crest in deep water case.

(二) 最高駐波：

在非旋性流場中之波動，自然存在最高波動極限，前進波之最高極限控制條件為運動穩定參數，即水粒子速度等於波速時為臨界條件；但駐波因不具前進波速，故無法以運動穩定條件求其最高波，取而代之者為動力穩定條件，因駐波為一種垂直波動，最高駐波發生時之動力穩定條件為波峰點之水粒子向下加速度等於重力加速度，即水粒子之視重為零，當向下加速度大於重力加

速度時，水粒子即溢出而碎波。故最高駐波時峰點處向下加速度

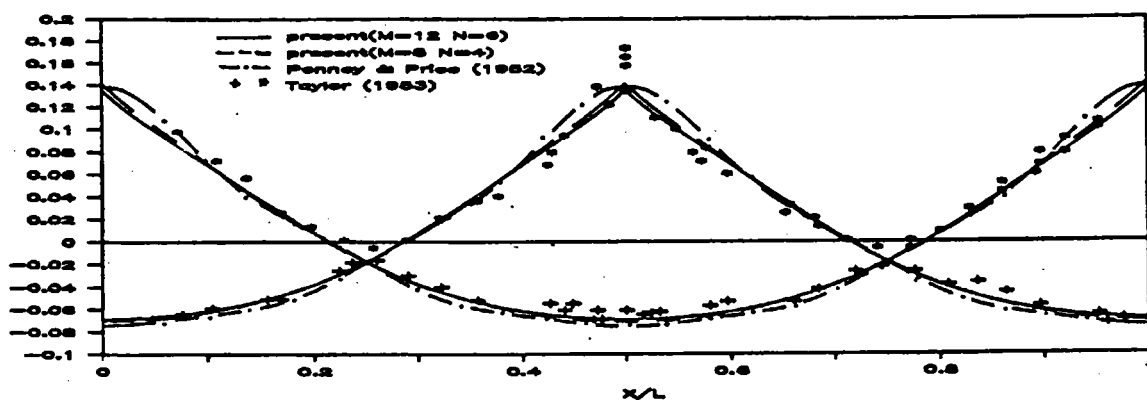
$$a_c = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} = g\omega \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{z}} = g\omega \hat{a}_c = -g \quad \dots\dots\dots (28)$$

即

$$\hat{a}_c + \frac{1}{\omega} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

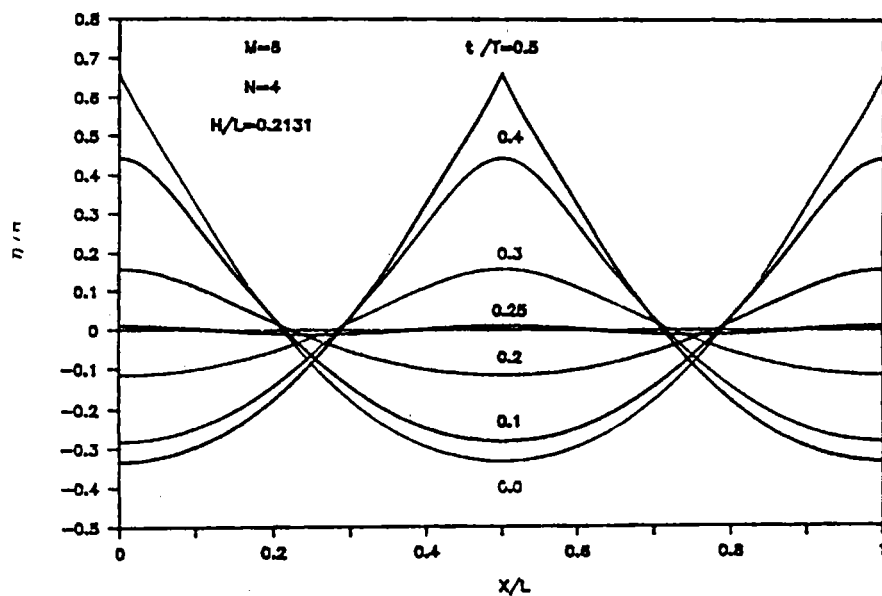
由圖(一)之結果， $-\hat{a}_c$ 係隨 H/L 之增加而增加， $-\hat{a}_c$ 與 $1/\omega$ 所交會之點為最高駐波發生之 H/L ，由圖示，當 $(M, N) = (12, 6)$ 時所對應之 $(H/L)_{max}$ 為 0.204376，而 $(M, N) = (8, 4)$ 之計算結果則為 $(H/L)_{max} = 0.213104$ 。

表(一)為本模式之深海最高駐波之 B_{mn} ， ω ， Q 及 $\hat{H}$ 之計算結果，而圖(二)為波形比較。表(二)為結果之比較。至於最高駐波之奇異性 (Singularity) 請參考蔡 & 鄭 (1989)。圖(三)為最高駐波之時空變化波形。



圖(二) 深海最高駐波波形與比較

Fig2. Wave profile of the highest standing wave in deep water.



圖(三) 駐波之時空變化波形

Fig3. The wave profile of standing wave.

表 (一) 深海最高駐波之 B_{mn} , ω , Q 及 $\hat{H}$ ($M = 8$, $N = 4$)

Table 1. The values of B_{mn} , ω , Q and $\hat{H}$ of the highest standing wave in deep water ($M = 8$, $N = 4$)

values of B_{mn} , ω , Q , $\hat{H}$ ($= kH$) ($M = 8$, $N = 4$)			
B_{11}	-.541650148 E+00	B_{48}	.618750304 E-06
B_{13}	-.512610523 E-03	B_{51}	-.147599101 E-02
B_{15}	-.920337614 E-04	B_{53}	-.142490178 E-03
B_{17}	.453134502 E-05	B_{55}	.103122012 E-05
B_{20}	.756940597 E-01	B_{57}	.877270697 E-05
B_{22}	.122245284 E-01	B_{60}	.130685895 E-03
B_{24}	.159090856 E-03	B_{62}	-.973260488 E-04
B_{26}	.108747604 E-03	B_{64}	-.249057955 E-04
B_{28}	.236137888 E-05	B_{66}	-.129014197 E-04
B_{31}	.190433622 E-01	B_{68}	.275463026 E-06
B_{33}	.358565589 E-03	B_{71}	.107784126 E-03
B_{35}	-.194549113 E-03	B_{73}	.134530940 E-04
B_{37}	-.437503943 E-04	B_{75}	-.661612119 E-06
B_{40}	-.299741401 E-02	B_{77}	-.383919062 E-05
B_{42}	.296825482 E-03	ω	.959726160 E+00
B_{44}	.102358962 E-03	Q	.808638787 E-03
B_{46}	.394586826 E-04	$\hat{H}$	.133897363 E+01

表 (二) 深海最高駐波研究結果比較

Table 2. Comparison of the results of the highest standing wave in deep water

Authors	$(H/L)_{max}$	$(\eta_c/L)_{max}$	σ / σ_o
Penney & Price (1952)	0.218	0.141	0.9486
Taylor (1953)	0.2 — 0.22	0.133 (average)	0.968
Longuet-Higgins (1973)	0.2206	0.1506	—
Aoki (1980)	0.2142	0.138	0.95122
Schwartz & Whitney (1981)	0.208	—	0.95589
Okamura (1986)	0.194	—	0.96119
Tsai (1988)	0.203475	0.1411	0.9717
Chen (1988)	3rd order 0.21061	0.13223	0.95771
	5th order 0.26706	0.1726	0.92515
Present paper	M= 8 , N= 4 0.213104	0.14198	0.95972
	M= 12 , N= 6 0.204376	0.13546	0.96086

(三) 模式之精度

一般之攝動解析近似解在大波浪尖銳度時皆會產生相當量之表面壓力殘差，而本模式在數值計算時即已控制 F_{ij} 所要求之精度（如表(三)所示， F_{ij} 誤差在最高駐波時仍可達 10^{-12} 以下），而 F_{ij} 之誤差即相當於表面壓力殘差量，顯示本模式之精度甚佳。

表 (三) 系統方程組在最高駐波計算時之誤差值 ($M=8, N=4$)

Table 3. Errors of the system equations as calculating the highest standing wave in deep water ($M=8, N=4$)

eq.	errors	eq.	errors
F_{00}	.107763682 E- 12	F_{17}	.485248731 E- 14
F_{01}	-.339385809 E- 12	F_{18}	-.912153439 E- 14
F_{02}	.967812077 E- 13	F_{20}	.824864527 E- 14
F_{03}	.192563197 E- 13	F_{21}	.176412936 E- 13
F_{04}	-.122181203 E- 12	F_{22}	.592496166 E- 13
F_{05}	-.744681434 E- 14	F_{23}	.157072590 E- 13
F_{06}	.280869202 E- 13	F_{24}	-.991998308 E- 13
F_{07}	-.183350578 E- 13	F_{25}	-.154711496 E- 13
F_{08}	-.459558807 E- 13	F_{26}	.264110336 E- 13
F_{10}	-.507693204 E- 13	F_{27}	.259006891 E- 14
F_{11}	-.145968436 E- 12	F_{28}	-.135953242 E- 13
F_{12}	.478530870 E- 13	F_{30}	-.597212865 E- 13
F_{13}	.732908118 E- 13	F_{31}	-.253733175 E- 13
F_{14}	.263196181 E- 14	F_{32}	.298475179 E- 13
F_{15}	.174918559 E- 13	F_{33}	.296578158 E- 13
F_{16}	.273805328 E- 13	F_{34}	.601856886 E- 15

(續)

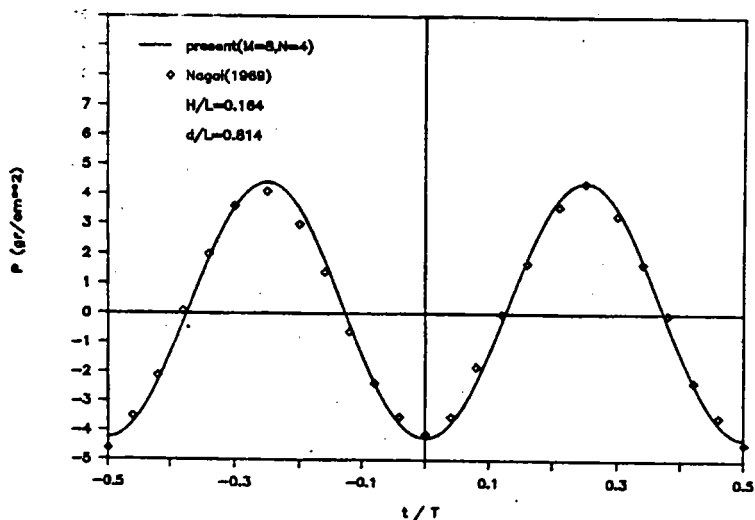
表(三) (續)

eq.	errors	eq.	errors
F ₃₅	.168282995 E-13	G ₁₃	.340253956 E-12
F ₃₆	.239469641 E-13	G ₁₄	.128065440 E-12
F ₃₇	-.117872345 E-13	G ₁₅	-.148302637 E-12
F ₃₈	-.331386068 E-13	G ₁₆	.267831835 E-13
F ₄₀	.171289184 E-14	G ₁₇	.825894413 E-13
F ₄₁	.962237940 E-14	G ₂₁	-.127216864 E-12
F ₄₂	.270738403 E-13	G ₂₂	-.137642505 E-12
F ₄₃	-.267039387 E-14	G ₂₃	.310913271 E-12
F ₄₄	-.748575941 E-13	G ₂₄	-.829925878 E-13
F ₄₅	-.267039387 E-14	G ₂₅	-.165053657 E-12
F ₄₆	.270738403 E-13	G ₂₆	.285906380 E-13
F ₄₇	.962237940 E-14	G ₂₇	.832107752 E-13
F ₄₈	.171279184 E-14	G ₃₁	-.816391761 E-13
G ₀₁	-.401944710 E-12	G ₃₂	-.811010252 E-13
G ₀₂	-.309733032 E-12	G ₃₃	.192397169 E-12
G ₀₃	.494498657 E-12	G ₃₄	.683601045 E-13
G ₀₄	-.184806640 E-12	G ₃₅	-.138384256 E-12
G ₀₅	-.178071985 E-12	G ₃₆	.521311986 E-13
G ₀₆	.526707290 E-13	G ₃₇	.540897071 E-13
G ₀₇	.640350172 E-13	G ₄₁	-.750864154 E-13
G ₁₁	-.141810030 E-12	G ₄₂	-.390413692 E-13
G ₁₂	-.260338257 E-12	G ₄₃	.147419698 E-12

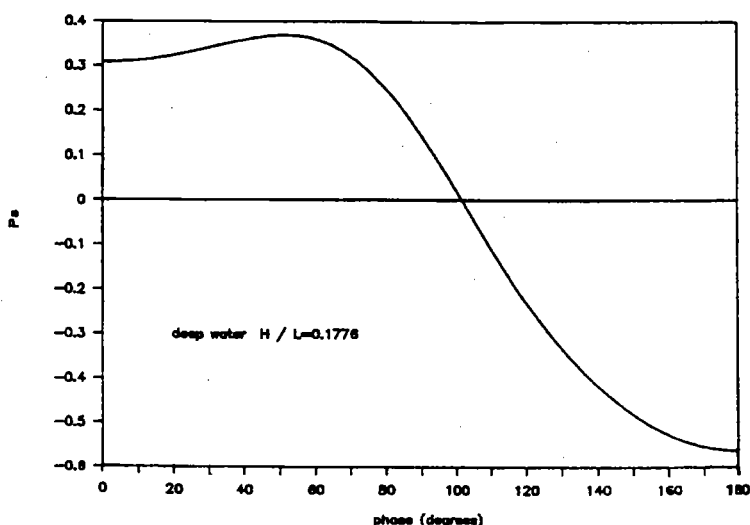
(四) 深海駐波波壓特性：

圖(四)為深水駐波底部波壓時間變化，結果顯示其波壓之震動週率為表面波動者之兩倍，此為駐波所獨有之特性，前進波之深水底部並不具波壓存在。而造成此波壓之特性原因乃駐波之水體重心隨波動而上下移動，致使底部產生一有限震動壓力，此物理現象首由 Cooper & Longuet-Higgins (1951) 於實驗室中發現。

另，圖(五)顯示在較大波時，駐波之最大波壓並不一定發生於波峰來臨時，其波壓變化係屬雙峰型 (Double Humps) 。



圖(四) 深水駐波底部波壓之時間變化



圖(五) 各位相之最大波壓變化

七、References:

1. Tsai, C.P. & Jeng, D.S. 1989, A numerical calculation on standing gravity waves in deep water, J.of Harbour Technology, vol.4, 11-25 (1989).
2. Vanden-Broeck, J. & Schwartz, L.W. 1981, Numerical calculation of waves in water of arbitrary uniform depth. phys. Fluids 24(5), 812-815.
3. Lin, S.C. 1988, Numerical analysis of nonlinear gravity waves. ph.D. Thesis, National Cheng-Kung University.

4. Chew .Y.Y.1989, The standing gravity waves, Part2:

The uniqueness , J. of Harbour Technology, Vol.4, 77-82.

多孔岸壁之港池共振特性研究

蘇青和

張金機

摘 要

採用多孔岸壁 (Porous Wall) 做港池之內壁，探討由波浪造成之港池共振特性。引用邊界元素法 (或稱邊界積分方程法)，將 Helmholtz 方程式化簡為近似矩陣方程式，以在港口處之水位及水位法線方向分量對港內及外海二區域滿足連續條件，求得方程式之解。由小開口矩形港池及 10° 及 60° 開口之二種圓形港池計算結果，顯示多孔岸壁之多孔影響參數 (Porous - Effect Parameter)， $0 \leq G_0 \leq 1$ 之大小，在 G_0 甚小時，港池共振之振態發生位置 (由無因次量 ka 或 $k\ell$ 決定， k 為波數， a 為圓半徑， ℓ 為矩形港池長度) 及共振週期 (T) 位置並無顯著的改變，僅在振態發生處之擴大率 (Amplification Factor)，隨 G_0 之增加，而有快速減小之趨勢，而 G_0 值足夠大時，共振現象有消失之跡象。

* 港灣技術研究所副研究員

** 港灣技術研究所所長

一、前言

任何港池皆可能存在對某些特定週期之波浪產生港內水位突然增大之現象——即所謂港池共振或稱港池盪漾 (Harbour Resonance or Seiche)，港池共振現象不但會防礙船舶碇靠及貨物裝卸，甚至可能造成船舶斷纜，進而使港灣構造物之破壞。在港灣規劃時若能掌握港池配置之共振週期範圍，則可使共振機率減到最低，是一項極為重要的工作。

Merian (1828) 首先提出對封閉式矩形港池長度 (ℓ) 遠大於寬 (b) 之自然共振週期公式：

$$T_n = \frac{2\ell}{n\sqrt{gh}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (1.1)$$

h = 水深 g = 重力常數

對開放式狹長一維矩形港池 Merian's 修正公式 (Wilson , 1972)，可表為

$$T_n = \frac{4\ell}{(2n+1)\sqrt{gh}}, n=0, 1, 2 \dots \dots \dots (1.1)$$

以上公式其固定邊界 (港池內壁及海底底床) 均假設為不透水之全反射體，開口處產生共振之條件為駐波節點 (開口處水位為零)。

McNown (1952) 探討小開口圓形港池，及 Kravtchenko &

McNown (1952) 探討狹長形小開口之矩形港池，皆引用上述的假設邊界條件，此種在開口處預作強迫式的邊界條件，與封閉式港池之自然共振現象完全相同。

Miles & Munk (1961) 探討矩形港池開口連接外海，同時考慮由港口傳至外海之幅射效應，應用積分方程方法解析，其理論上可解任意形狀之港池，但積分方程以 Green's 函數表示。Green's 函數對不規則港池甚難決定，其應用範圍僅討論矩形港池問題，並由解析結果，提出港池開口縮小反使港內共振情形加劇之港口矛盾論 (Harbour Paradox)。

Ippen & Goda (1963) 以富利葉轉換法及變數分離法分別處理矩形港池外海與港內之水位解，至於在港口處做二解之連續交接條件，其理論並與小型矩形港池模型試驗結果比較甚為吻合。

林銘崇、王武俊 (1982) 引用 Ippen & Goda 之方法同樣探討矩形港池共振問題，並考慮堤頭的摩擦損失及港口處的水流因收縮及擴張作用而引的水頭損失，由理論與實驗證明 Miles & Munk (1961) 提出之港口矛盾論，在某些情形並不成立。

一般數學解析方法所能得到之共振正確解 (exact solution)，僅局限於某些特殊之港池——如矩形或圓形，對任意形狀不規則之港池共振解，則需仰賴數值方法求得近似解。一般較常使用數值方法為有限差分法 (FDM)，有限元素法 (FEM) 及邊界元素法 (BEM) 等；邊界元素法或稱邊界積分方程法 (BIEM)，或 Green's 公式法。

引用有限差分法方面：Wilson etc (1965) 探討不等深港池之長波共振現象，其港口之邊界條件須做特殊的假設。Leendertse (1967) 解析不規則港池，其模式在開放海域之邊界必需給予已知的水位變化。

利用有限元素法方面：一般引用 Berkhoff (1972) 由微小振幅波導得之緩坡方程式 (Mild Slope Equation) 作為控制方程式，並引用 Tong et (1973) 所提出之混合元素法 (Hybrid Element Method) 做數值方法。由於外海為一範圍無限之領域，而有限元素法卻只能適用在有限之領域，Mei & Chen (1975) 採用混合元素法，在港內取有限元素，外海則取超元素 (Super element) 混合使用。Tsay & Liu (1983) 根據 Berkhoff 所提出之緩坡方程式，並仿 Mei & Chen 之模式而獲得一類似定態泛函數 (Stationary Functional)，其適用性更加寬廣。

引用邊界元素法方面：Hwang & Tuck (1970) 將港池之邊界視為有限個源點 (Source) 組成，這些點在數學上即表奇異點，利用超點積分求得點源強度，進而求得港內及港外之波高分佈，其模式適用等深，任意不規則港池。

Lee (1969) 應用 Weber's 解由 Helmholtz 方程式 (等深條件) 解得一積分方程，將邊界分割為有限個邊界元素，因而化積分方程式為一矩陣方程式，以在港口處之振幅及振幅法線方向變數，對港內及外海之解必須滿足連續條件，而求得港內波高分佈解。其模式可適用

任意形狀，等深之港池，數值計算結果與小型圓形港池模型試驗結果比較甚為吻合。

周宗仁（1980）利用三次元之 Green's 公式，將港池分割成有限個領域，交接處流速勢（Velocity Potential）及流速勢之法線方向導數滿足連續條件，而求得任意水深及地形之港池波高分佈。周宗仁及林炤圭（1985）引用同樣方法，再考慮波浪在水深方向之變化，而對水深方向進行分割，以提高精確度，數值計算與矩形港池模型試驗比較，結果大致吻合。

以上所討論之共振問題，在固定邊界皆假設完全反射直立體。線性自由波在等深海域進行，若不考慮水黏性及海底摩擦效應，振幅不會改變；當波浪垂直遇到直立壁物體（例如海岸或防波堤），假如物體為全反射體，若入射波與反射波無相位差，則在堤前產生原振幅二倍之駐波。A. T. Chwang（1984）在全反射堤前某段距離放置一多孔板（Porous Plate），板之特性由無因次量多孔影響係數 G_o 。（Porous-effect Parameter）決定， $G_o = C/U_c$ ， C 為波速， U_c 為特徵流速（Characteristic Velocity）， U_c 與多孔板材料（孔隙），水動力黏性係數（ μ ）及水密度有關，假設全反射堤放置於半無限長水槽底，求得多孔板前波浪之反射率為

$$C_R = \frac{1}{(1 + 2G_o)^2} \quad (\text{反射波與入射波振幅比之平方}) \text{ 及}$$

透波率 $C_T = \frac{4G_o^2}{(1+2G_o)^2}$ (透過波與反射波振幅比之平方),

在 $G_o = 0$, $C_R = 1$, $G_T = 0$ 表示全反射波無透過波, $G_o = 0.5$, $C_R = 1/2$, $C_T = 1/2$, 表示透過波與入射波皆佔原入射波之半。A. T. Chwang etc (1989) 提出多孔岸壁 (Porous Wall) 觀念, 假設多孔板與全反射直立體間為靜水區 (Dead Water Region), 而形成為多孔岸壁, 求得在半無限長水槽裏, 多孔岸壁前波浪之反射率

為 $C_r = \frac{1-G_o}{1+G_o}$, 流速勢 (ϕ) 在壁前滿足 $\phi_{,n} = -i k G_o \phi_{,t}$,

其中 $\phi_{,n}$ 為法線方向分量, $\phi_{,t}$ 為對時間導數, k 為波數, 若 $G_o = 0$ ($C_r = 1$) 表示多孔岸壁為全反射體; $G_o = 1$ ($C_r = 0$) 表示多孔岸壁為完全吸收體 (特徵流速等於波速)。

本文引用多孔岸壁現象觀念, 將一般完全反射體 ($\phi_{,n} = 0$) 邊界條件, 以多孔岸壁邊界條件取代, 引用類似 Lee (1969) 邊界積分方程原理探討等水深任意形狀港池之共振現象。

二、理論解析及數值方法

(一) 控制方程式及邊界條件

1. 控制方程式:

假設流體為非旋轉流, 流速勢 $\phi(x, y, x, t)$ 存在, 流速

$\vec{V}(x, y, z, t)$ 可表示為，

$$\vec{V} = v_i \hat{i} = \phi_{,i} \hat{i} \quad \dots\dots\dots (2.1a)$$

(座標如附圖 2-1)

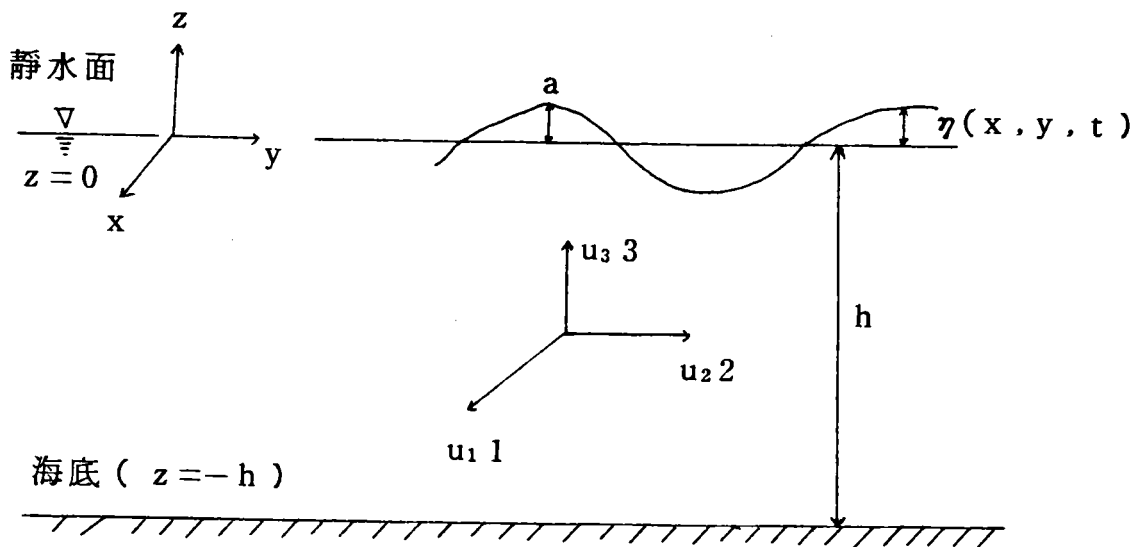


圖 2-1 座標定義示意圖

或 $v_i = \phi_{,i} \quad \dots\dots\dots (2.1b)$

對不可壓縮流，連續方程式可化為 Laplaces 方程式：

$$v_{i,i} = \phi_{,ii} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

假設海底不可穿透，滿足運動邊界條件

$$\phi_{,z} = 0 \text{ 在 } z = -h \text{ (常數)} \dots\dots\dots (2.3)$$

線性自由表面運動及動力邊界條件分別爲

$$\phi_{,z} = \eta_{,t} \text{ 在 } z = \eta \approx 0 \dots\dots\dots (2.4a)$$

$$\text{及 } \phi_{,t} + g\eta = 0 \dots\dots\dots (2.4b)$$

$$\eta(x, y, t) = a e^{i(kx - \sigma t)} \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \text{ 爲角頻率, } k = \frac{2\pi}{L}$$

T : 週 期, L : 爲波長

因水深爲常數, 流速勢在時間領域爲週期性

$$\text{i. e. } \phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z, t + T) \dots\dots(2.6)$$

由變數分理法理論及上述邊界條件可得

$$\phi = \frac{1}{i\sigma} \frac{ag \cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} f(x, y) e^{-i\sigma t} \dots\dots (2.7)$$

$$\text{及 } \eta = a f(x, y) e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (2.8)$$

其中波函數 $f(x, y)$ (Wave Function) 滿足 Helmholtz 之
程式

$$f_{,xx} + f_{,yy} + k^2 f = 0 \dots\dots\dots (2.9)$$

週期、水深與波數則滿足 Dispersion 關係式

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

考慮一不規則港池（如附圖 2 - 2），假設海岸線位於 x 軸上無限延伸，整個區域分割為無限外海區（區域 I）及港內區（區域 II），波浪由正 y 軸甚遠處向海岸進行， f_1 及 f_2 分別代表區域 I 及區域 II 內之波函數滿足控制方程式 (2.9)。

2. 邊界條件：

假設外海之海岸線為全反射直立體

$$\text{i. e.} \quad f_{1,n} = 0 \quad \text{在 } \overline{AC}, \overline{BC} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

假設港池內壁為多孔岸壁，其多孔影響係數為 G_o ，則

$$f_{2,n} = ik G_o f_2 \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

在港口處因流體為連續體必滿足連續條件：

$$f_1 = f_2 \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$\text{在 } \overline{AB} \\ f_{1,n} = -f_{2,n} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

以下針對區域 I 及區域 II 分別求解 f_2 及 f_1 之表示式，並引用在港口連續性求得波函數值。

《 區域 II 》

利用 Green's 公式，可得 Helmholtz 方程式之 Weber's 解 (Lee 1969)，波函數 f_2 在區域 II (有限區域) 之線積分方程式爲

$$f_2(\vec{x}) = \frac{-i}{4} \int_S \left[f_2(\vec{x}_0) (H_0^{(1)}(kr))_{,n} - H_0^{(1)}(kr) (f_2(\vec{x}_0))_{,n} \right] ds(\vec{x}_0) \dots\dots (2.15)$$

$\vec{x}$ 在區域 II 內之點

$\vec{x}_0$ 在區域 II 邊界上之點 (線積分如本區域逆時鐘方向爲正)

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0|, \quad i = \sqrt{-1}$$

$(f_2(\vec{x}_0))_{,n}$: 邊界上點 $\vec{x}_0$ 波函數之法線方向分量

$H_0^{(1)}(kr)$: 爲第一類第 0 階 Hankel 函數

積分方程式表示港內波函數 f_2 爲邊界上波函數與波函數法線方向分量之邊界積分。如因果能求得邊界上之 f_2 及 $f_{2,n}$ 則可得港內任一點之 f_2 值。

假設取港內點甚爲接近區域 II 之邊界，如邊界甚爲平滑 (Smooth Curve)，則邊界上點 $\vec{x}_1$ 之波函數改表爲：

$$f_2(\vec{x}) = -\frac{i}{2} \int_S \left[f_2(\vec{x}_0) (H_0^{(1)}(kri))_{,n} \right]$$

$$- H_0^{(1)}(k r_i) (f_2(\vec{x}_0))_{,n}] ds(\vec{x}_0) \dots\dots\dots (2.16)$$

其中 $r_i = | \vec{x}_i - \vec{x}_0 |$

$\vec{x}_i$ 爲邊界上之點

方程式 (2.15) 及 (2.16) 爲區域 II 之控制積分方程式。

《 區域 I 》

在區域 I (無限區域) 波函數 f_1 可分爲三種成份波函數線性相加而得：

$$f_1 = f_i + f_r + f_3 \dots\dots\dots (2.17)$$

其中 f_i : 入射波

f_r : 反射波

f_3 : 散射波 (Radiated Wave Function)

波函數 f_3 由港內經港口向外輻射之波，伴隨港池存在而生存之波。

外海之海岸線假設爲全反射直立體 ($f_{1,n} = 0$)

$$\text{i.e.} \quad (f_i + f_r)_{,n} = (f_i + f_r)_{,y} = 0 \dots\dots\dots (2.18)$$

邊界條件 (2.14) 可化爲

$$f_{3,n} = -f_{2,n} \quad \text{在 } \overline{AB} \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

邊界條件 (2.11) 可化爲

$$f_{3,n} = 0 \quad \text{在 } \overline{AC} \text{ 及 } \overline{BC} \text{ 上} \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

散射波 f_3 由港口向外海幅射，在外海無限遠處必消失 (Radiation Condition)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_3 = 0 \quad , \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

各成份爲線性相加，散射波 f_3 滿足 Helmholtz 方程式

$$\text{i.e.} \quad f_{3,xx} + f_{3,yy} + k^2 f_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

利用 Green's 公式在區域 I (無限區域) 之散射波 f_3 同樣可得積分方程式

$$\begin{aligned} f_3(x) = & -\frac{i}{4} \int_S \left[f_3(x_0) (H_0^{(1)}(kr))_{,n} \right. \\ & \left. - H_0^{(1)}(kr) (f_3(\vec{x}_0))_{,n} \right] ds(\vec{x}_0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

$\vec{x}$: 區域 I 內之點

$\vec{x}_0$: x 軸上之點

r : $|\vec{x} - \vec{x}_0|$

同理在邊界上(x 軸上)之點 $\vec{x}_i$ 其波函數可表示為

$$f_3(\vec{x}_i) = +\frac{i}{2} \int_S H_o^{(1)}(kr_i) (f_3(\vec{x}_o))_{,n} ds(\vec{x}_o) \dots\dots\dots (2.24)$$

其中 $\vec{x} = (x_o, 0)$ $\vec{x}_i = (x_i, 0)$

$$r = |\vec{x}_i - \vec{x}_o| = |x_i - x_o|$$

方程式 (2.23) 及 (2.24) 為區域 I 之控制積分方程式。

(二) 數值方法

為求得方程式 (2.15), (2.16), (2.23) 及 (2.24) 之解, 採用下列近似方法:

《 區域 II 》

將區域 II 港池外圍邊界分割為 N 個線段, 如附圖 2-3。假設 N 值夠大, 使在每個線段上之 f_2 , $f_{2,n}$, $H_o^{(1)}_{,n}$ 皆為常數 (以線段中點值代表平均值), 則方程式 (2.16) 可化為:

$$f_2(\vec{x}_i) = b_o \sum_{j=1}^n f_2(\vec{x}_j) (H_o^{(1)}(kr_{ij}))_{,n} - H_o^{(1)}(kr_{ij}) (f_2(\vec{x}_j))_{,n} \Delta S_j \dots\dots\dots (2.25)$$

$\vec{x}_i$: 第 i 個線段之中點

r_{ij} : $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$

$$b_o = -\frac{i}{2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

ΔS_j : 第 j 個線段之長度

方程式可簡化為矩陣方程式

$$F = b_o [QF - GP] \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

其中已知係數矩陣

$$Q_{ij} = (H_o^{(1)}(kr_{ij})),_n \Delta S_j \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

$$G_{ij} = H_o^{(1)}(kr_{ij}) \Delta S_j$$

未知係數矩陣

$$F_i = f_2(x_i) \quad i = 1, \dots, N \quad \dots\dots\dots (2.28a)$$

$$P_i = (f_2(x_i)),_n \quad i = 1, \dots, N \quad \dots\dots\dots (2.28b)$$

假設開口處 p 個線段 ($i = 1, 2, \dots, p$) 波函數之法線方向分量為常數 C_{oi}

$$P_i = C_{oi}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

港內多孔岸壁則滿足

$$P_i = iKG_{oi}f_i = d_iF_i, \quad i = p+1, p+2, \dots, N$$

$$G_{oi} : \text{第 } i \text{ 線段之已知多孔影響參數} \dots\dots\dots (2.30a)$$

$$d_i = iKG_{oi}, \quad i = p+1, p+2, \dots, N \dots\dots\dots (2.30b)$$

方程式 (2.29) 及 (2.30) 代入 (2.28b) 可得

$$P = DF + C \dots\dots\dots (2.31)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } D_i &= 0 & i &= 1, 2, \dots, p \\ &= d_i & i &= p+1, p+2, \dots, N \\ C_i &= 0 & i &= p+1, \dots, N \\ &= C_{oi} & i &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \dots\dots\dots (2.32)$$

將 (2.31) 及 (2.32) 代入 (2.26) 化簡得

$$F = b_o (QF - GDF - GC) \dots\dots\dots (2.33a)$$

$$\text{或 } (b_oQ - I - GD)F = b_oGC \dots\dots\dots (2.33b)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } I_{ij} &= 1 & i &= j \\ &= 0 & i &\neq j \end{aligned}$$

如果 $(b_oQ - I - GD)^{-1}$ 存在

$$\text{則 } F = (b_oQ - I - GD)^{-1} b_oGC \dots\dots\dots (2.34a)$$

$$\text{或 } F = MC$$

其中 $M = (b_o Q - I - GD)^{-1} b_o G \dots\dots\dots (2.34b)$

同理方程式 (2.15) 可化為

$$F^* = \frac{b_o}{2} (Q^* F - G^* D F - G^* C) \dots\dots\dots (2.35)$$

其中 $F_i^* = f_2(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i$ 在港內區域 II 之點 $i = 1, \dots M$

已知係數矩陣 Q^* , G^* 與方程式 (2.27) 相同定義, 如果 F 求得, 則由方程式 (2.35) 可解點港內波函數 F^* 。欲求得 F , 需先求得 C , 將由港口 f 及 $f_{,n}$ 之連續性而求得。

《 區域 I 》

同理方程式 (2.24) 可簡化為

$$f_3(x_o, 0) = -b_o \int_{AB} H_o^{(1)}(kr_i) (f_3(x_o, 0))_{,n} dx_o \dots\dots\dots (2.36)$$

其中 $(x_i, 0)$ 為 x 軸上之點

$$r_i = |x_i - x_o|$$

由邊界條件 (2.19) $(f_{3,n} = -f_{2,n})$

$$\text{可得 } f_3(x_o, 0) = +b_o \int_{AB} H_o^{(1)}(kr_i) (f_2(x_o, 0))_{,n} dx_o \dots\dots\dots (2.37)$$

或近似爲

$$f_3(x_{o,o}) = b_o \sum_{j=1}^p H_o^{(1)}(kr_{ij})(f_2(x_{j,o})), n \Delta S_j \cdots (2.38)$$

其中 $r_{ij} = |x_i - x_j|$

或表示爲矩陣方程式

$$\bar{F} = b_o H C \cdots (2.39)$$

其中 $\bar{F}_i = f_3(x_i, O) \quad i = 1 \cdots p$

$$H_{ij} = H^{(1)}(kr_{ij}) \begin{cases} i = 1 \cdots p \\ j = 1 \cdots p \end{cases}$$

$$C_i = C_{oi} \quad i = 1 \cdots p$$

因 $f_1 + f_r$ 在港口邊界處爲常數，不失一般性，

$$\text{令 } f_i + f_r = 1 \cdots (2.40)$$

在港口 AB 邊界條件 (2.13) 化爲

$$f_2 = f_1 = f_3 + 1 \cdots (2.41)$$

$$\text{或 } F = \bar{F} + E \cdots (2.42)$$

$$\text{其中 } E_i = 1 \quad i = 1 \cdots p$$

在港口 $\overline{AB}$ 波函數滿足連續條件，由方程式 (2.34) 及 (2.39) 得

$$MC = b_o H C + E$$

$$\text{或 } (M - b_o H) C = E$$

$$\text{或 } C = (M - b_o H)^{-1} E \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

將 (2.34) 及 (2.43) 代入 (2.35) 即可得港內波函數 F^* 值。

(三) 擴大率

擴大率 (Amplification Factor) R 定義為港內水位振幅與港口處入射波與反射波之和 (假設港口處為對開) 之比值

$$R = \frac{|\eta_2(x, y, t)|}{|a(f + f_r)e^{-i\sigma t}|} = \frac{|af_2(x, y)e^{-i\sigma t}|}{|ae^{-i\sigma t}|}$$

$$= |f_2(x, y)|$$

表示港內擴大率為波函數之絕對值。

三、計算結果與討論

(一) 矩形港池

考慮矩形港池長 $\ell = 12.25$ 吋，寬 $b = 2.38$ 吋，水深 $h = 10.128$ 吋，若港池為封閉式，則以 Merian's 公式 (1.1) 估算自然共振週期前四個振態分別為

$$T_1 = 0.3913 \text{ 秒}$$

$$T_2 = 0.1951 \text{ 秒}$$

$$T_3 = 0.1294 \text{ 秒}$$

$$T_4 = 0.0964 \text{ 秒}$$

若港池為開放式 (小開口)，則以 Merian's 修正公式 (1.2) 估算之港池自恢共振週期前四個振態分別為

$$T_1 = 0.7831 \text{ 秒}$$

$$T_2 = 0.2605 \text{ 秒}$$

$$T_3 = 0.1557 \text{ 秒}$$

$$T_4 = 0.1106 \text{ 秒}$$

因爲開放式港池部分能量將傳至外海，所以自然共振週期在同一等級振態皆較封閉式港池爲長。

Ippen & Goda (1963) 及 Lee (1969) 分別以上述比例港池做模型試驗，並分別以其發展之模式計算比較（如附圖 3 - 1，圖中港池後壁中點（A 點）處之擴大率與無因次量 k_l 之函數關係圖。Lee (1969) 理論與實驗結果甚爲吻合，而在第一振態點，Ippen & Goda 計算之擴大率理論值較實際爲大外，其他各點均甚爲吻合；其前二個振態分別落在 $k_l = 1.3$ ($T = 1.10$ 秒及 $k_l = 4.2$ ($T = 0.55$ 秒) 附近。Lee 以任意港池理論計算之擴大率分別爲 6.4 及 2.8，兩者模式因考慮散射效應，部分能量將傳至外海，因此共振週期較開放式自然共振週期爲長。爲了解港內多孔岸壁對振態及擴大率之影響，取 $G_o = 0.1$ 及 $G_o = 0.5$ 計算，在 $G_o = 0.5$ 表示港內壁能量吸收能力爲 $2/3$ ， $G_o = 0.1$ 表示小部份能量吸收體，Lee 模式相當於 $G_o = 0$ ，表示港池內壁爲完全反射體。計算結果如附圖 3-1，與 Lee 計算結果比較，在 G_o 較小時，顯示振態點之位置並未因 G_o 之大小不同而有明顯之移動，僅隨 G_o 之增大，擴大率在振態點有明顯快速減小之趨勢；圖 3 - 2 至圖 3 - 4 則爲第一振態點 $k_l = 1.3$ ($T = 1.10$ 秒) 之港內等擴大率圖，

整體而言， $G_0 = 0.1$ 時等擴大率線遠較 $G_0 = 0$ 時為小， $G_0 = 0.5$ 時振態點已不明顯，擴大率已遠小於 1。

(二) 圓形港池

Lamb (1945) 曾推導對封閉式圓形港池 (半徑 a) 之前二個對線式振態共振週期公式為

$$ka/\pi = 0.7655, 1.7571 \quad k \text{ 爲波數}$$

假設考慮圓之半徑為 $a = 0.75 \text{ ft}$ ，水深 $h = 1 \text{ ft}$ ，則其自然共振週期前二個振態位置分別為 $T_1 = 0.619$ 秒及 $T_2 = 0.408$ 秒。

Lee (1969) 以上述大小之圓形港池做 10° 開口之模型試驗，並以其任意形港池模式與圓型港池理論解二種結果比較。在圓中心點 $O(0, 0)$ 及點 $A(0.70, 45^\circ)$ 兩處測得之擴大率對 ka 函數關係圖，如附圖 3-5 及附圖 3-6 所示。圖中顯示前四個振態點不管在 O 點或 A 點皆位於 $ka = 0.35, 1.988, 3.18$ 及 3.87 四處，有明顯之尖峯存在。 $ka = 3.87$ 時圓中心點 (O 點) 之擴大率理論值甚至接近 10，而取多孔影響參數 $G_0 = 0.1$ 及 $G_0 = 0.5$ 做比較，同樣發現在 $G_0 = 0.1$ 時，振態週期與 $G_0 = 0$ 條件之位置並無明顯改變，僅振態上之擴大率有明顯減少趨勢，在 $G_0 = 0.5$ 時，振態點已不明顯，擴大率之值也甚小。圖 3-7 及圖 3-9，則為 $G_0 = 0, 0.1$ 及 0.5 三種狀況之圓形港池

等擴大率圖($k_a = 0.35$)。

Lee 曾以 60° 度開口之圓形港池，進一步探討共振現象，前四個振態分別落在 $ka = 0.46$ ， 2.15 ， 3.38 及 3.96 四個位置，振態點之擴大率較 10° 開口之圓形港池為小，但其頻帶寬(band widths)則顯著的加大；此即 Miles & Munk (1961) 所謂的港口矛盾論(Hardor Paradox)。取 $G_o = 0.1$ 及 $G_o = 0.5$ 兩種多孔影響參數，計算結果如附圖 3-10 及圖 3-11。圖中顯示其現象與前述一致，但等擴大率在共振點之值減小趨勢則較前 10° 開口圓形港池為小。圖 3-12 至 3-14 則為 $G_o = 0$ ， $G_o = 0.1$ 及 $G_o = 0.5$ 等三種條件 60° 開口圓形港池等擴大率圖($k_a = 0.46$)。 G_o 值較小時， G_o 之改變，對擴大率與 ka 之函數曲線形狀，並無甚明顯改變，此點與考慮港口之散射能量損失，共振週期較開口式自然共振週為長之現象，不甚相同，而 G_o 足夠大時(大於 0.5)，共振現象已不明顯。

參考文獻

1. A.T. Chwang and Z.Dong(1984), "Wave-trapping due to a porous plate", Proc. 15th ONR Symposium on Naval/Hydro., Hamburg, Germany, p.407-417.
2. A.T. Chwang, S.H. Ou and C.H. Su(1989), "Dissipation of Wave Energy by a Porous Wall", in press.
3. Berkhoff, J.C.W. (1972), "Computation of Combined Refraction-diffraction", proceeding of the 13th Coastal Engineering Conference , Vol.1, pp.471-490.
4. Hwang, L.S. & E.D. Tuck (1972), "On the oscillations of harbors of arbitrary shape", J. Fluid. Mech, Vol.42, part 3, pp.447-464.
5. Ippen, A.T. & Goda, Y. (1963), "Wave induced oscillations in harbors : the Solution for a rectangular harbour connected to the open-sea", Hydrodynamics Lab., M.I.T. T.R. no.59.
6. Kravtchenko, J. & McMown, J. S. (1955), "Sciche in rectangular parts", Part, Appl. Math. 13, pp.19-26.
7. Lamb, H.(1954), "Hydrodynamics", 6th Edition, Dover publications, Now York.
8. Lee J.J.(1969), "Wave induced oscillations in harbor of arbitray shape", Ph.D. thesis. California Institute

of Technology.

9. Lee J.J. (1971), "Wave induced oscillations in harbors of arbitray shape", J. Fluid Mech. Vol.45, part 2, pp. 375-394.
10. Leendertse, J.J. (1967), "Aspects of computatioal model for long-period water wave propagation", The rand Corporation memo, RM-5294-PR.
11. Mei, C.C. & H.S. Chen (1975), "Hybrid element method for water waves", Symposium on modeling Techniques 2nd Annual symposium of the waterways Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE, Vol.1, pp.63-81.
12. Miles, J. and W. Munk (1961), "Harbor pardox ", J. Waterways and Harbors Division, ASCE. WW 3, pp.111-130.
13. Tong, P. Pion, T.H.H. and S.J.Lasry (1903), "A hydrid-element approach to crack problems in plane elasticity , International J. Numerical Methods in Engineering, Vol.7, pp.297-308.
14. Tsay, T.K. & P.L.-F. Liu, (1983), "A finite element model for wave refraction and diffractation ", Appiled Ocean, Reps. Vol.5, No.1, pp.30-37.
15. Wilson, B.W. (1972), "Seiches , Advances in Hydro-Science " , Vol.8, pp.1-94.

16. 林銘崇、王武俊 (1982) , " 矩形港池共振特性之研究 " , 國立海洋學院河海工程學系, 河海研究第 13 號。
17. 周宗仁 (1980) , " 應用有限領域法解析港池水面波動問題 " , 國立海洋學院河海工程學系, 河海研究第 3 號。
18. 周宗仁、林炤圭 (1985) , " 應用邊界元素法數值解析任意地形及水深之港池水面波問題 " , 第八屆海洋程研討會論文集。

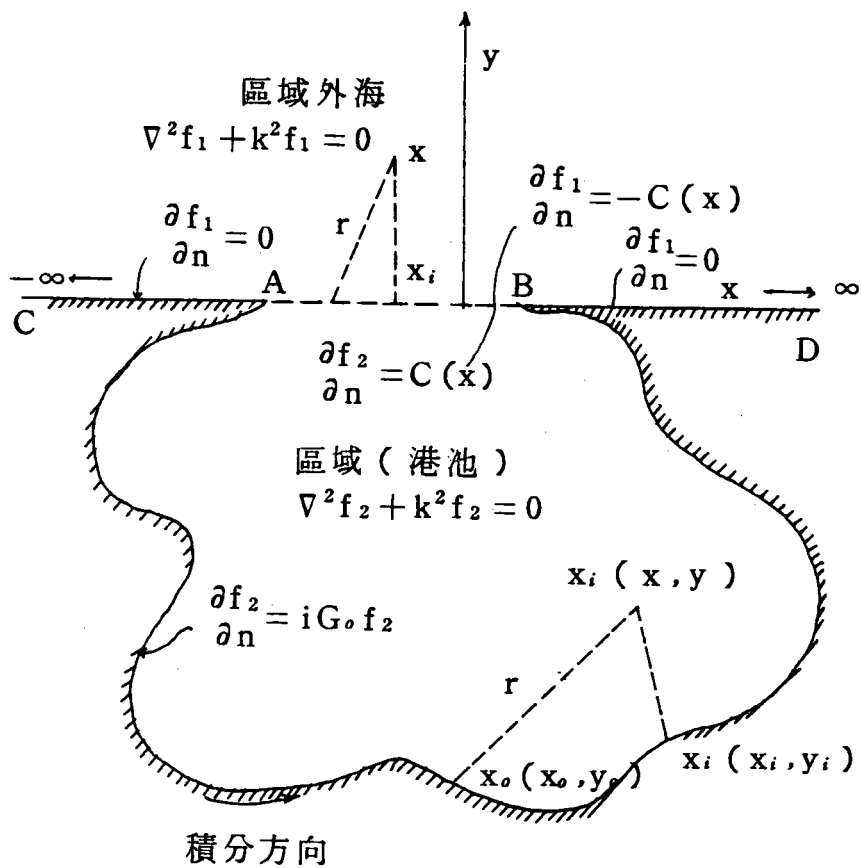
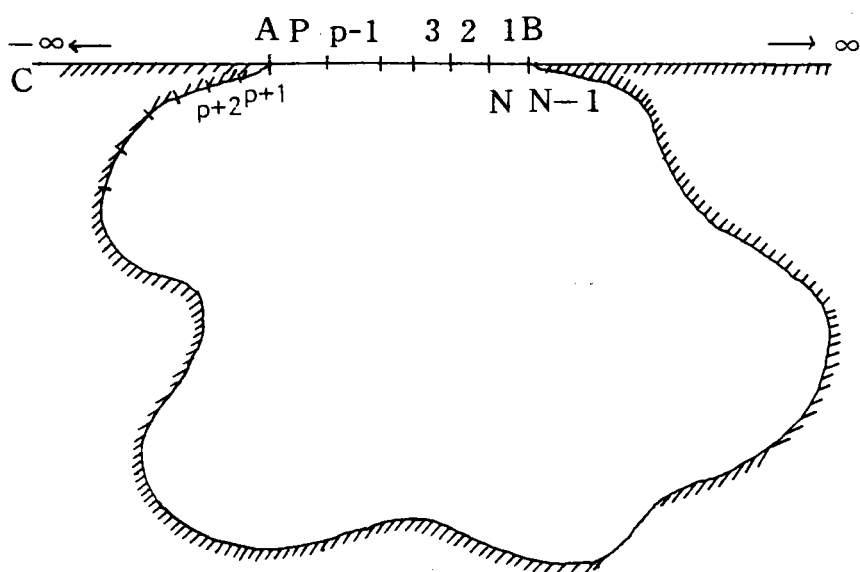


圖 2 - 2 不規則港池示意圖



P：港口處之邊界元素總數

N：港池外圍（包括港口）邊界元素總數

附圖 2 - 3 邊界元素示意圖

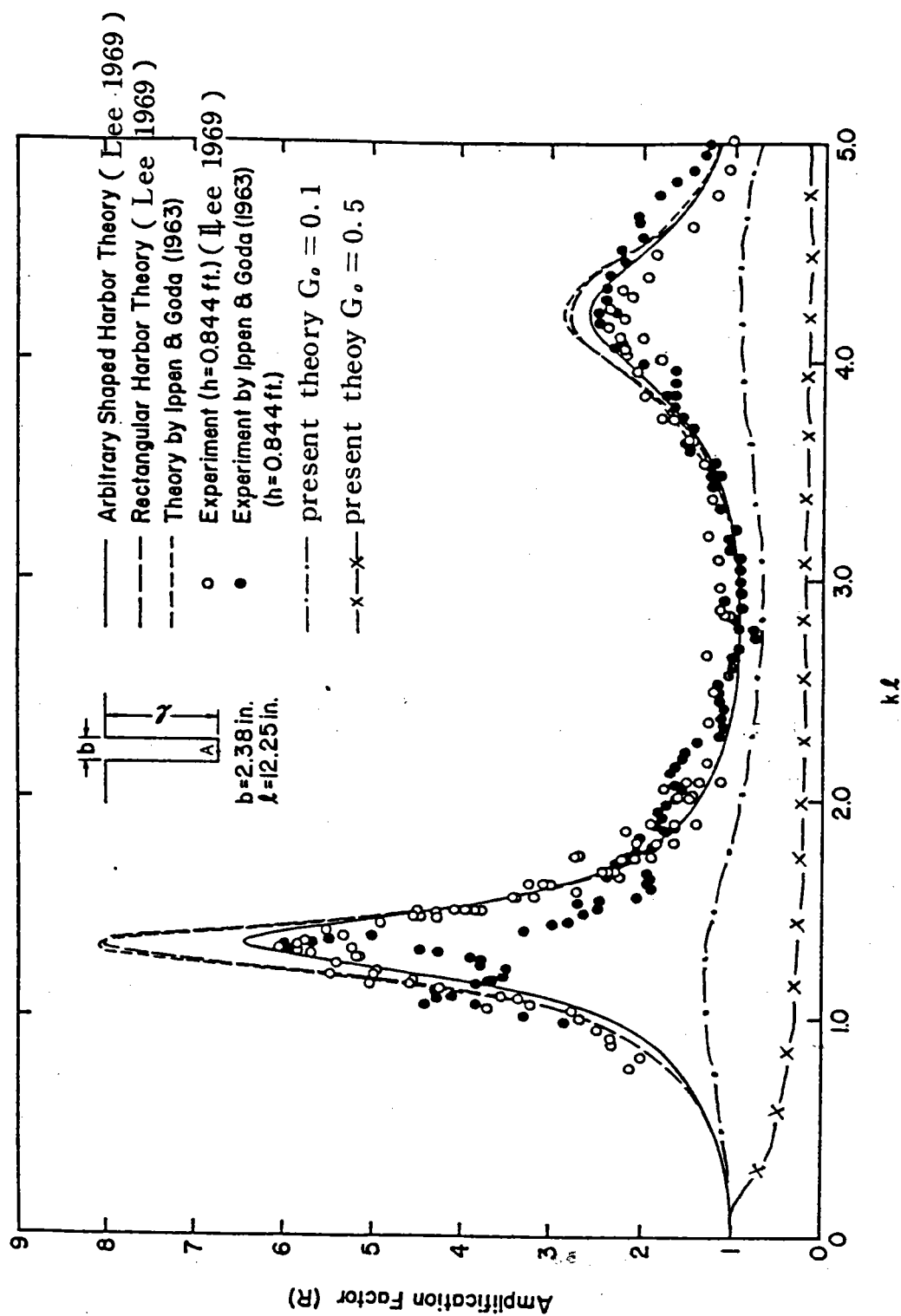


圖 3-1 小開口矩形港池 (A 點) 之共振曲線圖

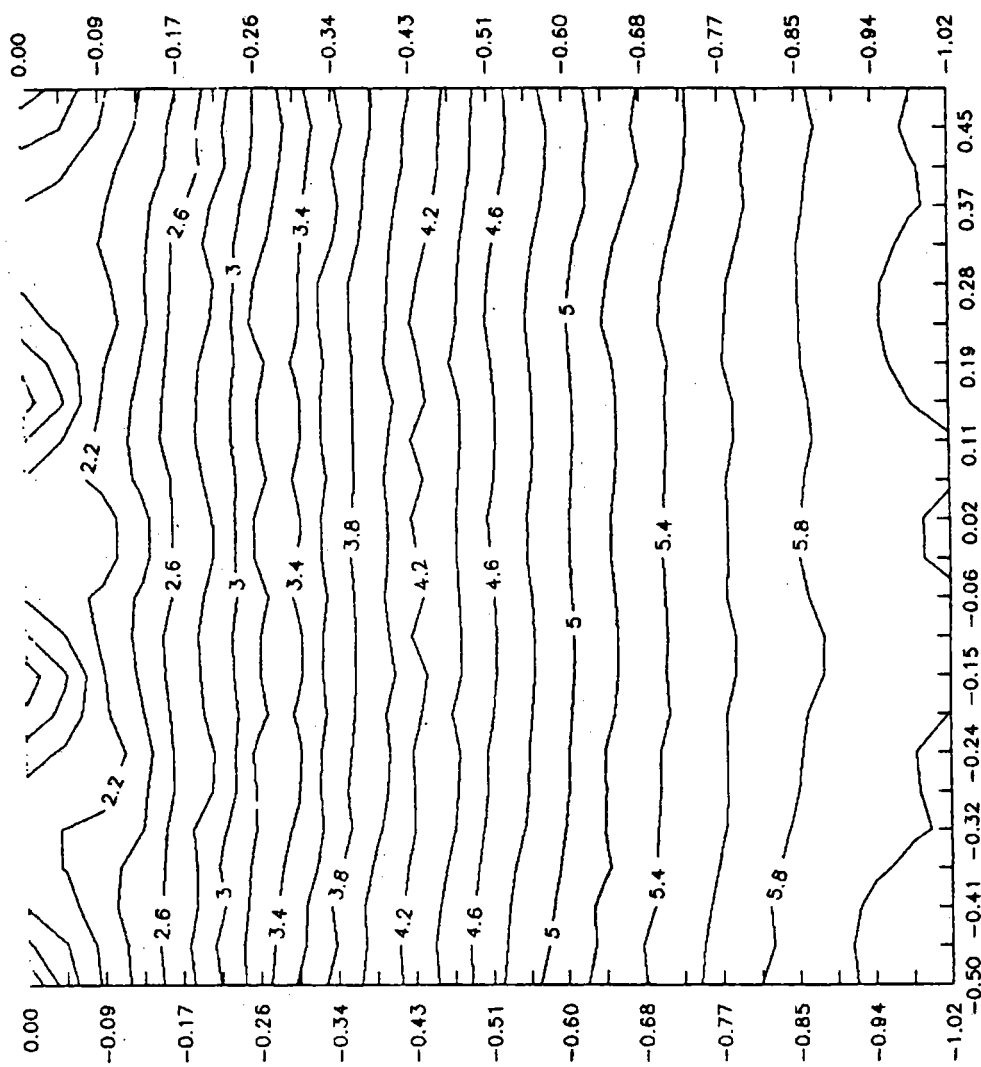


圖 3 - 2 小開口矩形港內 ($G_0 = 0$) 之等擴大率線圖 ($k\ell = 1.3$)

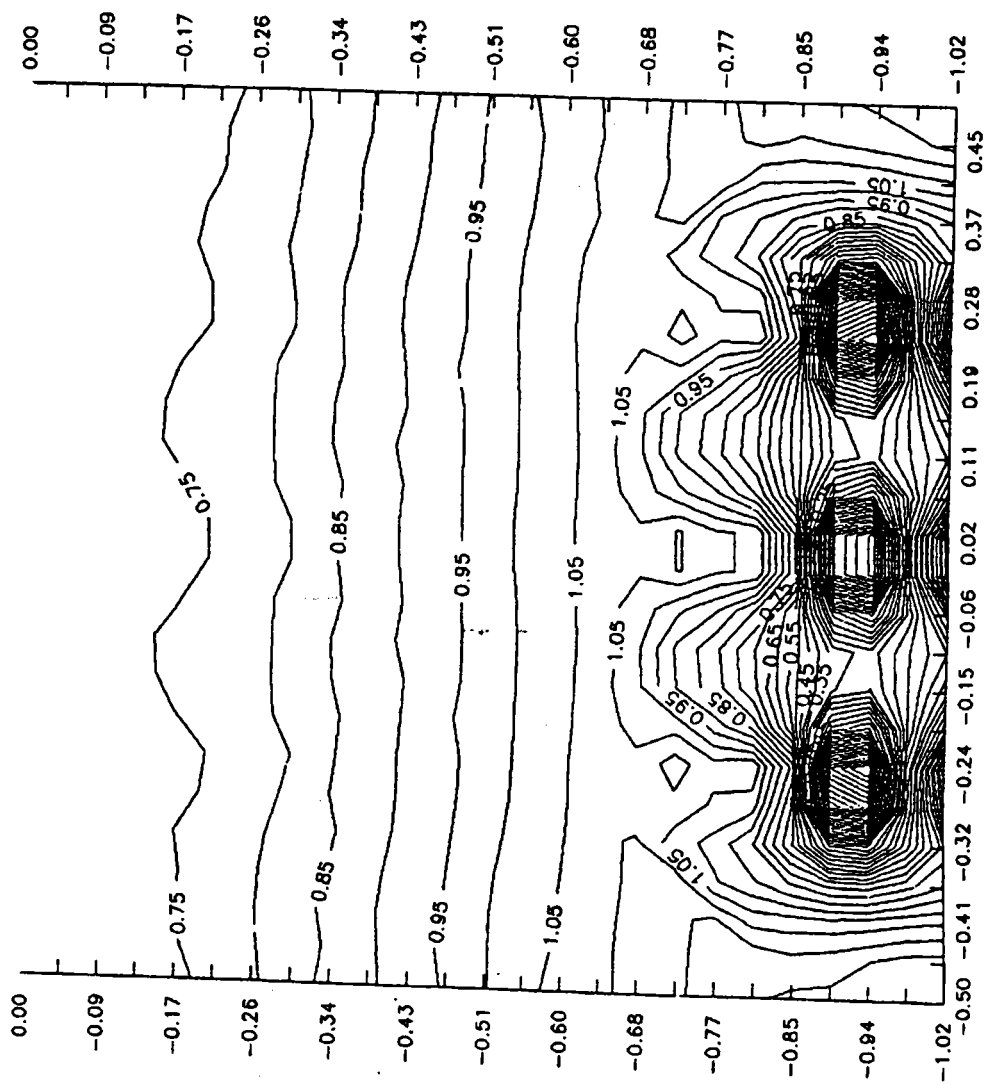


圖 3-3 小開口矩形港內 ($G_0 = 0.1$) 等擴大率線圖 ($k\ell = 1.3$)

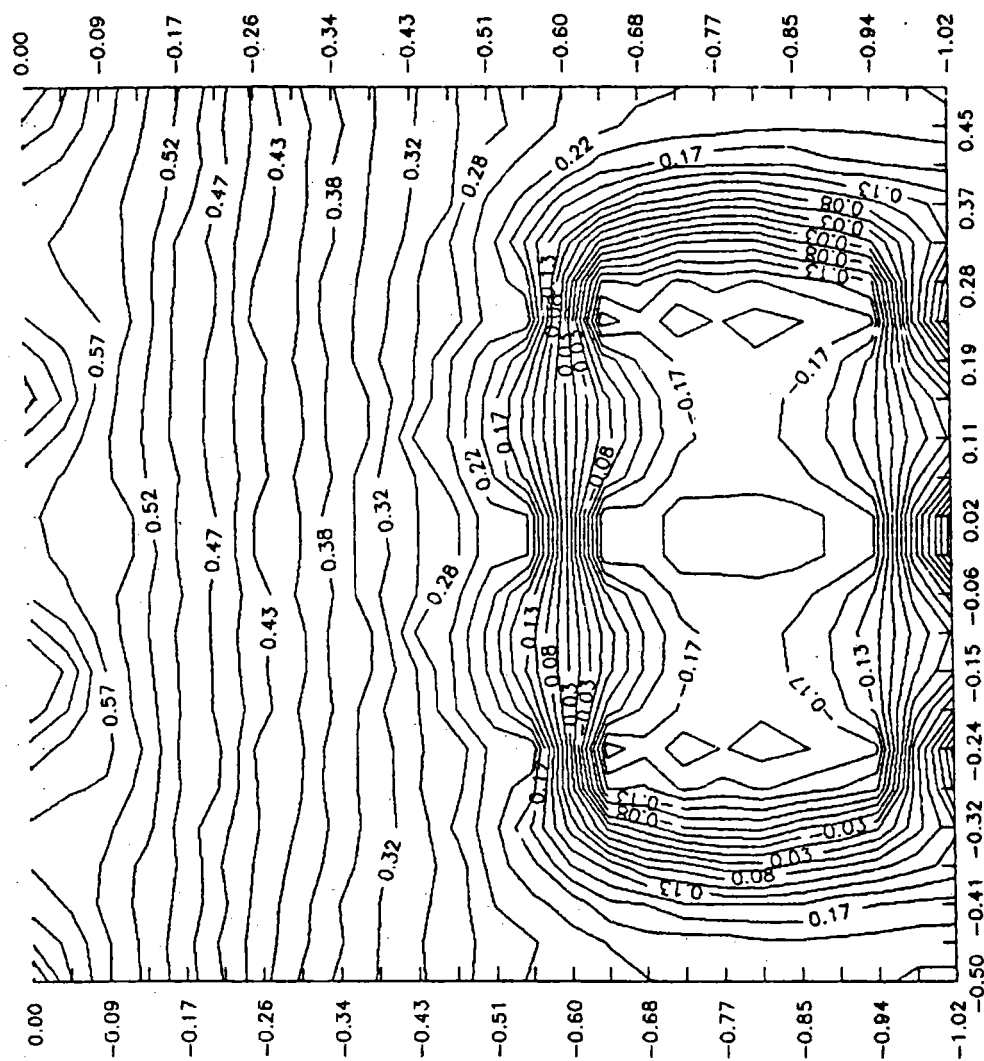


圖 3-4 小開口矩形港內 ($G_0 = 0.5$) 等擴大率線圖 ($k\ell = 1.3$)

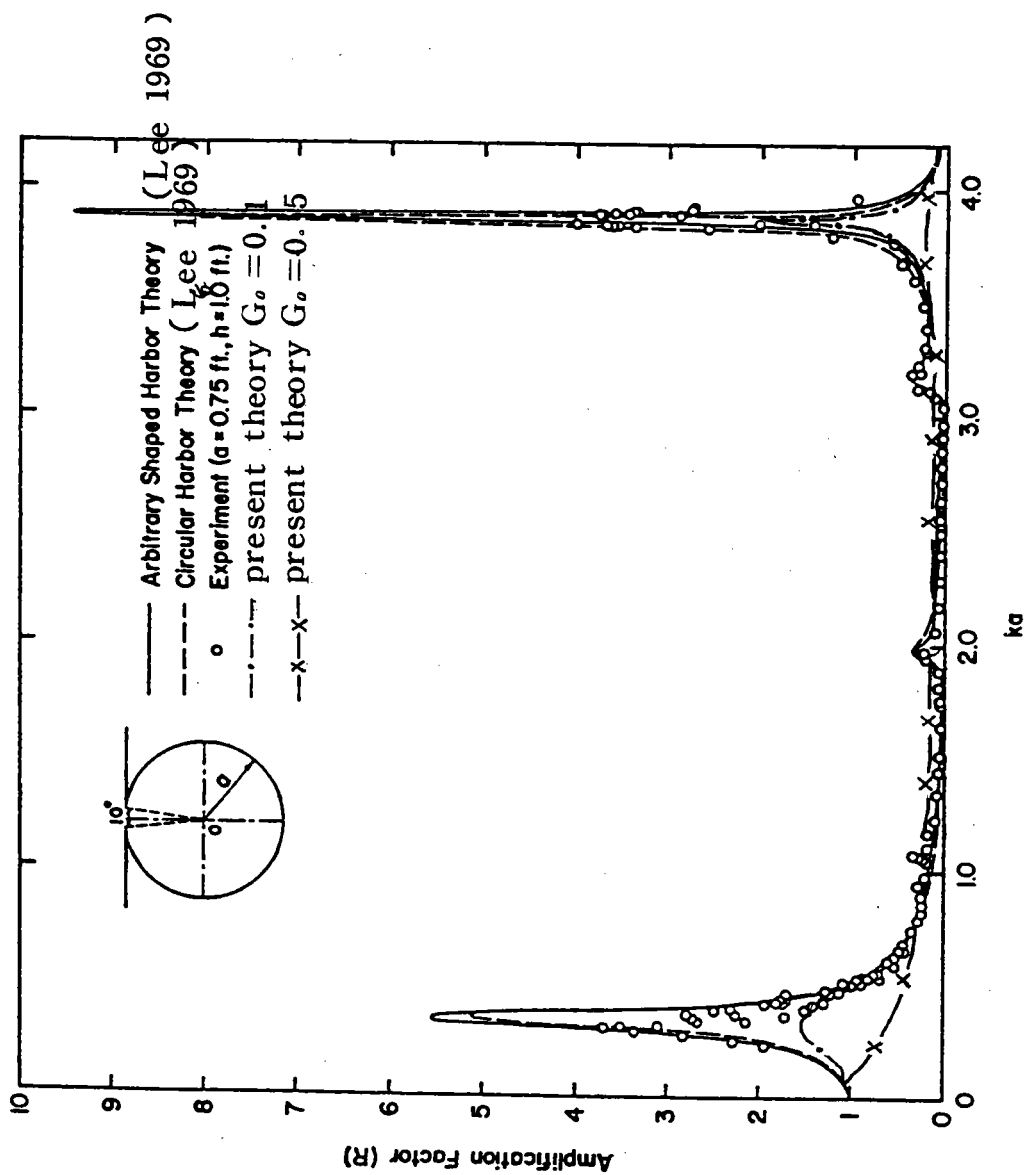


圖 3—5 10° 開口圓形港池 O 點 (中心點) 共振曲線圖

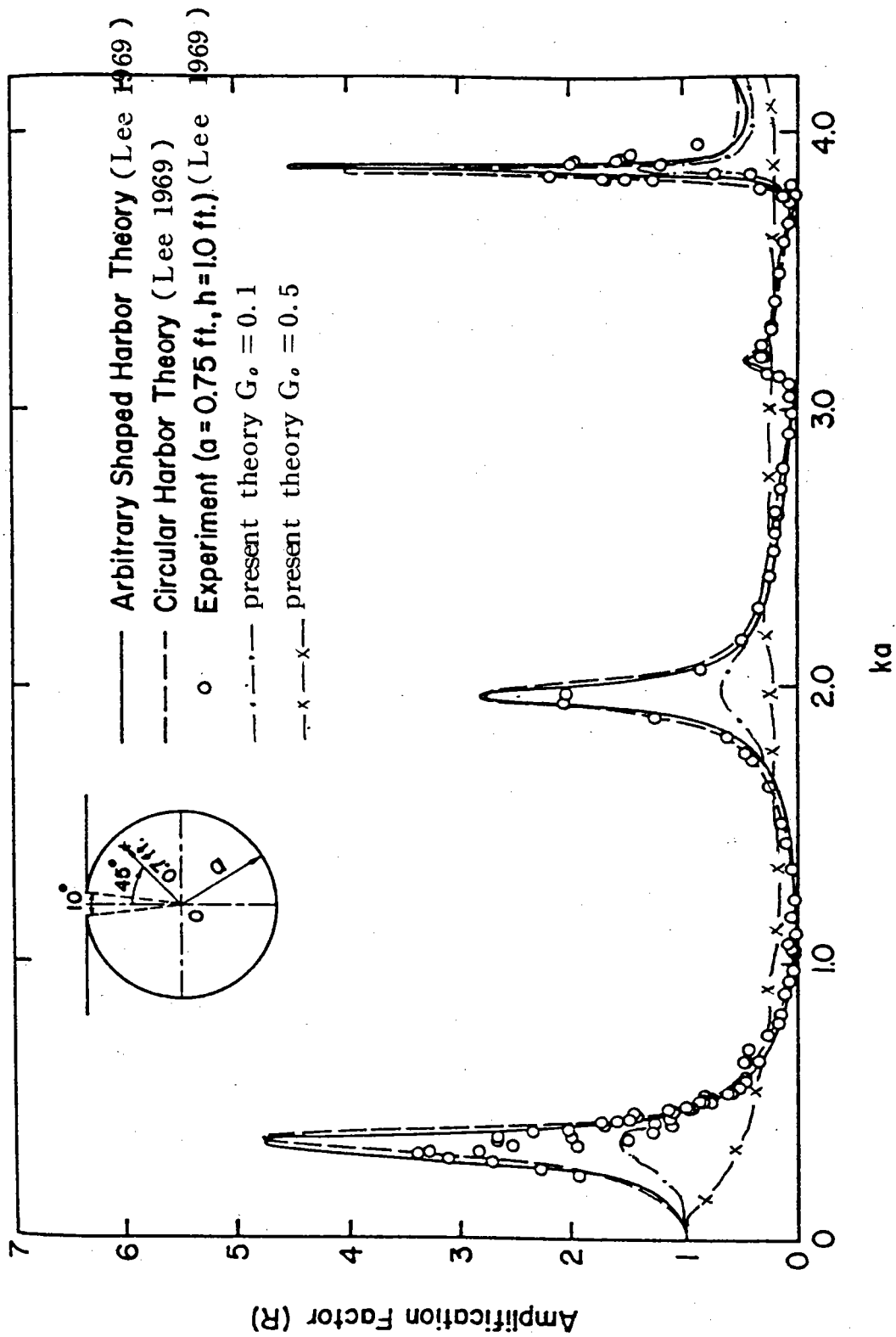


圖 3-6 10° 開口圓形港池 A 點 ($r = 0.7$, $\theta = 45^\circ$) 共振曲線圖

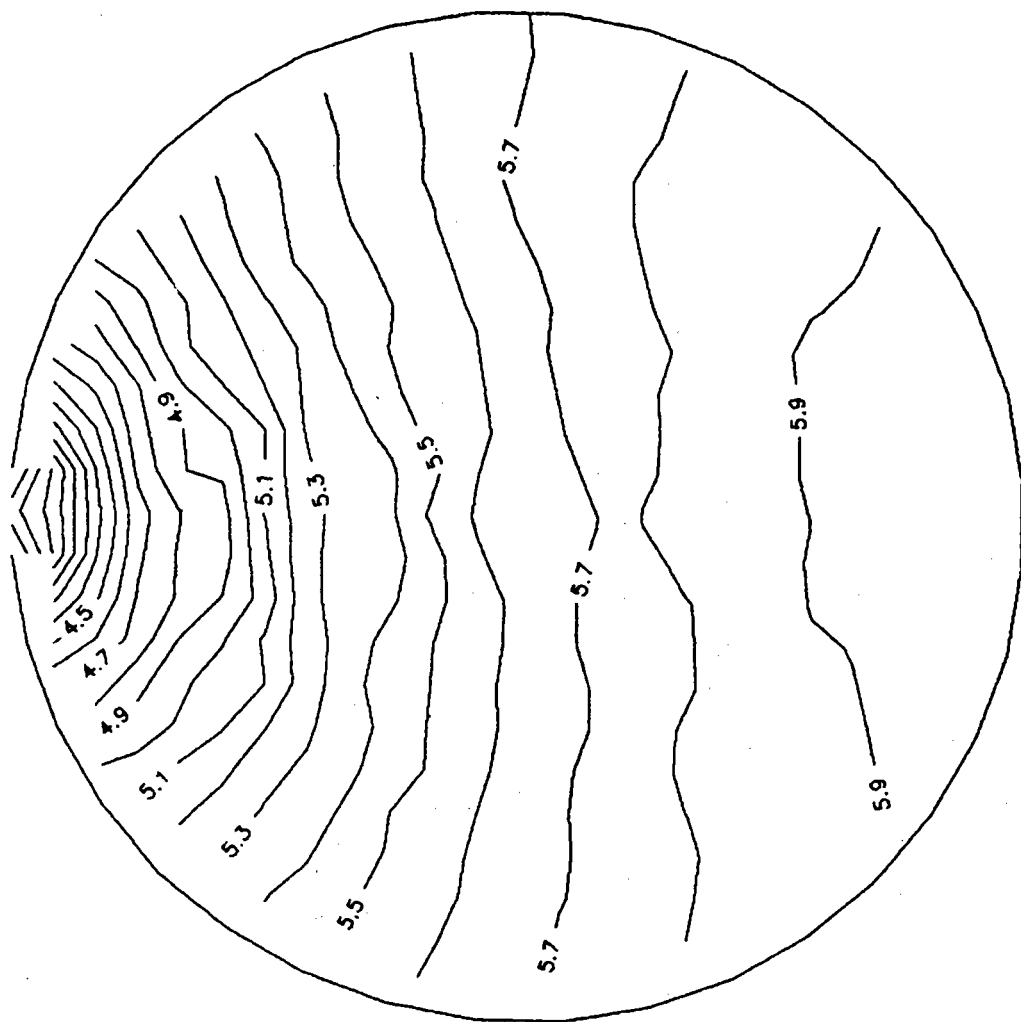


圖 3-7 10° 開口圓形港內 ($G_0 = 0$) 等擴大率圖 ($k_a = 0.35$)

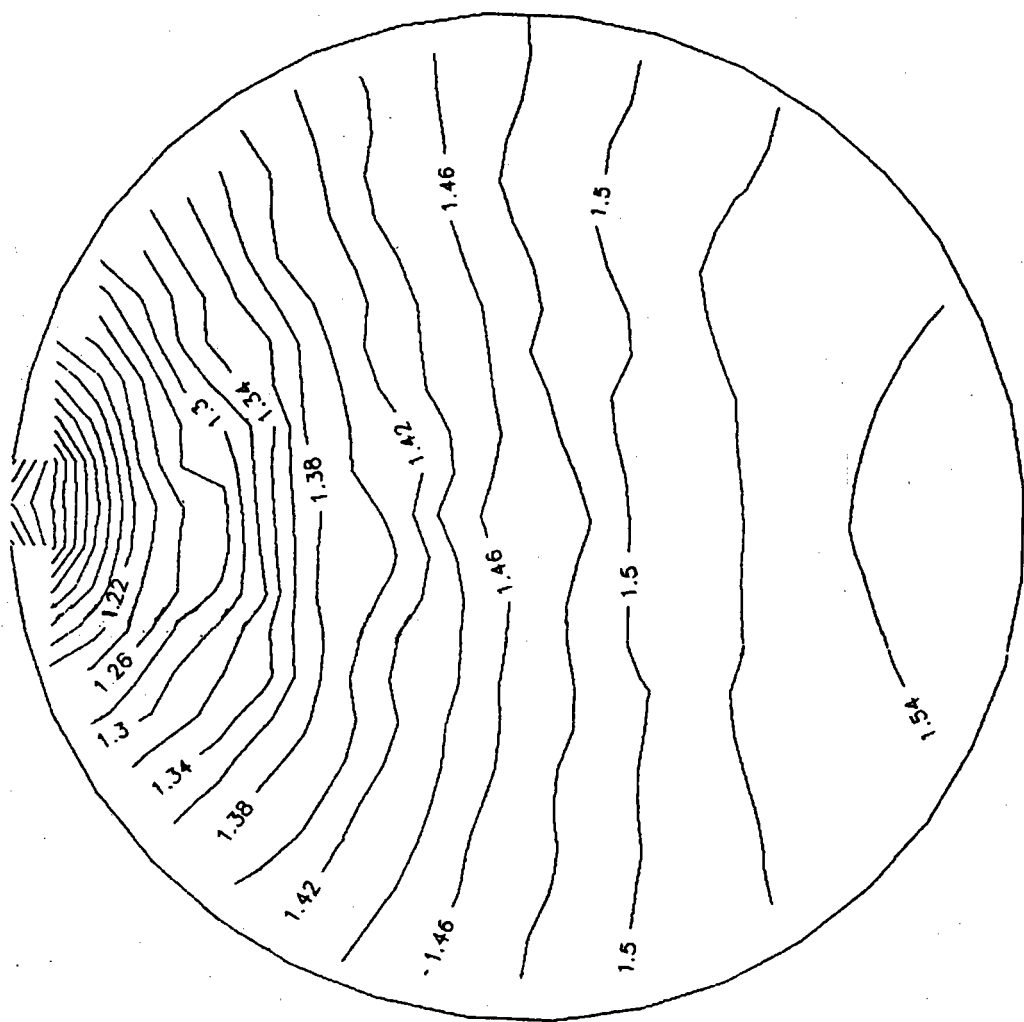


圖 3 — 8 10° 開口圓形港內 ($G_o = 0.1$) 等擴大率圖 ($k_a = 0.5$)

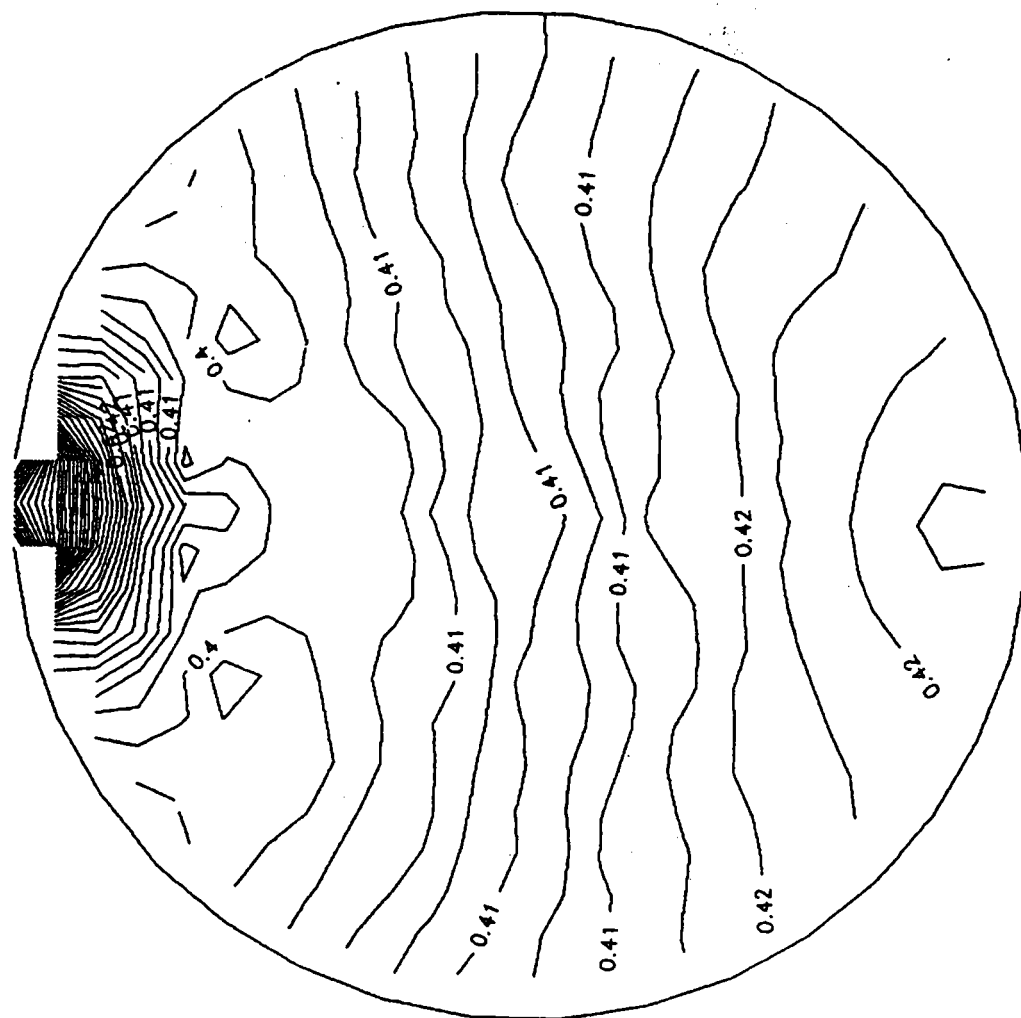


圖 3—9 10° 開口圓形港內 ($G_o = 0.1$) 等擴大率圖 ($k_a = 0.35$)

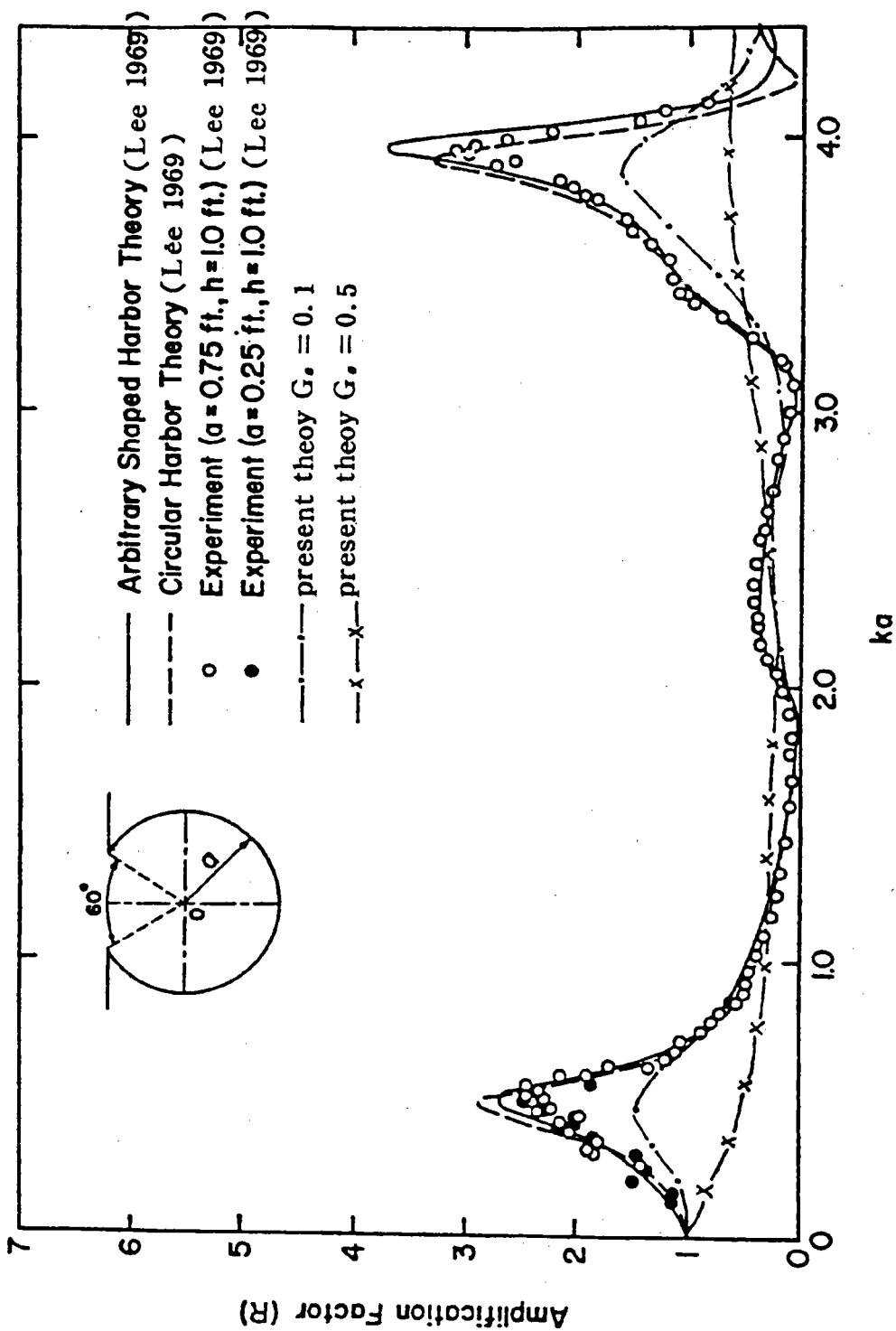


圖 3 - 10 · 60° 開口圓形港內 O 點 (中心點) 之共振曲線圖

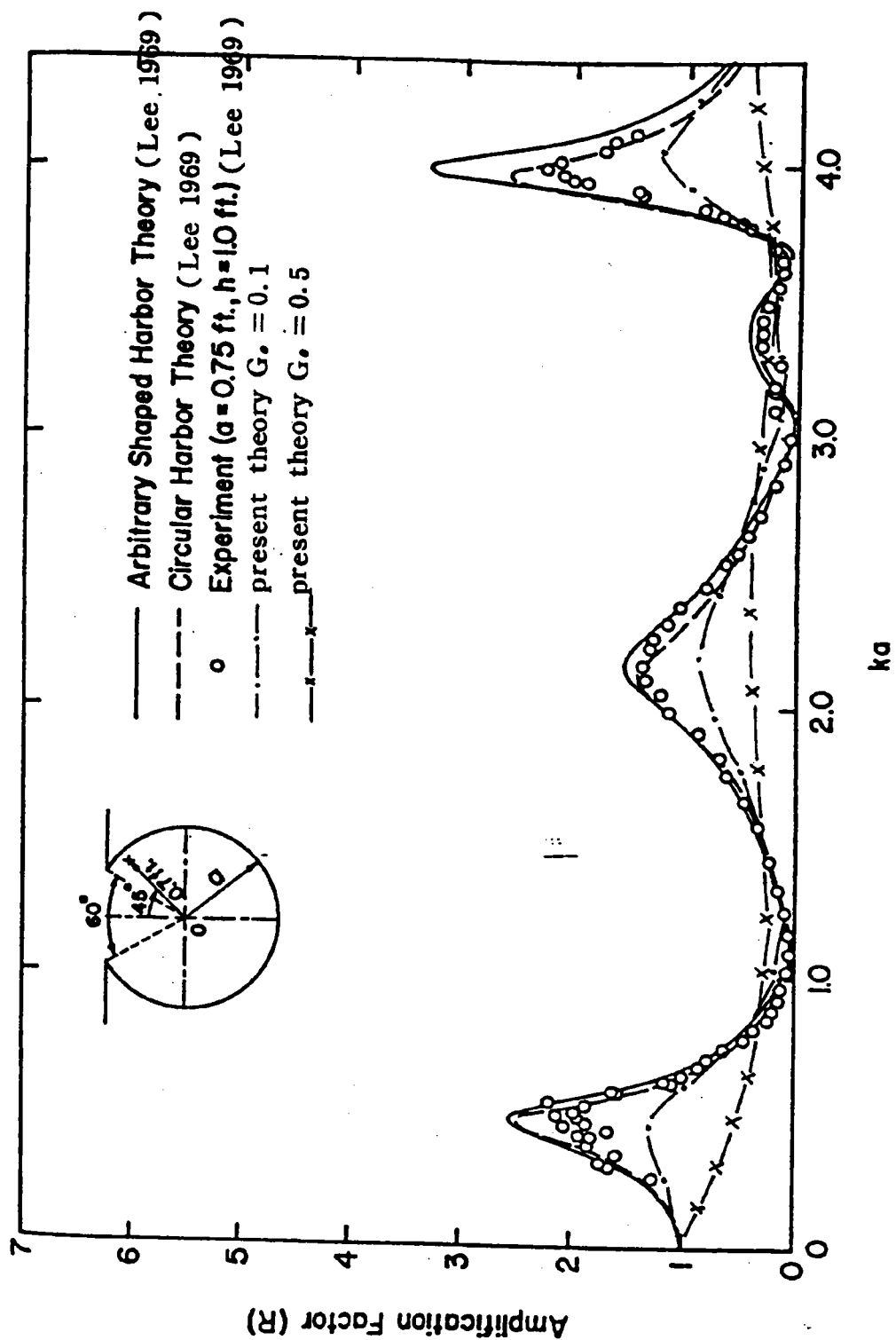


圖 3-11 60° 開口圓形港內 (A 點, $r=0.7$, $\theta=45^\circ$) 之共振曲線圖

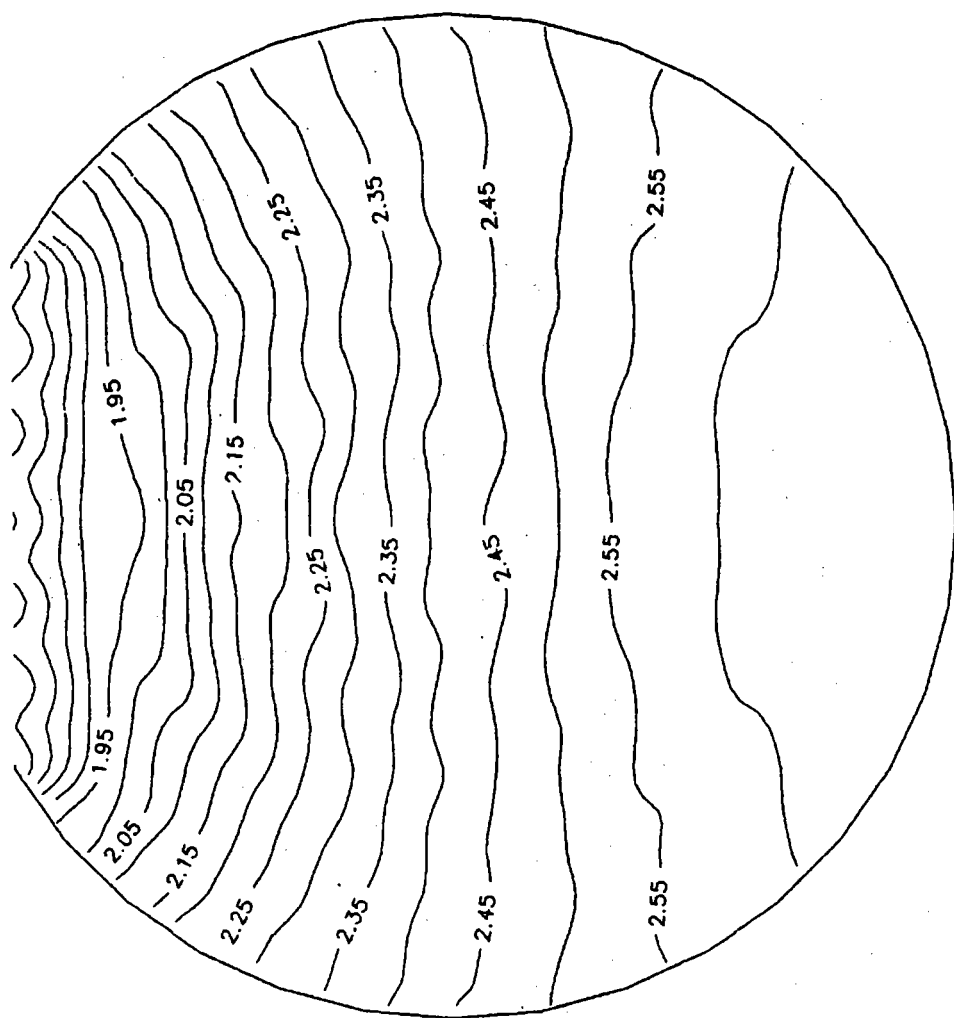


圖 3 - 12 60° 開口圓形港內 ($G_o = 0.0$) 等擴大率圖 ($k_a = 0.46$)

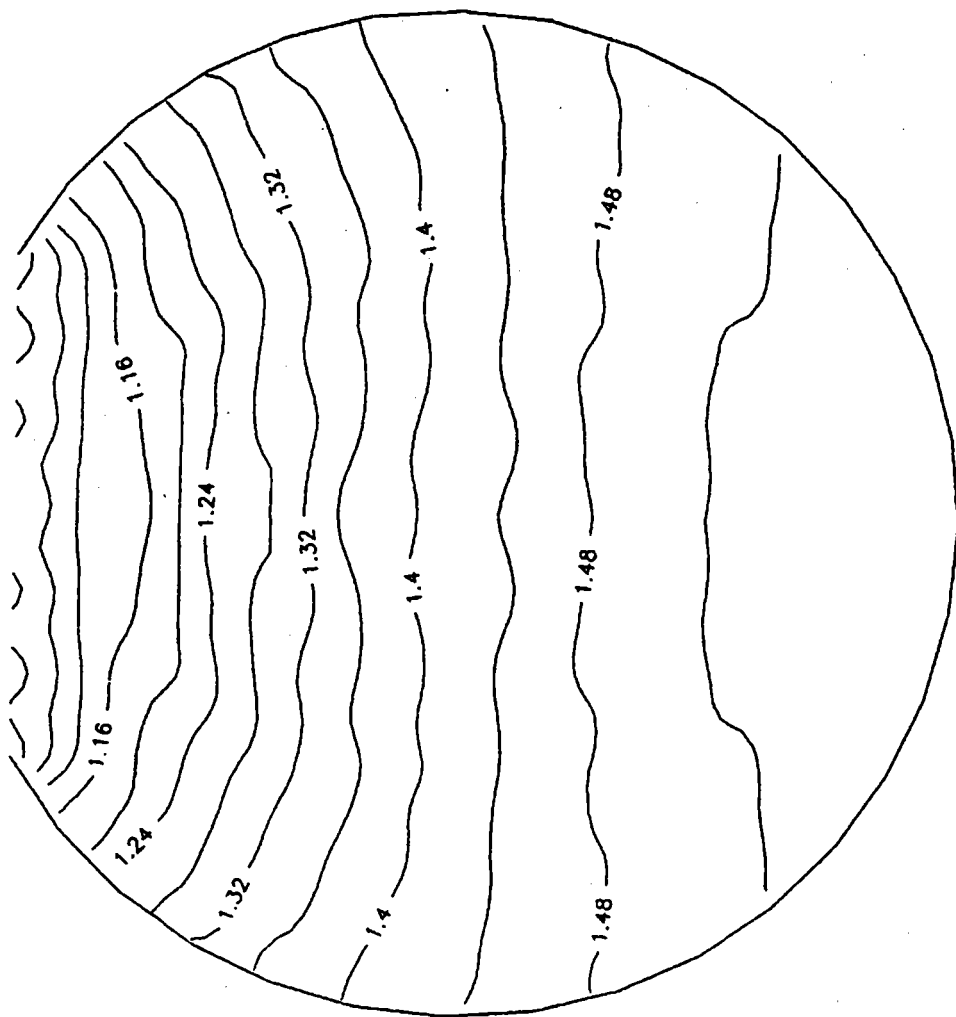


圖 3 - 13 60° 開口圓形港內 ($G_0 = 0.1$) 等擴大率圖 ($k_0 = 0.46$)

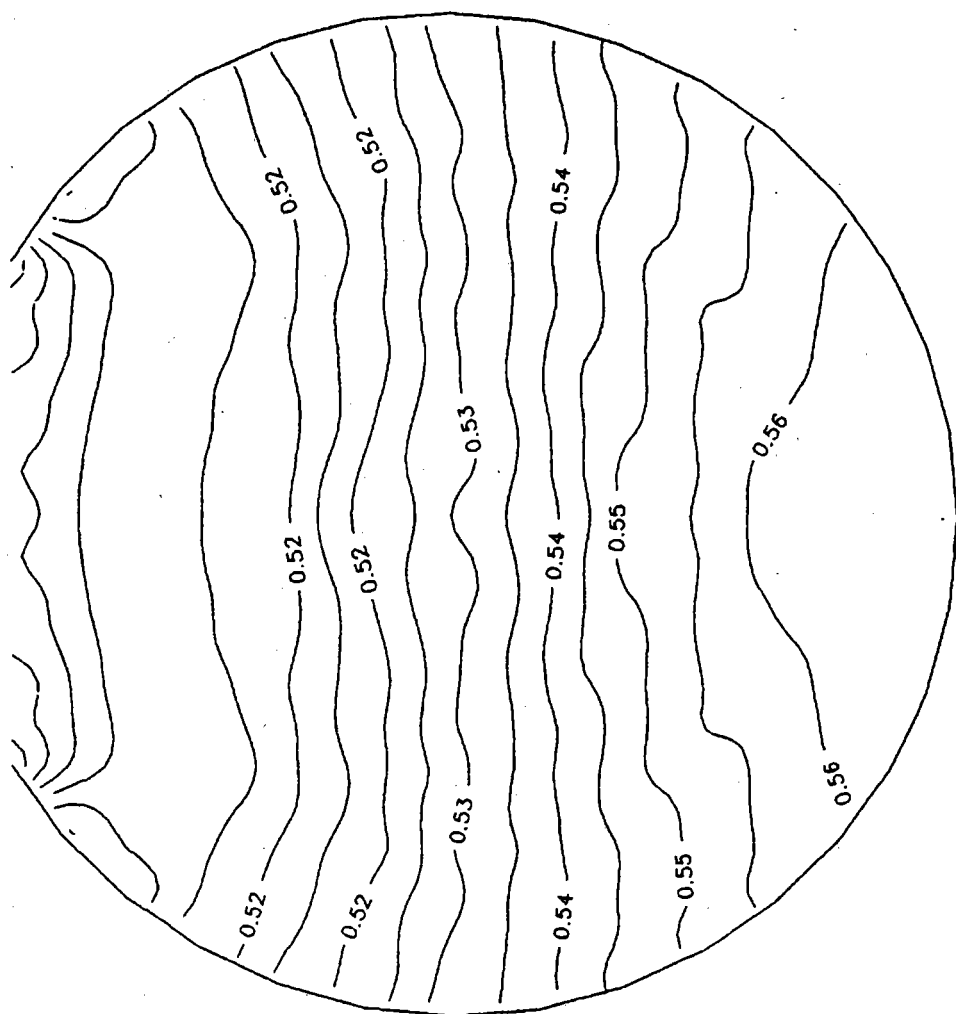


圖 3-14 60° 開口圓形港內 ($G_o = 0.5$) 等擴大率圖 ($k_a = 0.46$)

淺水波之有限元素法模擬

楊 德 良^{*}

中 文 摘 要

本文簡單介紹有限元素法在淺水波問題研究上之潛力及其將來可能之發展。文中並以筆者近年來從事之一維及二維淺水波模式為例，分別介紹一維模式在單一河道、匯流河系、分流河系、及天然河系之應用，並與文獻上其他方法作一比較，檢討其精確度及優劣性。在二維淺水波模式之應用，主要以二維之漫地流為例，說明二維淺水波也可以很成功的應用到更複雜的流域上。本文並以筆者之經驗與判斷，提出將來可能之發展方向，以為初學者或有志從事此一領域之讀者，供參考之用。並特別指出利用有限元素法中“子結構”之觀念，可能可以處理一些十分有趣且又棘手的淺水波問題，如河口水理及其相關連等問題。

^{*} 國立臺灣大學土木工程研究所教授兼水工試驗所主任

一、諸 論

淺水波方程式 (Shallow Water Wave Equations) 爲一組非線性雙曲線型之偏微分方程式，很不容易以解析法求到答案，因之一般都以數值分析方法爲之。最常使用的方法莫過於有限差分法 (Finite Difference Methods) 及特性法 (Method of Characteristics) [Lai , 1986]。有限元素法 (Finite Element Methods) 則因起源於結構力學的分析上，故較少文獻提及。其實有限元素法的解析過程不僅可以包含有限差分法，尚可有網格可以不必均勻，參數可以不必通通一致，又可以引進內部約束之內含邊界條件，或不同領域可使用不同之掌理方程式而利用“子結構” (Substructuring) 之概念加以連接。這些條件在在的改善了有限差分法中極難解決的問題，比方匯、分流河系之模擬，亞與超臨界流況之同時模擬，集水區與河道之連結，河口與海岸水理之相連，如果使用有限元素法，可以獲得更具彈性而又方便的處理方式。

有限元素法雖然俱有如此優異之條件，可惜使用的人很有限。早期之有限元素法應用於淺水波理論上，大多侷限於一維之單一渠道上 [Cooley and Moin , 1975 ; Keuning , 1976 ; Partridge and Brebbia , 1976 ; Nwaogazie and Tyagi , 1984 ; Katopodes , 1984]，或一維及二維之漫地流之模擬上 [Taylor , Al-Mashidani , and Davis , 1973 ; Jayawardena and White , 1977 ; Ross , Contractor , and Shanholtz , 1979 ; 蔡氏等 , 1984]。

一維匯流及分流河道系統及二維渠道之模擬，由於前者必須考慮到河道匯、分流之水理特性，及後者之複雜計算及邊界條件之不易置放，一般文獻並不太多，故目前仍是研究中之好題材。

本文之主要目的有三：(1)將目前有限元素法在淺水波之應用上做一文獻上之回顧與整理，讓初學者有路可循。(2)以筆者最近研究有限元素法在淺水波上之應用為例，做一簡要之介紹，包括一維河道、匯流河道、分流河道及天然河系及二維漫地流之模擬。(3)提供有限元素法在淺水波上具有前瞻性、潛力性之應用領域，如河口水理、河海相接，集水區與河道之相連接、彎道水理、水庫水理等方面之應用，期能對有意入門之讀者，能有拋磚引玉之意。

底下將依次介紹基本淺水波方程式，包括掌理方程式，起始條件、邊界條件、及河系之匯、分流條件。接下為有限元素法分析之主要步驟，仍將以一維為例。再次為一維模式之應用，包括單一河道、匯流河系、分流河系、及以淡水河為例之天然河系等，並將與文獻上之其他方法（如有限差分法）及實驗室之量測資料，相互比較或驗證。再下為簡單提到二維淺水波基本方程式及其在二維漫地流之模擬，如單向坡度及雙向坡度之漫地流，並與運動波（Kinematic Wave Theory）理論相互比較，最後文章以結論與展望做一結尾。

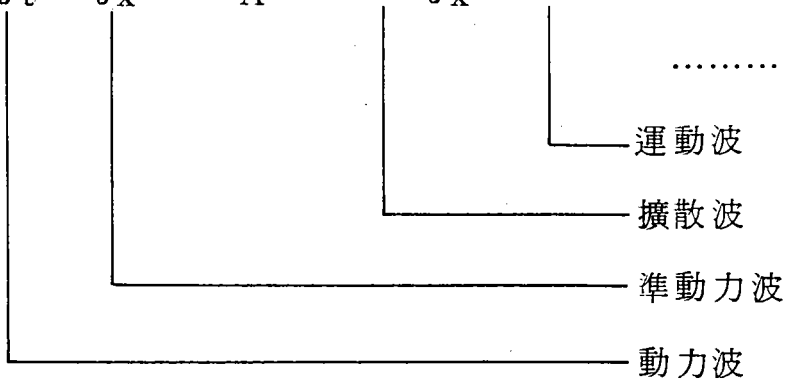
二、一維淺水波理論

一維性（One - Dimensional）淺水波之掌理方程式，即所謂 de Saint Venant Equations [Chow , 1959 ; Henderson , 1966]

，亦即一維性水流之連續與運動方程式，可以下兩式表示之：

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_l \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gA (S_f - S_o) = Q_l V_l \quad \dots\dots\dots (2.2)$$



式中：

A ：通水斷面積

Q ：流量

Q_l ：單位河段長度之側流量

β ：動量修正係數（一般令 $\beta = 1$ ）

g ：重力加速度

H ：水深

S_o ：底床坡度

S_f ：摩擦坡度，一般以曼寧公式（Manning's Equation）

表之，即 $S_f = n^2 Q |Q| / (mA^2 R^{4/3})$ ，m 為一常數

，在公制單位時， $m = 1.0$ ；在英制單位時， $m = 2.208$ 。

n : 曼寧糙度係數

R : 水力半徑, $R = A/P$, P 為潤濕周界

V_l : 側流量在水流方向上之速度分量

x : 沿水流方向之距離座標

t : 時間座標

若將(2.1)及(2.2)兩式中流量中之 Q 以通水斷面積 A 及平均流速 V 來表示, 則有

$$Q = AV \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

則(2.1)及(2.2)兩式可以改寫為

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} = Q_l \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g (S_f - S_o) = \frac{Q_l V_l}{A} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

此方程式又稱渠道變量流方程式, 或動力波模式, 在水力學上之應用甚為廣泛。依簡化項次的多寡, 又可分為下列四種模式: 即(1)運動波 (Kinematic Wave), (2)擴散波 (Diffusion Wave (Analogy)) (3)準動力波 (Quasi - Dynamic Wave) 及(4)動力波 (Dynamic Wave) [楊, 1986 ; Young , 1989]。

除了控制方程外, 必須另外考慮起始條件及邊界條件的影響。

(一)起始條件：

指淺水波演算時水流之初始條件，可由下列方法決定之：

- (1)由實際觀測值之輸入。
- (2)由定量流的迴水演算處理。

理論上，不正確的起始條件，將在模擬的初期引入誤差值，若該誤差在容許範圍內，則此誤差值將隨着演算的時間而減弱。

(二)邊界條件：

在淺水波的傳遞過程中，邊界條件的處理又可分為單一河道及系統河道兩大類，今依次說明如下：

(1)單一河道：

- 1.上游邊界條件—可設定流量歷線 $Q(x=0, t)$ ，或水位歷線 $H(x=0, t)$ 。
- 2.下游邊界條件—可設定水位歷線 $H(x=L, t)$ ，或水位、流量率定曲線 $Q(H)$ 。

通常在亞臨界流況時 (Subcritical)，由於水面波會同時向上、下游傳遞，因此，在河道的上、下游均需設定一邊界條件。當在超臨界流況時 (Supercritical)，因水面波祇向下游傳播，因此水流之邊界條件均需設定在上游。

(2)河道系統：

河道系統包含河道匯流系統 (Confluence of Channels System) 與河道分流系統 (Division of Channels System) 兩

大類。

1. 匯流條件：

① 連續性方程式：

$$\Sigma Q_i = Q_o + \frac{dS_j}{dt} \dots\dots\dots (2.6a)$$

式中：

Q_i ：流入匯流處之流量

Q_o ：自匯流處流出之流量

$\frac{dS_j}{dt}$ ：匯流處之蓄水體積變化率，對於點式匯流處

(Point Junction)而言，匯流處的蓄水體積變化率

dS_j/dt 可省略之，而 (2.6 a) 式以下式取代之

$$\Sigma Q_i = Q_o \dots\dots\dots (2.6b)$$

② 能量方程式：

$$H_i + Z_i + \frac{V_i^2}{2g} = H_o + Z_o + \frac{V_o^2}{2g} + H_{i,o} \dots\dots\dots (2.7a)$$

式中：

標號 " i " 表匯流處之上游河道，標號 " o " 表匯流處之下游河道。

$H_{i,0}$: 水流經過滙流處之水頭損失。

在點式滙流系統中，若河道為亞臨界流況時，速度影響及水頭損失可忽略之，而以運動相容方程式 (Kinematic Compatibility equations) 取代之，亦即水流在滙流時之上下游具有共同之水面。

$$H_i + Z_i = H_o + Z_o \quad \dots\dots\dots (2.7b)$$

2. 分流條件：

① 連續性方程式：可依類似滙流處之原理處理，即

$$Q_i = \Sigma Q_o \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

式中：

Q_i : 流入分流處之流量

Q_o : 自分流處流出之流量

② 能量方程式：

$$H_i + Z_i + \frac{V_i^2}{2g} = H_o + Z_o + \frac{V_o^2}{2g} + S_f L + K_d \frac{V_o^2}{2g} \dots (2.9)$$

式中：

L : 分流處上、下游間之距離， $S_f L$ 為摩擦水頭損失，

K_d : 為因河道分流所導致之水頭損失係數，與分流處上

、下游之水流特性，河道特性有關。

有關係統河道之邊界條件非常複雜，至今仍尚無完整之理論，有待突破〔Yen, 1986；楊, 1989〕。

三、有限元素法分析

以有限元素法解析淺水波，大約可分成下列步驟。

(一)離散空間區域：

將吾人所欲模擬的河道劃分成若干次區域（Subdomain），稱之為元素（Element），各元素之間以節點（Node）連接，節點上的未知數稱之為自由度（Degree of Freedom）。

(二)選擇元素形式：

根據所選擇的元素形式，決定內插函數（Interpolation Function）或稱為形狀函數（Shape Function），將元素中某一未知函數以其節點值及內插函數來表示。

(三)推導元素方程式（Element equation）：

以葛勒金殘值權重原理，推導元素方程式，使原來的偏微分方程式（2-4）及（2-5）兩式轉換成一組以時間為自變數的常微分方程式。

(四)處理時間項：

以差分法處理時間項，將常微分方程組改寫成代數方程組。

(五)處理非線性項：

以線性化步驟來求解非線性之代數方程組。

(六)整合元素方程式：

組合每個元素之元素方程式，成爲一總域（Global）的系統方程式。

(七)放置邊界條件：

以約束解的合理範圍，使數值解唯一。

§ 3-1 離散空間區域：

葛勒金殘值權重原理爲有限元素法中空間區域離散化最常用的一種方法，其主要的原理是使方程式的近似解與真正解之間的殘餘值（Residual）對某一連續函數能滿足正交性（Orthogonality），若以內插函數做爲該連續函數，則稱爲葛勒金殘值權重法（Zienkiewicz，1977）。

根據上述之原理，吾人首先將所欲模擬的河道分成若干個元素，以通水面積 A 及平均流速 V 爲節點自由度，若每個元素內有 $NDEL$ 個節點，則可由下列之累加規則（Summation Convention）來表示某一元素（ e ）中的變數值：

$$A^{(e)} = N_j^{(e)} A_j^{(e)} \quad j = 1 \sim NDEL \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

$$V^{(e)} = N_j^{(e)} V_j^{(e)}$$

其中， $N_j^{(e)} = N_j^{(e)}(X)$ 表示節點 j 內插函數；

$A_j^{(e)}$, $V_j^{(e)}$ 為節點 j 的自由度；

內插函數如以最簡單之線性元素，如以區域座標系統表之，即可寫成： $N_1 = (1 - \xi) / 2$, $N_2 = (1 + \xi) / 2$, ξ 為區域座標 (Local Coordinate) 。

假設 (2.5) 式中的其他項可表示成如 (3.1) 式的形式，即：

$$H^{(e)} = N_j^{(e)} H_j^{(e)}$$

$$S_f^{(e)} = N_j^{(e)} S_{fj}^{(e)} \doteq N_j^{(e)} \left(\frac{n_j^2 V_j |V_j|}{m R_j^{4/3}} \right)^{(e)}$$

$$Q_l^{(e)} = N_j^{(e)} Q_{lj}^{(e)} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{Q_l V_l}{A} \right)^{(e)} = N_j^{(e)} \left(\frac{Q_l V_l}{A} \right)_j^{(e)}$$

$$S_o^{(e)} = - \frac{\partial Z^{(e)}}{\partial x} = - N_{xj}^{(e)} Z_j^{(e)} = - \frac{dN_j}{dx} Z_j^{(e)}$$

上述之 $H_j^{(e)}$ 及 $R_j^{(e)}$ 為通水面積 $A_j^{(e)}$ 的函數，可由迴歸方式或內插方式找出其間的對應關係； Z_j 為節點 j 的渠底高程。

§ 3-2 選擇元素形式：

一般元素的選擇，並沒有一定之法則，可選用低階元素，如線性元素或高階元素，通常低階元素較為簡單，而高階元素則較煩複。一般有限元素法之教科書中均有涉述，此不再重複〔Zienkiewicz，1977〕。

§ 3-3 推導元素方程式：

將 (3.1) 及 (3.2) 式代入方程式 (2.4) 與 (2.5) 式中，即可得元素 (e) 內的殘餘值：

$$\text{Res}^{(e)} C = N_j^{(e)} \dot{A}_j^{(e)} + N_j^{(e)} N_{\tau k}^{(e)} (A_j V_k + V_j A_k)^{(e)} - N_j^{(e)} Q_{Ij}^{(e)} \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}^{(e)} M = & N_j^{(e)} \dot{V}_j^{(e)} + N_j^{(e)} N_{\tau k}^{(e)} (V_j V_k)^{(e)} \\ & + g N_{\tau j}^{(e)} (H_j + Z_j)^{(e)} + g N_j^{(e)} S_{fj}^{(e)} \\ & - N_j \left(\frac{Q_I V_I}{A} \right)_j^{(e)} \quad \dots\dots\dots (3.4) \end{aligned}$$

其中， $\dot{A}_j^{(e)} = \frac{dA_j^{(e)}}{dt}$, $\dot{V}_j^{(e)} = \frac{dV_j^{(e)}}{dt}$ ；

$\text{Res}^{(e)} C$ ：元素 (e) 中連續性方程式的殘餘值。

$\text{Res}^{(e)} M$ ：元素 (e) 中動量方程式的殘餘值。

$N_{\tau j}^{(e)}$, $N_{\tau k}^{(e)}$ ：內插函數對空間變數 x 的微分。

(j , k = 1 ~ NDEL)

由葛勒金殘值原理可得到下列二式：

$$\int_{\Omega^e} N_i \text{Res}^{(e)} C \, dx = 0 \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\int_{\Omega^e} N_i \text{Res}^{(e)} M \, dx = 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

其中， Ω^e 表示元素 (e) 所在的區域。

i = 1 ~ NDEL

爲了簡單表示 (3.5) 及 (3.6) 兩式，吾人以下列累加符號作爲各積分項的表示：

$$S_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} N_i^{(e)} N_j^{(e)} dx \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

$$R_{ijk}^{(e)} = \int_{\Omega^e} N_i^{(e)} N_j^{(e)} N_{\tau k}^{(e)} dx \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

$$T_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} N_i^{(e)} N_{\tau j}^{(e)} dx \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

$$PC_i^{(e)} = S_{ij}^{(e)} Q_{lj}^{(e)} \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

$$PM_i^{(e)} = -g (T_{ij}^{(e)} H_{ij}^{(e)} + S_{ij}^{(e)} S_{jj}^{(e)} + S_{ij}^{(e)} \left(\frac{Q_l V_l}{A} \right)_{j^{(e)}}) \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

其中， $H_{ij}^{(e)} = H_j^{(e)} + Z_j^{(e)}$ ，表示節點 j 的水面高程。如此，元素方程式便可簡單表示如下：

$$S_{ij}^{(e)} \dot{A}_j^{(e)} + R_{ijk}^{(e)} (A_j V_k + V_j A_k)^{(e)} - PC_i^{(e)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

$$S_{ij}^{(e)} \dot{V}_j^{(e)} + R_{ijk}^{(e)} (V_j V_k)^{(e)} - PM_i^{(e)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

(i , j , k = 1 ~ NDEL)

(3.12) 與 (3.13) 兩式即爲一組以時間 t 爲自變數的非線性常微分方程組。對於時變性及非線性的處理作下述說明：

§ 3-4 處理時變性項：

對於空間項離散化後，方程式中時間項的處理可採用完全隱式法（Fully Implicit Scheme）、顯示法（Explicit Scheme），二階顯示法，或郎奇-古塔法（Runge-Kutta Scheme）等，本文則以權重隱式法做為時變性的處理。

假設在（3.12）及（3.13）兩式中之 $\dot{A}_j^{(e)}$ 及 $\dot{V}_j^{(e)}$ 可表示成：

$$\dot{A}_j^{(e)} = \frac{A_{j,n+1}^{(e)} - A_{j,n}^{(e)}}{\Delta t} \dots\dots\dots (3.14)$$

$$\dot{V}_j^{(e)} = \frac{V_{j,n+1}^{(e)} - V_{j,n}^{(e)}}{\Delta t} \dots\dots\dots (3.15)$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \dots\dots\dots (3.16)$$

其中， $A_{j,n}^{(e)}$ 、 $V_{j,n}^{(e)}$ 與 $A_{j,n+1}^{(e)}$ 、 $V_{j,n+1}^{(e)}$ 分別為元素（e）中節點 j 之某一時刻 t_n 及下一時刻 t_{n+1} 的自由度。

今引入一權重參數 θ ，使得（3.12）及（3.13）兩式中的任何一個控制項可以表示成：

$$F_i^{(e)} = \theta F_{i,n+1}^{(e)} + (1 - \theta) F_{i,n}^{(e)} \dots\dots\dots (3.17)$$

其中， $0 \leq \theta \leq 1$ ，對於某些 θ 值的使用有其特定的名稱〔Reddy，1984〕，如：

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{(Forward Difference Scheme)} \\ 1/2 & \text{(Crank - Nicolson Scheme)} \\ 2/3 & \text{(Galerkin Method)} \\ 1 & \text{(Backward Difference Scheme)} \end{cases}$$

由 (3.14) 與 (3.15) 兩式與 (3.17) 式可將 (3.12) 及 (3.13) 兩式處理如下：

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(e)} & \left(\frac{A_{j \cdot n+1}^{(e)} - A_{j \cdot n}^{(e)}}{\Delta t} \right) + R_{ijk}^{(e)} \left[\theta (A_j V_k \right. \\ & \left. + V_j A_k)_{n+1}^{(e)} + (1-\theta) (A_j V_k + V_j A_k)_n^{(e)} \right] \\ & - \left[\theta PC_{i \cdot n+1}^{(e)} + (1-\theta) PC_{i \cdot n}^{(e)} \right] = 0 \quad \dots\dots (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(e)} & \left(\frac{V_{j \cdot n+1}^{(e)} - V_{j \cdot n}^{(e)}}{\Delta t} \right) + R_{ijk}^{(e)} \left[\theta (V_j V_k)_{n+1}^{(e)} \right. \\ & \left. + (1-\theta) (V_j V_k)_n^{(e)} \right] - \left[\theta PM_{i \cdot n+1}^{(e)} + (1-\theta) \right. \\ & \left. \cdot PM_{i \cdot n}^{(e)} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.19) \end{aligned}$$

(3.18) 及 (3.19) 兩式即為元素之非線性代數方程組。

§ 3-5 處理非線性項：

一般對非線性方程式的處理，最常採用牛頓一拉福森法 (Newton - Raphson Method)：

假若在 (3.18) 及 (3.19) 式中， $A_{j \cdot n}^{(e)}$ 及 $V_{j \cdot n}^{(e)}$ 為前一時刻的已知節點自由度，下一時刻的節點自由度 $A_{j \cdot n+1}^{(e)}$ 及 $V_{j \cdot n+1}^{(e)}$ ，

則可先以一組猜測值代入 (3.18) 及 (3.19) 式中，得到一組殘餘值：

$$\begin{aligned}
 RC_i^{(e)} = & S_{ij}^{(e)} \left(\frac{A_{j,n+1}^{(e)} - A_{j,n}^{(e)}}{\Delta t} \right) + R_{ijk}^{(e)} \\
 & \cdot [\theta (A_j V_k + V_j A_k)_{n+1}^{(e)} + (1-\theta) \\
 & \cdot (A_j V_k + V_j A_k)_n^{(e)}] - [\theta PC_{i,n+1}^{(e)} \\
 & + (1-\theta) PC_{i,n}^{(e)}] \dots\dots\dots (3.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 RM_i^{(e)} = & S_{ij}^{(e)} \left(\frac{V_{j,n+1}^{(e)} - V_{j,n}^{(e)}}{\Delta t} \right) + R_{ijk}^{(e)} [\theta \\
 & \cdot (V_j V_k)_{n+1}^{(e)} + (1-\theta) (V_j V_k)_n^{(e)} - [\theta \\
 & \cdot PM_{i,n+1}^{(e)} + (1-\theta) PM_{i,n}^{(e)}] \dots\dots\dots (3.21)
 \end{aligned}$$

將殘值 $RC_i^{(e)}$ 及 $RM_i^{(e)}$ 以泰勒級數展開 (Taylor Series Expansion)，期望得到一組校正值 $\Delta A_{j,n+1}^{(e)}$ 及 $\Delta V_{j,n+1}^{(e)}$ ：

$$\begin{aligned}
 RC_i^{(e)} + \left(\frac{\partial RC_i}{\partial A_{j,n+1}} \right)^{(e)} \Delta A_{j,n+1}^{(e)} + \left(\frac{\partial RC_i}{\partial V_{j,n+1}} \right)^{(e)} \\
 \cdot \Delta V_{j,n+1}^{(e)} + (\text{高階項}) = 0 \dots\dots\dots (3.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 RM_i^{(e)} + \left(\frac{\partial RM_i}{\partial A_{j,n+1}} \right)^{(e)} \Delta A_{j,n+1}^{(e)} + \left(\frac{\partial RM_i}{\partial V_{j,n+1}} \right)^{(e)} \\
 \cdot \Delta V_{j,n+1}^{(e)} + (\text{高階項}) = 0 \dots\dots\dots (3.23)
 \end{aligned}$$

若忽略 (3.22) 及 (3.23) 兩式中的高階項部份，則可寫成如下所示的元素矩陣方程式：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial RC_i}{\partial A_{j, n+1}} & \frac{\partial RC_i}{\partial V_{j, n+1}} \\ \frac{\partial RM_i}{\partial A_{j, n+1}} & \frac{\partial RM_i}{\partial V_{j, n+1}} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} \Delta A_{j, n+1} \\ \Delta V_{j, n+1} \end{bmatrix}^{(e)} = - \begin{bmatrix} RC_i \\ RM_i \end{bmatrix}^{(e)} \dots\dots\dots (3.24)$$

§ 3-6 元素方程式的整合

有限元素法最大的特點之一是在整個河渠的模擬過程中，先建立每個元素的矩陣方程式如 (3.24) 式，再依照元素的排列將各矩陣方程式加以整合 (Assembly)，使其成爲一個完整的總域系統方程式。

§ 3-7 放置邊界條件：

依單一河道或系統河道所述之邊界條件，加入外邊界條件 (External B.C.) 或內邊界條件 (Internal B.C.)。有限元素法對於放置邊界條件之處理，是差分數值方法所不能匹敵的〔楊與林，1988〕。

四、一維模式之應用

§ 4-1 單一河道

爲了驗證此模式的適用性與效率，吾人以下述案例做爲模擬的對

象：

一矩形渠道長度 2 哩，渠寬 20 呎，渠底坡度 0.0015，起始水深為 6 呎，且假設為等速水流，假設渠道上游的流量在 20 分鐘內增加至 2000 立方呎／秒，之後，在 40 分鐘內均勻減低至起始流量，估計其曼寧 n 值為 0.02。

根據前述的處理步驟，將此渠道分成 20 個等間距的線性元素，上游邊界條件為歷程 60 分鐘的三角形入流量歷線，下游邊界條件則以運動波 (Kinematic Wave) 為假設之率定曲線，取時間間距為 20 秒，權重因子分別以 $\theta = 0.55$ 及 1.0 來模擬單一渠道的洪水演算，並將演算結果與 Viessman et al [1977] 所採用之顯示差分模式 (時間間距為 2 秒) 做一比較，如圖一所示，結果相當吻合，張氏及邱氏 [1987] 亦引用此例做為單一渠道的模擬，採用二階顯示法處理時間項，其所採用的時間間距為 10 秒。

本文對於穩定性的分析並無進一步的研究；唯對時間間距的選取做 1 秒、10 秒、20 秒、30 秒的模擬，權重因子取 0.55 及 1.0，發現除了 $\Delta t = 30$ 秒時造成數值解的振盪現象 (Oscillation) 而無法收斂外，其餘皆可獲得一穩定的數值解。

§ 4-2 滙流河系

吾人將此滙流系統分成 65 個線性元素，節點的配置圖如圖(二)所示，其中，所有的渠道皆為矩形斷面，出流站的邊界條件以運動波為假

設的率定曲線〔Akan and Yen, 1981〕。圖(三)則為各匯流處之上游入流歷線。取時間間距 10 秒，權重因子 $\theta = 0.55$ ，分別以動力波及擴散波 (Diffusion Wave) 模式來模擬此匯流系統，將模擬的結果與 Akan 及 Yen〔1981〕所採用的差分模式做一比較。圖(四)為依動力波所得之最後出口處之流量歷線，本文所得較 Akan 及 Yen〔1981〕為低。另外如以擴散波為基本方程式，渠道 2，3 之流量歷線如圖(五)所示，兩者結果十分接近，兩者在匯流處均能適切的顯示迴水效應 (Backwater Effect)。

§ 4-3 分流河系

本文在分流河系的變量流模擬，以在台灣大學水工試驗所所進行之模型試驗的河槽佈置為依據〔楊與林，1988〕。演算的元素與節點配置如圖(六)所示，主河槽上游邊界條件為已知的入流量歷線如圖(七)所示，各河槽的下游邊界則以率定站記錄的水深歷線作為水流的控制條件。時間間距 Δt 的選取在支、主流渠寬比 $b/B = 20/40$ (公分/公分) 時， Δt 取 20 秒；時間權重因子 $\theta = 1.0$ 。

茲將演算的結果與各觀測站的水深記錄比較如圖(八)所示。在各測站的水深歷線比較，除了在測站 2 中，觀測值在洪峰前後比模擬值要高些，其餘各站都很接近觀測值；因為測站 2 的位置非常靠近分流處，而該處的水理因水流分道的影響，使得外岸的觀測值會比模擬值高。

§ 4-4 天然河系

本文以淡水河與基隆河的滙流系統，作為模式在天然河川中，河渠交滙系統的模擬對象，並以貝蒂颱風的洪流歷程作為演算的案例。

本文將淡水河與基隆河的滙流系統，分成三個河段，河段（Ⅰ）代表淡水河自台北橋至關渡，河段（Ⅱ）代表基隆河自百齡橋以下河段，河段（Ⅲ）代表淡水河自關渡至河口，如圖(九)所示。

模擬時的元素與節點配置如圖(十)所示；淡水河的上游邊界條件為台北橋站貝蒂颱風洪的流量歷線，如圖(十一)所示，基隆河的上游邊界條件為百齡橋站貝蒂颱風洪的流量歷線，如圖(十二)所示；滙流處（關渡站）的水流控制條件為連續及運動相容條件，出口處的邊界條件為淡水河河口站貝蒂颱風洪水位歷線，如圖(十三)所示。曼寧 n 值以「淡水河防洪治本計畫書」中之 n 值為準，在河段（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）中分別為 0.025、0.025 及 0.02。演算的時距 Δt 為 2 小時，時間項權重因子 θ 值取 1.0。

演算歷程自民國六十一年八月十六日中午 12 時至八月十八日凌晨 0 時，茲將模式演算的結果，驗證西子頭站（關渡）的水位歷程線，如圖(十四)所示。由圖可明顯的看出，觀測值與數值計算的結果大致相符，亦表現出洪水起落之趨勢。唯在退水段稍差些，發現觀測值之退水曲線較數值解來得緩慢。換言之，數值解對洪水之反應較為敏感快速。由於演算過程中已將河道的斷面予以規則化，因此在模擬上會有斷面幾何上的差異，而且相鄰河段間的斷面變化使水流有非通水面積的

影響，在模擬時並未考慮，使得模擬的準確性趕不上定型規則渠道。此外，未考慮各河道的側流量，可能也是造成模擬結果與觀測值差異的原因。本文結果與王氏〔1986〕用三次雲形配置法比較，發現王氏的計算亦有此傾向，而本文之水位歷線卻比王氏之結果，更靠近觀測資料。另外張與邱〔1987〕亦利用有限元素法解同一問題，其結果與王氏十分類似，但比王氏之結果稍為改進了一些。顏、許、陶〔1983〕以有限差分法分析整個淡水河系之洪流演算，發現數值模擬的結果，比觀測值低些。

五、二維淺水波模式

基本上二維淺水波模式之基本方程式與一維模式並沒有多大區別，祇不過維度增加一維而已。但由於邊界條件由點擴大到線上，因此在數值計算方面，却時常遭遇到困難。此乃由於二維雙曲線型之波動方程所致。二維性之淺水波乃由一條連續及二條動量方程式所組成，如下所示：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = q_l \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g (S_{f\tau} - S_{o\tau}) = \frac{q_l (u_l - u)}{h}$$

\dots\dots\dots (5.2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g (S_{fy} - S_{oy}) = \frac{q_l (v_l - v)}{h} \dots (5.3)$$

由於二維模式之有限元素法推導方式與一維之淺水波並沒有多大區別，因此本文因篇幅限制不再重述。除了元素形式在二維上有更多之選擇外，如線性三角形元素、四點四邊形元素〔Ziekiewicz, 1977〕，其他處理方式，幾乎與一維模式十分相近。

二維淺水波之應用範圍，更為廣泛，除二維河道，如彎曲河道外，尚可模擬集水區流域之漫地流（Overland Flows），或河川出口處之河口水理之模擬。不僅如此，亦可以二維模式來探討一維之淺水波問題。

§ 5-1 單向坡度之漫地流

在二維淺水波模式之應用上，首先考慮單向坡度漫地流之模擬。其物理特性如下：二維流域，長為 4.88 m，寬為 2.44 m，x 方向之坡度為 0.0806，y 方向之坡度為 0，阻力參數 $k = 38$ ，有效均勻降雨強度為 75 mm/hr，延時為 1 min，圖(五)為依一維、二維有限元素法，及以解析之運動波及蔡氏等〔蔡，蔡與葉，1984〕所得二維解答之平面出流歷線之相互比較。由圖中可知，二維模式與解析解之運動波十分相近。由分析知運動波流數遠大於 10（運動波流數定義為 $L_0 S_0 / (F_0^2 h_0)$ ），見〔Woolhiser and Liggett, 1967〕），因此本例子

適用於運動波之假定。本例子亦透露以一維模式之有限元素法模擬二維之漫地流運動波，仍比不上二維之模式。蔡氏等之二維結果，發現在漲水段（Rising Limb）及洪峯段均不太理想。

§ 5-2 雙向坡度之漫地流

具有雙向坡度之流域，祇能利用二維模式來求解，今略述其模擬之雙向坡度漫地流物理特性如下：長為 500m，寬亦為 500m，x 方向之坡度為 0.02，y 方向之坡度為 0.02，阻力參數 $k = 38$ ，有效均勻降雨強度為 40mm/hr，延時為 30 min。圖(ㄱ)顯示時間 30 min 時之等深線圖，圖(ㄴ)為其對應之水面立體透視圖，而圖(ㄷ)則為其相對應之速度分佈圖，水深以中間 45° 對角線為最大，水流以 45° 方向向下游流動，在離開集水區最遠處之集流時間（Time of Concentration），則祇需要 7 min。從此以後平面出流量歷線保持平衡狀態，一直到延時 30 min 結束後，流量歷線開始退水，而如同運動波的起落，如圖(ㄱ)所示。由分析知，其運動波流數均大於 10，故從物理觀點，應可用運動波模式來模擬。

六、結論與展望

§ 6-1 結 論

本文探討以有限元素法模擬一維及二維淺水波問題之可行性，吾人可得到以下之結論：

(一)有限元素法仍可很成功的應用到一維之單一河道、匯流河系、分

流河系及天然河系上面。尤其對於有滙、分流河系之處理，利用有限元素法在處理內邊界之優點，更可以很簡單的解決。另一優點為有限元素法可以隨便變化空間之間距，可配合其幾何斷面之量測而任意設定節點之便。

(二)對於二維淺水波問題，本文亦以二維之漫地流為例，證明二維漫地流模擬之可行性。有限元素法因可以任意變化其元素及節點之疏密度，在二維流況之模擬，更能彰顯出有限元素法之優點。

(三)利用有限元素法項目之增減，祇要及時注意其邊界條件之放置，不需重新寫電腦程式，可以很容易的增減項數，因此，可很容易用來探討動力波或其他簡化後之擴散波、運動波之差異，比有限差分法更有效率。

§ 6-2 展 望

以有限元素法求解淺水波問題，一般被視為畏途，因有限元素法曾很成功的被應用到橢圓型或拋物線型之偏微分方程式上。但對於雙曲線型之波動問題，則因有不穩定 (Unstable) 問題存在。本文雖然以極簡單的方法處理了簡易之一、二維淺水波問題，但吾人相信，今後以有限元素法求解淺水波問題，仍必須投入更多的人力，以解決下列之問題：

(一)形狀函數、加權函數 (Weighting Functions) 及時間積分之研究

。形狀函數包括高階與低階內插函數之探討，加權函數指以葛勒

金加權函數，或其他正交加權函數之研究，時間積分之研究指可否利用特性法配合可變動網格之設計等問題之探討。

(二)將有限元素法於淺水波問題之應用，推廣到更複雜之領域，如河海模式之銜接，上游集水區與天然河川之啣接，水庫水理與下游河道之銜接等問題。有限元素法，如果可把領域分開，則可利用子結構 (Substructuring) 之構想，在不同之領域使用不同之掌理方程式，而在交會處再利用內邊界之概念加以相連之。最明顯而極有挑戰性之研究題目為河口海灘地形變化之探討。因為在河道祇需利用一維之河道模式，但在海岸則需利用二維之波浪模式，兩者不僅基本方程式不同，維度亦異，因此如何結合此兩模式，會合點如何接，將是十分有趣的題目之一。

誌 謝

本文所有電子計算機之計算結果，均由林一剛、沈榮茂、彭文禮諸君協助完成，謹此致最大之謝意，另外亦感謝國科會長期對專題研究之資助，亦一併致謝。

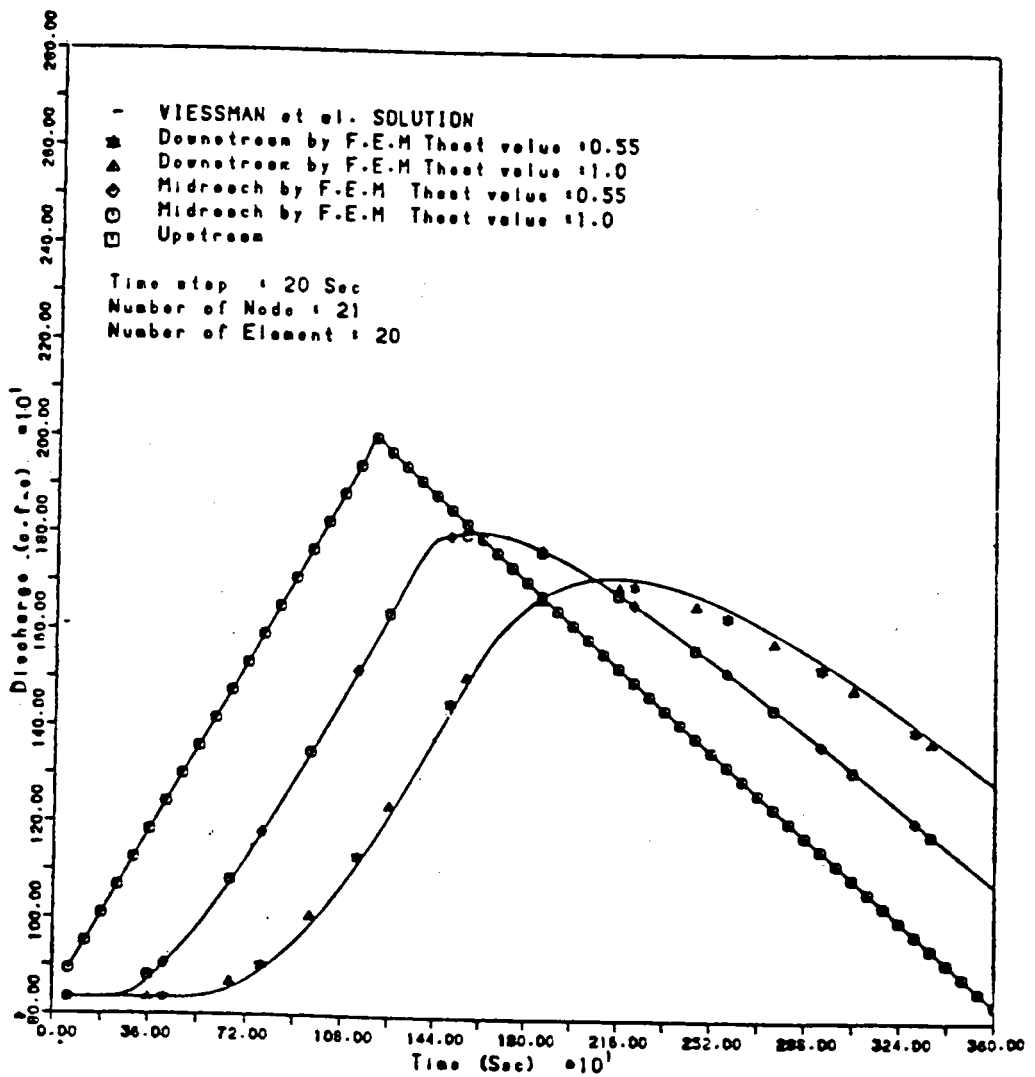
參考文獻

- 1.王士紘，1986，"滙流河道變量流之研究"，台灣水利季刊，第34卷第3期，pp.1—12。
- 2.張仁德、邱金火，1987，"有限元素法解一維明渠變量流研究"

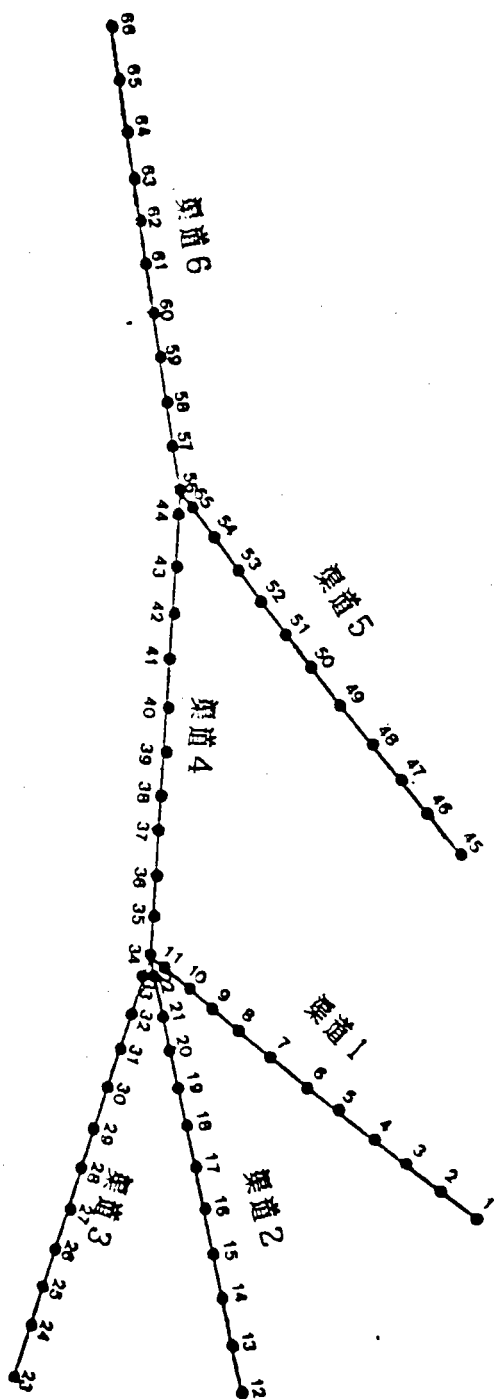
- ，台灣水利季刊，第 35 卷第 4 期，pp.30—35。
3. 楊德良，1986，水流動態分析，防洪排水工程規劃設計講習會，台北市政府，民國七十五年五月，pp.236—257。
 4. 楊德良，1989，"雨水下水道水理分析"，台北市雨水下水道規劃手冊，上冊，國立台灣大學水工試驗所研究報告第 93 號。
 5. 楊德良、林一剛，1988，有限元素法在明渠滙分流之應用，中華民國第十二屆全國力學會議論文集，台北，pp.1—8。
 6. 蔡政修、蔡惠峯、葉克家，1984，"有限元素法應用於漫地流之研究"，第二屆水利工程研討會論文集，pp.387—402，台北市。
 7. 顏清連、許銘熙、陶偉麟，1983，"淡水河系洪水演算模式(一)現況河道洪水演算模式之建立驗證"，國科會防災科技研究報告 72—08 號。
 8. Akan, A.O., and Yen. B.C., 1981, "Diffusion-Wave Routing in Channel Networks", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.107, No. HY6, pp.719-732.
 9. Chow, V.T., 1959, Open Channel Hydraulics, McGraw-Hill, N.Y.
 10. Cooley, R.L., and Moin, S.A., 1975, "Finite Element Solution of Saint-Venant Equations", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.102, No.HY6, pp.759-775.
 11. Henderson, F.M., 1966, Open Channel Flow, Macmillan, N.Y.
 12. Jayawardena, A.W., and White, J.K., 1977, "A Finite Element Distributed Catchment Model, I. Analytical Basis", Journal of Hydrology, Vol.34, pp.269-286.

13. Katopodes, N.D., 1984, "A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow", J. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.110, No.4, pp.450-466.
14. Keuning, D.H., 1976, "Application of Finite Element Method to Open Channel Flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.102, No. HY4, pp.459-467.
15. Lai, C., 1986, "Numerical Modeling of Unsteady Open-Channel Flow", Advances in Hydrosience, Vol.14, Academic press, N.Y., pp.161-333.
16. Nwaogazie, F.I.L. and Tyagi, A.K., 1984, "Unified Streamflow Routing by Finite Elements", Journal of the Hydraulic Engineering, Vol.110, No.11, pp.1595-1610.
17. Partridge, P.W. and Brebbia, C.A., 1976, "Quadratic Finite Elements in Shallow Water Problems", J. of hydraulics Div., ASCE. Vol.102, No, HY9, pp.1299-1313.
18. Reddy, J.N., 1984, An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, N.Y.
19. Ross, B.B., Contractor, D.N., and Shanholtz, V.O., 1979, "A Finite Element Method of Overland and Channel Flow for Assessing the Hydrologic Impact on Land-use Change", Journal of Hydrology, Vol. 41, pp.11-30.
20. Taylor, C., Al-Mashidani, G., and Davis, J. M., 1973, "A Finite Element Approach to Watershed Runoff", Journal of Hydrlogy, Vol.21, pp.231-246.
21. Viessman, W., Jr., Knapp, J.W., Lewis, G.L., and Harbaugh, T.E., 1977, Introduction to Hydrology, 2nd ed., Harper and Row Publishers, New York.
22. Woolhiser, D.A., and Liggett, J.A., 1967, "Unsteady, One Dimensional flow over a Plane-the Rising Hydrograph", Water Resource Research, Vol.3, NO.3. pp.753-771.

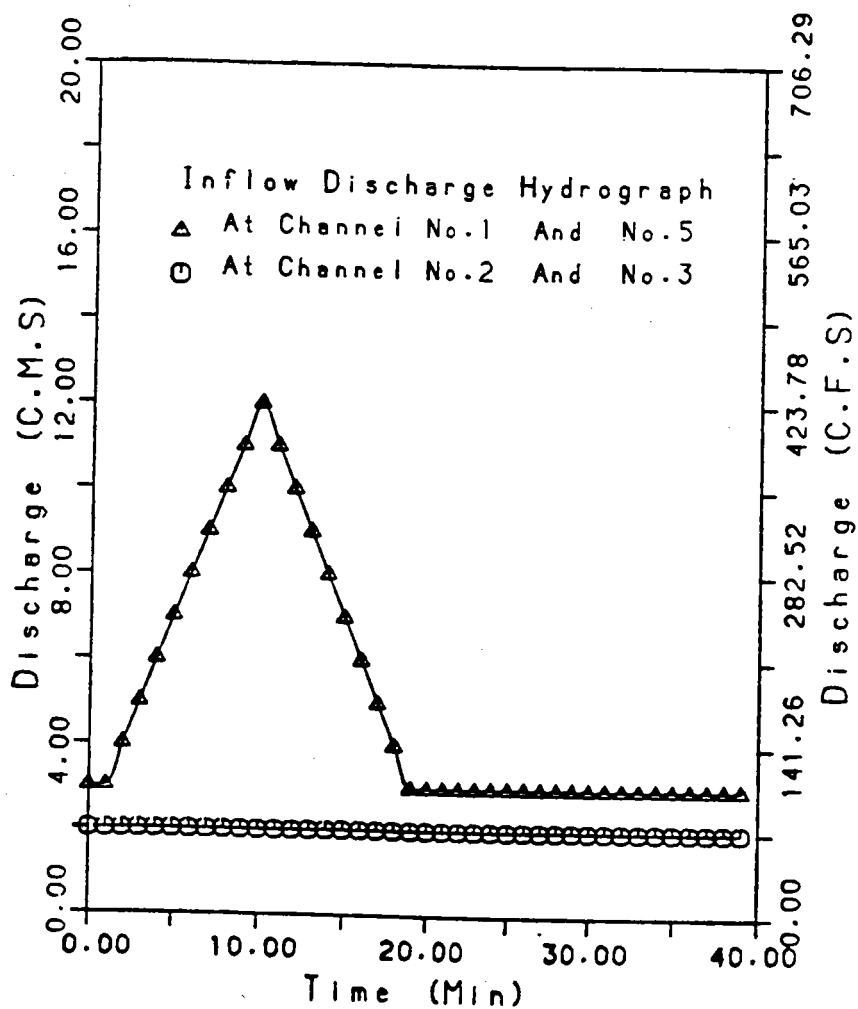
23. Yen ,B.C., 1986, " Hydraulics OF Sewers", Advances in Hydrosience, Vol.14, Academic Press, N.Y.,pp.1-122.
24. Young, D.L., 1989, A Comparison of Flood Routing Techniques for Channel Network Flows, the 2nd. JAPAN-CHINA(TAIPEI) Joint Seminar on Natural Hazards Mitigation, Kyoto, Japan, July 16-23. 1989.
25. Zienkiewicz, O.C., 1977, The Finite Element Method , 3rd ed, McGraw-Hill, London.



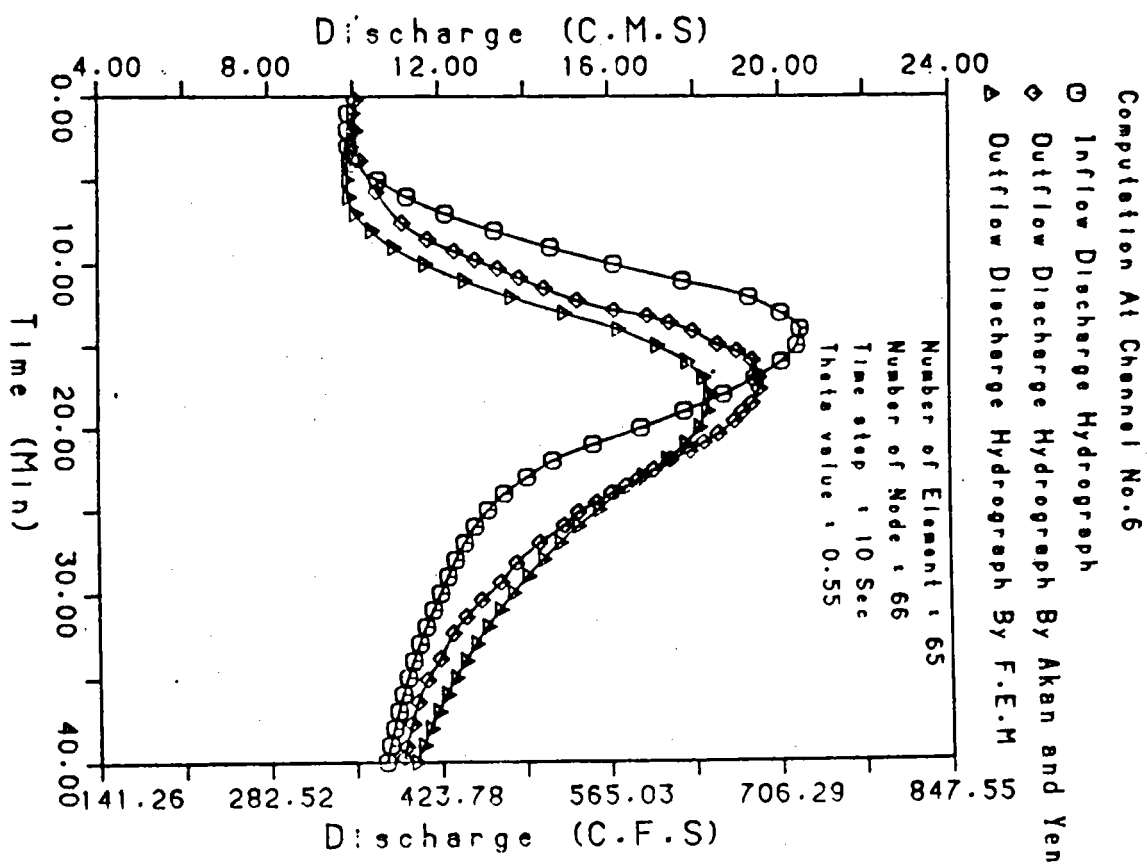
圖(一) 單一河道之模擬結果



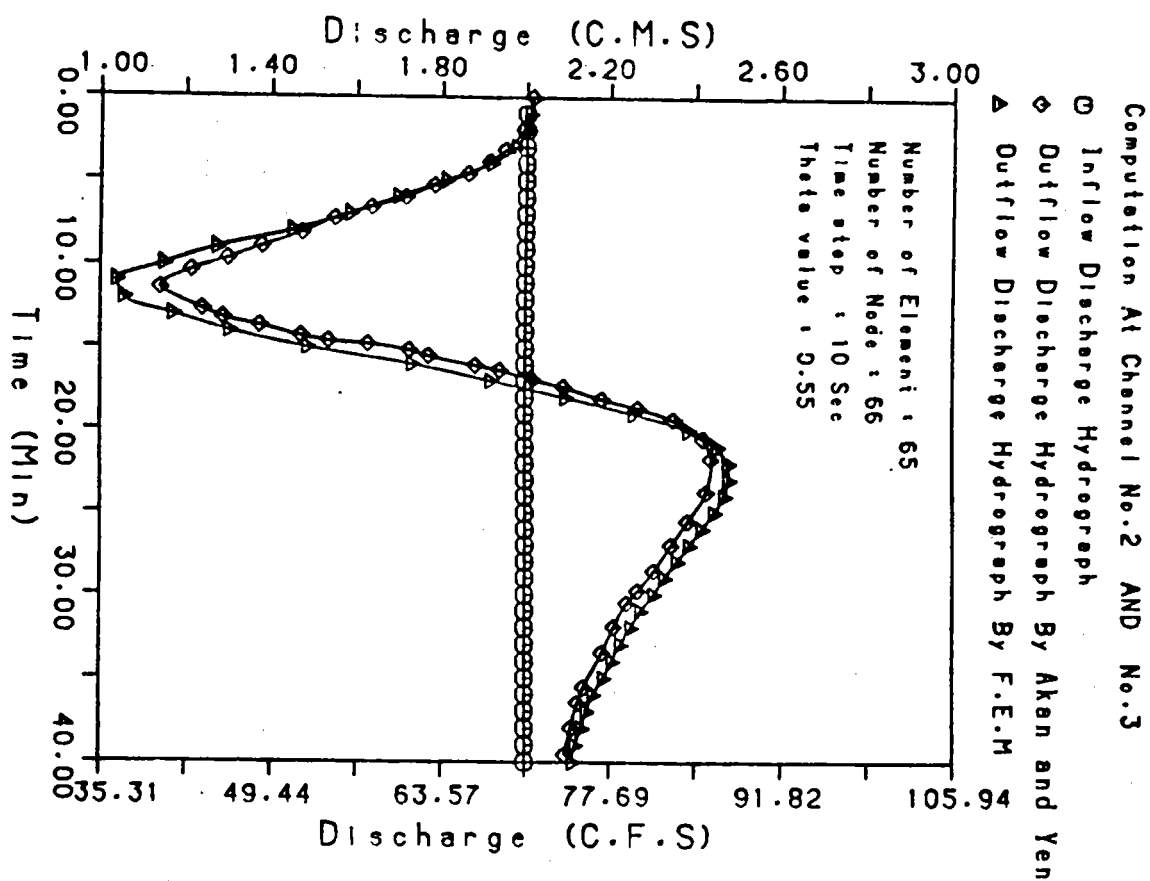
圖(二) 匯流河道之有限元素節點配置圖



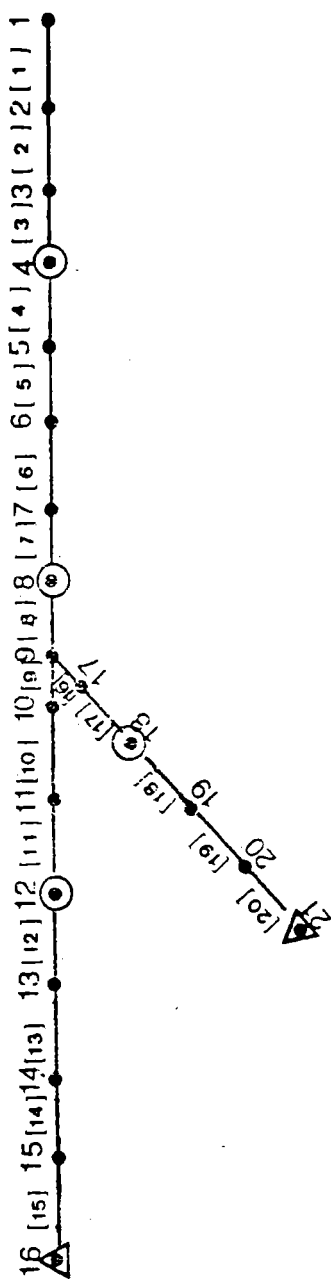
圖(三) 匯流河道上游之入流歷線



圖(四) 滙流河道動力波之模擬結果 (河道 6)

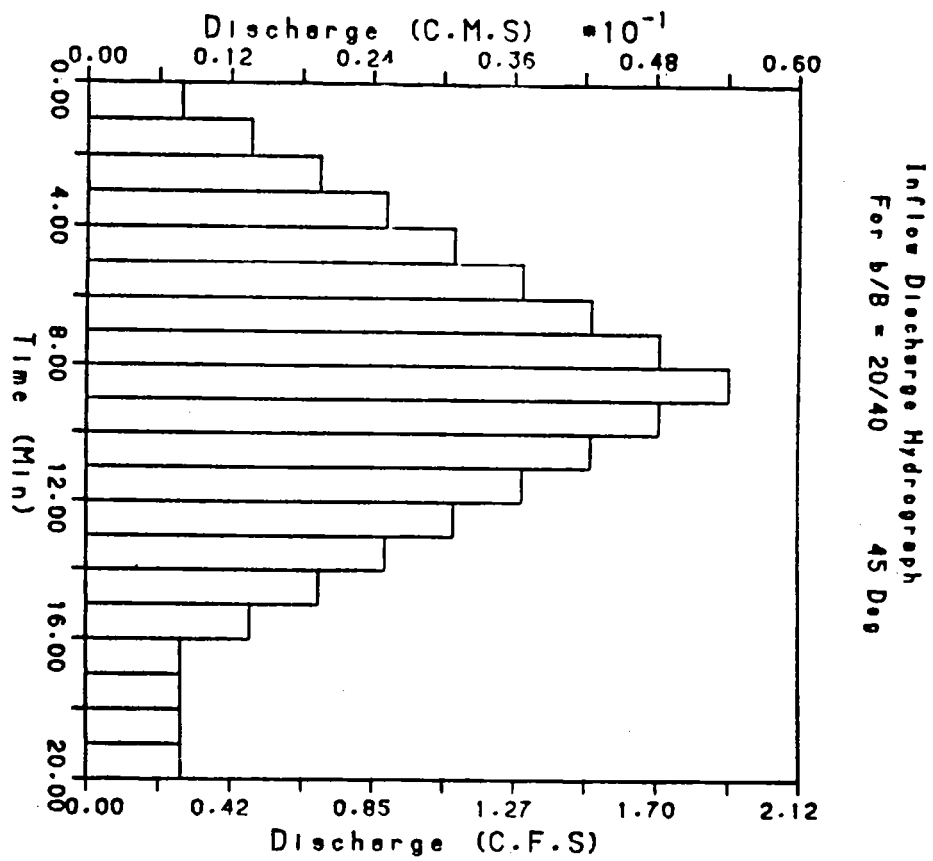


圖(五) 滙流河道擴散波之模擬結果 (河道 2 , 3)

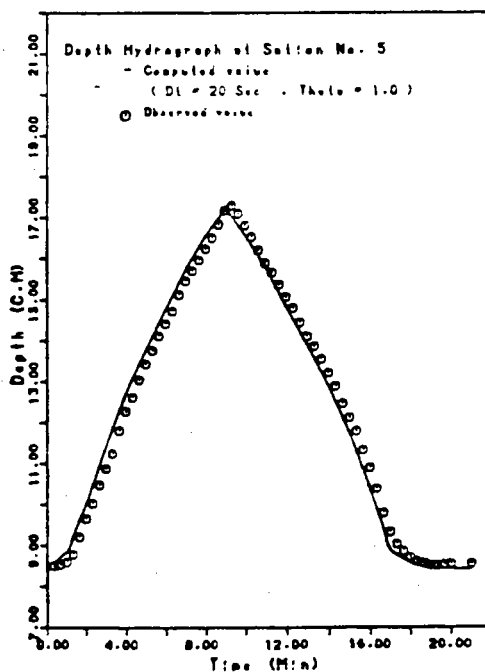
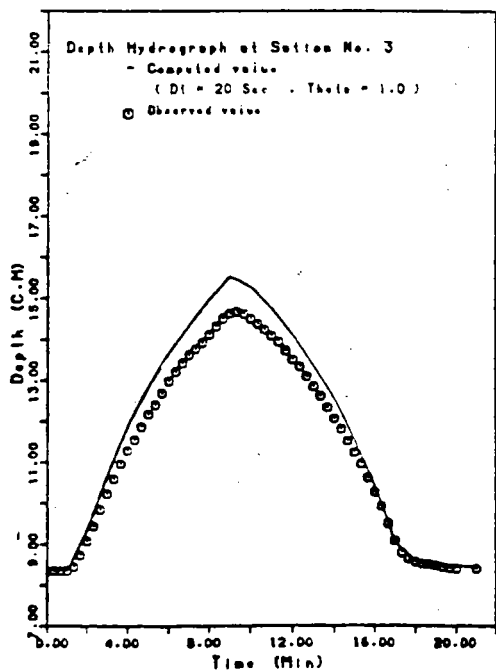
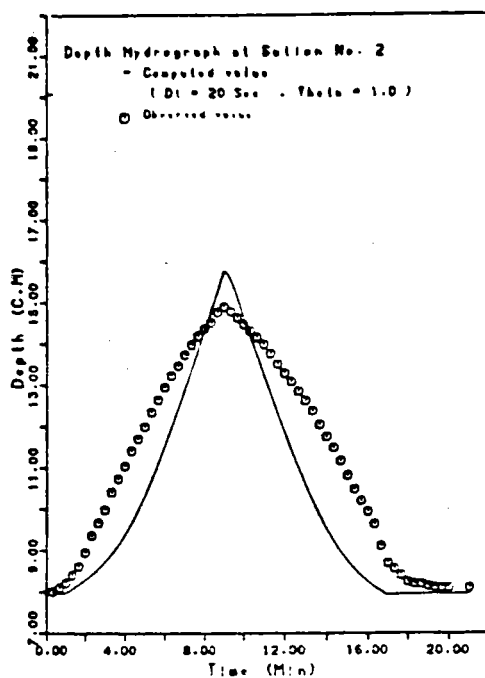
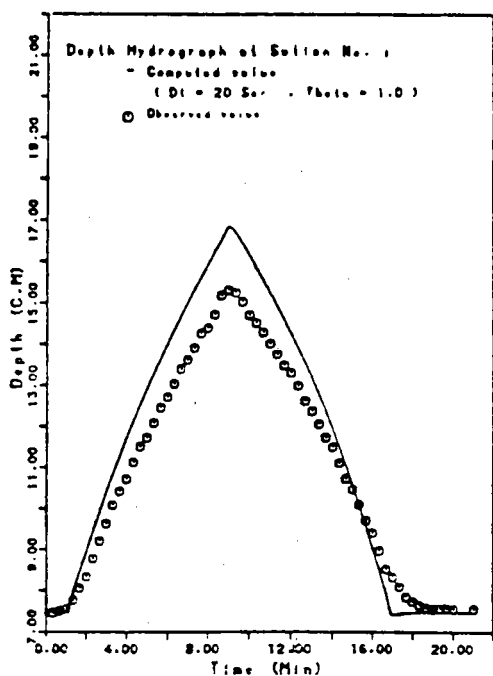


- 節點
- [] 元素
- ⊙ 觀測站
- △ 率定站

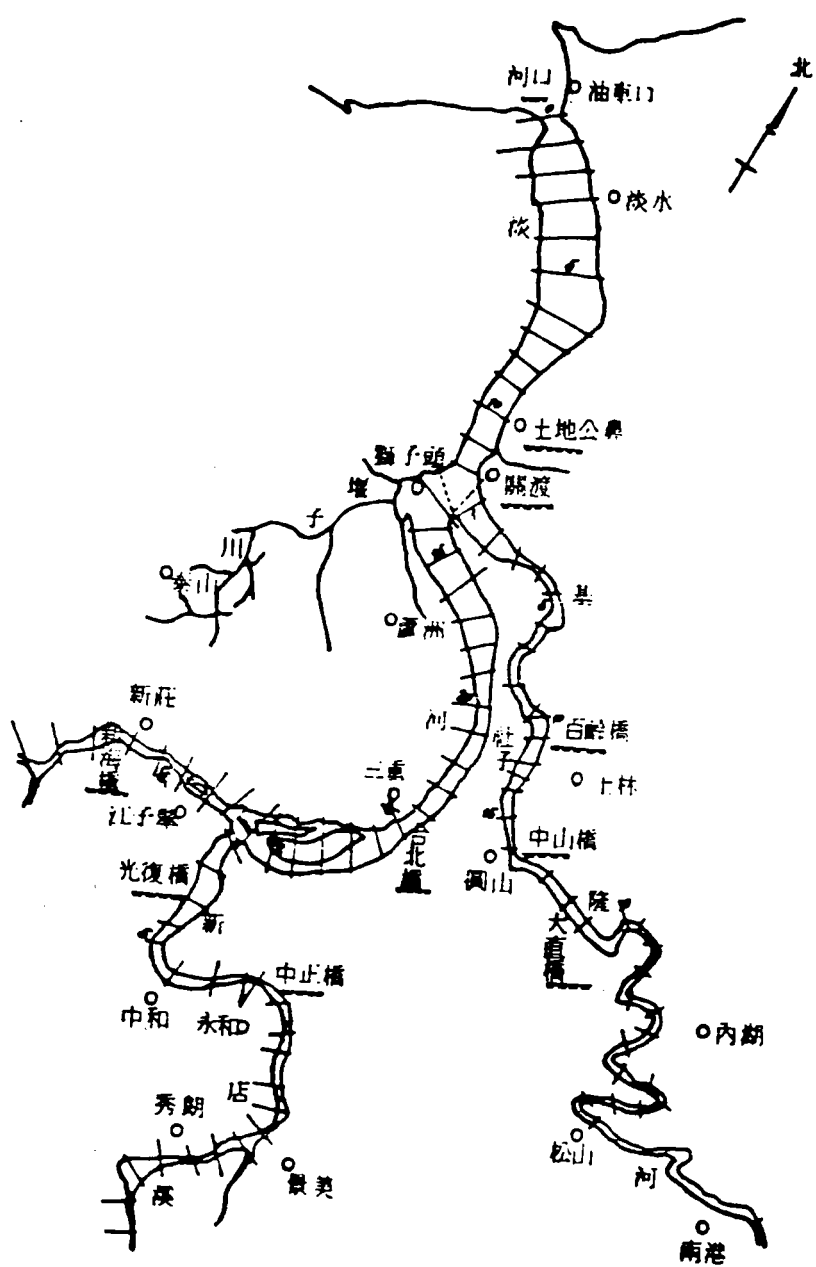
圖(六) 分流河道之有限元素節點配置圖



圖(七) 分流河道上游之入流歷線 (支、主流河寬比為 $b/B = 20/40$ cm/cm)



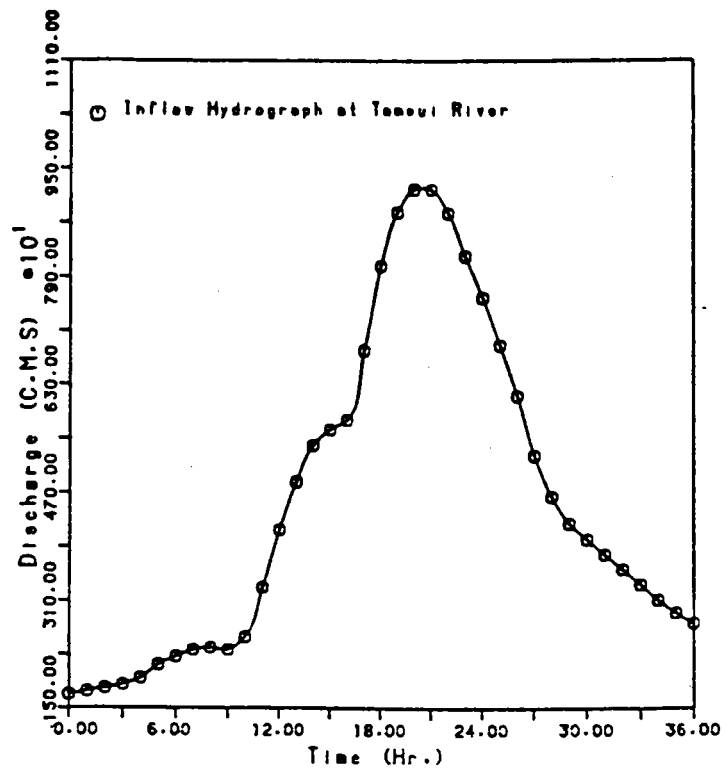
圖(六) 分流河道之模擬結果 ($b/B = 20/40 \text{ cm/cm}$)



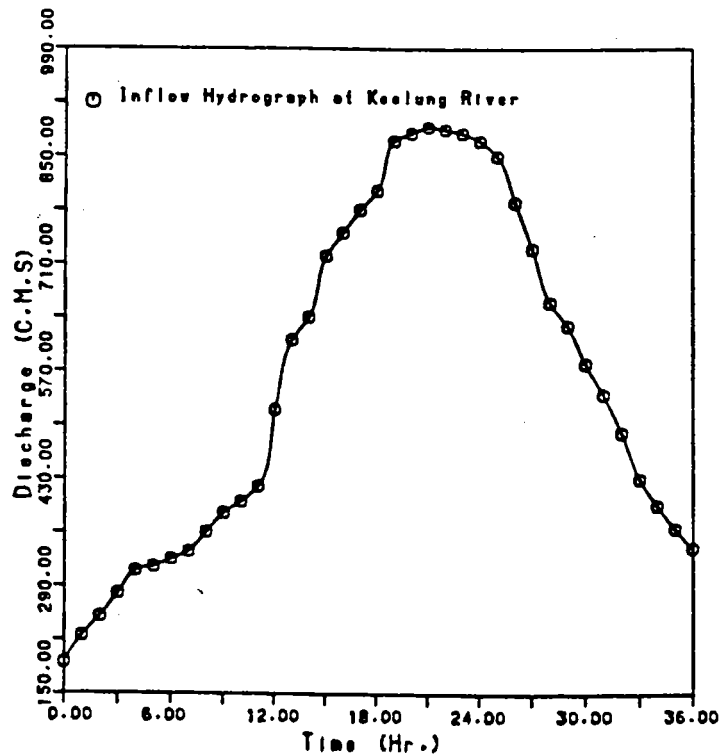
圖(九) 淡水河系示意圖



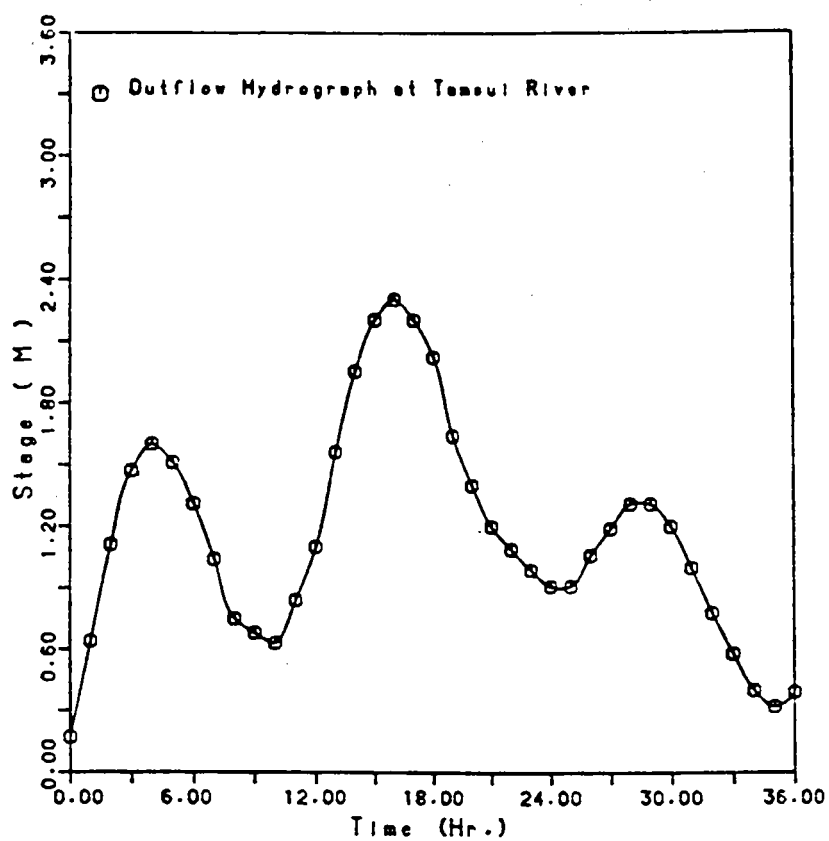
圖(十) 淡水河與基隆河匯流河道之有限元素節點配置圖



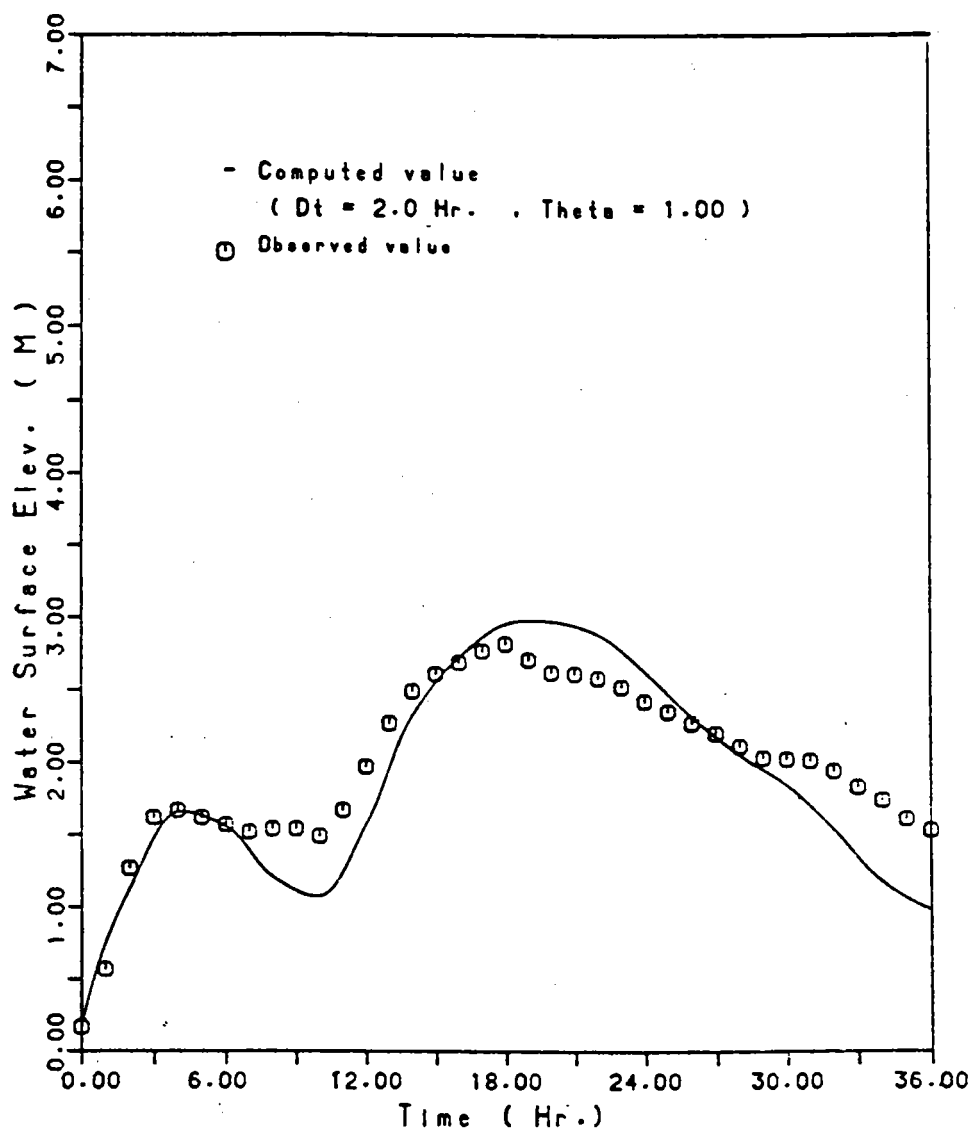
圖(十) 台北橋(淡水河)貝蒂颱風之入流歷線



圖(十一) 百齡橋(基隆河)貝蒂颱風之入流歷線

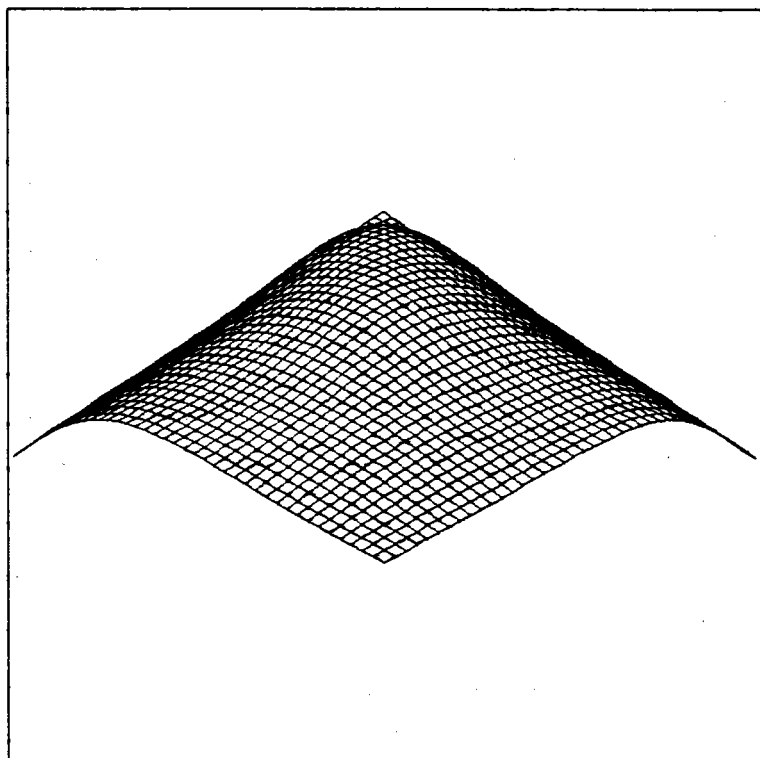


圖(三) 河口站(淡水河)貝蒂颱風的水位歷線



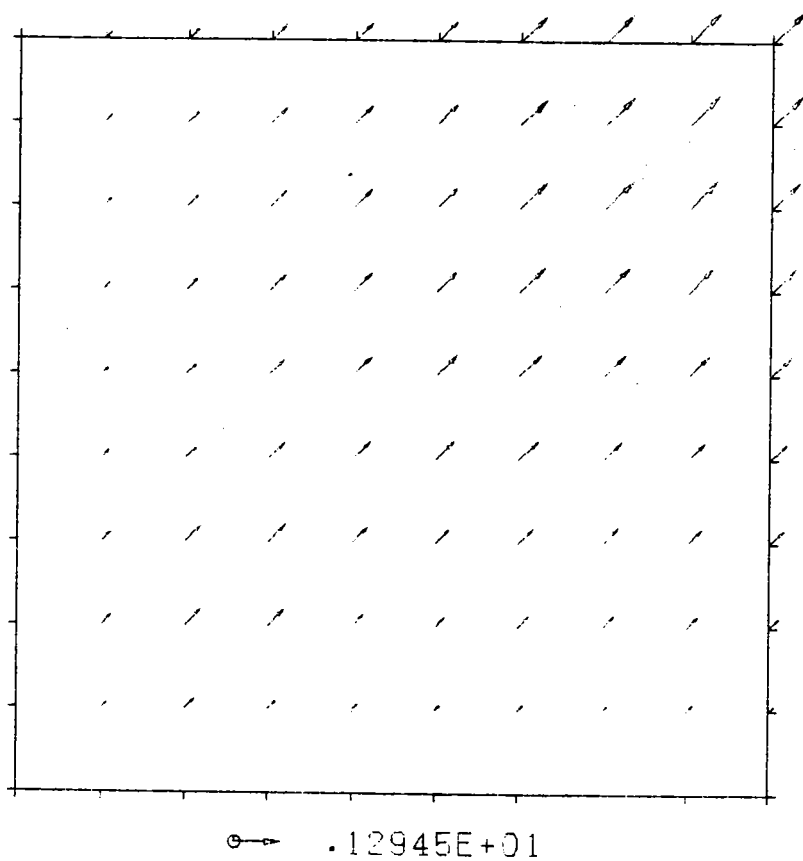
圖(四) 關渡站(淡水河、基隆河匯流處)貝蒂颱風水位歷線之比較圖

w PERSPECTIVE VIEW
HORIZONTAL X FROM .0000E+00 TO .5000E+03
VERTICAL Y FROM .0000E+00 TO .5000E+03

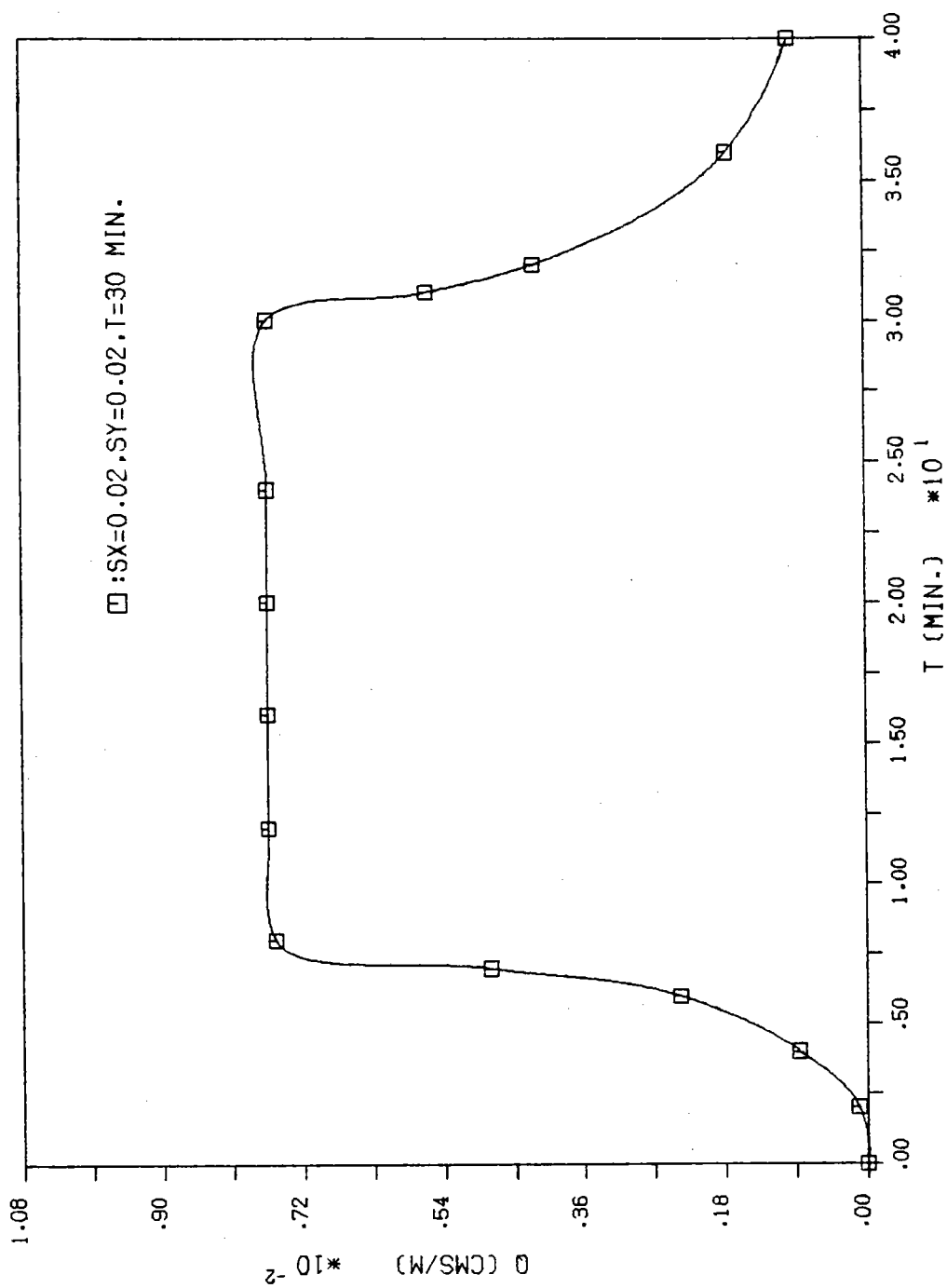


圖(七) 雙向坡度漫地流之水面立體透視圖 ($T=30 \text{ min}$)

U -V VECTOR FIELD
 HORIZONTAL X FROM .0000E+00 TO .5000E+03
 VERTICAL Y FROM .0000E+00 TO .5000E+03



圖(六) 雙向坡度漫地流之速度分佈圖 ($T = 30 \text{ min}$)



THE OUTFLOW HYDROGRAPH (WATERSHED.20)

圖(九) 雙向坡度漫地流平面之出流歷線

FINITE ELEMENT MODELING OF SHALLOW WATER WAVE EQUATIONS

Der-Liang Young

Professor of Civil Engineering and
Director of Hydraulic Research Laboratory
National Taiwan University
Taipei, Taiwan, ROC.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to introduce the major potentials and perspectives of applications of finite element analysis to solve the problems of the shallow water wave equations. One-dimensional as well as two-dimensional shallow water wave equations will be incorporated into the modeling procedures. For one-dimensional flows, the models will cover the typical single channels, confluence channels system, division channels system, as well as natural river systems. As far as two-dimensional flows are concerned, the over land flows are investigated. The simulating results will be used to compare with other existing literature and the

data obtained by the physical modeling. The models were found very feasible in modeling the complex flow fields of the shallow water wave equations. The paper finalizes with the opinion of the writer's past experience and the judgement, indicating the major trends for the beginners, in particular, emphasizing the concept of "Substractaring" to deal with the very challenging engineering problems, such as hydraulic phenomena near the river mouth and their related problems, etc,

臺灣鄰近海域潮汐預報數值模式

李賢文

國立臺灣海洋學院海洋學系

摘要

本研究以流體動力方程式為基礎，使用數值方法，解出臺灣周圍海域之潮流情況。對於潮汐動力方程式，可以假定海水為不可壓縮的流體。由於臺灣周圍海域比起世界海洋小得很多，因此整個海域之潮汐現象，皆是由太平洋沿岸潮汐調和常數，繪出臺灣周圍海域 M_2 ， S_2 ， K_1 和 O_1 四種主要分潮之等幅圖和同潮圖，由此再推算出模式開口邊界上 M_2 ， S_2 ， K_1 和 O_1 的調和常數。據此我們可以推算開口邊界之潮汐變化，然後依據本模式推算臺灣周圍海域之潮汐和潮流。本模式計算結果與現有潮表比較，甚為符合。本模式之推算已能提供此海域中無驗潮站所在之潮汐和潮流情況，對海洋開發有所助益。

A Numerical Predictive Model of Tides in the Seas Adjacent to Taiwan

HSIEN-WEN LI

*Department of Oceanography
National Taiwan College of Marine Science and Technology
Keelung, Taiwan
Republic of China*

ABSTRACT

A two-dimensional linear model of tides is developed to numerically predict tides in the seas adjacent to Taiwan. On a continental shelf such as the Taiwan Strait, tides from the open ocean control the tidal phenomena within this region. Thus the tidal waves in the model are forced by the tides at the open boundaries, where the principal M_2 , S_2 , K_1 and O_1 partial tides are used by means of harmonic method.

The computed tides are compared to the observed ones at ten tidal stations around Taiwan. Good agreement between the calculated and observed tides is obtained. Some calculated tidal hodographs in the seas around Taiwan are depicted.

Key words: numerical model, tides, seas around Taiwan

Introduction

The tide prediction at selected locations can be successfully carried out by means of the harmonic method provided the tidal harmonic constants are known at those stations. But it is difficult to calculate tidal currents in a sea from harmonic analysis. It is also impossible to predict the tides in a coastal area without long historical tidal records. In this paper we use a hydrodynamical-numerical model solely based on tidal constants at open boundaries in the area in question to calculate both the tidal heights and currents in a coastal sea.

The numerical method for tide calculation was initiated by Hansen [3]. Since that time many numerical methods for solving tidal problems have been developed [5]. In order to predict the sea levels directly from the astronomically derived tide generating forces, some attempts to solve tidal dynamics equations for the global ocean were made in recent years. However the results of these tidal models of the world oceans are inadequate to predict sea levels for practical use. Cartwright [1], Hendershott [6], Hendershott [7] and Marchuk and Kagan [8] gave detailed reviews of numerical models of global ocean tides.

Nevertheless knowledge of tides and tidal currents in marginal and adjacent seas plays an important role in coastal engineering. The tidal phenomena in a marginal sea, such as the Taiwan Strait, are mostly excited by the propagation of tidal waves from the open ocean. The tidal phenomena of Taiwan Strait are extremely complex. The semi-diurnal waves come into the strait from both

ends. The wave coming in from the East China Sea propagates southwestwards and that coming in from South China Sea northwards. These two waves meet in the central part of the strait. The diurnal wave passes through the Taiwan Strait from the north to south in 3 hours [9].

During the early 1930's a considerable number of tidal measurements in the Taiwan Strait were made [9]. These tidal measurements are used as the basis of a numerical model in this research. We first calculate the tidal constants at open boundaries based on co-tidal charts. Then the tidal elevations at open boundaries are specified according to the harmonic theory [2]. Tidal currents and tide prediction are computed by the time-dependent model for the seas adjacent to Taiwan.

Governing Equations

The following system of linear hydrodynamical equations is used for development of a numerical model of tides.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (4)$$

Here x, y, z are components of a Cartesian coordinate system, with x, y, z axes in eastward, northward and upward directions respectively; u, v and w are velocity components in x, y and z directions respectively; ρ is the density of sea water, which is assumed here as a constant and p is the pressure; g is the acceleration due to gravity and f the Coriolis parameter. A and A_v are the horizontal and vertical eddy viscosity coefficients respectively. The tide-generating forces are neglected because of the small area of this model.

Equation (1) is the continuity equation for an incompressible fluid. Equations (2) and (3) are equations of motion in x and y components respectively and (4) is the hydrostatic equation.

The pressure p at depth z is determined from the hydrostatic equation (4),

$$P = \rho g(\xi - z) \quad (5)$$

where the atmospheric pressure at sea surface is neglected and ξ is the free surface displacement from the undisturbed state.

In addition to the above equations we need also the following boundary conditions:

1) Kinematic boundary conditions,

$$w = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \text{ at the surface, } z = \xi(x, y, t) \quad (6)$$

$$\text{and } w = -u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y} \text{ at the bottom, } z = -H(x, y)$$

2) Dynamic boundary conditions,

$$A_v \frac{\partial u}{\partial z} - (A \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial \xi}{\partial x} - (A \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\tau_{sx}}{\rho} \text{ at } z = \xi(x, y, t) \quad (7)$$

$$A_v \frac{\partial v}{\partial z} - (A \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial \xi}{\partial x} - (A \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\tau_{sy}}{\rho}$$

where τ_{sx} and τ_{sy} are wind stresses in x and y directions respectively. Wind stresses are set to zero in this model.

$$A_v \frac{\partial u}{\partial z} + (A \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial H}{\partial x} + (A \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\tau_{bx}}{\rho} \text{ at } z = -H(x, y) \quad (8)$$

$$A_v \frac{\partial v}{\partial z} + (A \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial H}{\partial x} + (A \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\tau_{by}}{\rho}$$

where τ_{bx} and τ_{by} are bottom stresses in x and y components, which are exerted by the sea water upon the sea bottom.

We integrate equations (1), (2) and (3) from the sea bottom to the sea surface, and we obtain,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = fV - g(\xi + H) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\xi} A \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^{\xi} A \frac{\partial u}{\partial y} dz \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -fU - g(\xi + H) \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\xi} A \frac{\partial v}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^{\xi} A \frac{\partial v}{\partial y} dz \quad (11)$$

where we made use of equations (5), (6), (7) and (8). For convenience we introduce the volume transport vector,

$$\mathbf{V} \equiv (U, V) \equiv \int_{-H}^{\xi} \mathbf{v} dz \equiv \int_{-H}^{\xi} (u, v) dz. \quad (12)$$

A measure of water velocity is then obtained by averaging this volume transport over depth, thus

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv (\bar{u}, \bar{v}) = \frac{(\mathbf{U}, \mathbf{V})}{H + \xi}. \quad (13)$$

Because the surface displacement ξ is much smaller than the water depth H , we will take $(\xi + H) \approx H$ hereafter.

Assuming the horizontal eddy viscosity to be constant and the velocities to be uniform with the depth, the expressions for the turbulent friction can be approximated as follows,

$$\int_{-H}^{\xi} A \nabla_H \cdot \mathbf{v} dz = A(\xi + H) \nabla_H \cdot \bar{\mathbf{v}} \approx AH \nabla_H \cdot \frac{(\mathbf{U}, \mathbf{V})}{H}. \quad (14)$$

For the present calculation A is assumed to be of the order of $10^6 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

On assuming a uniform velocity distribution in the vertical, the bottom friction can be approximated as follows [12],

$$\frac{\tau_b}{\rho} = \frac{k|\mathbf{V}|V}{(H + \xi)^2} \approx \frac{k|\mathbf{V}|V}{H^2} \quad (15)$$

where k is a nondimensional skin friction coefficient of the order of 2.5×10^{-3} [4, 12, 13].

In order to solve equations (9), (10) and (11) numerically, we will use finite differences in place of derivatives. We choose a net of grid points (Fig. 1) which covers the area to be considered. Here we use two conjugate Richardson lattices for space-differencing [10].

The derivatives in time and space are approximated by the central difference scheme, where the divergence term, the pressure gradient terms, and the Coriolis terms are evaluated at a time-step centered between the old and new time, while the dissipation terms are evaluated at the old time step [12].

The stability criterion is the familiar Courant-Friedrich-Lewy condition,

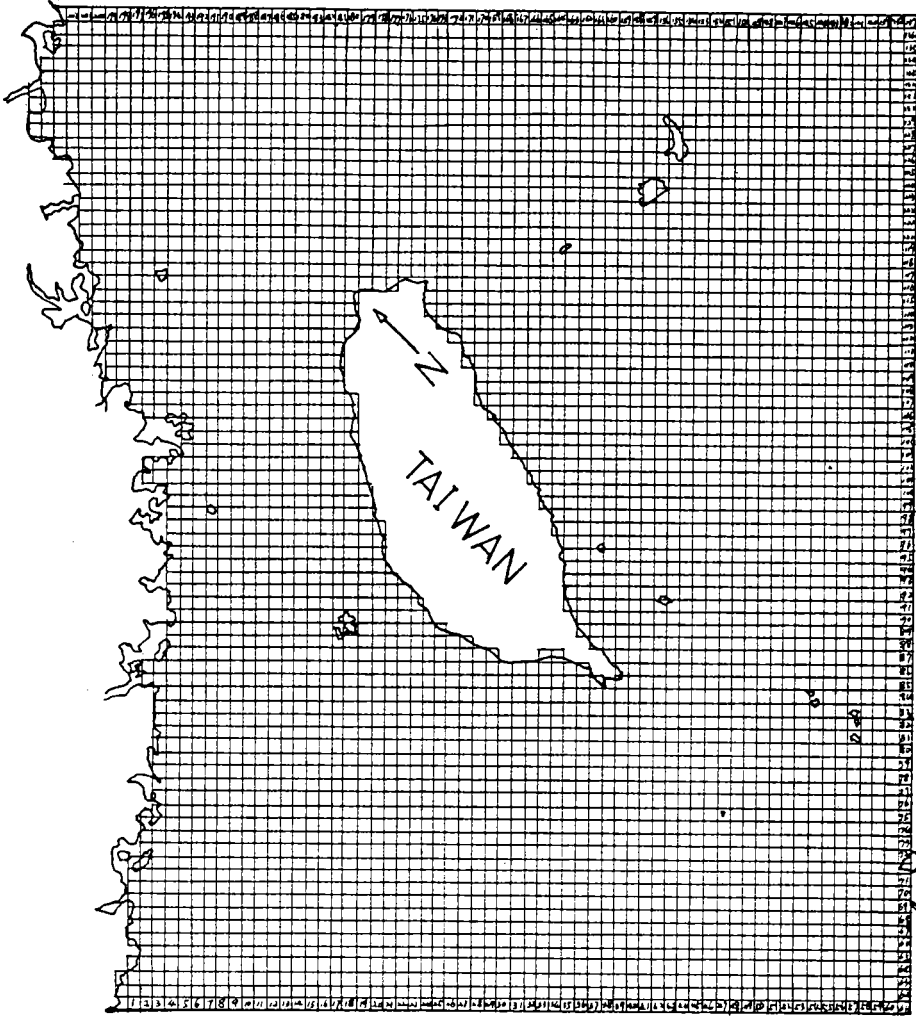


Fig. 1. A net of grid points of numerical model to compute tides in the seas around Taiwan.

$$\frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{1/\sqrt{2}}{C_{\max}} \quad (16)$$

where $C_{\max}$ is the speed of propagation of the fastest waves in the model, and therefore $C_{\max} = \sqrt{gH_{\max}}$, $H_{\max}$ is the maximum depth in this area. Here $H_{\max}$ is about 6500 m. In this model $\Delta s (= \Delta x = \Delta y)$ equals to $10\sqrt{2}$ Km. Therefore we choose $\Delta t = 36$ sec for calculation.

The Coriolis terms, which are treated by the trapezoidal schem, are thus approximated as follows [12],

$$fV(t) \cong \frac{1}{2}f \left\{ V(t - \frac{1}{2}\Delta t) + V(t + \frac{1}{2}\Delta t) \right\} \quad (17)$$

$$fU(t) \cong \frac{1}{2}f \left\{ U(t - \frac{1}{2}\Delta t) + U(t + \frac{1}{2}\Delta t) \right\} \quad (18)$$

The equations (9), (10) and (11) are then approximated as follows,

imated as follows,

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, t) = & \zeta(x, y, t - \Delta t) - \frac{\Delta t}{\Delta s} \left\{ U(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t - \frac{1}{2}\Delta t) - U(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t - \frac{1}{2}\Delta t) \right. \\ & + V(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, t - \frac{1}{2}\Delta t) - V(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, t - \frac{1}{2}\Delta t) \left. \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} U(x, y, t + \frac{1}{2}\Delta t) = & U(x, y, t - \frac{1}{2}\Delta t) \\ & + \frac{\Delta t}{2}f \left\{ V(x, y, t - \frac{1}{2}\Delta t) + V(x, y, t + \frac{1}{2}\Delta t) \right\} \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta s} gH \left\{ \zeta(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\zeta(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t) - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + AH\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{U}{H}\right)\right. \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{U}{H}\right)\} + A\left\{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{H}\right)\right. \\
 & + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{H}\right)\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$V(x, y, t + \frac{1}{2}\Delta t) = V(x, y, t - \frac{1}{2}\Delta t)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta t}{2}f\{U(x, y, t - \frac{1}{2}\Delta t) + U(x, y, t + \frac{1}{2}\Delta t)\} \\
 & -\frac{\Delta t}{\Delta s}gH\{\zeta(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, t) - \zeta(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, t)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\tau_{by}}{\rho} + AH\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{V}{H}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{V}{H}\right)\right\} \\
 & + A\left\{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{H}\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{H}\right)\right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

For the horizontal viscosity to couple the two conjugate Richardson lattices, the Laplace operator should be evaluated by a rotation of the coordinate axes over 45 degrees in order to accomplish a virtual smoothing to reduce the grid dispersion [12]. The last derivatives in (19) and (20) are also approximated by central differences.

The lateral boundary points are composed of U , and

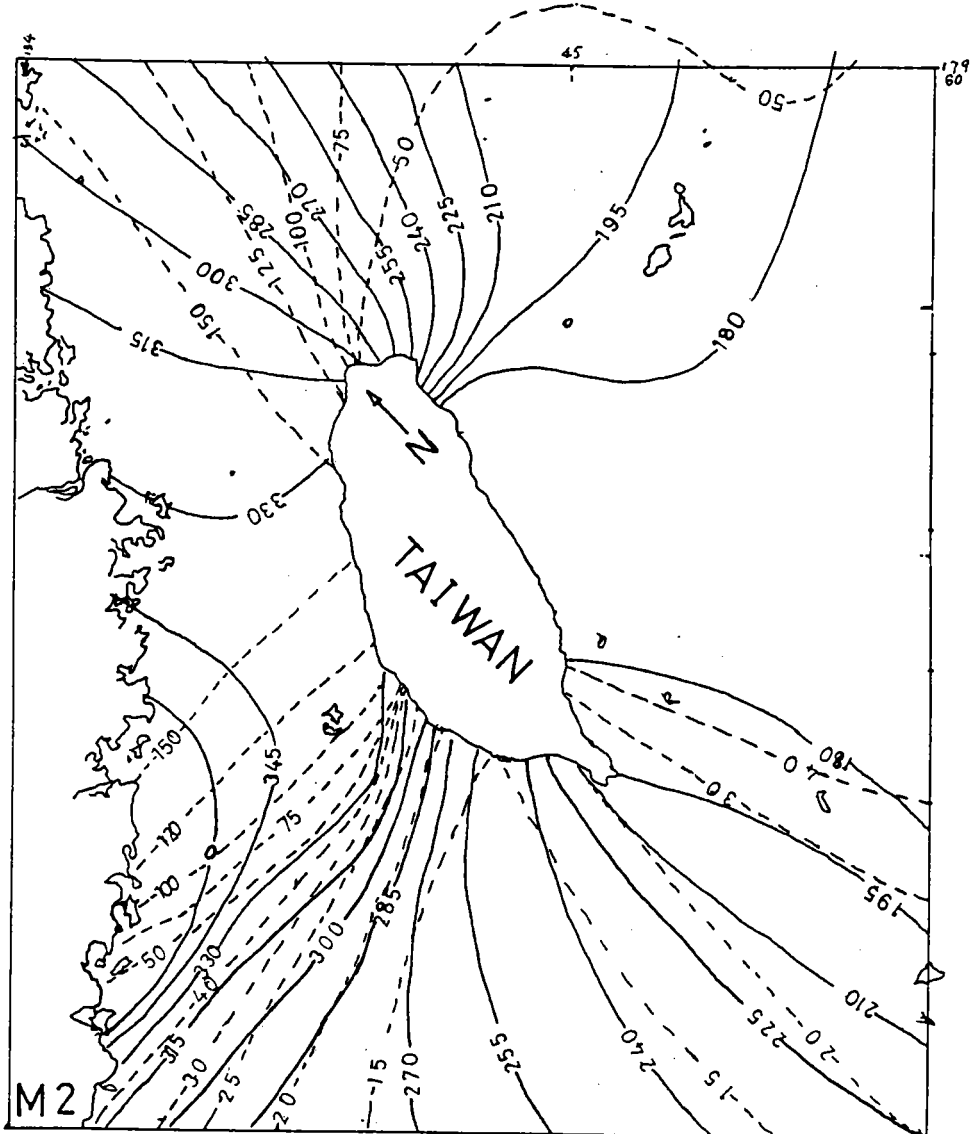


Fig. 2. M_2 co-tidal chart (—) in degree referred to 120°E and isoamplitude chart (---) in cm, based on Ogura's data (1933).

V points along the coastline, where the non-slip condition are used, i.e. $U=0, V=0$. At the open boundaries the empirically determined tide by the common harmonic method will be used. This is given in the following section.

Open Boundary Conditions

To substitute the predicted tides into open boundaries, we need the tidal constants to use the harmonic method. First we construct tidal charts of M_2 , S_2 , K_1 and O_1 constituents (Fig. 2-5). These charts are made by

means of harmonic constants, provided in Ogura [9], of tides along the coasts of Japan, Korea, Taiwan and the Chinese Mainland. The amplitude and phase lag of M_2 , S_2 , K_1 and O_1 at each open boundary point is calculated by interpolation from the tidal charts (Fig. 2-5).

The tidal height at the open boundaries is computed by use of the harmonic theory,

$$\zeta(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m N_i a_i \cos[\omega_i t + E_i - \lambda_i] \quad (21)$$

where a_0 is the mean sea level. N_i , a_i , ω_i , E_i and λ_i are

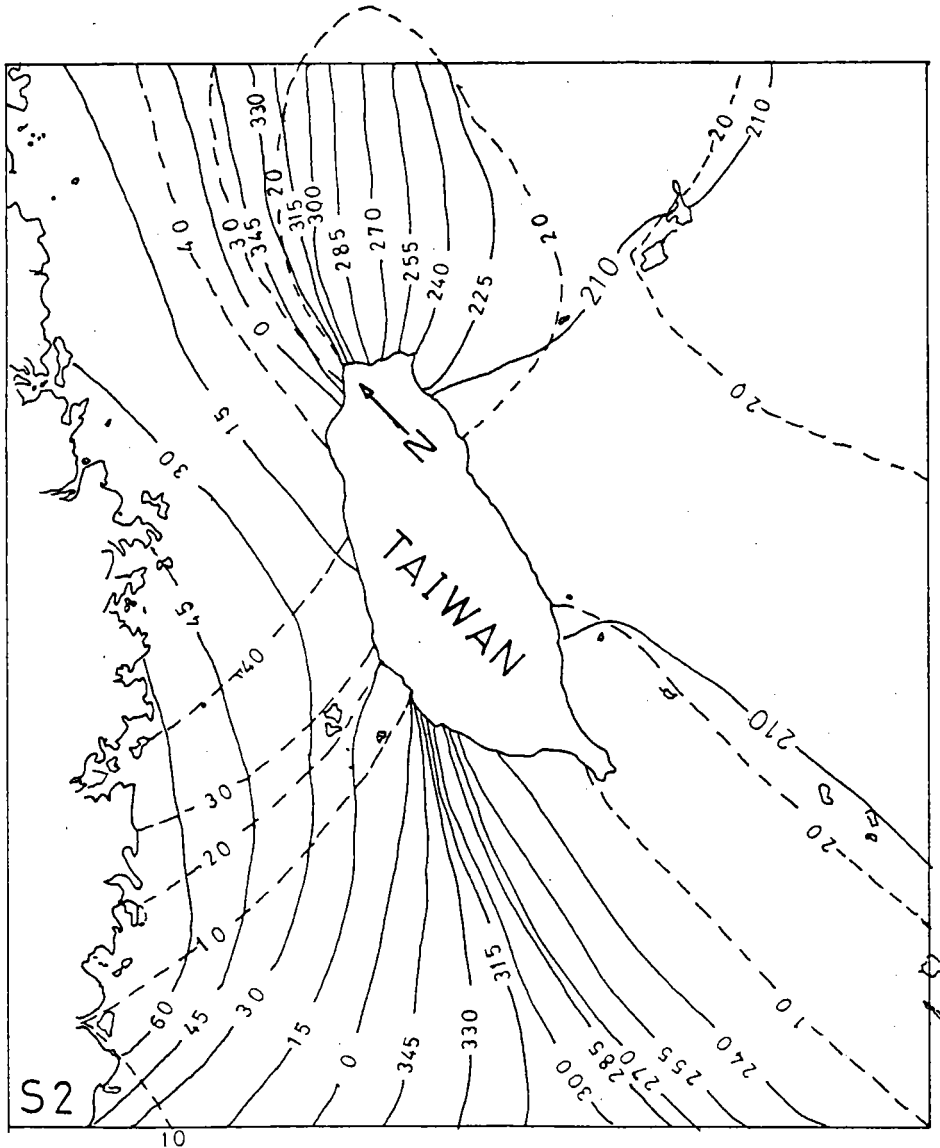


Fig. 3. S_2 co-tidal chart (—) in degree referred to 120°E and isoamplitude chart (---) in cm, based on Ogura's data (1933).

Numerical Model of Tides

the node factor, amplitude, frequency, equilibrium argument and phase lag of the i -th constituent tide respectively (Schureman, 1958). In this study we take $m = 4$, i.e. $i = 1, 2, 3, 4$ which corresponds to M_2 , S_2 , K_1 and O_1 partial tide. In this model α_0 is taken to be zero at the open boundaries.

Results

To verify this model we calculate the tide for a 36-hour period from 0 hr 1 January, 1983. The computed and observed tidal heights at some tidal stations around

Taiwan are shown in Fig. 6. The mean value in the observed tidal curve has been subtracted out. The positions of these tidal stations are shown in Fig. 7.

In these figures we can see that the calculated tides are in good agreement with the observed ones after the initial adjustment in the computed series. The initial oscillations in the computed values are due to the zero initial values used for current velocities and surface elevations.

The vertically averaged tidal current are also computed, and some tidal current hodographs of larger velocities are depicted in the seas around Taiwan (Fig. 7).

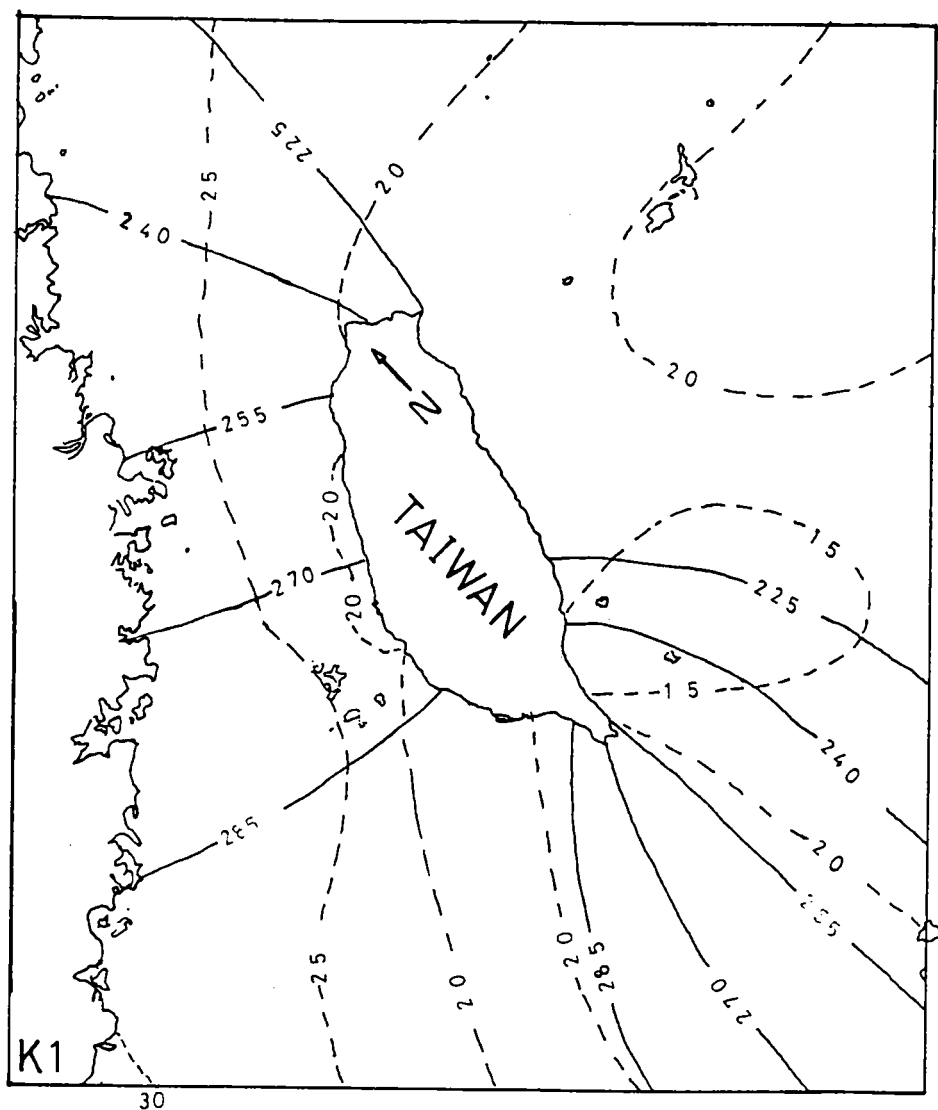


Fig. 4. K_1 co-tidal chart (—) in degree referred to 120°E and isoamplitude chart (---) in cm, based on Ogura's data (1933).

Most calculated tidal currents in the sea off eastern Taiwan are very weak. Therefore they are not shown in the figure.

The strongest tidal currents are found in the Penghu Kangtao (channel) between Taiwan and Penghu, where the tidal ellipse is elongated. The maximum velocities are about 1.5 m/sec in the north-south direction which is approximately parallel to the neighboring coastline. In the Taiwan Strait, the tidal currents rotate 2 cycles per day,

hence they are of a semi-diurnal type. In the northern Taiwan Strait, tidal currents rotate counterclockwise, but in the southern Taiwan Strait it rotates clockwise.

In the sea off southern Taiwan (the Bashi Channel) the tidal currents rotate approximately one cycle per day, and are of the diurnal type. The tidal current rotates clockwise.

In the sea off northern Taiwan tidal currents rotate in periods from 1.5 cycles/day to 1.8 cycles/day, with

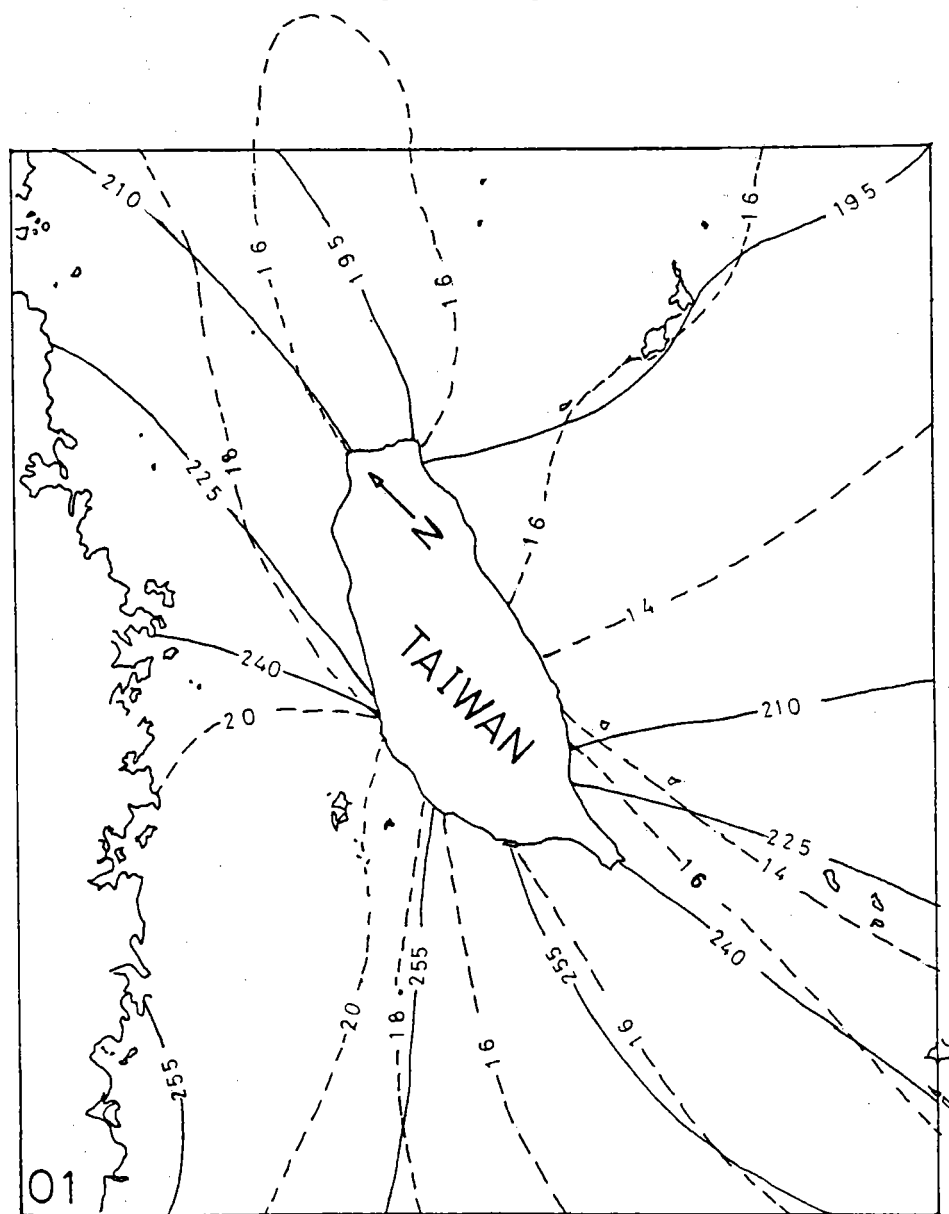


Fig. 5. O_1 co-tidal chart (—) in degree referred to 120°E and isoamplitude chart (---) in cm, based on Ogura's data (1933).

Numerical Model of Tides

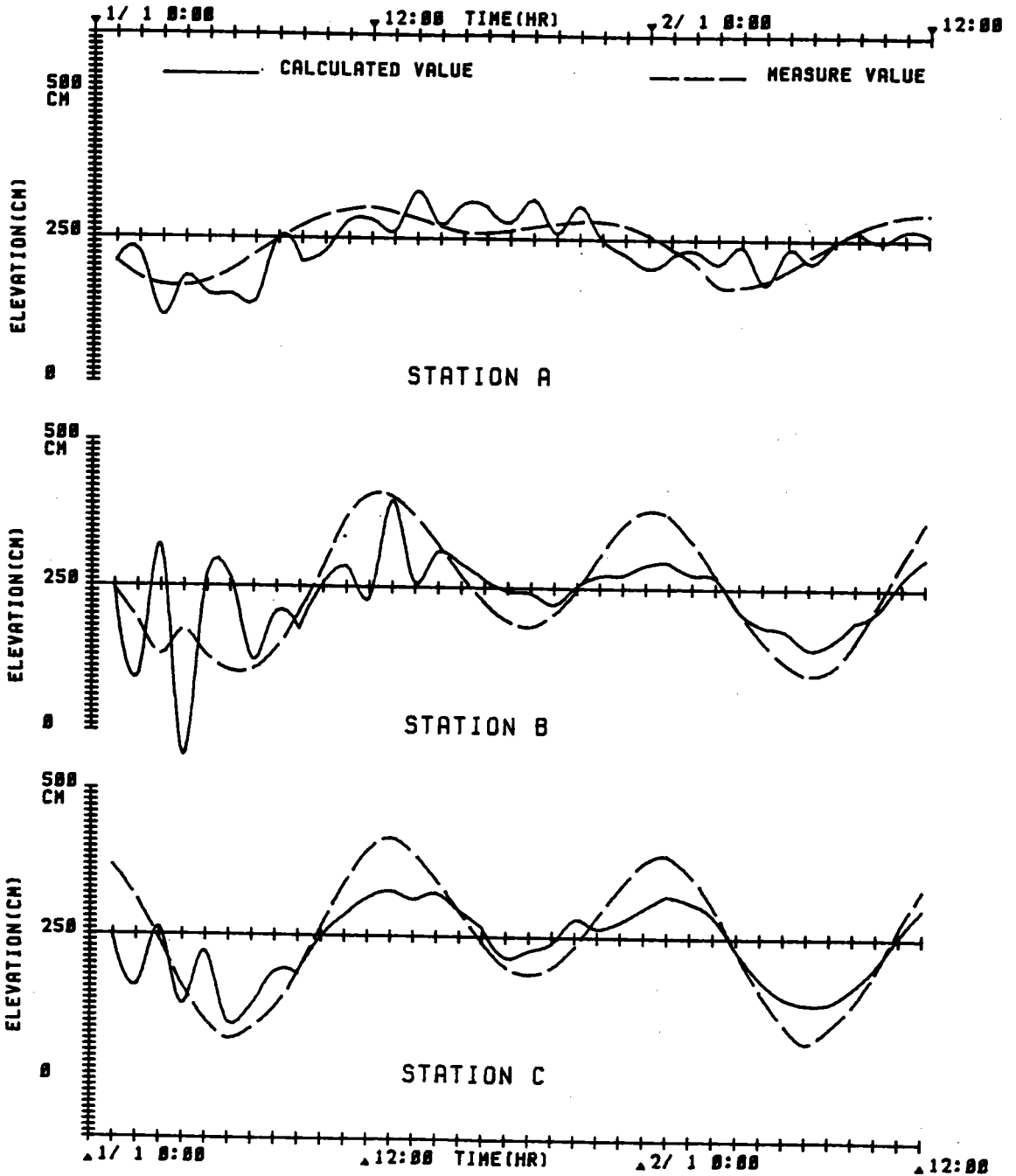


Fig. 6. The computed and observed tides in some stations around Taiwan, from 0 hr. 1. Jan. to 12 hr. 2. Jan. 1983.

H.W. Li

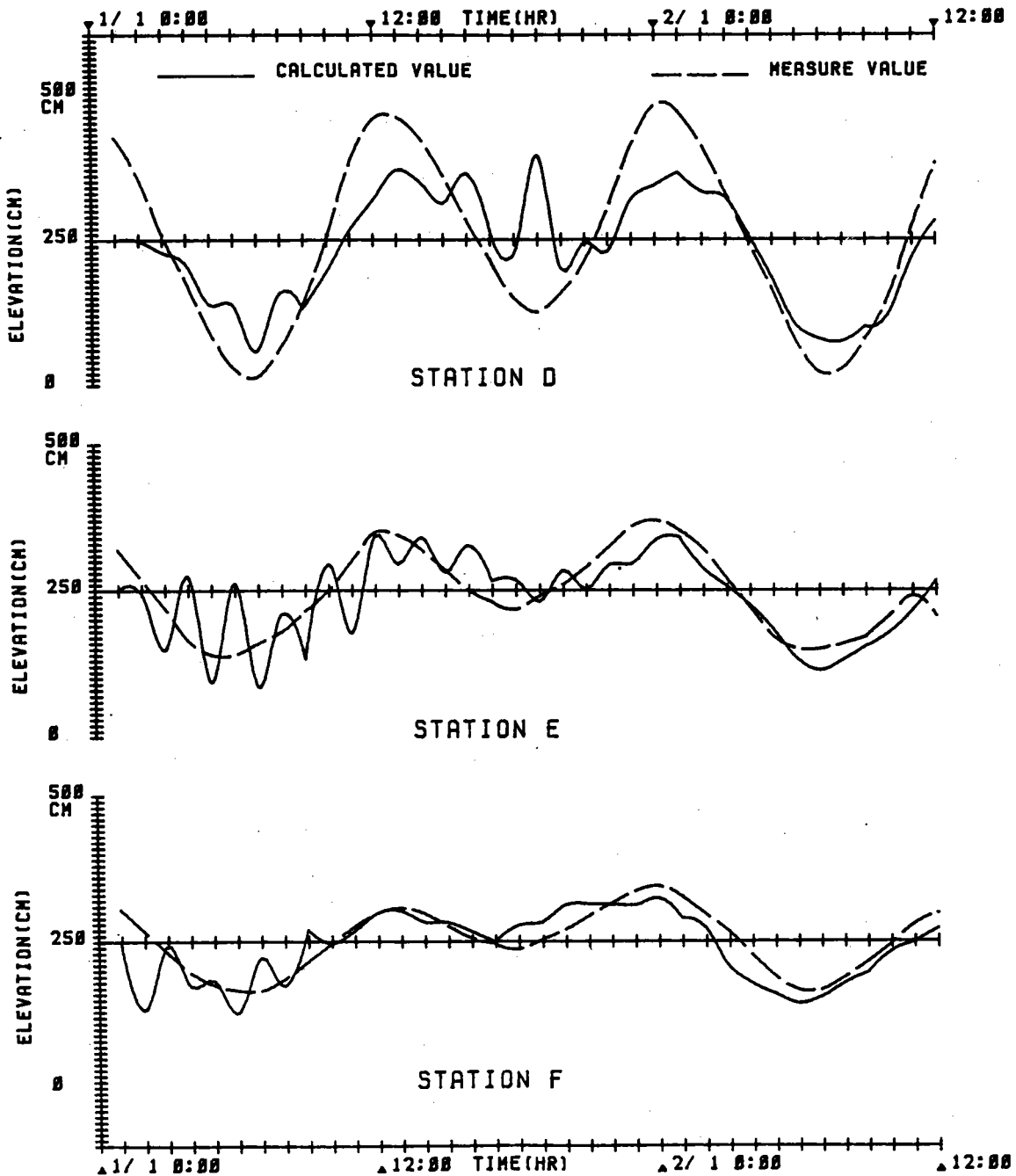


Fig. 6. (Continued)

Numerical Model of Tides

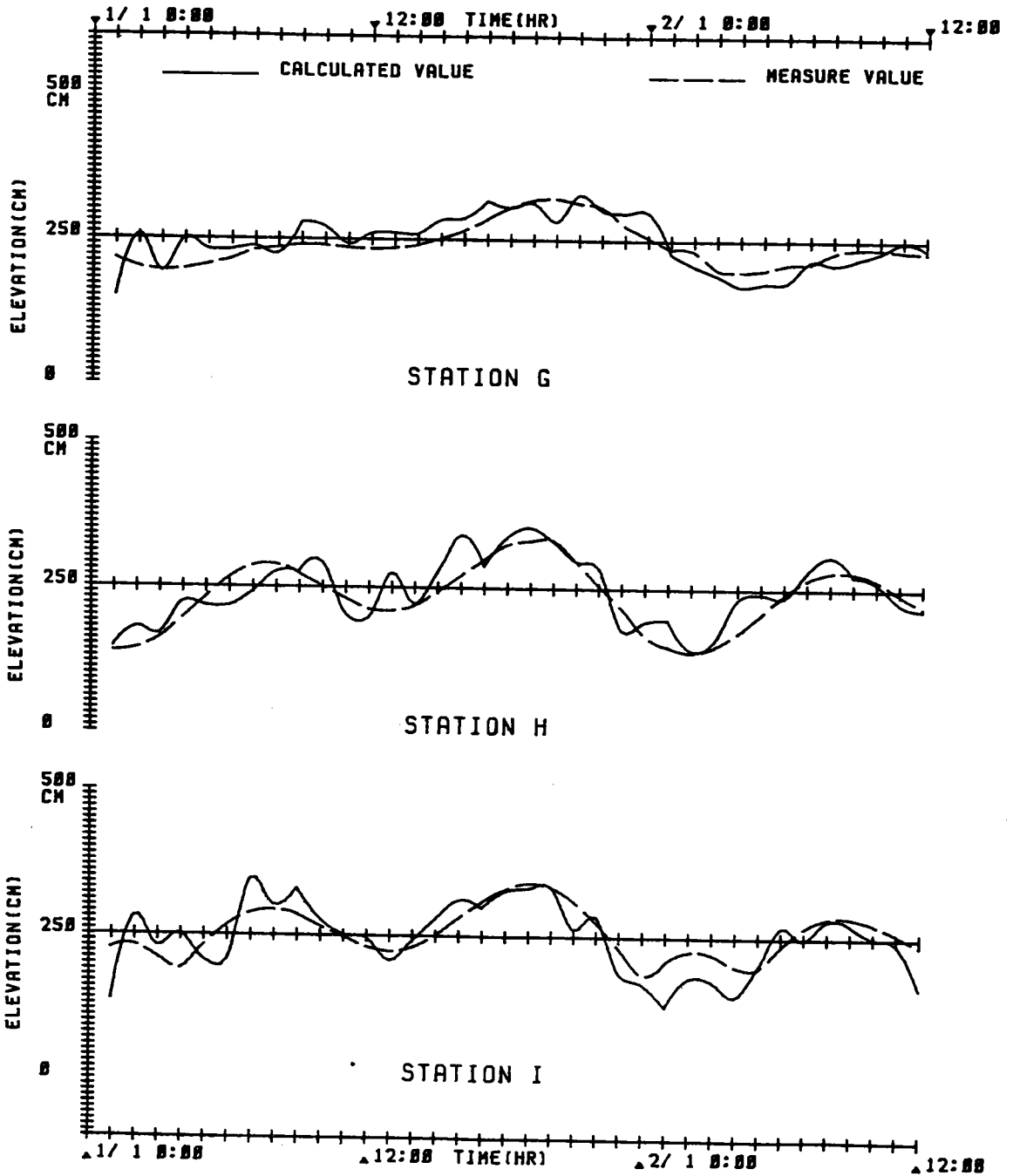


Fig. 6. (Continued)

H.W. Li

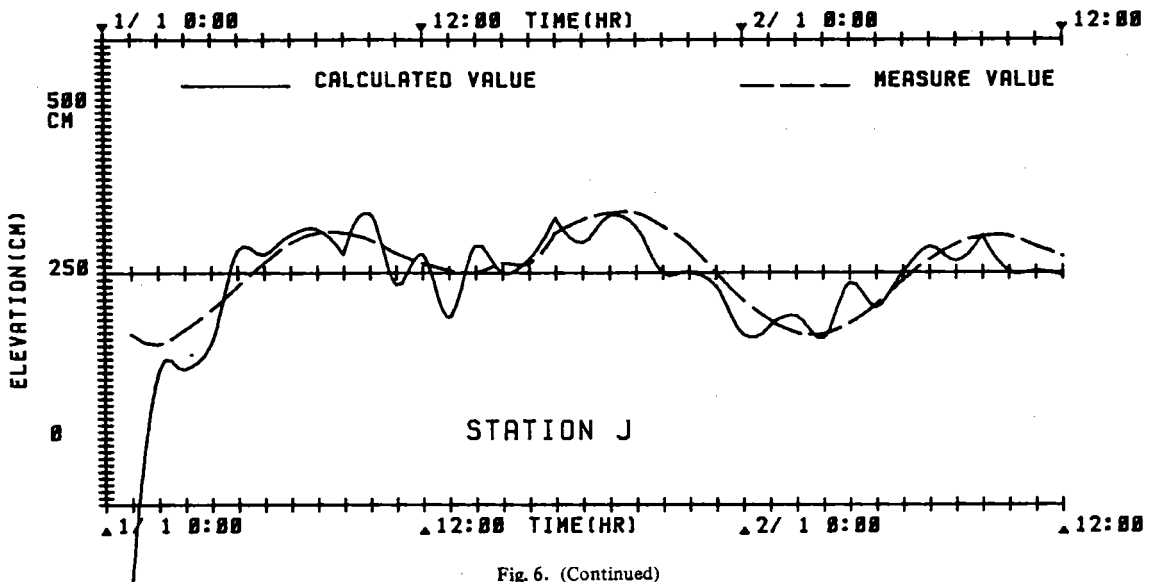


Fig. 6. (Continued)

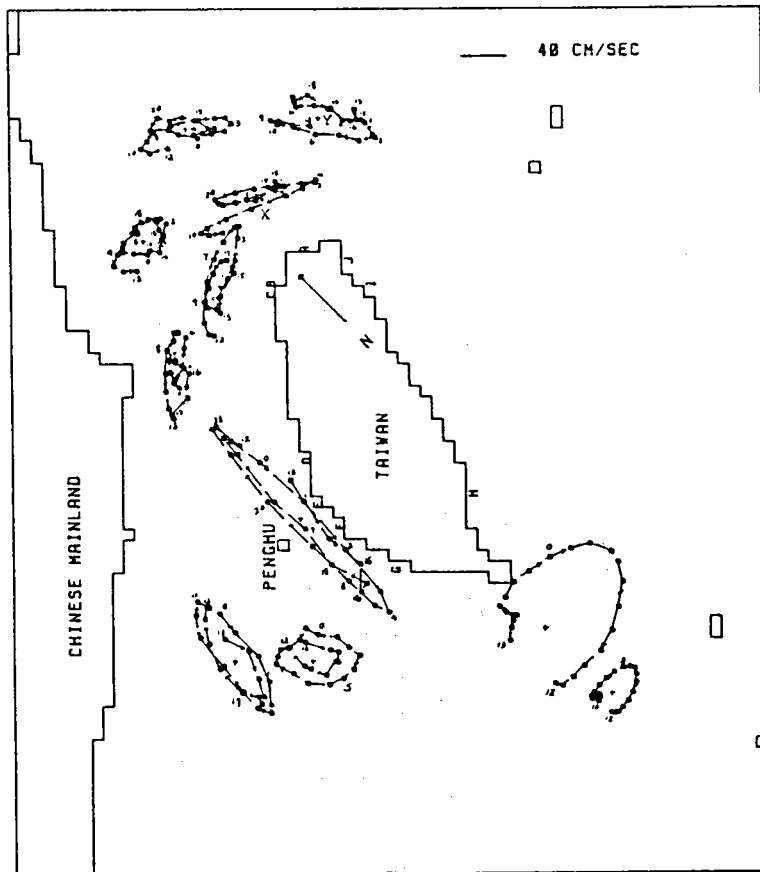


Fig. 7. The computed tidal current hodographs in the sea around Taiwan, from 13 hr. 1. Jan. to 12 hr. 2. Jan. 1983. The letters around the coast of Taiwan denote positions of tide gauge stations.

Numerical Model of Tides

increasing frequencies from east to west. They are of a mixed, dominant semi-diurnal type. The tidal current in the northwestern part of this area rotate mostly counterclockwise, but at the stations *X* and *Y*, the rotation is not so regular. They rotate counterclockwise for the first few hours and clockwise later. These are characteristics of reversing currents.

Conclusion

An approach to predict tides on the shelf seas is suggested. The dynamical processes of tides can be described by means of a numerical model with known harmonic constants at open boundaries, which can be deduced from the empirical tidal charts. The emphasis of this research was put on practical aspects with the intention to provide a predictive scheme of tides. For improvement of the calculated results, we shall make use of more constituents

than M_2 , S_2 , K_1 and O_1 , in order to better simulate the tides at open boundaries. We also need more tidal current observations in this sea area for better estimation of eddy viscosity and friction coefficients.

Acknowledgements

The author would like to thank Mr. Kuo-Tsai Chen and Mr. Shih-Jen Huang for executing the computer program, and drafting and typing of the manuscript. Thanks are due to Dr. Y.S. Soong at the Earth Science Department of Millersville University for his critical reading and correcting of the manuscript. The author gives special thanks to the Central Weather Bureau and the Taiwan Water Conservancy Bureau for providing tidal data.

This research is supported by the National Science Council of the Republic of China under contract NSC 73-0407-M019-02.

Appendix

Amplitudes (cm) and Phases (degree referred to 120°E) of Tidal Constants of Open Sea Boundary of the Model Deduced from the Tidal Charts, Fig. 2-5.

Open sea boundary Station No.	M_2		S_2		K_1		O_1	
	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase
1	40.00	320.00	15.00	45.00	32.00	299.00	24.00	256.00
2	37.50	315.00	14.65	37.50	31.33	298.65	23.60	255.67
3	35.00	311.25	14.29	30.00	30.67	298.30	23.20	255.33
4	32.50	307.50	13.94	27.86	30.00	297.95	22.80	255.00
5	30.00	303.75	13.58	25.71	29.64	297.60	22.40	254.13
6	28.33	300.00	13.23	23.57	29.29	297.25	22.00	253.25
7	26.67	297.50	12.87	21.43	28.93	296.90	21.60	252.38
8	25.00	295.00	12.52	19.29	28.57	296.55	21.20	251.50
9	24.17	292.50	12.26	27.14	28.21	296.20	20.80	250.63
10	23.33	290.00	11.81	15.00	27.86	295.85	20.40	249.75
11	22.50	287.50	11.45	12.50	27.50	295.50	20.00	248.88
12	21.67	285.00	11.10	10.00	27.14	295.15	19.83	248.00
13	20.83	283.75	10.74	7.50	26.79	294.80	10.67	248.88
14	20.00	282.50	10.39	5.00	26.43	294.45	19.50	249.75
15	19.29	281.25	10.03	2.50	26.07	294.10	19.33	250.63
16	18.57	280.00	9.68	0.00	25.71	293.75	19.17	251.50
17	17.86	278.75	9.32	257.00	25.36	293.40	19.00	252.38
18	17.14	277.50	8.97	254.00	25.00	293.05	18.83	253.25
19	16.43	276.25	8.61	251.00	24.58	292.70	18.67	254.12
20	12.71	275.00	8.26	248.00	24.17	292.35	18.50	255.00
21	15.00	273.75	7.90	345.00	23.75	292.00	18.33	255.33
22	14.80	272.50	7.55	342.50	23.33	291.65	18.17	256.67
23	14.60	271.25	7.19	340.00	22.92	291.95	18.00	256.00
24	14.40	270.00	6.84	327.50	22.50	290.95	17.80	256.33
25	14.20	268.50	6.48	335.00	22.08	290.60	17.60	256.67
26	14.00	267.00	6.13	332.50	21.67	290.25	17.40	257.00
27	13.80	256.50	5.77	330.00	21.25	298.90	17.20	257.33
28	13.60	264.00	5.42	327.00	20.83	289.55	17.00	257.67
29	13.40	262.50	5.06	324.00	20.42	289.20	16.80	285.00
30	13.20	261.00	4.71	321.00	20.00	288.85	16.60	258.33
31	13.00	259.50	4.35	318.00	19.60	288.50	16.40	258.67
32	12.80	258.00	4.00	315.00	19.20	288.15	16.20	259.00
33	12.60	256.50	4.21	312.00	18.80	287.80	16.60	259.33

Appendix (Continued)

Amplitudes (cm) and Phases (degree referred to 120° E) of Tidal Constants of Open Sea Boundary of the Model Deduced from the Tidal Charts, Fig. 2-5.

Open sea boundary Station No.	M ₂		S ₂		K ₁		O ₁	
	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase
34	12.40	255.00	4.41	309.00	18.40	287.45	15.88	259.67
35	12.20	253.75	4.62	206.00	18.00	287.10	15.75	260.00
36	12.00	252.50	4.83	303.00	18.40	286.75	15.63	259.72
37	12.21	251.25	5.03	200.00	18.80	286.40	15.50	259.44
38	12.43	250.00	5.24	297.00	19.20	286.05	15.38	259.17
39	12.64	248.75	5.45	294.00	19.60	285.70	15.25	258.89
40	13.86	247.50	5.66	291.00	20.00	285.35	15.13	258.61
41	13.07	246.25	5.86	288.00	20.10	285.00	15.00	258.33
42	13.29	245.00	6.07	285.00	20.19	283.75	15.11	258.06
43	13.50	243.75	6.28	281.25	20.29	282.50	25.22	257.78
44	13.71	242.50	6.48	277.50	20.38	281.25	15.33	257.50
45	13.93	241.25	6.69	273.75	20.48	280.00	15.44	257.22
46	14.14	240.00	6.90	270.00	20.57	278.75	15.56	256.94
47	14.36	239.00	7.10	266.25	20.67	277.50	15.67	256.67
48	14.57	238.00	7.31	262.50	20.76	276.25	15.78	256.39
49	14.79	237.00	7.52	258.75	20.86	275.00	15.89	256.11
50	15.00	236.00	7.72	255.00	20.95	273.75	16.00	255.83
51	15.45	235.00	8.14	252.00	21.05	272.50	16.09	255.56
52	15.91	234.00	8.14	249.00	21.14	271.25	16.18	255.28
53	16.36	233.00	8.34	246.00	21.24	270.00	16.27	255.00
54	16.82	232.00	8.55	243.00	21.33	269.00	16.36	253.75
55	17.27	231.00	8.75	240.00	21.52	267.00	16.55	251.25
56	17.73	230.00	8.97	237.50	21.52	267.00	16.55	251.25
57	18.18	229.00	9.17	235.00	21.62	266.00	16.64	250.00
58	18.64	228.00	9.38	232.00	21.71	265.00	16.73	248.75
59	19.09	227.00	9.59	230.00	21.81	264.00	16.82	247.50
60	19.55	226.00	9.79	227.50	21.90	263.00	16.91	246.25
61	20.00	225.00	10.00	225.00	22.00	262.00	17.00	245.00
62	20.63	222.50	10.71	224.21	21.82	260.83	16.83	244.38
63	21.25	220.00	11.43	223.42	21.64	259.67	16.67	243.75
64	21.88	217.50	12.14	222.63	21.45	258.50	16.50	243.13
65	22.50	215.00	12.86	221.84	21.27	257.33	16.33	242.50
66	23.13	212.50	13.57	221.05	21.09	256.17	16.17	241.88
67	23.75	210.00	14.29	220.26	20.91	255.00	16.00	241.25
68	24.38	208.33	15.00	219.47	20.73	253.75	15.82	240.63
69	25.00	206.67	15.71	218.68	20.55	252.50	15.64	240.00
70	25.56	205.00	16.43	217.89	20.36	251.25	15.45	238.93
71	26.11	203.33	17.14	217.10	20.18	250.00	15.27	237.86
72	27.22	200.00	18.57	215.53	19.83	247.50	14.91	235.71
73	27.78	198.33	19.29	214.74	19.67	246.25	14.73	234.64
74	28.33	196.67	20.00	213.95	19.50	245.00	14.55	233.57
75	28.89	195.00	20.11	213.16	19.33	243.75	14.36	232.50
76	29.44	193.13	20.22	212.37	19.17	242.50	14.18	231.43
77	30.00	191.25	20.33	211.58	19.00	241.25	14.00	230.36
78	31.43	189.38	20.44	210.79	18.83	240.00	13.89	229.29
79	32.86	187.50	20.56	210.00	18.67	238.75	13.68	228.21
80	34.29	185.63	20.67	209.25	18.50	237.50	13.68	227.14
81	35.71	183.75	20.78	208.50	18.33	236.25	13.58	226.07
82	37.14	183.88	20.89	207.75	18.17	235.00	13.47	225.00
83	38.57	180.00	21.00	207.00	18.00	233.75	13.37	224.06
84	40.00	179.09	21.11	206.25	17.83	232.50	13.26	223.13
85	40.44	179.09	21.22	205.50	17.67	231.25	13.16	222.19
86	40.89	178.64	21.33	204.00	17.50	230.00	13.05	221.25
87	41.33	178.18	21.56	204.00	17.33	228.75	12.95	220.31
88	41.78	177.73	21.56	203.25	17.17	227.50	12.84	219.38
89	42.22	177.27	21.67	202.50	17.00	226.25	12.74	218.44

Numerical Model of Tides

Appendix (Continued)

Amplitudes (cm) and Phases (degree referred to 120°E) of Tidal Constants of Open Sea Boundary of the Model Deduced from the Tidal Charts, Fig. 2-5.

Open sea boundary Station No.	M ₂		S ₂		K ₁		O ₁	
	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase
90	42.67	176.82	21.78	201.75	16.83	225.00	12.63	217.50
91	43.11	176.36	21.89	201.00	16.67	224.63	12.53	216.65
92	43.56	175.91	22.00	200.25	16.50	224.26	12.42	215.63
93	44.00	175.45	21.87	199.50	16.33	223.89	12.32	214.69
94	44.44	175.00	21.73	198.75	16.17	223.53	12.21	213.75
95	44.89	174.80	21.60	198.00	16.00	223.16	12.11	212.81
96	45.33	174.60	21.47	197.25	16.22	222.79	12.00	211.88
97	45.78	174.42	21.33	196.50	16.44	222.42	12.10	210.94
98	46.22	174.20	21.20	195.75	16.67	222.05	12.20	210.00
99	46.67	174.00	21.07	195.00	16.89	221.68	12.30	209.62
100	47.11	173.80	20.93	194.25	17.11	221.32	12.40	209.23
101	47.56	173.60	20.80	193.50	17.33	220.95	12.50	208.85
102	48.00	173.40	20.67	192.75	17.56	220.58	12.60	208.46
103	47.67	173.20	20.53	192.00	17.78	220.21	12.70	208.08
104	47.33	173.00	20.40	192.35	18.00	219.84	12.80	207.69
105	47.00	173.31	20.27	192.71	18.22	219.47	12.90	207.31
106	46.67	173.62	20.13	193.06	18.44	219.11	13.00	206.92
107	46.33	173.92	20.00	193.41	18.67	218.74	12.10	206.54
108	46.00	174.23	19.97	193.76	18.89	218.37	13.20	206.15
109	45.67	174.54	19.93	194.12	19.11	218.00	13.30	205.77
110	45.33	174.85	19.90	194.47	19.33	217.79	13.40	205.38
111	45.00	175.15	19.87	194.82	19.56	217.57	13.50	205.00
112	44.67	175.46	19.83	195.18	19.78	217.36	13.60	204.62
113	44.33	175.77	19.80	195.53	20.00	217.14	13.70	204.23
114	44.00	176.08	19.77	195.86	20.08	216.93	13.80	203.85
115	43.67	176.38	19.73	196.24	20.17	216.71	13.90	203.46
116	43.33	176.69	19.70	196.59	20.25	216.50	14.00	203.08
117	43.00	177.00	19.67	196.94	20.33	216.29	14.05	202.69
118	42.67	177.10	19.63	197.29	20.42	216.07	14.10	202.31
119	42.33	177.20	19.60	197.65	20.50	215.86	14.14	201.92
120	42.00	177.30	19.57	198.00	20.58	215.64	14.19	201.54
121	42.35	177.40	19.53	198.35	20.67	215.43	14.24	201.15
122	42.71	177.50	19.50	198.71	20.75	215.21	14.29	200.77
123	43.06	177.60	19.47	199.06	20.83	215.00	14.33	200.38
124	43.41	177.70	19.43	199.41	20.92	214.79	14.38	200.00
125	43.76	177.80	19.40	199.76	21.00	214.57	14.43	199.62
126	44.12	177.90	19.37	200.11	21.08	214.36	14.48	199.23
127	44.47	178.00	19.33	200.47	21.17	214.14	14.52	198.85
128	44.82	178.10	19.30	200.82	21.25	213.93	14.57	198.46
129	45.18	178.20	19.27	201.18	21.33	213.71	14.62	198.08
130	45.53	178.20	19.23	201.53	21.42	213.50	14.67	197.69
131	45.88	178.40	19.20	201.88	21.50	213.29	14.71	197.31
132	46.24	178.50	19.17	202.24	21.58	213.07	14.76	196.92
133	46.59	178.60	19.13	202.59	21.67	212.86	14.81	196.54
134	46.94	178.70	19.10	202.94	21.75	212.64	14.86	196.15
135	47.29	178.80	19.07	203.29	21.83	212.43	14.90	195.77
136	47.65	178.90	19.03	203.65	21.92	212.21	14.95	195.38
137	48.00	179.00	19.00	204.00	22.00	212.00	15.00	195.00
138	48.29	179.13	19.08	204.55	21.75	212.29	15.08	194.81
139	48.57	179.25	19.15	205.09	21.50	212.57	15.17	194.62
140	48.86	179.38	19.23	205.64	21.25	212.86	15.25	194.43
141	49.14	179.50	19.31	206.18	21.00	213.14	15.33	194.24
142	49.43	179.63	19.38	206.73	20.75	213.43	15.42	194.05
143	49.71	179.75	19.46	207.27	20.50	213.72	15.50	193.86
144	50.00	179.88	19.54	207.82	20.25	214.00	15.58	193.67
145	50.50	180.00	19.62	208.36	20.00	214.29	15.67	193.48

Appendix (Continued)

Amplitudes (cm) and Phases (degree referred to 120°E) of Tidal Constants of Open Sea Boundary of the Model Deduced from the Tidal Charts, Fig. 2-5.

Open sea boundary Station No.	M ₂		S ₂		K ₁		O ₁	
	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase	amp.	phase
146	51.00	181.49	19.69	208.91	19.40	214.58	15.75	193.29
147	51.50	182.97	19.77	209.45	18.80	214.86	15.83	193.10
148	52.00	184.46	19.85	210.00	18.20	215.15	15.92	192.91
149	52.50	185.94	19.92	211.25	17.60	215.43	16.00	192.72
150	53.00	187.43	20.00	212.43	17.00	215.72	16.20	192.28
151	52.00	188.69	20.18	213.00	17.17	215.96	16.40	191.85
152	51.00	189.95	20.36	213.57	17.33	216.30	16.60	191.41
153	50.00	192.22	20.55	214.14	17.50	216.45	16.80	190.98
154	49.58	192.48	20.73	214.72	17.67	216.69	17.00	190.54
155	49.17	193.74	20.91	215.29	17.83	216.93	17.20	190.10
156	48.75	195.00	21.09	215.86	18.00	217.17	17.40	189.67
157	48.33	196.00	21.27	216.43	18.18	217.41	17.60	189.23
158	47.92	197.00	21.45	217.00	18.36	217.66	17.80	188.80
159	47.50	198.00	21.64	217.57	18.55	217.90	18.00	188.36
160	47.08	199.00	21.82	218.14	18.73	218.14	18.20	187.92
161	46.67	200.00	22.00	218.72	18.91	218.38	18.40	187.94
162	46.25	201.00	21.82	219.29	19.09	218.63	18.60	187.05
163	45.83	202.00	21.64	219.86	19.27	218.87	18.80	186.62
164	45.52	203.00	21.45	220.43	19.45	219.11	19.00	186.18
165	45.00	204.00	21.27	221.00	19.64	219.35	19.20	185.74
166	45.71	206.00	21.09	221.57	19.82	219.59	19.40	185.31
167	46.43	205.00	20.19	222.14	20.00	219.84	19.60	184.87
168	47.14	207.00	20.73	222.71	20.22	220.08	19.80	184.44
169	47.86	208.00	20.55	223.29	20.43	220.32	20.00	184.00
170	48.57	209.00	20.36	223.86	20.65	220.53	19.33	184.69
171	49.29	210.00	20.18	224.43	20.87	220.75	18.67	185.38
172	50.00	213.00	20.00	225.00	21.09	220.96	18.00	186.75
173	52.78	216.00	19.17	230.00	21.30	221.17	17.33	186.75
174	55.56	219.00	18.33	235.00	21.52	221.38	16.67	187.44
175	58.33	222.00	17.50	240.00	21.74	221.60	16.00	188.13
176	61.11	225.00	16.67	245.00	21.96	221.81	15.80	188.81
177	63.89	228.00	15.83	250.00	22.17	222.02	15.60	189.50
178	66.67	231.00	15.00	255.00	22.39	222.23	15.40	190.19
179	69.44	234.00	16.00	260.00	22.61	222.45	15.20	190.88
180	72.22	237.00	17.00	265.00	22.83	222.66	15.00	191.56
181	75.00	240.00	18.00	270.00	23.04	222.87	15.17	192.52
182	78.57	243.00	19.00	275.00	23.26	223.09	15.33	192.94
183	82.14	246.00	20.00	280.00	23.48	223.30	15.50	193.63
184	85.71	249.00	21.67	285.00	23.70	223.51	15.67	194.31
185	89.29	252.00	23.33	290.00	23.91	223.72	15.83	195.00
186	92.86	255.00	25.00	295.00	24.13	223.94	16.00	196.00
187	96.43	258.00	26.67	300.00	24.35	224.15	16.25	197.00
188	100.00	261.00	28.33	305.00	24.57	224.36	16.50	198.00
189	103.57	264.00	30.00	310.00	24.78	224.57	16.75	199.00
190	107.14	267.00	32.00	315.00	25.00	224.79	17.00	200.00
191	110.71	270.00	34.00	320.00	25.17	225.00	17.25	201.00
192	114.29	271.88	36.00	325.00	25.33	225.64	17.50	202.00
193	117.86	273.75	38.00	330.00	25.50	226.27	17.75	203.00
194	121.43	275.63	40.00	335.00	25.67	226.91	18.00	204.00
195	125.00	277.50	41.50	340.00	25.83	227.55	18.13	205.00
196	126.25	279.38	43.00	345.00	26.00	228.18	18.25	206.00
197	127.50	281.25	44.50	350.00	26.17	228.82	18.38	207.00
198	128.75	283.13	46.00	355.00	26.33	229.45	18.50	208.00
199	130.00	285.00	47.50	0.00	26.50	230.09	18.63	209.00
200	131.33	286.50	49.00	5.00	26.67	230.73	18.75	210.00
201	132.67	288.00	50.50	10.00	26.83	231.36	18.88	211.00
202	134.00	290.00	52.00	15.00	27.00	232.00	19.00	212.00

Numerical Model of Tides

References

1. Cartwright, D.E. 1977. Ocean tides. *Reports on Progress in Physics*, 40, 665-708.
2. Choi, B.H. 1980. A tidal model of the Yellow Sea and the eastern China Sea. *KORDI Report 80-02*, Korea Ocean Research and Development Institute, 72 pp.
3. Hansen, W. 1952. *Gezeiten und Gezeitenströme der halbfälligen Hauptmond tide M_2 in der Nordsee*, pp. 46, Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Ergänzungsheft 1.
4. Hansen, W. 1956. Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen. *Tellus*, 8, 287-300.
5. Hansen, W. 1962. Tides. In *The Sea*, (Hill, M.N., Ed.), pp. 764-801, Vol. 1, Wiley, New York.
6. Hendershott, M.C. 1977. Numerical models of ocean tides. In *The Sea*, (Goldberg, E.D. et al., Eds.), pp. 47-95, Vol. 6, Wiley, New York.
7. Hendershott, M.C. 1981. Long waves and ocean tides. In *Evolution of Physical Oceanography-Scientific Surveys in Honor of Henry Stommel*, (Warren, B.A. and C. Wunsch, Eds.), pp. 292-341, MIT Press, Cambridge.
8. Marchuk, G.I. and B.A. Kagan. 1984. Ocean tides-mathematical models and numerical experiments. pp. 291, Pergamon Press, Oxford.
9. Ogura, S. 1933. The tides in the seas adjacent to Japan. *Bulletin of the Hydrographic Department*, pp. 189, Imperial Japanese Navy, No. 7.
10. Platzman, G.W. 1963. The dynamic prediction of wind tides on Lake Erie. *Meteorological Monographs*, pp. 44, Vol. 4, No. 26, American Meteorological Society.
11. Schureman, P. 1958. Manual of harmonic analysis and prediction of tides. *U.S. Dept. of Commerce, Coast and Geodetic Survey*, pp. 317, Special Publication No. 98.
12. Simons, T.J. 1973. Development of three-dimensional numerical models of the Great Lakes. *Canada Centre for Inland Waters*, pp. 26, Scientific series No. 12.
13. Ueno, T. 1964. Non-linear numerical studies on tides and surges in the central part of Seto Inland Sea. *Ocean. Mag.*, 16, 53-124.