

近岸海域波浪和近岸流數值推算及可視化研究(一)

— 近岸海域波浪數值推算 —

Computations and Visualizations of Wave and Nearshore Current in the Coast Zone (I)

— Wave Computations in the Coast Zone —

主持人 : 蘇青和
港灣技術研究所數學模式組
研究員兼組長

協同主持人: 蔡丁貴
國立台灣大學土木工程研究所
教授

研究助理 : 廖慶堂
港灣技術研究所海岸工程組
助理研究員

: 林正堂
國立交通大學電子工程研究所
博士班研究生

補助機構 : 行政院國家科學委員會
計畫編號 : NSC 82-0414-P-124-001-B

港灣技術研究所
中華民國八十二年八月

摘 要

結合橢圓型態及拋物線型態之緩坡方程式，本文建立一實用性近岸海域波場推算模式。數值計算區域分港外區及港內區兩個區域：外海區域可為不等水深，在引用貼壁座標系統及有限差分法，解析拋物線型態之緩坡方程式，可由深海推算整個波場至與港內區之介面處，此方法優點為可取較大網格點數，減低電腦記憶體。港內區可為不等深、不規則形狀港池，則引用有限元素法原理，解析包括波浪之折射、繞射、反射等效應之橢圓型態緩坡方程式，此部分並考慮岸壁與海底邊界部份能量之消散效應。外海區之計算結果為港內區之入射波邊界條件，而港內區之散射波在介面處並滿足局部輻射條件。本模式未來將配合防災相關計畫之現場波場資料做進一步之印證。

ABSTRACT

A new combinative method of parabolic-type equation and elliptic-type equation, which are based on the mild-slope equation, are established to describe wave field. The domain of nearshore is divided at the suitable harbor entrance into two: the outer ocean region and the region bounded by the limits of the harbor. The outer region can be computed wave propagations near an irregular depth. With a boundary-fitted curvilinear coordinate system and the theory of finite difference method, the parabolic approximation is applied to the mild-slope equation. The wave field in outer region is computed from deep water into the entrance. Parabolic model can be used a larger grid point, only need less memory of computer. In the harbor region, the arbitrary shape and variable water depth are included in the finite element model, which the field equation is of elliptic type. All refraction, diffraction and reflection are included in the elliptic model, and the effect of bottom friction and absorbing boundaries are also examined. For inner region, known incident wave field is the computation result from the outer region, and a local radiation condition is used at interface between two regions. The present model will have a comparison with the field data from relative projects in the next year.

近岸海域波浪數值推算

目 錄

摘要	i
ABSTRACT	ii
目錄	iii
圖目錄	iv
符號說明	vi
壹、前言	1
貳、緩坡方程式及邊界條件	4
參、有限元素法模式	9
肆、拋物線方程式及貼壁座標	36
伍、有限差分法模式	46
陸、近岸海域波浪數值推算模式	55
柒、討論及結論	63
參考文獻	64
誌謝	67

圖 目 錄

圖 2-1	有限元素法計算區域示意圖	5
圖 3-1	10 度開口圓形港池三角形元素分割示意圖	9
圖 3-2	等腰直角三角形分割四邊形區域示意圖	17
圖 3-3	等腰直角三角形區域三角元素分割示意圖	18
圖 3-4	基隆港港區示意圖	20
圖 3-5	基隆港港區切割 322 個四邊形區域示意圖	21
圖 3-6	基隆港港區切割為 50,852 個三角形元素示意圖	22
圖 3-7	邊界元素法計算區域示意圖	24
圖 3-8	邊界元素分割示意圖	26
圖 3-9	矩形港池三角形元素分割示意圖	30
圖 3-10	矩形港池邊界元素分割示意圖	31
圖 3-11	10 度開口圓形港池邊界元素分割示意圖	31
圖 3-12	矩形港池端點 A 處無因次波浪參數 $k_0 \ell$ 與擴大率 R 相關曲線圖	32
圖 3-13	10 度開口圓形港池中心點 O 處無因次波浪參數 $k_0 a$ 與擴大率 R 相關曲線圖	33
圖 3-14	矩形港池端點 A 處在不同反射係數 C_r 無因次波浪參數 $k_0 \ell$ 與擴大率 R 之相關曲線圖	34
圖 3-15	10 度開口圓形港池中心點 O 處在不同反射係數 C_r 無因次波浪參數 $k_0 a$ 與擴大率 R 之相關曲線圖	35
圖 4-1	近岸海域示意圖	36
圖 4-2	座標轉換示意圖	40
圖 4-3	半環區域在 (x, y) 平面之網格分割示意圖	45
圖 4-4	半環區域在 (ξ, η) 平面之網格分割示意圖	45
圖 5-1	近岸區域等深線分佈圖	50
圖 5-2a	近岸區域在 (x, y) 平面之網格分割示意圖	50
圖 5-2b	近岸區域在 (ξ, η) 平面之網格分割示意圖	51
圖 5-3	近岸區域等波高(米)分佈曲線圖	51
圖 5-4	近岸區域等波向角(度)分佈曲線圖	52
圖 5-5	波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=0$)分佈曲線圖	52
圖 5-6	波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=-100$)分佈曲線圖	53

圖 5-7	波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=100$)分佈曲線圖 ...	53
圖 5-8	波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=-200$)分佈曲線圖 ..	54
圖 5-9	波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=200$)分佈曲線圖 ...	54
圖 6-1	波浪數值推算模式區域分割示意圖	56
圖 6-2	矩形港池及不規則海岸線之近海區示意圖	60
圖 6-3	近岸區域等水深(米)分佈曲線圖	61
圖 6-4	入射波週期為 10 秒及入射角為 20° 之整區等波高分佈圖	61
圖 6-5	入射波週期為 20 秒及入射角為 20° 之整區等波高分佈圖	62

符 號 說 明

a	: 10° 開口圓形港池半徑
a_0	: 入射波振幅
a_i	: 係數 $i=1,2,3$
$[A]$	: $(N-M) \times (N-M)$ 係數矩陣, 定義如(3.40b) 式
$[A]_{ij}$	: 係數矩陣 $[A]$ 之元素 $i,j=1,2,\dots,N-M$
$A(x,y)$	: 對應修正水深 $\bar{h}$ 之振幅, (4.2) 式
∂A	: 外海區與港內區界面
b_0	: 常數定義如(3.27) 式
$\{b\}$	: $n \times 1$ 向量
b_i	: 係數 $i=1,2,3$
∂B	: 港池岸壁邊界
c_i	: 係數 $i=1,2,3,\dots,9$
C	: 波速(水深 h)
C_g	: 群波速(水深 h)
$\bar{C}$	: 波速(水深 $\bar{h}$)
$\bar{C}_g$	: 群波速(水深 $\bar{h}$)
C_1	: 水域 I 波速
C_{1g}	: 水域 I 群波速
C_2	: 水域 II 波速
C_{2g}	: 水域 II 群波速
C_r	: 反射係數
∂C	: 外海海岸線邊界
∂D	: 外海深水區邊界
E_0	: 每單位波能密度之能量消散
$f(x,y)$	: 波函數(wave function)
$f_0(x,y)$	: 入射波波函數
$f_r(x,y)$	: 反射波波函數
$f_s(x,y)$	: 散射波波函數
$f_t(x,y)$	: 入射波與反射波波函數之和
$f_1(x,y)$	: 水域 I (外海區) 波函數

$f_2(x, y)$	: 水域 II (港內區) 波函數
$F(x, y)$	: 繞射因子(diffraction factor) ,(4.2) 式
$\{F_1\}$	: 外海邊界上波函數之 $M \times 1$ 向量
$\{F_2\}$	: 港內邊界上波函數之 $N \times 1$ 向量
$\{F_s\}$	: 港口上散射波函數之 $M \times 1$ 向量
$\{F_t\}$	: 入射波與反射波波函數和之 $M \times 1$ 向量
$\{F_1\}_i$	: 向量 $\{F_1\}$ 之元素, $i=1,2,..M$
$\{F_2\}_i$	: 向量 $\{F_2\}$ 之元素, $i=1,2,..N$
$\{F_s\}_i$	: 向量 $\{F_s\}$ 之元素, $i=1,2,..M$
$\{F_t\}_i$	: 向量 $\{F_t\}$ 之元素, $i=1,2,..M$
g	: 重力加速度
G	: $G = CC_g$
$\overline{G}$	: $\overline{G} = \overline{CC_g}$
$[G_1]$	: $N \times N$ 係數矩陣
$[G_2]$	: $M \times M$ 係數矩陣 $[G_2] = [G_2^0 \ G_2^x]$
$[G_1]_{ij}$	: 係數矩陣 $[G_1]$ 之元素, $i,j = 1,2,...N$
$[G_2]_{ij}$	: 係數矩陣 $[G_2]$ 之元素, $i,j = 1,2,...M$
h	: 平均水深
$\overline{h}$	: 修正水深 $\overline{h} = h - \hat{h}$
$\hat{h}$	: 水深微小修正量 $\hat{h} = h - \overline{h}$
h_1	: 水域 I 水深
h_2	: 水域 II 水深
$[H_1]$	: $M \times M$ 係數矩陣
$[H_2]$	: $N \times N$ 係數矩陣 $[H_2] = [H_2^0 \ H_2^x]$
$[H_1]_{ij}$	: 矩陣 $[H_1]$ 之元素, $i,j=1,2,...M$
$[H_2]_{ij}$	: 矩陣 $[H_2]$ 之元素, $i,j=1,2,...N$
$H_n^{(1)}$	: 第一類第 n 階漢克函數
i	: $\sqrt{-1}$
$[I]$	: 單位矩陣 ($N \times N$)
$J_n^{(1)}$	: 第一類第 n 階貝索函數
J_0^s	: 定態泛函數(stationary functional), 定義如(3.2) 式
J^s	: 定態泛函數(stationary functional), 定義如(6.4) 式

k	: 波數(水深 h)
$\bar{k}$	: 波數(水深 $\bar{h}$), $\bar{k} = \bar{K} $
$\hat{k}$	: 波數, 定義如式(4.9)
k_0	: 入射波波數
k_1	: $k_1^2 = k_0^2 + \frac{i\sigma E_0}{gh}$
k_2	: 波數(水深 h_2)
$\bar{K}$	: 波數向量(水深 $\bar{h}$) $\bar{K} = (\bar{k}_x, \bar{k}_y) = (\bar{k} \cos \theta, \bar{k} \sin \theta)$
ℓ	: 矩形港池縱深
L_0	: 入射波波長
L_2	: 波長(水深 h_2)
M	: 港外區邊界節點數
m	: 編號 $m=1,2,3..$
n	: 編號 $n=1,2,3..$
$\vec{n}$	: 垂直邊界向外之單位向量
$\vec{n}_1$	: 港外區邊界向外之單位向量
$\vec{n}_2$	: 港內區邊界向外之單位向量
N	: 港內區邊界節點數
N_x	: ξ 軸節點數
N_y	: η 軸節點數
$\{P_2\}$	: 港內邊界上波函數法線分量 $N \times 1$ 向量
$\{P_s\}$	: 港口上波函數法線分量 $M \times 1$ 向量
$\{P_2\}_i$	: 向量 $\{P_2\}$ 之元素, $i=1,2,..N$
$\{P_s\}_i$	: 向量 $\{P_s\}$ 之元素, $i=1,2,..M$
R	: 擴大率
R_a	: 界面 ∂A 半圓之半徑
$S(x,y)$	: 相位(phase), 水深 h
T	: 週期(Period)
T_x	: 轉換函數 $x = T_x(\xi, \eta)$
T_y	: 轉換函數 $y = T_y(\xi, \eta)$
x	: x 軸
$\bar{x}_0, \bar{x}$	: 平面點 $(x_0, y_0), (x, y)$
$\bar{x}_i$	: 第 i 個節點 (x_i, y_i)

$\bar{x}'_j$	: 第j個元素上之任一點(x'_j, y'_j)
y	: y 軸
z	: z 軸
α	: 阻尼係數(impedence coefficient)
β	: 邊界之內角
δ_{ij}	: 克郎克函數(Kronecker delta function)
Δ^e	: 元素e之面積
ϵ_n	: $\epsilon_n = 2, \quad \text{if } n = 0, \quad \epsilon_n = 1, \quad \text{if } n = 1, 2, 3 \dots$
η	: η 軸
θ_0	: 入射波角度(度)
θ	: 波向角(度)
κ_1	: 係數, $\kappa_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_0 h_1}{\sinh 2k_0 h_1} \right]$
κ_2	: 係數, $\kappa_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_2 h_2}{\sinh 2k_2 h_2} \right]$
σ	: 入射波週頻率
ϕ_0	: 入射波波函數
ϕ_1	: 水域 I 波函數
ϕ_2	: 水域 II 波函數
ϕ_r	: 水域 I 反射波函數
Φ	: 流速勢函數(velocity potential)
Φ_0	: 入射波流速勢
Φ_1	: 水域 I 流速勢
Φ_2	: 水域 II 流速勢
$\psi_i(\bar{x})$	: 形狀函數 $i=1,2$
∇	: 二維梯度運算子
ξ	: ξ 軸
$\zeta(x, y, t)$	: 水位變化
ζ_0	: 入射波水位變化
ζ_1	: 水域 I 水位變化
ζ_2	: 水域 II 水位變化

壹、前 言

有關近岸海域之水波數值推算問題，在地形變化不劇烈，即地形緩慢變化之海域或港池，Berkhoff (1972) 提出緩坡方程式(mild-slope equation)，並引用有限元素法求解波浪之折繞射共同效應，在外海邊界上則以邊界元素法處理。Chen 及 Mei (1974)，Chen (1986) 發展一混合元素法(hybrid finite element method)，分別求解淺水波方程式及緩坡方程式。其作法為邊界內以一般有限元素法運算，而其港口外圍邊界則以解析解形式展開。Tsay 及 Liu (1983)、Tsay et al. (1989)、林及謝(1985)、林及許(1985)、歐等(1990)與蘇(1993)使用與 Chen 及 Mei (1974) 類似原理，以求解緩坡方程式。Chen (1986)、Tsay et al. (1989) 之數值模式則包括海底摩擦效應及岸壁部份反射邊界及碎波之能量消散效應。歐等(1990)及蘇(1993)之數值模式則考慮港池為多孔消波岸壁之透水性岸壁。

上述學者之波場推算模式，其理論在外海邊界無窮遠處應滿足 Sommerfeld 輻射邊界條件，即與港池或結構物作用產生之波浪，在無窮遠之外海處應僅有向外之消散進行波(out-going progressive wave)存在。而為滿足此項邊界條件，各種數值方法計算之海域，常分割為有限港池區及半無限外海區二個區域，而且外海區域必假設為等水深區(Chen 及 Mei (1974)、Tsay 及 Liu (1983)、歐等(1990))。若有海岸線存在之情形，則又必須滿足海岸線平直，且兩邊無限延伸之理想條件；但在沿岸地區，除非擴大數值計算區域，否則外圍鮮少為固定水深及海岸線平直等理想條件，因此實際計算非常不方便。

陳及蔡(1990)、蘇等(1991)在有限海域外圍設定局部型式之輻射條件，以取代原來標準型式之無窮遠處輻射條件，以避開外海區域必為等水深區之假設。陳及蔡(1990)探討兩種輻射條件應用於計算圓形島之折繞射造成之差異。他們發現在考慮地形及波長等因素，適當設置外圍邊界，局部輻射邊界也可得到相近結果。蘇等(1991)探討局部型式輻射條件及原來標準型式輻射條件，應用在港池共振計算之差異。他們解析一等水深矩形港池共振問題，同樣發現在離 $1/5$ 波長處，即近於滿足輻射條件。基本上滿足輻射條件位置應與相對波長、水深分佈、港池或結構物尺度大小等有關。而在較複雜不規則港池或地形，局部型式輻射條件於實際應用時得需再作進一步的探討。局部型式輻射條件之優點為可避免外圍等水深之不方便假設。

在等水深或水深變化不明顯之港池或海域，考慮線性規則波浪條件，波浪繞射現象可以引用荷姆茲方程式(Helmholtz equation)描述。邊界元素法將二維區域問題，利用低維之邊界元素求解，對複雜之港池或海岸線，處理甚為方便。Hwang及Tuck (1970)、Ho及Bomze (1975)、Lee (1969, 1971)、Lee及Raichlen (1971, 1972)、Chwang et al. (1990)、蘇等(1992)等引用邊界元素法(boundary element method)或稱積分方程法(integral equation method)，在利用Weber解，由荷姆茲方程式求得積分方程式，將邊界分割為有限個邊界元素，因而化積分方程式為一矩陣方程式以求得解。周宗仁等(1986, 1989, 1992a, 1992b)應用邊界元素法解析任意地形及水深之港池水面波動，並延伸至任意反射率防波堤或岸壁的港池水面振動問題，其引用之控制方程式，則為三維拉普拉氏方程式(Laplace equation)。

橢圓形態緩坡方程式，其微分方程屬封閉型態，在邊界必需給定適當的邊界值，才能求得解。以上所述之數值模式皆屬這類型問題，因此在有限海域外圍邊界上需給定適當的入射波條件，而為了滿足入射波由無限遠進入計算區之條件，計算外圍必需向外深海區延伸，但此卻造成區域之擴大，增大計算所需之電腦記憶體容量。而且在有限元素法模式中解析之變數為波場水位變化，為達到合理描述波場分佈變化，網格間之距離不宜太長，一般一個特徵波長內至少取7~10個計算點，如向深海擴大計算區時，網格點數量大增，相對計算機之記憶體增加量，甚為龐大，除非有較大型之電腦，否則一般電腦可能就無法執行。網格點間距離不宜太長之限制及外圍邊界無法內移之限制為有限元素法模式在實際應用之重缺點。其次在這樣龐大的區域，切割元素也是一項甚為費時費力之工作，而最後結點之最佳編號，以減少矩陣之帶寬，也是重要之工作。

本文將針對外圍計算區甚大之問題，提出一適當解決之方法，而針對模式元素切割，及結點最佳編號也提出一較佳之處理方法。

波浪從深海區進入近海淺水區，因地形或結構物之影響，波向及波高皆將改變，如何推算其能量分佈變化為一重要工作。早期計算近海波場之折射及淺化現象，一般引用波向線理論(wave ray theory)，波向線理論為假設波能延著波向線進行，波向線可能因地形變化改變，因此波向線間之距離可能改變，但能量為守恒，波向線間距減小，表示波高增大，但波向線理論上不能相交，因為相交點之距離為零，波高無限大為不合理，因此波向線理論無法包容波浪繞射現象

Booij(1981), Lozano and Liu(1980)及Radder(1979),等學者引用拋物線解析法(parabolic approximation)以解析包括析射及繞射現象之波場,在引用拋物線方程式(parabolic wave equation),改進波向線理論不能容納波向線相交之現象,其理論較完整的納入繞射效應, Liu(1986), Liu(1989), Liu et al (1980)等則納入海底摩擦,碎波和波流交互等效應,更完整的描述實際波場變化。

Liu and Tsay(1985), Tsay and Liu(1982), Tsay et al (1989)等則針對近岸地區之不規則地形及區域,引用曲線座標系統(curvilinear coordinate system),並以數值方法計算貼壁座標系統(boundary-fitted curvilinear coordinate),將不規則地區轉換為長方形網格系統。原有之拋物線方程式經座標轉換新座標再以差分原理,化為差分方程式。此種方法將可解決區域不規則形狀時之數值網格切割困擾。

拋物型態之波方程式,在微分方程屬拋物線型,因此一般引用有限差分法建立數值模式;而波場計算則由深海推算至近岸區。拋物線模式,其理論基本上無法納入波浪之反射效應,而與海岸線之夾角需為小入射角($20^{\circ} \sim 30^{\circ}$),也是一般之限制(Liu, 1989)。不過因為拋物線模式所解之波場變數為振幅及相位變化,因此網格點間距不必像有限元素法模式所要求之嚴格,將可減少甚多之電腦記憶體。

本文將引用拋物線模式由深海處推算近岸地區至港口外適當之處,再引用計算結果做為港內區有限元素法模式之入射波條件,以完整的解析整個近岸地區(包括港池)之波場。

貳、緩坡方程式及邊界條件

考慮包括任意不規則形狀港池及緩變地形變化之近岸海域，如圖 2-1 平面示意圖， x 軸置於海岸線上，原點為海岸線上適當點，正 y 軸向外海方向。有限港池區（包括港內區與港口處半徑 R_a 之半圓區）稱區域 II，水深 $h_2(x, y)$ 為緩慢變化之不等水深區；港外區（稱區域 I）為外海無限範圍，為等水深區（水深 h_1 ），區域 I 與區域 II 之相連邊界為半徑 R_a 之半圓（理論上不一定為半圓），以 ∂A 表示。假設滿足不可壓縮、無黏性及非旋流之條件因此存在流速勢（velocity potential） $\Phi_j(x, y, z, t)$, $j = 1, 2$ 分別滿足三維拉普拉斯方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.1)$$

Φ_1, Φ_2 分別表示在區域 I 及區域 II 之流速勢。假設入射波 ζ_0 波向線與正 x 軸成 θ_0 角度（如圖 2-1），其複數表示式為：

$$\zeta_0(x, y, t) = a_0 e^{-i[k_0(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0) - i\sigma t]} \quad (2.2a)$$

或

$$\zeta_0(r, \theta, t) = a_0 e^{-i[k_0 r \cos(\theta - \theta_0) - i\sigma t]} \quad (2.2b)$$

式中 a_0 為波浪振幅 (wave amplitude), $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, i = \sqrt{-1}$

k_0 為週波數 (radian wave number), $k_0 = 2\pi/L_0$, L_0 為波長 (wave length)

σ 為週頻率 (radian frequency), $\sigma = 2\pi/T$, T 為波浪週期 (wave period)

區域 I 及區域 II 之流速勢 Φ_1 及 Φ_2 皆分別滿足線性自由表面動力邊界條件及運動邊界條件，即

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, \quad z = 0 \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + g\zeta_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad z = 0 \quad (2.3b)$$

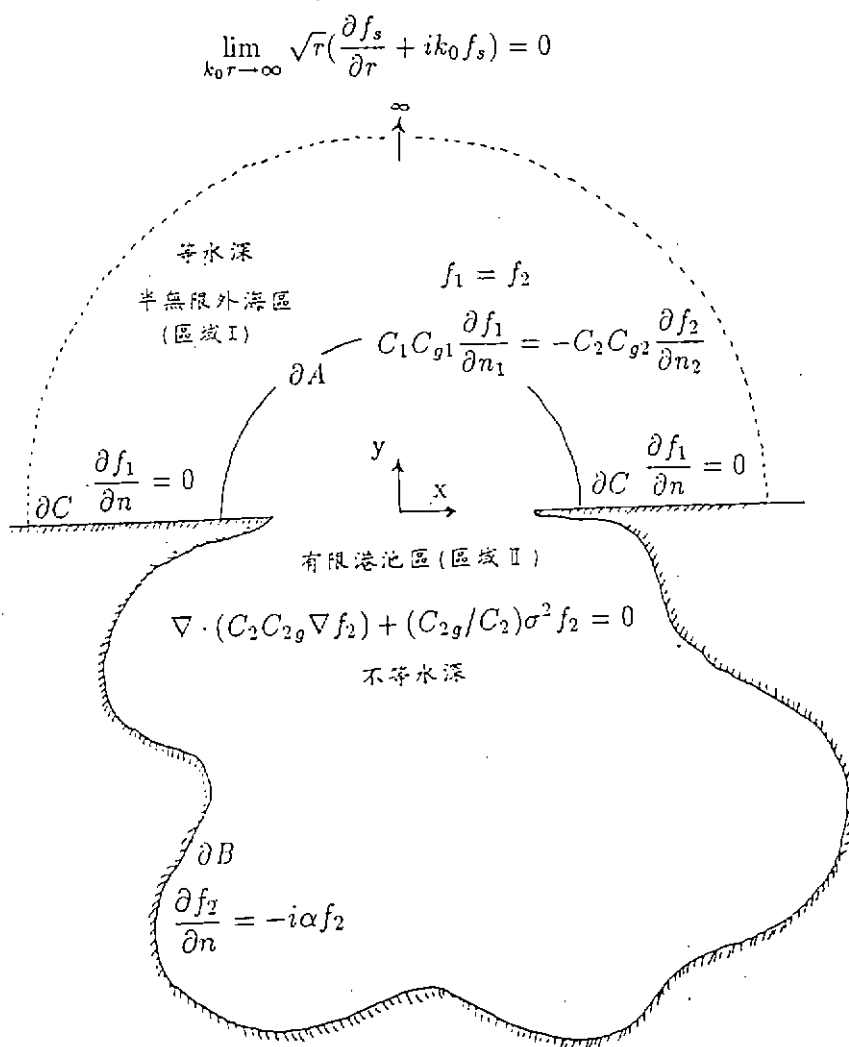


圖 2-1 有限元素法計算區域示意圖

式中 $\zeta_1(x, y, t)$, $\zeta_2(x, y, t)$ 分別表示在區域 I 及區域 II 之水位變化， g 為重力加速度。

上二式可合併為

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, \quad z = 0 \quad (2.3c)$$

基於入射波條件及線性理論，我們可假設水位變化 ζ_j 為週期性函數，可表示為

$$\zeta_j(x, y, t) = f_j(x, y)e^{i\sigma t}, \quad j = 1, 2 \quad (2.4)$$

式中 f_1, f_2 分別稱為區域 I 及區域 II 之波函數 (wave function)。

在外海區 (區域 I) 為等水深區, 假設海底不透水, 則滿足

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = -h_1 \quad (2.5)$$

在有限港池區 (區域 II) 為不等深區, 同理假設海底不透水, 則滿足

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0, \quad z = -h_2(x, y) \quad (2.6)$$

在外海區 (區域 I), 根據控制方程式 (2.1), 入射波條件 (2.2) 式, 邊界條件 (2.5) 式及水位變化週期性條件 (2.4) 式, 則流速勢 $\Phi_1(x, y, z, t)$ 可表示為:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A_0 \cosh[k_0(h_1 + z)] f_1(x, y) e^{i\sigma t} \quad (2.7)$$

其中常數 A_0 定義為

$$A_0 = \frac{ig}{\sigma \cosh(k_0 h_1)} \quad (2.8)$$

式中波函數 $f_1(x, y)$ 滿足下列荷姆茲方程式 (Helmholtz equation)

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k_0^2 f_1 = 0 \quad (2.9)$$

且波數 k_0 滿足分散關係式 (dispersion relation)

$$\sigma^2 = g k_0 \tanh(k_0 h_1) \quad (2.10)$$

在外海區(區域I)之波速為 $C_1 = L_0/T$, 群波速(group velocity) 為 $C_{1g} = \kappa_1 C_1$

式中 κ_1 定義為

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_0 h_1}{\sinh 2k_0 h_1} \right] \quad (2.11)$$

在有限港池區(區域II), 假設深度為緩慢變化, 流速勢 $\Phi_2(x, y, z, t)$ 表示為:

$$\Phi_2(x, y, z, t) = A_0 \phi_2(x, y, z) e^{i\sigma t} \quad (2.12)$$

式中 ϕ_2 為波函數。

我們引用 Booij(1981) 修正 Berkhoff(1972) 提出之一階修正緩坡方程式(modified mild slope equation):

$$\nabla \cdot (C_2 C_{2g} \nabla f_2) + (C_{2g}/C_2 + i\sigma E_0) \sigma^2 f_2 = 0 \quad (2.13a)$$

式中 $f_2(x, y) \cosh[k(h_2 + z)]$ 為波函數 $\phi_2(x, y, z)$ 之一階項, $f_2(x, y)$ 為二維波函數, E_0 為每單位波能密度之能量消散。 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 二維梯度運算子, $C_2 = L_2/T$ 為波速, $k_2 = 2\pi/L_2$ 為波數, $C_{2g} = \kappa_2 C_2$ 為群波速(group velocity), κ_2 定義為

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_2 h_2}{\sinh 2k_2 h_2} \right] \quad (2.13b)$$

在淺水波(shallow water wave), $k_2 h_2 \ll 1$, $C_2 = \sqrt{g h_2}$, $C_{2g} = C_2$, 則方程式(2.13)可簡化為

$$\nabla \cdot (h_2 \nabla f_2) + (\sigma^2/g + i\sigma E_0/g) f_2 = 0 \quad (2.14)$$

在深水波(deep water wave), $k_2 h_2 \gg 1$, $C_2 = g/\sigma$, $C_{2g} = 0.5 C_2$, 則方程式(2.13)可簡化為修正荷姆茲方程式

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + (k_2^2 + \frac{i\sigma E_0}{gh_2})f_2 = 0 \quad (2.15)$$

荷姆茲方程式(2.9)及修正緩坡方程式(2.13)分別為港外區及有限港池區之主要控制方程式。

假設外海岸線為平直向兩測無限延伸,其岸壁為直立不可穿透,以 ∂C 表示,則 f_1 在海岸線垂直分量滿足

$$\frac{\partial f_1}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial C \quad (2.16)$$

外海地區之波函數 f_1 ,除包括入射波 f_0 ,及受平直海岸線反射之反射波 f_r (假設港口為封閉),還包括港內由港口向外散射之散射波 f_s ,表示為

$$f_1 = f_0 + f_r + f_s \quad (2.17)$$

其中散射波在無窮遠處,滿足輻射條件(Sommerfeld radiation condition)

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial f_s}{\partial r} + ik_0 f_s \right) = 0 \quad (2.18)$$

假設港池以多孔消波體設計為內壁,則其邊界上(以 ∂B 表示)應滿足多孔邊界條件

$$\frac{\partial f_2}{\partial n} = -i\alpha f_2 \quad \text{on } \partial B \quad (2.19)$$

式中 α 為阻尼係數(impedance coefficient)。

在區域 I 及區域 II 之界面處 ∂A ,應分別滿足波函數及波函數之法線方向導數連續條件:

$$f_1 = f_2 \quad \text{on } \partial A \quad (2.20a)$$

$$C_1 C_{g1} \frac{\partial f_1}{\partial n_1} = -C_2 C_{g2} \frac{\partial f_2}{\partial n_2} \quad \text{on } \partial A \quad (2.20b)$$

式中 $\vec{n}_1$ 及 $\vec{n}_2$ 分別表示區域 I 及區域 II 在界面向外法線方向之單位向量, $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ 。

參、有限元素法模式

一、混合元素法

本節將使用混合元素法(hybrid finite element method) (Chen 及 Mei, 1974), (Tsay 及 Liu, 1983) 以求解上述橢圓型態緩坡方程式之邊界值問題。在有限港池區域 II 為有限範圍, 切割為有限個三角形元素, 以求解元素結點上之未知波函數, 圖 3-1 為一 10 度開口圓形港池之元素切割及編號例子。外海區域 I 為無

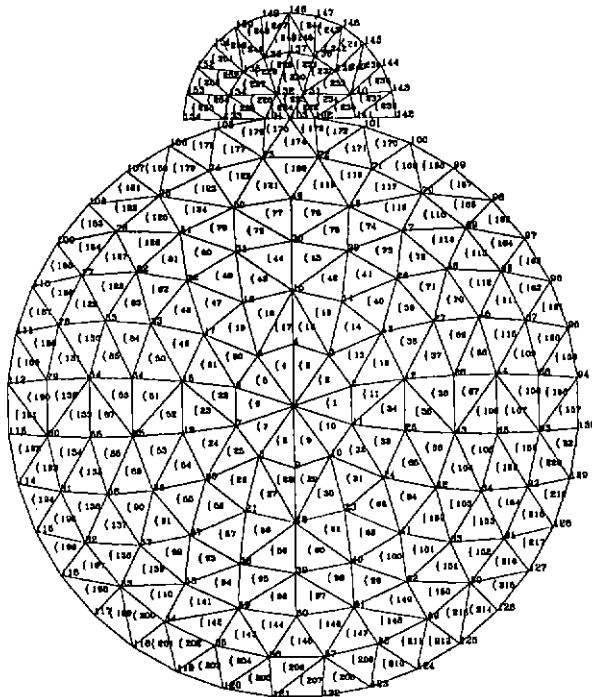


圖 3-1 10 度開口圓形港池三角形元素分割示意圖

限範圍, 我們則應用特徵函數 (eigenfunctions) 表示法 (Tsay 及 Liu, 1983), 將波函數 f_1 之各成份波 f_0 、 f_r 、 f_s 分別表示如下:

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= f_0(r, \theta) = A_0 e^{-ik_0 r \cos(\theta - \theta_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n^{(1)}(k_0 r) \cos[n(\theta - \theta_0)] \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} f_r(x, y) = f_r(r, \theta) &= A e^{-ik_0 r \cos(\theta + \theta_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n^{(1)}(k_0 r) \cos[n(\theta + \theta_0)] \end{aligned} \quad (3.1b)$$

$$f_s(x, y) = f_s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n H_n^{(1)}(k_0 r) \cos(n\theta) \quad (3.1c)$$

式中常數A定義如式(2.8), $J_n^{(1)}(k_0 r)$ 為第一類n階貝索函數(first kind the n-th order Bessel function), $H_n^{(1)}(k_0 r)$ 為第一類第n階漢克函數(first kind the n-th order Hankel function)。 μ_n 為未知係數。係數 ϵ_n 定義為

$$\epsilon_n = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.1d)$$

入射波 f_0 表示式(3.1a)滿足入射波(2.2)之條件, 反射波 f_r 表示式(3.1b)滿足平直海岸線不透水邊界條件, 散射波 f_s 表示式(3.1c)滿足散射波邊界條件(2.18)式。上述無窮級式收斂甚快, 實際計算可取有限項。

根據變分法(calculus of variation)之極小化原理, 上述控制方程式, 邊界條件及區域分割原理(包括邊界連續條件), 可得下列定態泛函數(stationary functional) J_0^s :

$$\begin{aligned} J_0^s(f_2, f_s) &= \int \int_B \frac{1}{2} [C_2 C_{2g} (\nabla f_2)^2 - (C_{2g}/C_2 + i\sigma E_0) f_2^2] dA \\ &+ \int_{\partial A} \frac{1}{2} C_2 C_{2g} f_s \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &+ \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &- \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_0}{\partial n_2} d\ell \\ &+ \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_0 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &- \int_{\partial B} \frac{i}{2} \alpha C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell \end{aligned} \quad (3.2)$$

利用有限元素法原理, 將港池區域II之值域分割為N個三角形元素, 每個元素之邊長以不超過1/10波長為原則, 並用一組線性形狀函數(shape function) $\Psi_i^e, i=1, 2, 3$ 表示元素e之波函數 f_2^e , 波速 C_2^e 及群波速 C_{2g}^e 如下:

$$f_2^e = \sum_{i=1}^3 \Psi_i^e f_{2i}^e, \quad e = 1, 2, 3 \dots N \quad (3.3a)$$

$$C_2^e = \sum_{i=1}^3 \Psi_i^e C_{2i}^e, \quad e = 1, 2, 3 \dots N \quad (3.3b)$$

$$C_{2g}^e = \sum_{i=1}^3 \Psi_i^e C_{2gi}^e, \quad e = 1, 2, 3 \dots N \quad (3.3c)$$

式中 C_{2i}^e 及 C_{2gi}^e 為元素 e , 結點 i 之已知波速及群波速值, f_{2i}^e 為元素 e , 結點 i 之未知波函數 f_2 值。將區域 I 波函數 f_0, f_r 及 f_s 之表示式(3.1)及區域 II 之每一局部元素波函數 f_2^e , 波速 C_2^e 及群波速 C_{2g}^e 值表示式(3.3), 代入泛函數(3.2)式, 整理可得下列全區域之矩陣方程式

$$\begin{aligned} J_0^s(f_2, \mu) = & \frac{1}{2} \{f_2\}_{1 \times N}^t [K_1]_{N \times N} \{f_2\}_{N \times 1} \\ & + \frac{1}{2} \{\mu\}_{1 \times q}^t [K_2]_{q \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \\ & + \{f_2^*\}_{1 \times p}^t [K_3]_{p \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \\ & + \{K_4\}_{1 \times p}^t \{f_2^*\}_{p \times 1} \\ & + \{K_5\}_{1 \times q}^t \{f_2^*\}_{p \times 1} \\ & + \frac{1}{2} \{f_2^\# \}_{1 \times M}^t [K_6]_{M \times M} \{f_2^\# \}_{M \times 1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

式中第一項已知勁度矩陣 $[K_1]$ 及未知波函數向量 $\{f_2\}$, 由有限港池區(區域 II)所有三角元素之區域性矩陣 $[K_1^e]$ 及向量 $\{f_2^e\}$, $e=1, 2, \dots, N$ 所組成

$$\begin{aligned} I_1^e = & \frac{1}{2} \int \int_{B^e} [C_2^e C_{2g}^e (\nabla f_2^e)^2 - (C_{2g}^e / C_2^e) f_2^e] dA \\ = & \frac{1}{2} \{f_2^e\}_{1 \times 3}^t [K_1^e]_{3 \times 3} \{f_2^e\}_{3 \times 1}, \quad e = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中 $\{f_2^e\}^t$ 為 $\{f_2^e\}$ 之轉置(transposal matrix)矩陣, 而矩陣 $[K_1^e]$ 之元素定義為

$$[K_1^e]_{ms} = \frac{1}{4\Delta^e} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{12 - \delta_{ij}} \cdot C_{2i}^e C_{2gj}^e (b_m b_s + c_m c_s)$$

$$-\frac{\sigma^2 \Delta^e}{60} \sum_{k=1}^3 d_{2k} (2 + 4\delta_{ms} \delta_{mk} \delta_{sk} + \delta_{mk} + \delta_{sk}), \quad m, s = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

其中 Δ^e 為元素 e 之面積

δ_{ij} 為克朗乃克函數 (Kronecker delta function), δ_{ij} 定義為

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$d_{2i} = C_{2gi}/C_{2i} + i\sigma E_{0i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$ 為 e 元素線性形狀函數 ψ_i^e 之係數, 其定義為

$$\psi_i^e(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta^e, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

若 (x_i, y_i) 為元素 e 之第 i 結點, $i=1, 2, 3$, 或以 i, j, k 表示逆時鐘方向之三結點則

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8a)$$

$$b_i = y_j - y_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8b)$$

$$c_i = x_k - x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8c)$$

式中第二項已知勁度矩陣 $[K_2]$ 及未知散射波函數向量 $\{\mu\}$, 由下式定義

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\partial A} \frac{1}{2} C_2 C_{2g} f_s \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &= \frac{1}{2} \{\mu\}_{1 \times q}^t [K_2]_{q \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 q 為散射波漢克函數展開之項數, R_a 為界面 ∂A 半圓之半徑, H_j' 則為 $H_j^{(1)}$ 之微分函數, $j=0, 1, 2, \dots, q-1$ 。

矩陣 $[K_2]$ 之元素定義為

$$[K_2]_{ms} = \pi R_a k_0 C_2 C_{2g} 0.5 H'_{m-1} H^{(1)}_{m-1} \epsilon_m \delta_{ms}, \quad m, s = 1, 2 \dots q \quad (3.10)$$

式中第三項已知勁度短矩 $[K_3]$ 及邊界 ∂A 上未知波函數向量 $\{f_2^*\}$ 則由下列表示式定義

$$\begin{aligned} I_3 &= + \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &= \{f_2^*\}_{1 \times p} [K_3]_{p \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \end{aligned} \quad (3.11a)$$

矩陣 $[K_3]$ 之元素定義為

$$\begin{aligned} [K_3]_{ms} &= -k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_s [\cos(s-1)\theta'_{m-1} + \cos(s-1)\theta'_m], \quad 2 \leq m \leq p-1, 2 \leq s \leq q \\ &= -k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_0, \quad 2 \leq m \leq p-1, \quad s = 1 \\ &= -0.5 k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_s \cos(s-1)\theta'_1, \quad m = 1 \quad 2 \leq s \leq q \\ &= -0.5 k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_s \cos(s-1)\theta'_{p-1}, \quad m = p \quad 2 \leq s \leq q \\ &= -0.5 k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_0, \quad m = 1, p \quad s = 1 \end{aligned} \quad (3.11b)$$

其中

$L_a = \frac{\pi R_a}{p-1}$, 為界面 ∂A 半圓上每個線段之長, $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{p-1}$ 為界面 ∂A 半圓上 $p-1$ 個線段至原點與 x 軸之角度。

式中第四項已知向量 $\{K_4\}$ 則由下列表示式定義:

$$\begin{aligned} I_4 &= - \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &= \{K_4\}_{1 \times p} \{f_2^*\}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (3.12a)$$

向量 $\{K_4\}$ 之元素定義為

$$\begin{aligned} \{K_4\}_m &= -0.5 k_0 L_a C_2 C_{2g} (u_{m-1} + u_m), \quad 2 \leq m \leq p-1 \\ &= u_1, \quad m = 1 \\ &= u_{p-1}, \quad m = p \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$u_m = i \cos(\theta_m - \theta_0) e^{ik_0 R_a \cos(\theta_m - \theta_0)} + i \cos(\theta_m + \theta_0) e^{ik_0 R_a \cos(\theta_m + \theta_0)}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, p-1 \quad (3.13b)$$

式中第五項已知向量 $\{K_5\}$ 則由下列表示式定義：

$$I_5 = \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_0 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell$$

$$= \{K_5\}_{1 \times q}^t \{\mu\}_{q \times 1} \quad (3.14a)$$

向量 $\{K_5\}$ 之元素定義為

$$\{K_5\}_m = 2\pi k_0 R_a C_2 C_{2g} i^{m-1} J_{m-1} H'_{m-1} \cos[(m-1)\theta_0], \quad 2 \leq m \leq p$$

$$= 2\pi k_0 R_a C_2 C_{2g} J_0 H'_0, \quad m = 1 \quad (3.14b)$$

$$J_m = J_m^{(1)}(k_0 R_a), \quad m = 1, 2, 3, \dots, p-1 \quad (3.14c)$$

式中最後項已知勁度矩陣 $[K_6]$ 及邊界 ∂B 上未知波函數向量 $\{f_2^\#\}$ ，則由邊界 ∂B 上之 M 個線性元素 $e=1, 2, 3, \dots, M$ 區域性矩陣 $[K_6^e]$ 及 $\{f_2^{\#e}\}$ 所組成：

$$I_6^e = - \int_{\partial B^e} \frac{i}{2} \alpha C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell$$

$$= \frac{1}{2} \{f_2^{\#e}\}_{1 \times 2}^t [K_6^e]_{2 \times 2} \{f_2^{\#e}\}_{2 \times 1}, \quad e = 1, 2, \dots, M \quad (3.15)$$

矩陣 $[K_6^e]$ 之元素定義為

$$[K_6^e]_{11} = i\alpha L_b^e \left(\frac{1}{5} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{30} C_{22}^e C_{2g2}^e \right)$$

$$[K_6^e]_{22} = i\alpha L_b^e \left(\frac{1}{30} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{5} C_{22}^e C_{2g2}^e \right)$$

$$[K_6^e]_{12} = i\alpha L_b^e \left(\frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{30} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{30} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g2}^e \right)$$

$$[K_6^e]_{21} = [K_6^e]_{12}, \quad e = 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.16)$$

其中 L_b^e 為線性元素 $e=1, 2, \dots, M$ 之長度。

C_{2i} 及 C_{2gi} , $i = 1, 2$ 分別為線性元素 e 兩端結點之值, 而線性元素 e 之形狀函數 ψ_i^e , $i = 1, 2$ 定義為

$$\psi_1(x) = 1 - x/L_b, \quad 0 \leq x \leq L_b \quad (3.17a)$$

$$\psi_2(\bar{x}) = \bar{x}/L_b, \quad 0 \leq x \leq L_b \quad (3.17b)$$

最後為簡化矩陣方程式我們將未知向量 $\{f_2\}_{1 \times N}$ 與 $\{\mu\}_{1 \times q}$ 合併為 $\{x\}_{1 \times n}$:

$$\{x\}_{1 \times n} = [\{f_2\}_{1 \times N} \{\mu\}_{1 \times q}] \quad (3.18)$$

其中 $n = N + q$ 。

將已知勁度矩陣 $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ 及 $[K_6]$ 依結點位置合併為大勁度矩陣 $[K]$ 示意如下

$$[K]_{n \times n} = \begin{bmatrix} & 0 \\ K_1(K_6) & K_3 \\ 0 & K_3 & K_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

最後將已知向量 $\{K_4\}^t$ 及 $\{K_5\}^t$ 合併為向量 $\{b\}^t$

$$\{b\}_{1 \times n} = [\{0\}_{1 \times (N-p)} \{K_4\}_{1 \times p} \{K_5\}_{1 \times q}] \quad (3.20)$$

因此矩陣方程式 (3.4) 可簡化為

$$J_0^s(x) = \frac{1}{2} \{x\}_{1 \times n}^t [K]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} + \{b\}_{1 \times n}^t \{x\}_{n \times 1} + constant \quad (3.21)$$

而定態泛函數 J_0^s 極小化產生於:

$$\frac{\partial J_0^s}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.22)$$

式中 x_i , $i = 1, 2, 3 \dots n$ 為向量 $\{x\}$ 之第 i 個元素。

將(3.21)代入(3.22)可得

$$[K]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} = \{b\}_{n \times 1} \quad (3.23)$$

這是一個包括 n 個未知數 x_i , n 個方程式之矩陣方程式, 可由高斯消去法 (Gaussian elimination) 求解。

港池擴大率 R 我們定義為港內任意點 $\vec{x}$ 之振幅對港口外之入射波與反射波和之振幅 (假設港口為封閉) 的比值, 表示如下:

$$R(\vec{x}) = \left| \frac{f_2(\vec{x})}{f_0(\vec{x}_0) + f_r(\vec{x}_0)} \right| \quad (3.24)$$

式中 $\vec{x}$ 港內任一點, $\vec{x}_0$ 為港口外任一點。

二、網格自動分割及結點最佳編號

一般近海地區甚為不規則, 又包括港池之區域則甚為廣大, 基於三角元素之邊長不能太大 (一般取拾分之一特性波長), 在實際波場計算時, 元素及結點經常超過數萬個以上, 產生如此龐大之結點, 為甚大之工程, 如以人工為之, 則需花費甚大量之人力及時間, 而且因人為錯誤甚容易發生, 元素數據再詳細偵測又需要花費更多的時間, 不甚經濟。因此如何提高網格分割技術, 成為模式計算過程, 甚為重要的工作, 而利用程式自動元素產生則是必要的一個手段。本文取用 Segerlind(1920) 之三角元素分割原理, 以快速產生整個區域三角元素之編號、座標等數據, 其原理此處不再引述, 僅將其步驟及要點簡述如下:

1. 將計算區域依形狀適當的分割為數個四邊形 (或三角形), 其中三角形視為四邊形之一種特例。
2. 每個四邊形有四個頂點 (若為三角形時, 在三邊之一再取適當一點做第四結點), 在四個邊上取一點 (一般可取中點), 即總共需選取四邊形邊上 8 個結點。

3. 每個四邊形之兩雙對邊長度最好不要相差太大,以平行四邊形最佳(此可保證切割後元素大小不致相差太多),若為三角形則在適當之一邊,分割為二個邊,仍為四個邊。
4. 指定每個四邊形(三角形)兩雙對邊應分割之點數,點數愈多,分割之元素愈小。
5. 指定四邊形與四邊形間之交界面關係。

經上述之設定即可執行自動元素分割,今以一等腰直角三角形(腰長0.5,如圖3-2)為例,說明其分割過程如下:

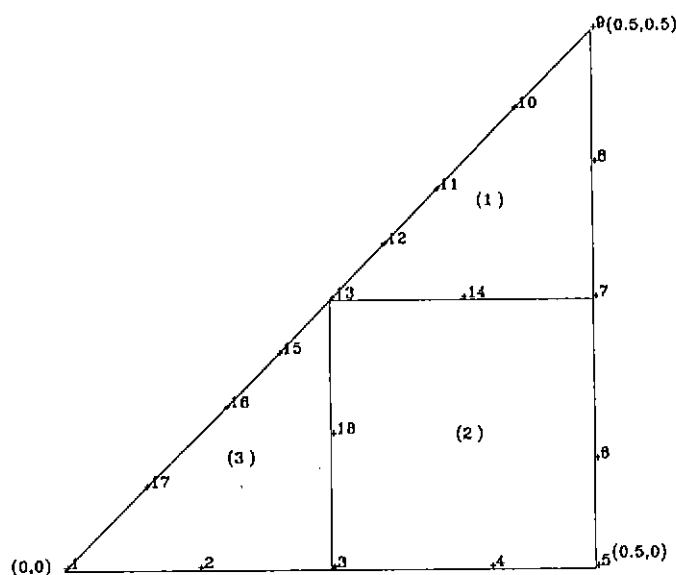


圖 3-2 等腰直角三角形四邊形區域分割示意圖

1. 將三角形分割3個區域(如附圖3-2)每個區域各取8個結點(邊界上結點一般取中點,如特殊需求將可移動以增加某些區域之元素密度),總計18個結點,其座標如下:

(0, 0) (0.125, 0) (0.25, 0) (0.4, 0) (0.5, 0) (0.5, 0.1) (0.5, 0.25) (0.5, 0.375)
 (0.5, 0.5) (0.425, 0.425) (0.35, 0.35) (0.3, 0.3) (0.25, 0.25) (0.375, 0.25) (0.2, 0.2)
 (0.15, 0.15) (0.075, 0.75) (0.25, 0.125)。

三個區域之結點編點依順時鐘方向分別有8個結點為

- (1) 13, 14, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- (2) 3, 4, 5, 6, 7, 14, 13, 18
- (3) 1, 2, 3, 18, 13, 15, 16, 17

[註] 三個結點對(13,7), (3,5), (1,3)連接之線段分別為1,2,3三個區域之第一個邊, 依此類推, 每個區域有四個邊。

2. 決定分割元素之大小, 將每個區域之兩雙對邊分別分割為

- (1) 4×2 個線段, (2) 4×4 個線段, (3) 2×4 個線段

3. 輸入區域與區域界面之關係, 每個區域之四個邊界與相鄰區域邊界之關係如下(0代表該邊不與任何區域相鄰):

- (1) 2, 0, 0, 0 (2) 2, 0, 1, 3 (3) 0, 2, 0, 0

分割結果如圖3-3, 計64個元素, 45個結點, 帶寬(即所有元素中三個結點編號差之最大值加1)為28(在第52元素)。

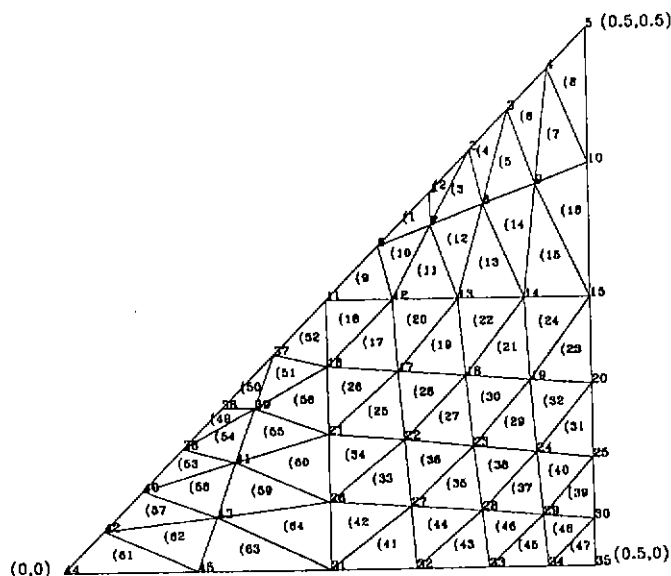


圖3-3 等腰直角三角形區域三角元素分割示意圖

式(3.19)中矩陣[K]之主頻帶寬,定義為最外圍非零值至主對角線之距離,頻帶寬將決定矩陣方程式(3.23),以高斯消去法求解時之電腦記憶體容量。頻帶寬度主要由下列二個數之最大值決定(1)元素結點差最大值加1 (2)界面邊界 ∂A 上任意兩結點編號差最大值加1。

基於以上二個因素決定矩陣[K]頻帶寬,頻帶寬度之極小化甚為重要,而目前現有的一般理論此處並不適合,但本文將不詳細探討頻帶寬度之極小化理論,僅提出一簡單原理,將處理帶寬最佳化之過程說明如后:

- (1) 取一主軸貫穿計算區,其方向以沿著較長之區域為佳,例如長方形之區域,則取平行長邊為主軸。
- (2) 以主軸平行長邊設定一長方形,並涵蓋整個計算區,如以主軸上為正,則有底邊,左邊,右邊,上邊等四邊包圍整個計算區。
- (3) 由左向右依序將介面 ∂A 邊界上之M個結點重新編號: 1,2, ...M。
- (4) 由最上邊介面 ∂A 邊界延主軸向下移動,由右向左,或由左向右依序重新編號,以至底邊為止。以此方法求得之結點編號,將可大量減少原自動元素分割之帶寬。

此處將取基隆港港池(如附圖3-4)為例,說明網格點自動分割及結點最佳編號之結果。基隆港整個港池區可切割為322個四方形(如附圖3-5),經網格點自動切割為26,332個結點,50,852個三角形元素(如附圖3-6),僅以格點自動切割計算,而未經結點最佳編號前,矩陣帶寬為18,446,經最佳結點重新編號後,其頻帶寬減為727。當寬帶值減低1,相當於減少 26332×4 byte之記憶體容量,在實際計算整個港區波場時,以原來之頻帶寬需超大型之電腦才能執行,經結點最佳編號後,大量減低電腦記憶體容量,一般工作站型電腦即可執行,其經濟效率甚為明顯。

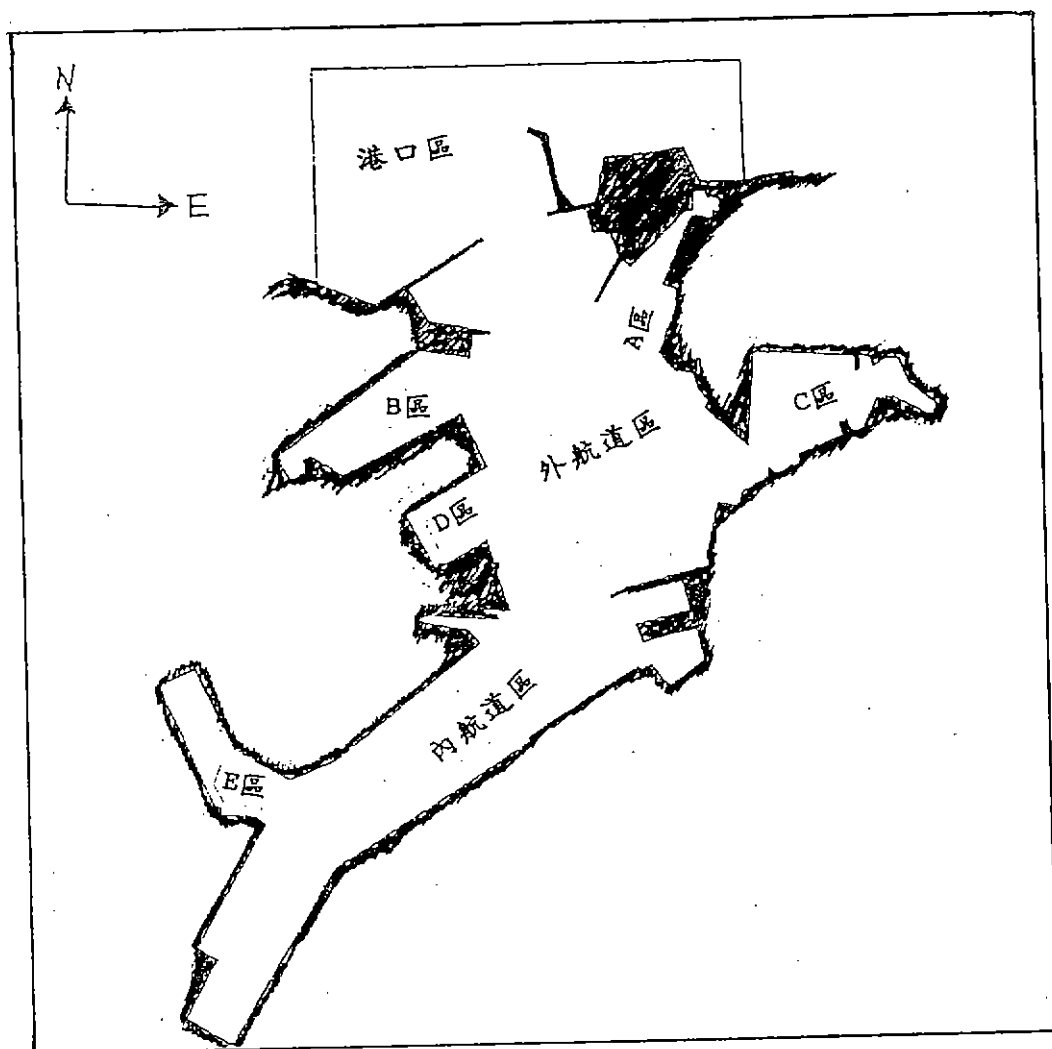


圖3-4 基隆港港區示意圖

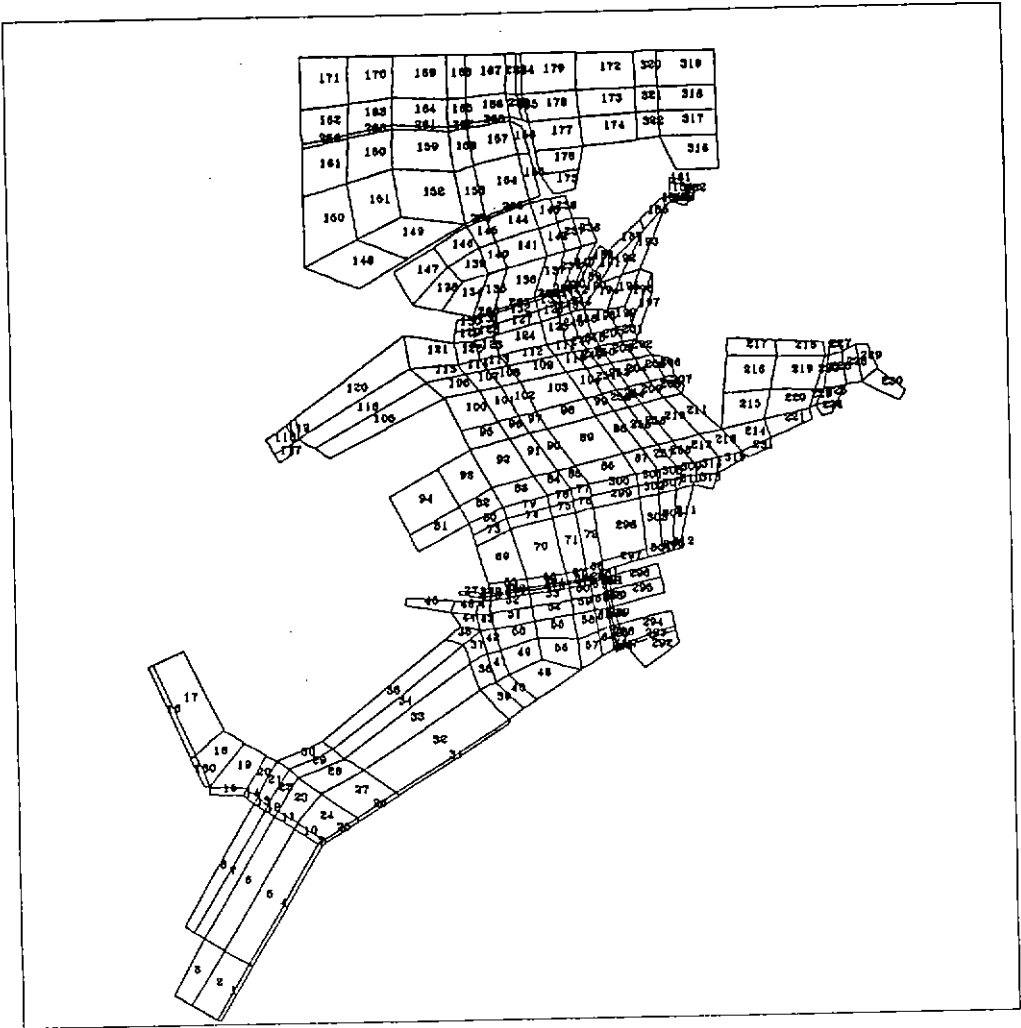


圖 3-5 基隆港港區切割322個四邊形區域示意圖

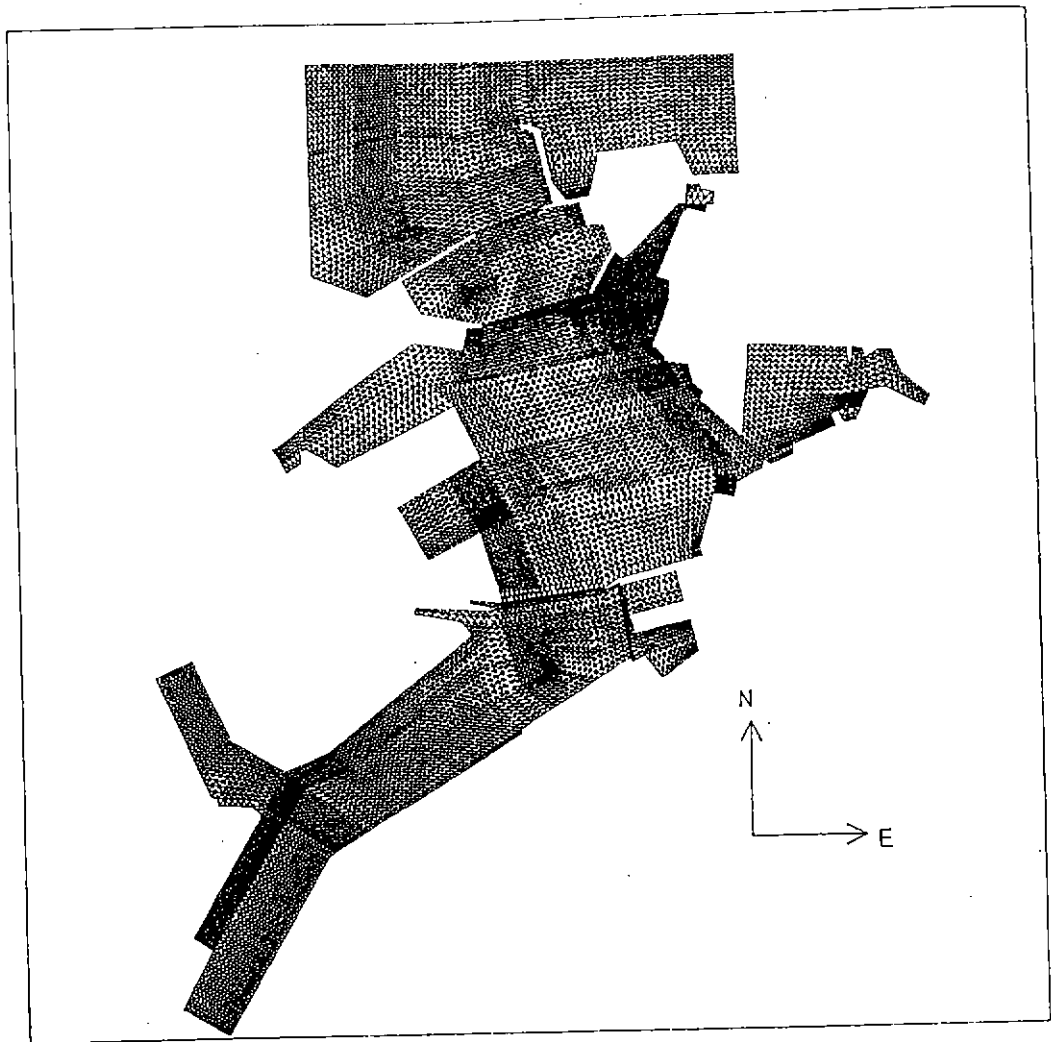


圖 3-6 基隆港港區切割為 50,852 個三角形元素示意圖

三、等水深模式 — 邊界元素法

在探討港池波場數值推算，一般港池形狀皆為不規則，而港池地形水深有些變化不甚明顯，當地形變化與水深度相較，地形變化產生之折射及淺化效應並不顯著，此時為簡化物理問題之複雜性，常以等水深近似條件，來推算波場。一般邊界元素法處理之物理空間可較有限元素法，節省一個維度，即有限元限元素法需解析二維平面問題時（二維元素），邊界元素法即可以一維元素來處理，因此基本上邊界元素法使用較簡易。在不規則幾何形狀方面，邊界元素法及有限元素法處理不規則形狀港池皆甚為方便。等水深波浪問題，控制方程式為荷姆茲方程式，其基本解（fundamental solution）為漢克函數（Hankel function），而能求得基本解為引用邊界元素法之要件，本節將引用此數值方法，介紹包括透水性邊界之波場推算模式。

考慮以透水性岸壁設計之不規則形狀港池，如附圖3-7，假設海岸線平直兩邊延 x 軸無限延伸， y 軸向外海為正，原點在港口中心點， z 軸向上為正，外海海域及港區假設皆為等水深 h 。同樣為方便外海滿足輻射邊界條件，一般解析時常將計算區域分為外海區（區域I）及港內區（區域II），此處並以港口 $\overline{AB}$ 為兩區之介面（如附圖3.1）。

若以 f_1 及 f_2 分別表示外海區及港內區之波函數，則 f_1 及 f_2 皆滿足下列荷姆茲方程式（Helmholtz equation）

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + k_1^2 f_j = 0, \quad j = 1, 2 \quad (3.25a)$$

式中

$$k_1^2 = k_0^2 + \frac{i\sigma E_0}{gh} \quad (3.25b)$$

其中 k_0 為入射波波數， σ 為週頻率（radian frequency）， E_0 為每單位波能密度之能量消散。

同樣外海地區之波函數 f_1 ，除包括入射波 f_0 及受平直海岸線反射之反射波 f_r ，還包括港內由港口向外散射之散射波 f_s ，如表示式(2.17)。外海之海岸岸線 OC 為平直向兩側無限延伸，其岸壁為直立不可穿透， f_1 在海岸線垂直分量為零

輻射條件(radiation condition)

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial f_s}{\partial r} + i k_0 f_s \right) = 0$$

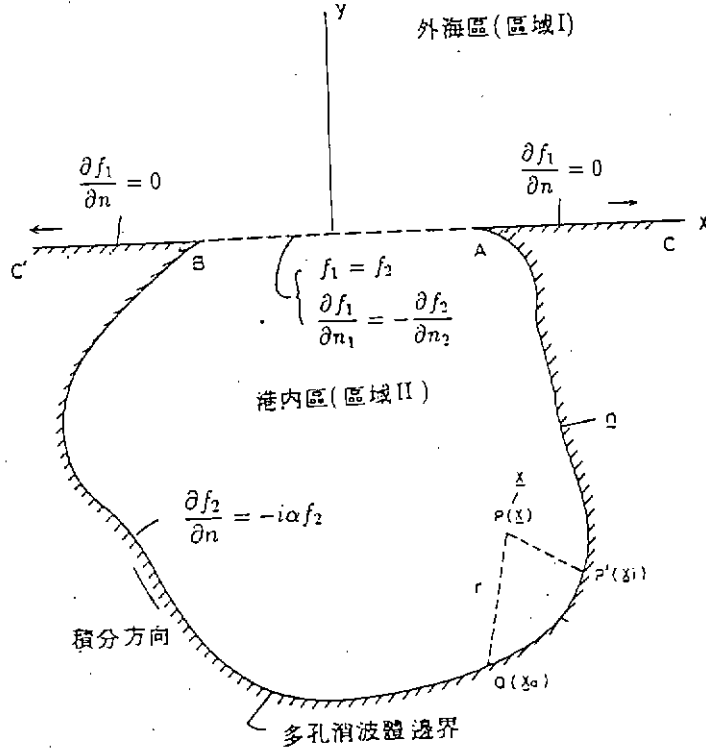


圖 3-7 邊界元素法計算區域分割示意圖

,如式(2.16),而散射波 f_s 在無窮遠處,滿足輻射條件(2.18)。假設港池以多孔消波體設計為內壁,則在岸壁邊界上 ∂B 應滿足多孔邊界條件式(2.19)。

在區域 I 及區域 II 之界面處 $\overline{AB}$,應分別滿足波函數及波函數之法線方向導數連續條件:

$$f_1 = f_2 \quad \text{on } \overline{AB} \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial n_2} \quad \text{on } \overline{AB} \quad (3.26b)$$

式中 $\vec{n}_1$ 及 $\vec{n}_2$ 分別表示區域 I 及區域 II 在界面向外法線方向之單位向量

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2。$$

根據蘇(1993),在滿足各項邊界條件之荷姆茲方程式(3.25)之 Weber 解在區域 I 散射波 f_s 及區域 II 波函數 f_2 分別可表示為下列積分方程 (Baker 及 Copson, 1950):

$$f_s(\bar{x}) = b_0 \int_{\partial B_1} \left[f_s(\bar{x}_0) \frac{\partial H_0^{(1)}(k_1 r)}{\partial n_1} - H_0^{(1)}(k_1 r) \frac{\partial f_s(\bar{x}_0)}{\partial n_1} \right] ds \quad (3.27)$$

$$f_2(\bar{x}) = b_0 \int_{\partial B_2} \left[f_2(\bar{x}_0) \frac{\partial H_0^{(1)}(k_1 r)}{\partial n_2} - H_0^{(1)}(k_1 r) \frac{\partial f_2(\bar{x}_0)}{\partial n_2} \right] ds \quad (3.28)$$

式中 ∂B_1 及 ∂B_2 分別為外海區之無限長海岸線 ($\partial B_1 = \partial C + \overline{AB}$) 及港內區之封閉邊界 ($\partial B_2 = \partial B + \overline{AB}$)。

$b_0 = \frac{-i}{4}$, 當 $\bar{x}$ 在區域內部。

$b_0 = \frac{-i}{2}$, 當 $\bar{x}$ 在平滑區域邊界上。

$b_0 = \frac{-i\pi}{2\beta}$, 當 $\bar{x}$ 在內角為 β 之邊界點上。

$H_0^{(1)}(k_1 r)$ 為第一類零階漢克函數 (first kind the zeroth order Hankel function)。

$r = |\bar{x}_0 - \bar{x}|$, $\bar{x}_0$ 為邊界上之點, $\bar{x}$ 為邊界上或區域內任一點。

積分方程式(3.27)及(3.28)式對不規則形狀之港池不易求得完整解析解,此處將利用邊界元素法求解波場。將港內區域 II 邊界 ∂B_2 , 切割為 N 個線段, N 個中結點 (mid-node) (附圖 3-8), 每個線段代表一個元素, 我們將引用常數元素, 假設每一個線段上每個點之 f_2 及 $\frac{\partial f_2}{\partial n}$ 皆為定值, 而以線段中結點之值代表元素值, 而元素上 $H_0^{(1)}$, $\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial n}$ 之值將引用高斯積分法, 直接計算, 而結點 $i=1, 2, 3 \dots N$ 編號一般以逆時鐘方向編排 (如圖 3-8)。假設方程式(3.28)中之 $\bar{x}$ 點為邊界上結點, 則可化為下列矩陣方程式

$$[H_2]\{F_2\} = [G_2]\{P_2\} \quad (3.29)$$

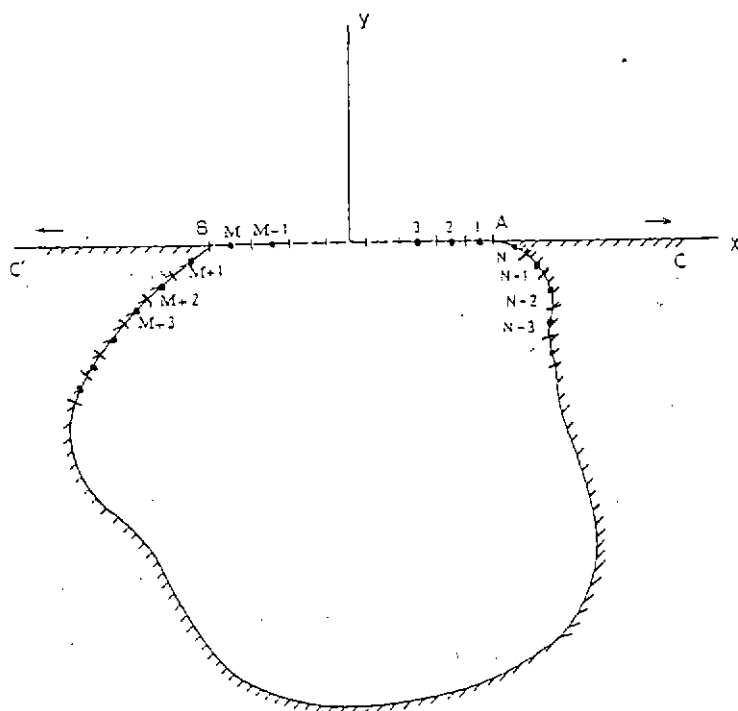


圖 3-8 邊界元素分割示意圖

式中 $[H_2], [G_2]$ 皆為 $N \times N$ 矩陣, 其矩陣元素 $[H_2]_{ij}, [G_2]_{ij}$ 分別定義為下列線積分 (line integral) 表示式

$$[H_2]_{ij} = b_0 \int_{\Gamma_j} \frac{\partial H_0^{(1)}(k_1 r)}{\partial n_2} dS_j - \delta_{ij} \quad (3.30a)$$

$$[G_2]_{ij} = b_0 \int_{\Gamma_j} H_0^{(1)}(k_1 r) dS_j \quad (3.30b)$$

式中 Γ_j 為邊界 ∂B_1 上第 j 個元素, $r = |\bar{x}_i - \bar{x}'_j|$, $\bar{x}_i$ 為區域 II 邊界 ∂B_2 上元素之結點, $i=1, 2, 3, \dots, N$, $\bar{x}'_j$ 為 Γ_j 元素上任一點, δ_{ij} 為克郎克函數 (Kronecker delta function), 而 $\{F_2\}$ 及 $\{P_2\}$ 為 $N \times 1$ 向量, 其向量元素 $\{F_2\}_i, \{P_2\}_i$ 分別定義為

$$\{F_2\}_i = f_2(\bar{x}_i) \quad (3.31)$$

$$\{P_2\}_i = \frac{\partial f_2(\bar{x}_i)}{\partial n_2} \quad (3.32)$$

對區域 I 之邊界 ∂B_1 而言, 即 X 軸上之平直海岸線 ∂C 及港口 $\overline{AB}$, 邊界上 $\vec{n}_1$ 之方向與正 Y 軸相同, 當方程式 (3.27) 之 $\bar{x}$ 為 X 軸上之點, 則 r 方向與 X 軸平行, 且與 $\vec{n}_1$ (Y 軸) 垂直, 因此滿足

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(k_1 r)}{\partial n_1} = 0, \quad \text{on } \partial B_1 \quad (3.33)$$

式中 $r = |\bar{x}_i - \bar{x}'_j|$, $\bar{x}_i$ 為 X 軸上任一結點, $\bar{x}'_j$ 為 Γ_j 元素上任一點。

假設海岸線為不透水直立壁因此滿足

$$\frac{\partial f_s(\bar{x})}{\partial n_1} = 0, \quad \text{on } \partial C \quad (3.34)$$

同理利用邊界元素分離化原理, 將港口 $\overline{AB}$ 切割為 M 個元素 (附圖 3-8), 並對應區域 II 相鄰邊界之結點, $i = 1, 2, \dots, M, M < N$ 。假設 (3.27) 式中 $\bar{x}$ 點為邊界 $\overline{AB}$ 上任一結點, 則積分方程 (3.28) 可化為下列矩陣方程式

$$\{F_s\} = -[G_1]\{P_s\} \quad (3.35a)$$

式中 $[G_1]$ 皆為 $M \times M$ 矩陣, 其矩陣元素 $[G_1]_{ij}$ 定義同上為

$$[G_1]_{ij} = b_0 \int_{\Gamma_j} H_0^{(1)}(k_1 r) dS_j \quad (3.35b)$$

式中 $r = |\bar{x}_i - \bar{x}'_j|$, $\bar{x}_i$ 為 $\overline{AB}$ 上之結點 $i=1, 2, 3, \dots, M$, $\bar{x}'_j$ 為 Γ_j 元素上任一點。 $\{F_s\}$ 及 $\{P_s\}$ 為 $M \times 1$ 向量, 其向量元素 $\{F_s\}_i, \{P_s\}_i$ 分別定義為

$$\{F_s\}_i = f_s(\bar{x}_i) \quad (3.36)$$

$$\{P_s\}_i = \frac{\partial f_s(\bar{x}_i)}{\partial n_i} \quad (3.37)$$

根據港內與外海二區界面連續條件(3.26a)及(3.26b)分別可表示為矩陣表示式

$$\{F_2^x\} = \{F_t\} + \{F_s\} \quad (3.38a)$$

及

$$\{P_2^x\} = -\{P_s\} \quad (3.38b)$$

式中向量 $\{F_t\}$ 為入射波及反射波波函數之和, $\{F_2^x\}$ 及 $\{P_2^x\}$ 上標為 x, 表示由區域 II 邊界在港口介面處 $\overline{AB}$ 之結點所形成 $M \times 1$ 向量, 又定義 $[G_2^0]$, $[H_2^0]$, $\{F_2^0\}$ 及 $\{P_2^0\}$ 上標為 0, 表示在區域 II 邊界上除港口 $\overline{AB}$ 處結點以外所形成 $N \times (N - M)$ 矩陣或 $(N - M) \times 1$ 向量, 因此可定義:

$$[G_2] = [G_2^0 \ G_2^x], \quad [H_2] = [H_2^0 \ H_2^x] \quad (3.39a)$$

$$\{P_2\} = \begin{Bmatrix} P_2^0 \\ P_2^x \end{Bmatrix}, \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} F_2^0 \\ F_2^x \end{Bmatrix} \quad (3.39b)$$

假設港池以多孔消波體設計做為港池內壁, 則應滿足下列關係式

$$\{P_2^0\} = [A]\{F_2^0\} \quad (3.40a)$$

式中矩陣 $[A]$ 之元素 $[A]_{ij}$ 定義為

$$[A]_{ij} = -i\alpha^j \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N - M \quad (3.40b)$$

α^j 為第 j 個元素上消波岸壁之阻尼係數。

由式(3.29) (3.35) 及 (3.38) 可組合為:

$$\begin{bmatrix} Q_2^0 & H_2^x & G_2^x \\ 0 & I & G_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2^0 \\ F_2^x \\ -P_2^x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_t \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

式中 I 為單位矩陣, 且 $[Q_2^0]$ 定義為

$$[Q_2^0] = [H_2^0] - [G_2^0][A] \quad (3.42)$$

矩陣方程式(3.41)計有 $N+M$ 個方程式, 港內邊界上波函數 f_2 有 N 個未知量及港口處 $\frac{\partial f_2}{\partial n_2}$ 有 M 個未知量, 可利用高斯消去法求解。而港內任一點之波函數 $f_2(\bar{x})$ 可由表示式(3.28)求得, 同理外海任一點之波函數 $f_1(\bar{x})$ 可由表示式(3.27)先求得散射波 $f_s(\bar{x})$ 。

四、例子說明

我們將取用縱深 $\ell = 1.021$ 英呎, 寬 0.207 英呎, 等水深 $h=0.844$ 英呎之矩形港池, 及 10 度開口圓形等水深港池(半徑 $a=.75$ 英呎, 平均水深 $h=1$ 英呎), 並假設其外海之海岸線皆平直向兩側無限延伸, 做為有限元素法模式及邊界元素法模式之計算例子說明。有限元素法模式矩形港池之三角元素切割如附圖(3-1), 圓形港池之三角元素切割如附圖(3-9)。如引用較簡易之邊界元素法模式, 則矩形港池之邊界元素切割如附圖(3-10), 圓形港池之邊界元素切割如附圖(3-11)。此處將取矩形港池之端點 $A(0, -1.021)$, 及圓形港池中心點 $O(0, -0.747)$ 作觀察點。當波浪由外海正向入射作用於港池, 圖 3-12 為矩形港池之無因次波浪參數 $k_0\ell$ 與擴大率 R 之相關曲線圖, 實線為有限元素法模式, 虛線為邊界元素法模式, 黑點則為 Lee (1969) 之試驗結果, 數值計算結果與試驗結果甚為吻合。同樣圖 3-13 為圓形港池之無因次波浪參數 k_0a 與擴大率 R 之相關曲線圖, 實線為有限元素法模式, 虛線為邊界元素法模式, 黑點則為 Lee (1969) 之試驗結果, 數值計算結果與試驗結果, 整體而言也甚為吻合。

若港池岸壁為部分反射體, 根據蘇(1993)解析之結果, 消波岸壁港池之消波特性和物理特性, 阻尼係數 α 決定其物理特性, 阻尼係數 α 為一複數, 其實部之物理意義相當於電學之電阻(resistance), 主要決定作用於消波岸壁後之反射波振幅大小; 其虛部則相當於電學之電抗(reactance), 主要決定入射波與

反射波之相位差。若 α 為實部及虛部皆不為零之複數，蘇(1993)發現港池共振週期及其擴大率皆可能改變， α 之虛部主要影響共振週期之變化，其值為負數時，將增長原有共振週期，其絕對值愈大改變愈大，反之其值為正數時，將減短原有共振週期，其絕對值愈大改變也愈大；實部則影響振幅大小，其絕對值愈大能量消散也愈大。在假設無相位差及正向波作用之條件下，阻尼係數與反射係數 C_r 之關係式，根據蘇(1993)可表示為

$$\alpha = -k_0 \frac{1 - C_r}{1 + C_r}, \quad 0 \leq C_r \leq 1 \quad (3.43)$$

在反射係數 C_r 分別為1, 0.95, 0.9, 0.85, 圖3-12則為港池中心O處之共振曲線比較圖，圖中顯示隨反射係數 C_r 之減少，在共振點之擴大率快速的減少，顯示反射係數將影響共振大小甚巨。

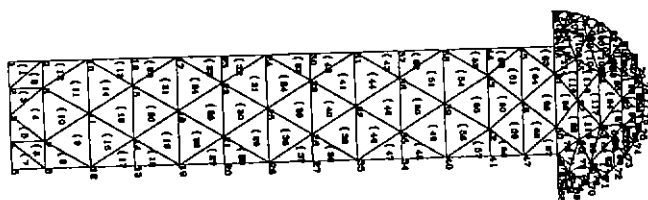


圖 3-9 矩形港池三角形元素分割示意圖

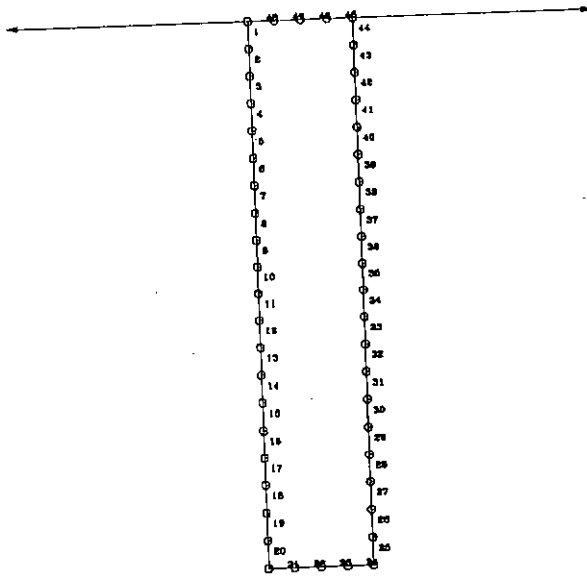


圖 3-10 矩形港池邊界元素分割示意圖

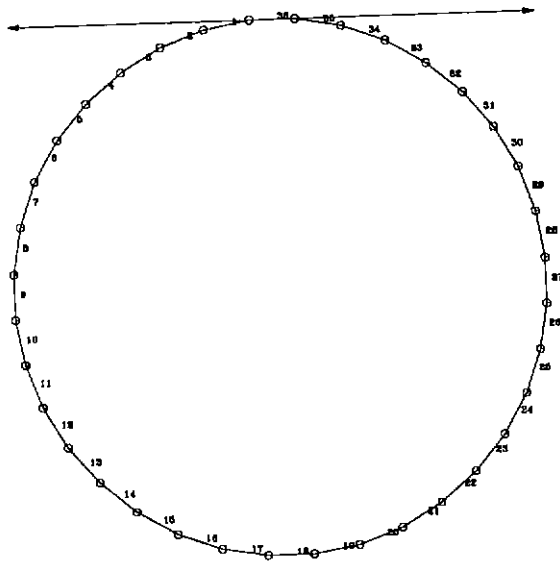


圖 3-11 10度開口圓形港池邊界元素分割示意圖

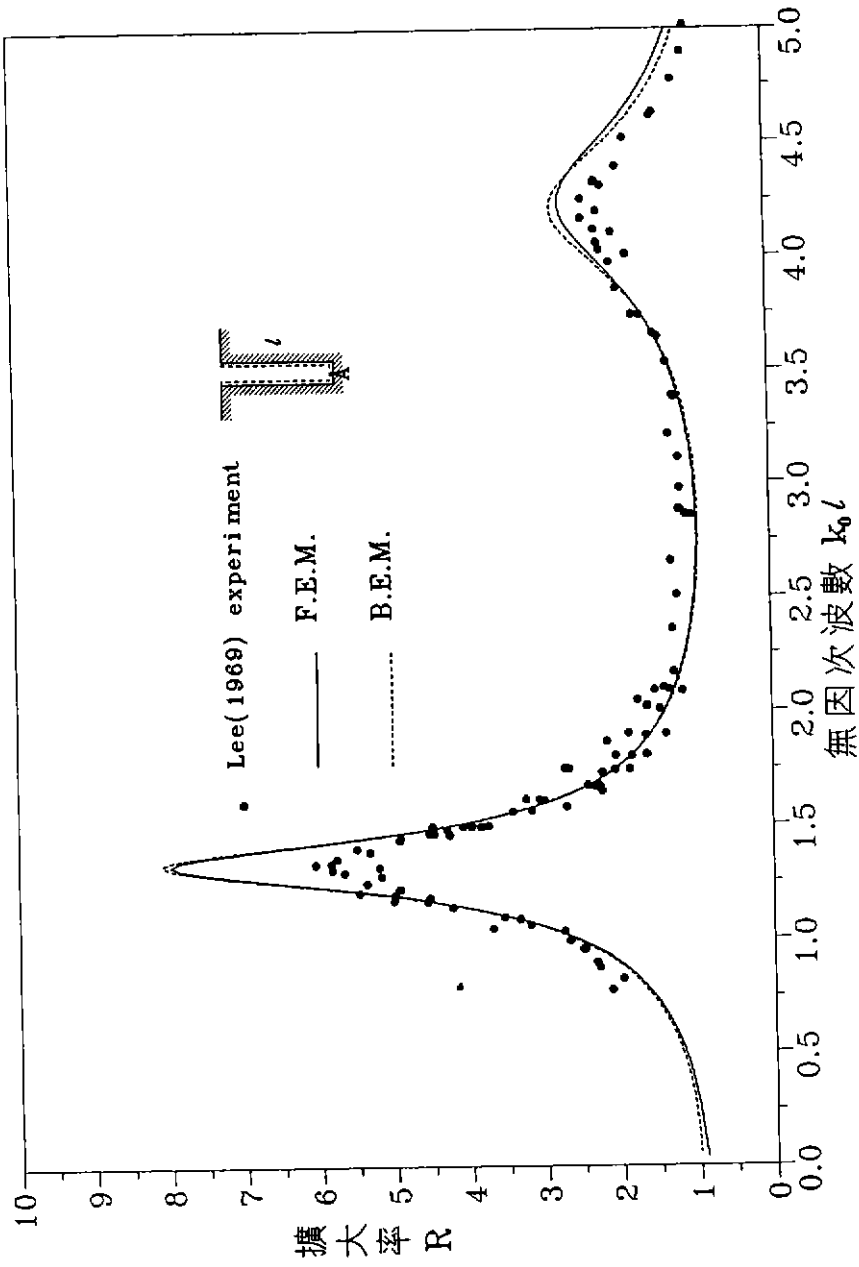


圖 3-12 矩形港池端點 A 處無因次波長參數 $k_0 l$ 與擴大率 R 之相關曲線圖

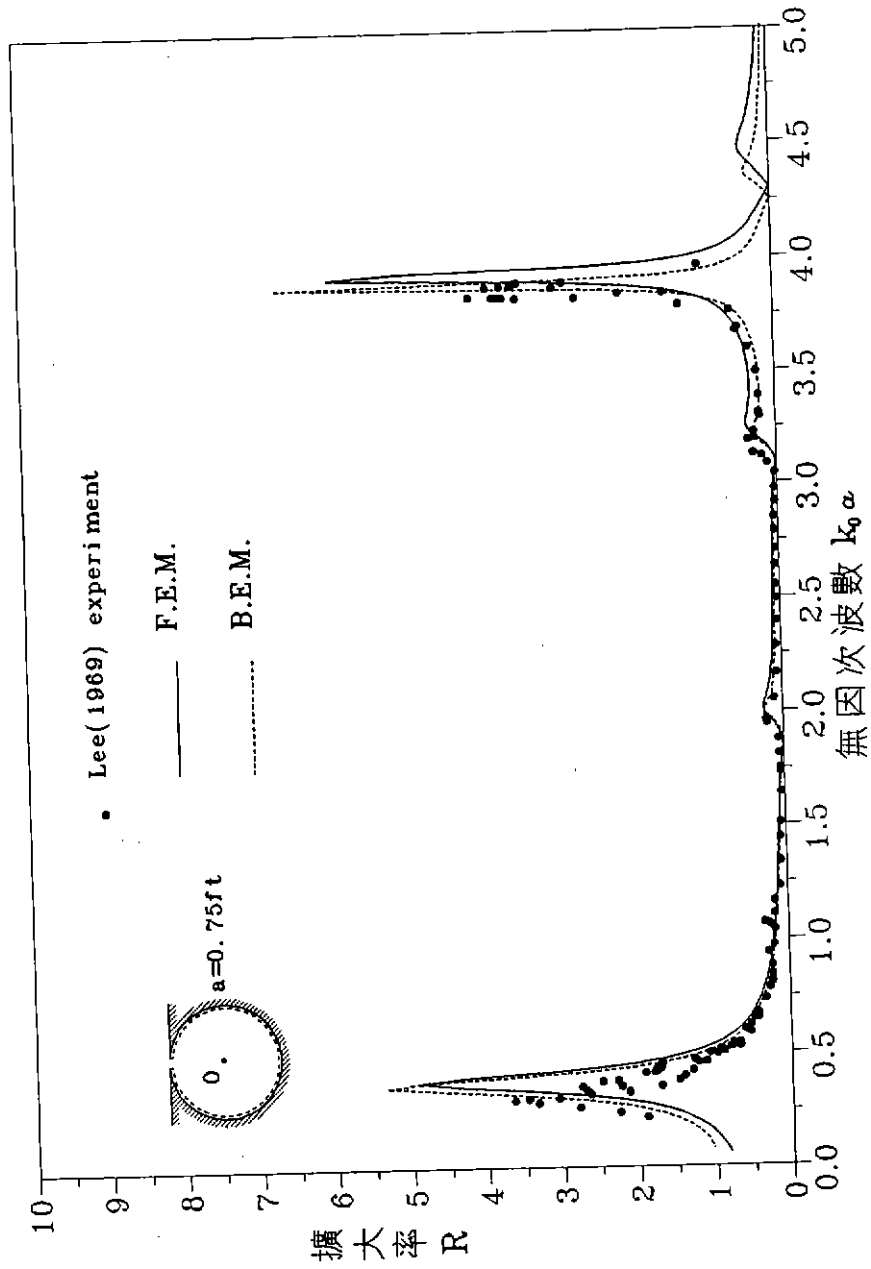


圖 3-13 10 度開口圓形港池中心點 O 處無因次波浪參數 $k_0 a$ 與擴大率 R 之相關曲線圖

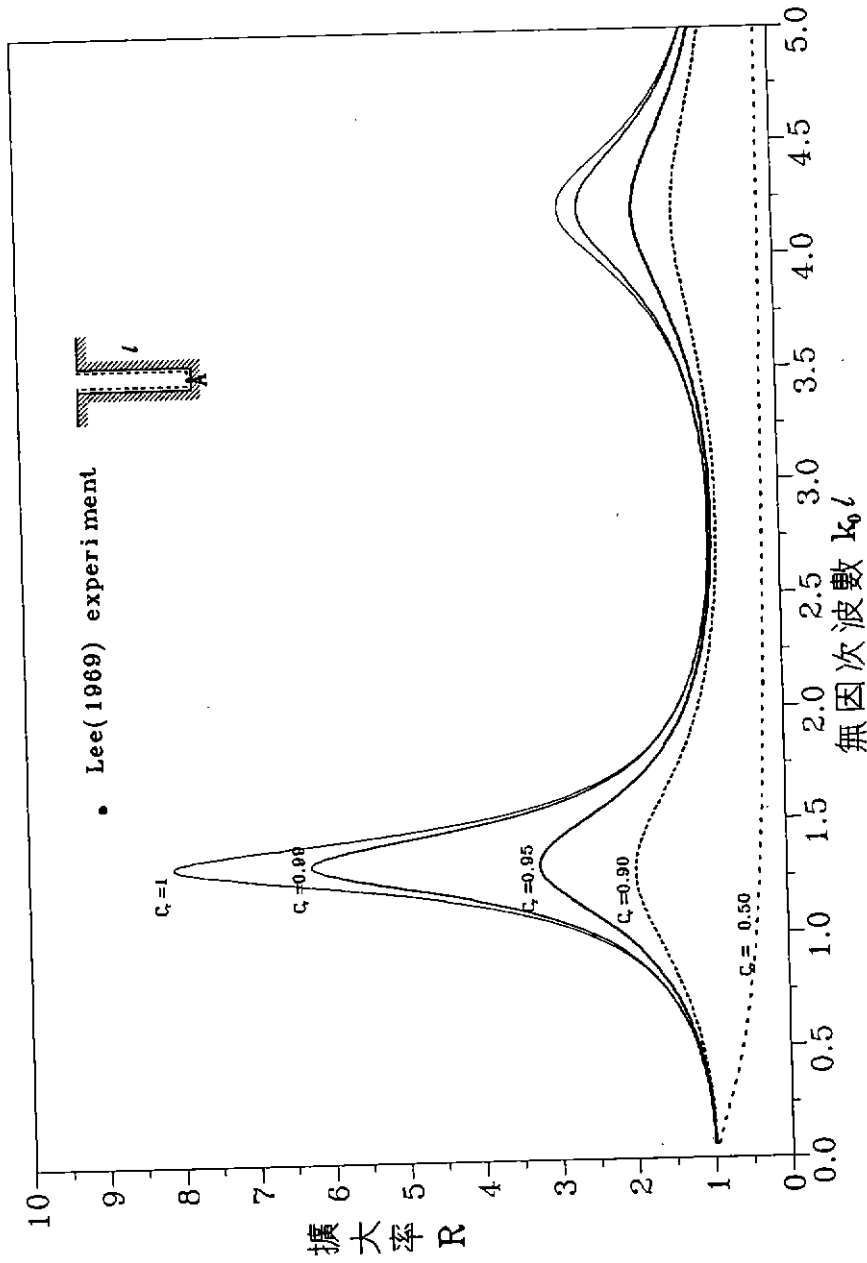


圖 3-14 矩形港池端點 A 處在不同反射係數 C_r 無因次波浪參數 $k_0 l$ 與擴大率 R 之相關曲線圖

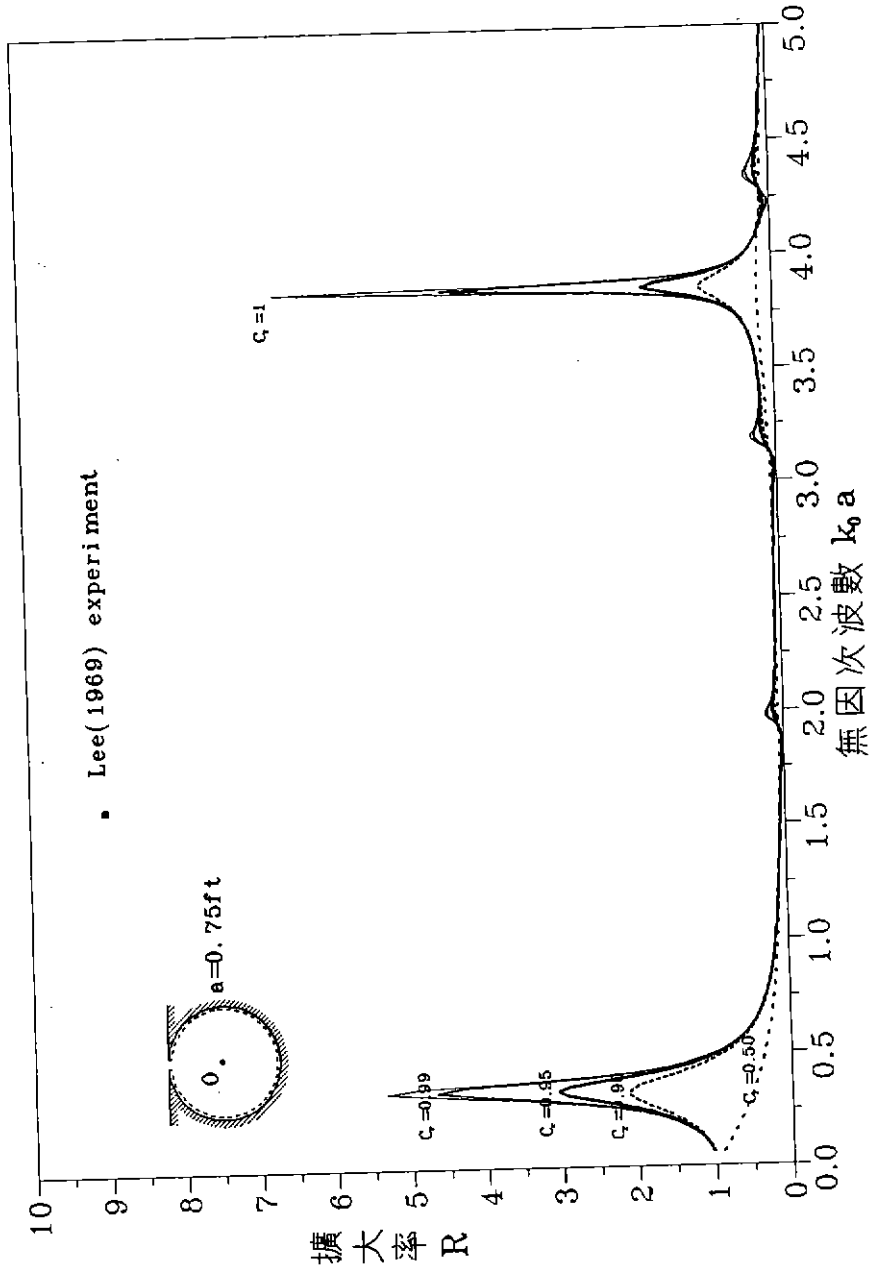


圖 3-15 10 度開口圓形港池中心點 O 處在不同反射係數 C_r 波浪參數 $k_0 a$ 與擴大率 R 相關曲線圖

肆、拋物線方程式及貼壁座標

一、拋物線方程式

考慮近岸海域(如示意圖4-1),海岸線可為不規則形狀,海域水深 $h(x,y)$ 為緩慢變化(mild slope),我們將探討波浪從外海進入近岸海域時之波場變化。

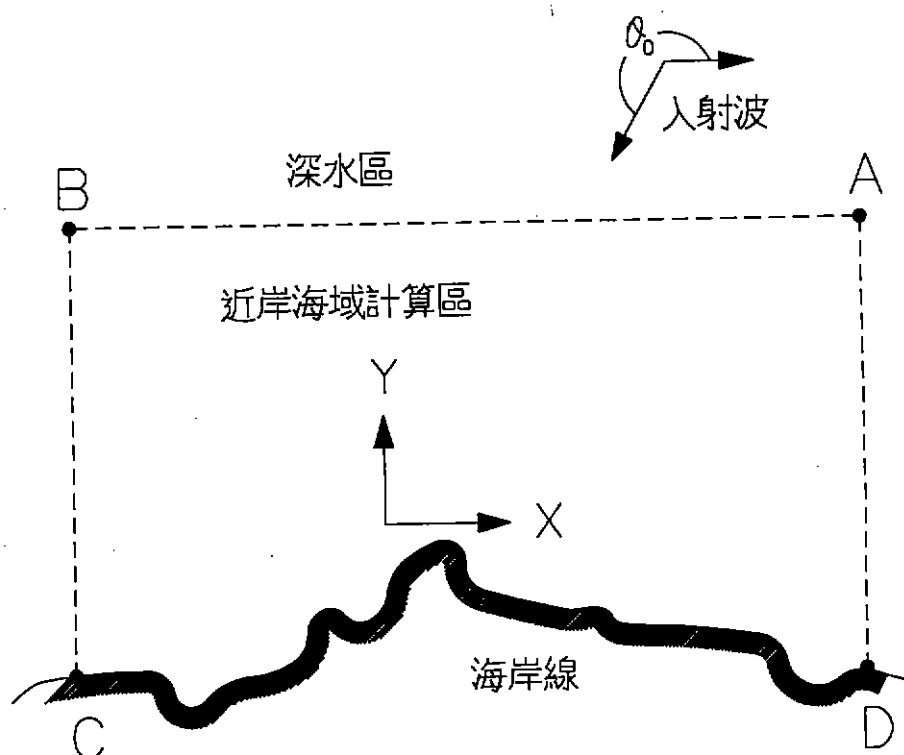


圖4-1近岸海域示意圖

根據 Tsay and Liu's(1982)之建議,在近岸緩變地形之區域水深 $h(x,y)$ 可分為 $\bar{h}$ 及 $\hat{h}$ 兩部分

$$h = \bar{h} + \hat{h} \quad (4.1)$$

式中 $\bar{h}(x,y)$ 稱修正水深(modified depth)其選擇要件為：在修正水深 $\bar{h}$ 對應之各波場波向線不會相交。而一般選取 $\bar{h}$ 之方法可參考Lozano and Liu(1980)之法則。 $\hat{h}$ 則為 $\bar{h}$ 對應實際地形 $h(x,y)$ 之微小修正量。

假設在近岸海域之波場波函數(wave function) $\phi(x, y, t)$ 可表示為

$$\phi(x, y, t) = F(x, y)A(x, y)e^{i(S(x, y) + \sigma t)} \quad (4.2)$$

式中 $A(x, y)$ 及 $S(x, y)$ 分別為對應修正水深 $\bar{h}$ 之振幅(amplitude)及相位(phase), σ 為週頻率。 $F(x, y)$ 稱繞射因子(diffraction factor)主要考慮實際水深與修正水深差, 即 h_0 效應產生之影響效果。

根據波向線理論(the wave ray theory)振幅 $A(x, y)$ 及相位 $S(x, y)$ 分別滿足下列 eikonal equation 及 transport equation:

$$(\nabla S)^2 = \bar{k}^2 \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot (A^2 \bar{C} \bar{C}_g \nabla S) = 0 \quad (4.4)$$

其對應波數(wave number) $\bar{k}$ 滿足下列分散關係式(dispersion relation)

$$\sigma^2 = g \bar{k} \tanh \bar{k} \bar{h} \quad (4.5)$$

而其對應波速(phase velocity) $\bar{C} = \sigma / \bar{k}$ 及群速度(group velocity) $\bar{C}_g = d\sigma / d\bar{k}$, σ 為週頻率(radian frequency)。

其中波數向量(wave number vector) $\bar{K}$, 滿足非旋轉條件

$$\nabla \times \bar{K} = 0 \quad (4.6)$$

式中

$$\bar{K} = (\bar{k}_x, \bar{k}_y) = (\bar{k} \cos \theta, \bar{k} \sin \theta), \quad \bar{k} = |\bar{K}| \quad (4.7)$$

將表示式(4.2)及利用關係式(4.3)及(4.4)代入修正緩坡方程式(2.13a), 並取 $E_0 = 0$, 則可化為

$$2i\bar{K} \cdot \nabla F + \left(\frac{2\nabla A}{A} + \frac{\nabla G}{G} \right) \cdot \nabla F + \nabla^2 F + \hat{k}^2 F = 0 \quad (4.8)$$

式中 $\hat{k}^2$ 定義為

$$\hat{k}^2 = k^2 - \bar{k}^2 + \frac{i\bar{G}}{G} \nabla \left(\frac{G}{\bar{G}} \right) \cdot \nabla S + \frac{\nabla G}{G} \cdot \frac{\nabla A}{A} + \frac{\nabla^2 A}{A} \quad (4.9)$$

其中

$$G = CC_g, \quad \bar{G} = \overline{CC_g} \quad (4.10a)$$

式中海域波速 (phase velocity) $C = \sigma/k$ 及群速度 (group velocity) $C_g = d\sigma/dk$, 波數 (wave number) k 滿足下列分散關係式 (dispersion relation)

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4.10b)$$

若忽略式(4.8)二次以上之微分項可化簡為

$$\hat{k}^2 = k^2 - \bar{k}^2 \quad (4.11)$$

假如取曲線座標系統 (curvilinear co-ordinate system) (ξ, η) 與原來直角座標系統 (x, y) 滿足下列轉關係

$$x = T_x(\xi, \eta) \quad (4.12)$$

$$y = T_y(\xi, \eta) \quad (4.12b)$$

則在 (x, y) 座標系統之橢圓方程式 (elliptic equation) (2.13a) 可化為在 (ξ, η) 座標系統之拋物線方程式 (parabolic equation) 如下：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2i}{J_4} \left(-\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k}_x + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{GJ_4^2} (J_3 \frac{\partial G}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}) + \frac{2}{AJ_4^2} (J_3 \frac{\partial A}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \xi}) \right] \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ & + \left[\frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k}_x - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{GJ_4^2} (J_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \eta}) + \frac{2}{AJ_4^2} (J_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \eta}) \right] \frac{\partial F}{\partial \xi} \\ & + \frac{1}{J_2} (J_3 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - 2J_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + J_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}) + \hat{k}^2 F = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

式中

$$J_1 = \left(\frac{\partial T_x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta}\right)^2 \quad (4.14a)$$

$$J_2 = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial T_x}{\partial \eta} + \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial T_y}{\partial \eta} \quad (4.14b)$$

$$J_3 = \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_y}{\partial \xi}\right)^2 \quad (4.14c)$$

$$J_4 = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial T_y}{\partial \eta} - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \quad (4.14d)$$

因爲在 (ξ, η) 平面上海岸線與 η 線平行，一般相位線(phase line)多少會與等水深線平行，所以式(4.13)中 F 對 η 之二次微分項可忽略，簡化爲

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2i}{J_4} \left(-\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k}_x + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{GJ_4^2} (J_3 \frac{\partial G}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}) + \frac{2}{AJ_4^2} (J_3 \frac{\partial A}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \xi}) \right] \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ & + \left[\frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k}_x - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{GJ_4^2} (J_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \eta}) + \frac{2}{AJ_4^2} (J_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \eta}) \right] \frac{\partial F}{\partial \xi} \\ & + \frac{1}{J_2} \left(-2J_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + J_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right) + \hat{k}^2 F = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

同樣波數方程式(4.6)在 (ξ, η) 座標系統可化爲

$$\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}_y}{\partial \xi} + \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}_x}{\partial \xi} - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}_y}{\partial \eta} - \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}_x}{\partial \eta} = 0 \quad (4.16)$$

而transport equation(4.4)在 (ξ, η) 座標系統上可化爲

$$\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{Gk_x} A^2) - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{Gk_y} A^2) - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{Gk_x} A^2) + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{Gk_y} A^2) = 0 \quad (4.17)$$

二、貼壁曲線座標

爲引用有限差分法解析邊界值問題，網格切割之規則形狀要求，一般解將直角座標系統 (x, y) 平面上不規則狀區域，經貼壁曲線座標系統(boundary fitted

curvilinear co-ordinate system) 轉換為在 (ξ, η) 平面上之長方形區域, 如示意圖 4-2。 (x, y) 平面上海岸線 $\overline{CD}$, 及沿海岸線方向曲線 $\overline{AB}$, 經轉換為 (ξ, η) 平面上之線段 $\overline{CD}(\eta = 0)$, 及線段 $\overline{AB}(\eta = \eta_0)$, (x, y) 平面上向(離)岸之曲線 $\overline{DA}$ 及 $\overline{CB}$, 經轉換為 (ξ, η) 平面上之線段 $\overline{DA}(\xi = 0)$ 及線段 $\overline{CB}(\xi = \xi_0)$ 。一般可先給定 η_0 值, η_0 值大小即控制轉換後尺度大小, 對應 $\overline{BC}$ 及 $\overline{DA}$, 必轉換至 $\xi = 0$ 及 $\xi = \xi_0$ 。如何求得座標轉換函數(4.9)式, 並保持一些重要幾何特性, 是轉換時一個重要考慮因素。

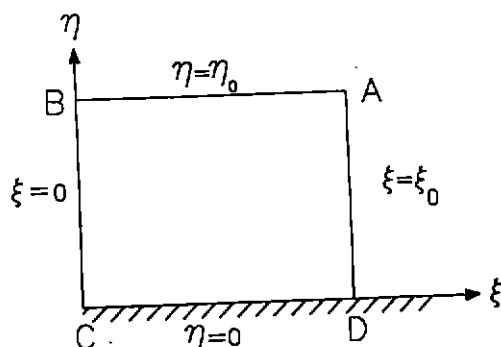


圖 4-2 座標轉換示意圖

本文將在保角 (conformal mapping) 之條件下, 求解轉換函數 T_x 及 T_y , 並假設其滿足拉普拉氏方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (4.18b)$$

對應 (ξ, η) 之座標系統也滿足拉普拉氏方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (4.19b)$$

而且滿足 Cauchy-Riemann 條件

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.20a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.20b)$$

引用 Cauchy-Riemann 條件 (4.20), 則對應 ξ 之控制方程式 (4.19a) 邊界條件爲

$$\xi = \xi_0, \quad \text{on } \overline{DA} \quad (4.21a)$$

$$\xi = 0, \quad \text{on } \overline{BC} \quad (4.21b)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{AB} \quad (4.21c)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{CD} \quad (4.21d)$$

式中 $\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla$ 表示正向微分 (normal derivative), $\vec{n}$ 沿邊界向區域外之單位向量。

同樣對應 η 之控制方程式 (4.16b) 邊界條件爲

$$\eta = 0, \quad \text{on } \overline{CD} \quad (4.22a)$$

$$\eta = \eta_0, \quad \text{on } \overline{AB} \quad (4.22b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{BC} \quad (4.22c)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{DA} \quad (4.22d)$$

此處將引用邊界元素法原理, 求解上述兩組邊界值問題 (4.19a)、(4.21) 及 (4.19b)、(4.22)。

拉普拉氏方程式(4.19a)及(4.19b)之 Weber 解在區域內分別可表示為下列積分方程(Baker 及 Copson, 1950):

$$\xi(\bar{x}) = b_0 \int_{\partial R} \left\{ \xi \frac{\partial}{\partial n} [\ln(r)] - [\ln(r)] \frac{\partial \xi}{\partial n} \right\} d\ell \quad (4.23a)$$

$$\eta(\bar{x}) = b_0 \int_{\partial R} \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial n} [\ln(r)] - [\ln(r)] \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\} d\ell \quad (4.23b)$$

式中 ∂R 為近海區域 R 之封閉邊界, $\partial R = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ 。

$b_0 = \frac{-i}{4}$, 當 $\bar{x}$ 在區域內部。

$b_0 = \frac{-i}{2}$, 當 $\bar{x}$ 在平滑區域邊界上。

$b_0 = \frac{-i\pi}{2\beta}$, 當 $\bar{x}$ 在內角為 β 之邊界點上。

$\ln(r)$ 為自然對數函數(natural logarithmic function)。

$r = |\bar{x}_0 - \bar{x}|$, $\bar{x}_0$ 為邊界上之點, $\bar{x}$ 為邊界上 ∂R 或區域 R 內任一點。

積分方程式(4.23a)及(4.23b)式對不規則形狀之區域不易求得解析解, 將利用邊界元素法求解波場。將 (x, y) 平面區域之邊界 $\partial B = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$, 分別切割為 N 個線段, N 個中結點(mid-node), 每個線段代表一個元素, 並引用常數元素, 假設每一個線段上每個點之 η, ξ 及 $\frac{\partial \eta}{\partial n}, \frac{\partial \xi}{\partial n}$ 皆為定值, 而以線段中結點值代表元素值, 元素上 $\ln(r), \frac{\partial \ln(r)}{\partial n}$ 之值將引用高斯積分法, 直接計算, 而 N 個結點編號一般以逆時鐘方向編排。

假設方程式(4.23a)中之 $\bar{x}$ 點為邊界上結點, 則可化為下列矩陣方程式

$$[G]\{P_1\} = [H]\{Q_1\} \quad (4.24)$$

式中 $[H], [G]$ 皆為 $N \times N$ 矩陣, 其矩陣元素 $[H]_{jk}, [G]_{jk}$ 分別定義為下列線積分(line integral)表示式

$$[H]_{jk} = b_0 \int_{\Gamma_k} \frac{\partial}{\partial n} \ln(r) d\ell_k - \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \dots N \quad (4.25a)$$

$$[G]_{jk} = b_0 \int_{\Gamma_k} \ln(r) d\ell_k, \quad j, k = 1, 2, 3 \dots N \quad (4.25b)$$

式中 Γ_k 為第 k 個元素, $r = |\bar{x}_j - \bar{x}|$, $\bar{x}_j$ 為區域 R 之邊界 ∂R 上元素之結點, $j=1, 2, 3 \dots N$, $\bar{x}$ 為第 k 個元素 Γ_k 上任一點, δ_{jk} 為克郎克函數 (Kronecker delta function), 而 $\{Q_1\}$ 及 $\{P_1\}$ 為 $N \times 1$ 向量, 其向量元素分別定義為

$$\{Q_1\}_j = \eta(\bar{x}_j), \quad j = 1, 2 \dots N \quad (4.26a)$$

$$\{P_1\}_j = \frac{\partial \eta(\bar{x}_j)}{\partial n}, \quad j = 1, 2 \dots N \quad (4.26b)$$

同樣方程式 (4.23b) 中之 $\bar{x}$ 點為邊界上結點, 則可化為下列矩陣方程式

$$[G]\{P_2\} = [H]\{Q_2\} \quad (4.27)$$

$\{Q_2\}$ 及 $\{P_2\}$ 為 $N \times 1$ 向量, 其向量元素分別定義為

$$\{Q_2\}_j = \xi(\bar{x}_j), \quad j = 1, 2 \dots N \quad (4.28a)$$

$$\{P_2\}_j = \frac{\partial \xi(\bar{x}_j)}{\partial n}, \quad j = 1, 2 \dots N \quad (4.28b)$$

分別利用矩陣方程式 (4.24) 之邊界條件 (4.21), 以及矩陣方程式 (4.27) 之邊界條件 (4.22), 即可求得邊界上之 $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial n}, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial n}$ 值。

當在整個邊界 ∂R 上座標 (x, y) 對應之 (ξ, η) 值求得後, 反言之座標 (ξ, η) 其對應之 (x, y) 亦可獲得, 即

$$x = T_x(\xi, 0), \quad y = T_y(\xi, 0), \quad \text{on } \overline{CD} \quad (4.29a)$$

$$y = T_x(\xi, \eta), \quad y = T_y(\xi, \eta_0), \quad \text{on } \overline{AB} \quad (4.29b)$$

$$x = T_x(0, \eta), \quad y = T_y(0, \eta), \quad \text{on } \overline{DA} \quad (4.29c)$$

$$y = T_x(\xi_0, \eta), \quad y = T_y(\xi_0, \eta), \quad \text{on } \overline{BC} \quad (4.29d)$$

利用 Cauchy-Riemann Condition, $\frac{\partial T_x}{\partial n}$ 及 $\frac{\partial T_y}{\partial n}$ 在邊界上之值可由下式求得

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = \frac{\partial T_x}{\partial \eta} = -\frac{\partial T_y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = \frac{\partial T_y}{\partial \eta} = \frac{\partial T_x}{\partial \xi}, \quad \text{on } \overline{AB} \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = -\frac{\partial T_x}{\partial \eta} = -\frac{\partial T_y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = -\frac{\partial T_y}{\partial \eta} = -\frac{\partial T_x}{\partial \xi}, \quad \text{on } \overline{CD} \quad (4.30b)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} = \frac{\partial T_y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = \frac{\partial T_y}{\partial \eta} = -\frac{T_x}{\partial \eta}, \quad \text{on } \overline{BC} \quad (4.30c)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = -\frac{\partial T_x}{\partial \xi} = -\frac{T_y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = -\frac{\partial T_y}{\partial \xi} = -\frac{\partial T_x}{\partial \eta}, \quad \text{on } \overline{AD} \quad (4.30d)$$

假設 (ξ, η) 為區域 R 內部之點則 $\bar{T} = (T_x, T_y)$ 可由下式求得

$$\bar{T}(\xi, \eta) = b_0 \int_{\partial R} \left\{ \bar{T} \frac{\partial}{\partial n} [\ln(r)] - \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} [\ln(r)] \right\} ds \quad (4.31)$$

式中 ∂R 為邊界 $(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$ 積分。 $r = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$, (ξ', η') 為邊界上 ∂R 之任一點。

三、貼壁座標轉換例子說明

考慮半環區域 (annulus), (如圖 4-3), 內半圓為海岸線 (半徑為 100), 外半圓為外海邊界 (半徑為 300)。區域之側邊界為線段 $(100 < x < 300, y = 0)$ 及線段

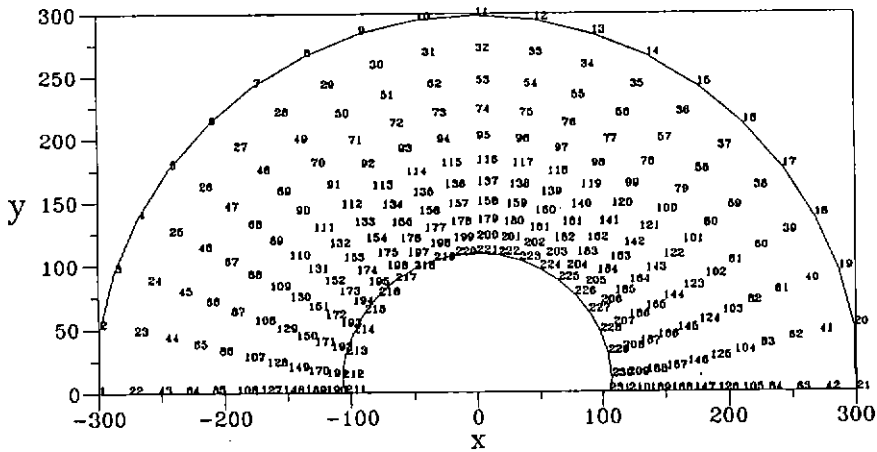


圖 4-3 半環區域在 (x, y) 平面之網格分割示意圖

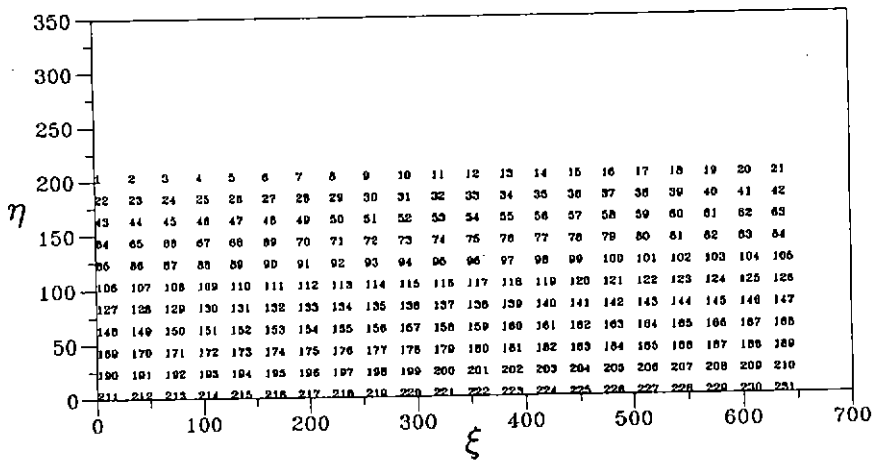


圖 4-4 半環區域在 (ξ, η) 平面之網格分割示意圖

$(-300 < x < -100, y = 0)$ 。半圓 $(r = 100, 0 \leq \theta \leq \pi)$ 轉換至 (ξ, η) 平面為 $\eta = 0$ ，半圓 $(r = 300, 0 \leq \theta \leq \pi)$ 則對應 $\eta = 200$ ，右側邊界 $(100 < x < 300, y = 0)$ 對應 $\xi = 200\pi$ ，左側邊界 $(-300 < x < -100, y = 0)$ 對應 $\xi = 0$ ，在 (ξ, η) 平面為一長方形，其邊界結點為 11×21 。(如圖 4-4)。區域在 (x, y) 平面之網格分佈如圖 4-3，區域在 (ξ, η) 平面之網格分佈如圖 4-4。

伍、有限差分法模式

一、有限差分法

當(x,y)平面之不規則形狀區域,經上節轉換為貼壁曲線座標系統 (ξ, η) 平面上之矩形區域後,並切割為 $N_x \times N_y$ 個矩形,其每個矩形大小為 $\Delta\xi \times \Delta\eta$ 。本節將引用有限差分法利用三個控制方程式(4.15)、(4.16)及(4.17)求解海域之振幅A,繞射因子F,相位S或波向角 (θ_0) 等三個變數。

因為修正水深 $\bar{h}$ 沿著等 η 線幾乎與等深線相同,所以

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{k}}{\partial \xi}, \quad \text{on } \eta = \text{const} \quad (4.32)$$

將(4.7)代入(4.16)並引用(4.32)之關係式可化為

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right) + \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} \sin \theta + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} \cos \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \xi} \sin \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \xi} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.33)$$

定義波向角

$$\theta_i^j = \theta(\xi_i, \eta_j) \quad (4.34a)$$

式中

$$\xi_i = i \Delta \xi, \quad \eta_j = j \Delta \eta \quad (4.34b)$$

微分量 $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ 取前差法(forward-difference method)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta \eta} \quad (4.35a)$$

微分量 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ 取中差分(central-difference method)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{4 \Delta \xi} \quad (4.35b)$$

將(4.35)代入(4.33)則可化為下列差分方程式

$$-\theta_{i-1}^{j+1} + c_1 \theta_i^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1} = c_2 + \theta_{i-1}^j + c_1 \theta_i^j - \theta_{i+1}^j \quad (4.36)$$

其中係數 c_1, c_2 分別定義為

$$c_1 = \frac{4\Delta\xi}{\Delta\eta} \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right)^{-1} \quad (4.37a)$$

$$c_2 = \frac{4\Delta\xi}{k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right)^{-1} \quad (4.37b)$$

方程式(4.33)對變數波向角 θ 而言含有非線性項，因此差分方程式(4.36)將使用疊代法(iterative numerical method)以求解 θ ，係數 c_1, c_2 皆包括 θ 之隱函數， θ 之值以上一次之疊代結果代入。

同樣定義 $A_i^j = A(\xi_i, \eta_j), i = 1, 2, \dots, N_x, j = 1, 2, \dots, N_y$ 則方程式(4.17)可化為差分方程式

$$-A_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{c_4}{c_3} \frac{4\Delta\xi}{\Delta\eta} - \frac{2c_5}{c_3} \Delta\xi \right) A_i^{j+1} + A_{i+1}^{j+1} = A_{i-1}^j + \left(\frac{c_4}{c_3} \frac{4\Delta\xi}{\Delta\eta} + \frac{2c_5}{c_3} \Delta\xi \right) A_i^j - A_{i+1}^j \quad (4.38)$$

其中係數 c_3, c_4, c_5 分別定義為

$$c_3 = 2 \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right) \quad (4.39a)$$

$$c_4 = 2 \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \quad (4.39b)$$

$$c_5 = \frac{1}{G} \left[\frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{G} \bar{k} \sin \theta) + \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{G} \bar{k} \cos \theta) \right]$$

$$-\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\overline{Gk} \cos \theta) - \frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\overline{Gk} \cos \theta)] \quad (4.39c)$$

差分方程式(4.38)對振幅 A 而言為一線性方程式, 假設方程式(4.36)中之波向角 θ 求得, 則係數 c_3, c_4, c_5 皆為已知。

同樣繞射因子 F 之相關微分量分別定義如下

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{F_{i+1}^j - F_i^j}{\Delta \xi} \quad (4.40a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{F_i^{j+1} - F_i^j}{\Delta \eta} \quad (4.40b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2\Delta \xi \Delta \eta} (F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1} - F_{i+1}^{j-1} + F_i^{j-1}) \quad (4.40c)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2(\Delta \xi)^2} (F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1} - 2F_{i+1}^j - 2F_i^j + F_{i+1}^{j-1} + F_i^{j-1}) \quad (4.40d)$$

因此式(4.15)可化為下列差分式

$$\begin{aligned} & \left(-1 + \frac{c_7 \Delta \xi}{2c_9} + \frac{c_8 \Delta \xi}{c_9 \Delta \eta}\right) F_{i-1}^{j+1} + \left[2 - \frac{2c_6 (\Delta \xi)^2}{c_9 \Delta \eta} - \frac{k_0^2 (\Delta \xi)^2}{c_9}\right] F_i^{j+1} \\ & + \left(-1 - \frac{c_7 \Delta \xi}{2c_9} - \frac{c_8 \Delta \xi}{c_9 \Delta \eta}\right) F_{i+1}^{j+1} = \left(1 - \frac{c_7 \Delta \xi}{2c_9} + \frac{c_8 \Delta \xi}{c_9 \Delta \eta}\right) F_{i-1}^j \\ & - \left[2 + \frac{2c_6 (\Delta \xi)^2}{c_9 \Delta \eta} - \frac{k_0^2 (\Delta \xi)^2}{c_9}\right] F_i^j + \left(1 + \frac{\eta \Delta \xi}{2q} - \frac{p \Delta \xi}{q \Delta \eta}\right) F_{i-1}^j \end{aligned} \quad (4.41)$$

其中係數 c_6, c_7, c_8, c_9 分別定義為

$$c_6 = \frac{2i}{J_4} \left(-\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \overline{k} \cos \theta + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \overline{k} \sin \theta\right) + \frac{1}{G J_4^2} (J_3 \frac{\partial G}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}) + \frac{2}{G J_4^2} (J_3 \frac{\partial A}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \xi}) \quad (4.42a)$$

$$c_7 = \frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right) + \frac{1}{GJ_4^2} \left(J_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{AJ_4^2} \left(J_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \quad (4.42b)$$

$$c_8 = \frac{2J_2}{J_4^2} \quad (4.42c)$$

$$c_9 = \frac{J_1}{J_4^2} \quad (4.42d)$$

數值計算繞射因子 F 以海岸線 $\eta = \eta_0$ 為起始線，並假射在起始線上 F 為常數，並且假設側邊界 $\xi = 0$ 及 $\xi = \xi_0$ 滿足

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{and} \quad \xi = \xi_0$$

當海域之振幅 A ，繞射因子 F 及波向角 (θ_0) (或相位 S) 等變數求得，則由方程式(4.2)可求得波場水位變化。

二、例子說明

考慮一等斜率 $1/20$ 之海岸地區，在海岸線中央處有一凸岬存在，其等深線分佈如圖 5-1，計算區大小約為 $(0 < y < 1000m)$ ， $(-400m < x < 400m)$ ，本例子將計算週期 10 秒之波浪，由外海以入射角 20° 之方向進入海岸後產生之波場分佈。

區域在 (x, y) 平面原座標系統之網格分佈如圖 5-2a，經貼壁座標轉換後區域在 (ξ, η) 平面之網格分佈如圖 5-2b，在 (ξ, η) 平面之計算範圍為 $(0 < \eta < 1000m, 0 < \xi < 800m)$ ，網格大小分別為 $\Delta \xi = 9m$ ， $\Delta \eta = 10m$ 。圖 5-3 為計算區之等波高 (米) 分佈曲線圖，圖 5-4 為計算區之等波向角 (度) 分佈曲線圖，圖 5-5 至圖 5-9 別為幾個剖面之波高，水深，入射角沿著離岸方向之分佈曲線比較圖。

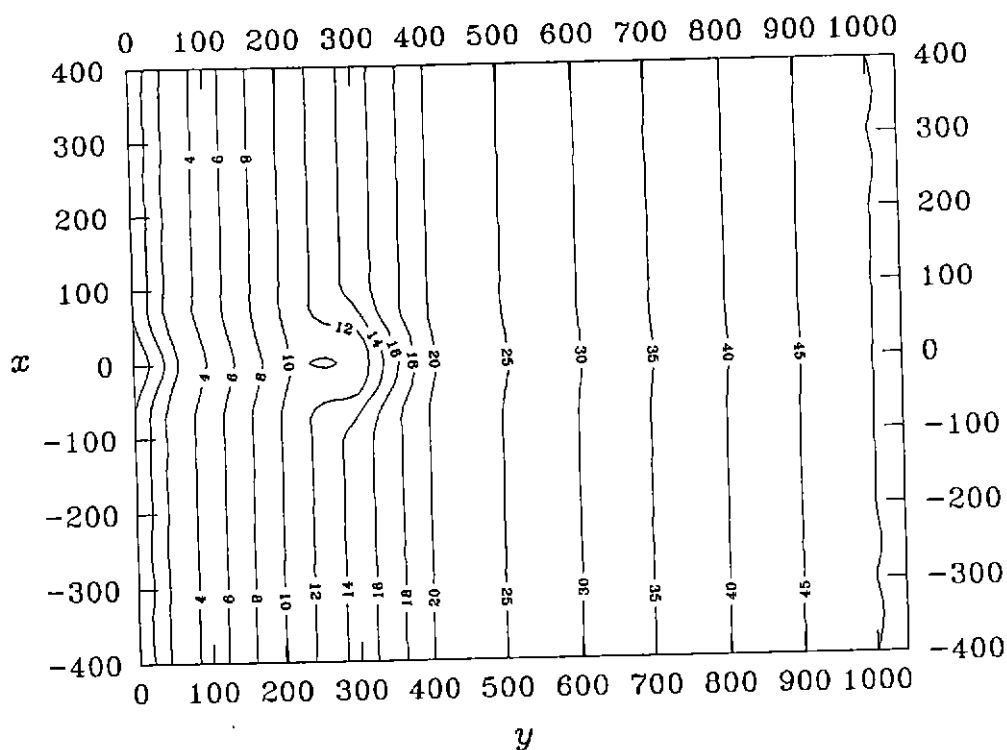


圖5-1 近岸區域等深線分佈圖

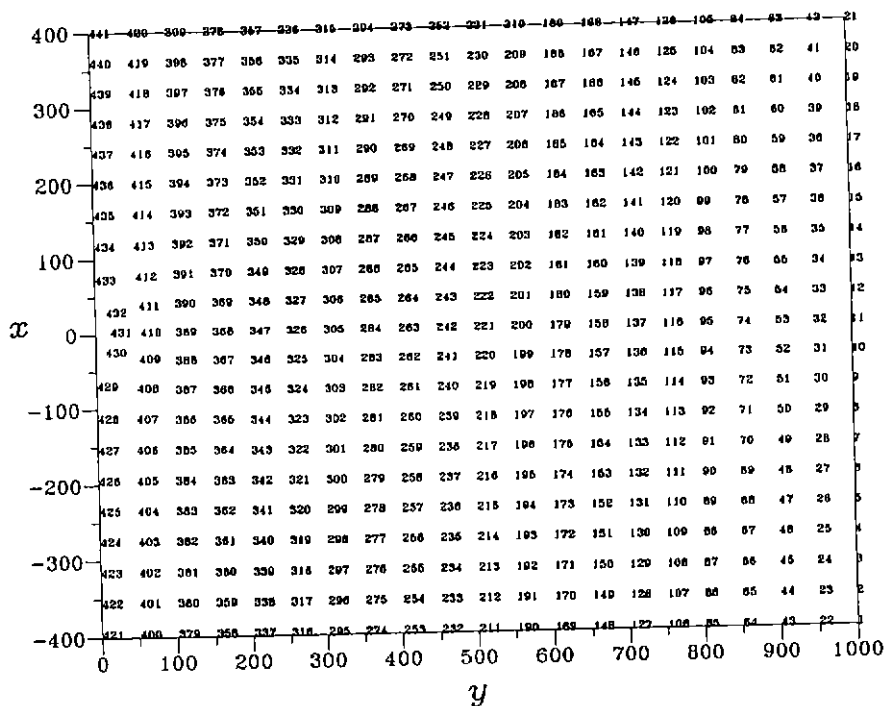


圖5-2a 近岸區域在(x,y)平面之網格分割示意圖

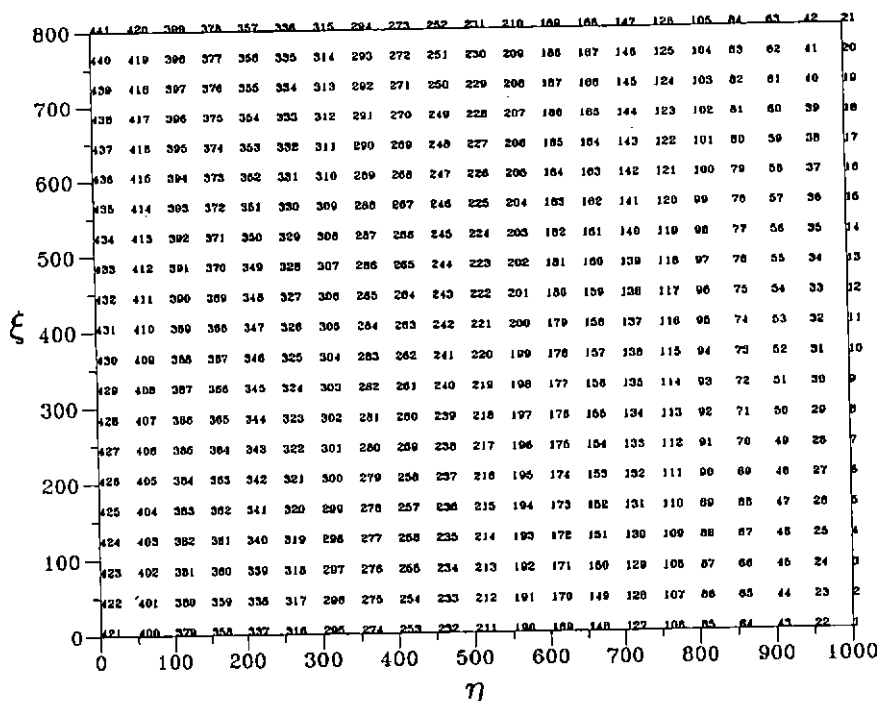


圖5-2b 近岸區域在 (ξ, η) 平面之網格分割示意圖

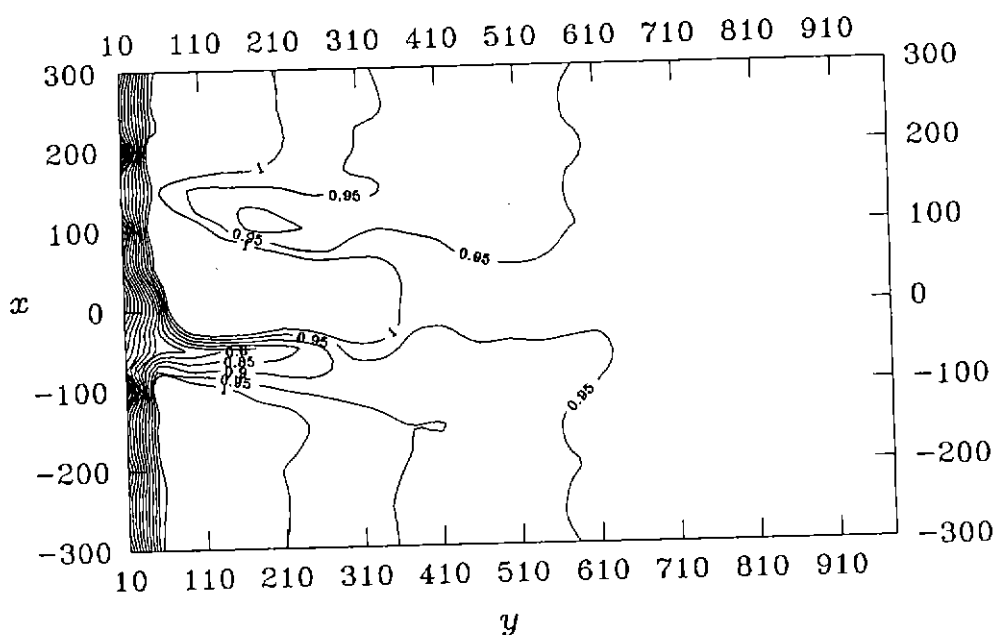


圖5-3 近岸區域等波高(米)分佈曲線圖

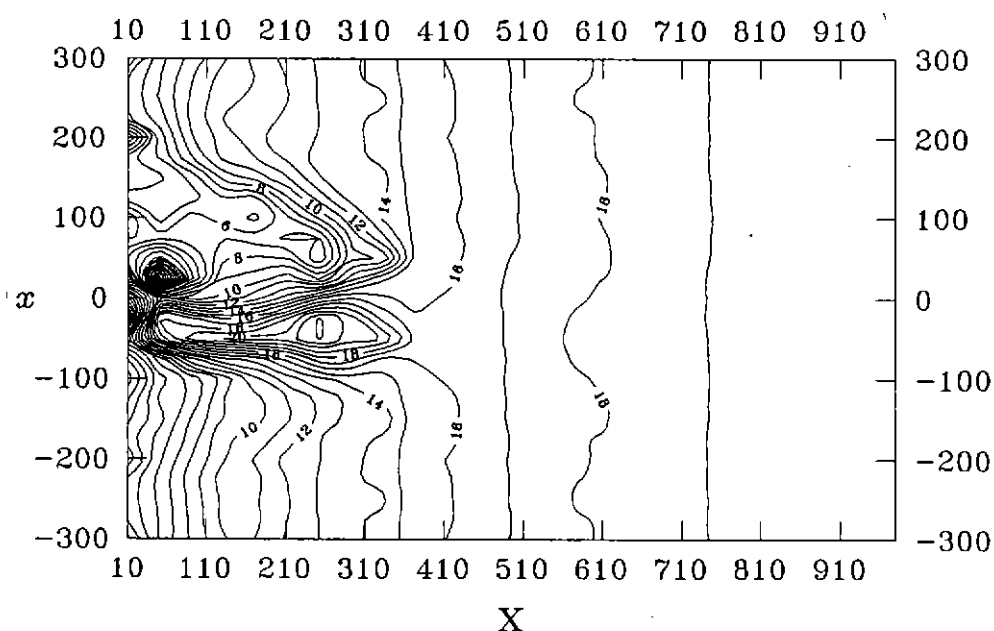


圖 5-4 近岸區域等波向角(度)分佈曲線圖

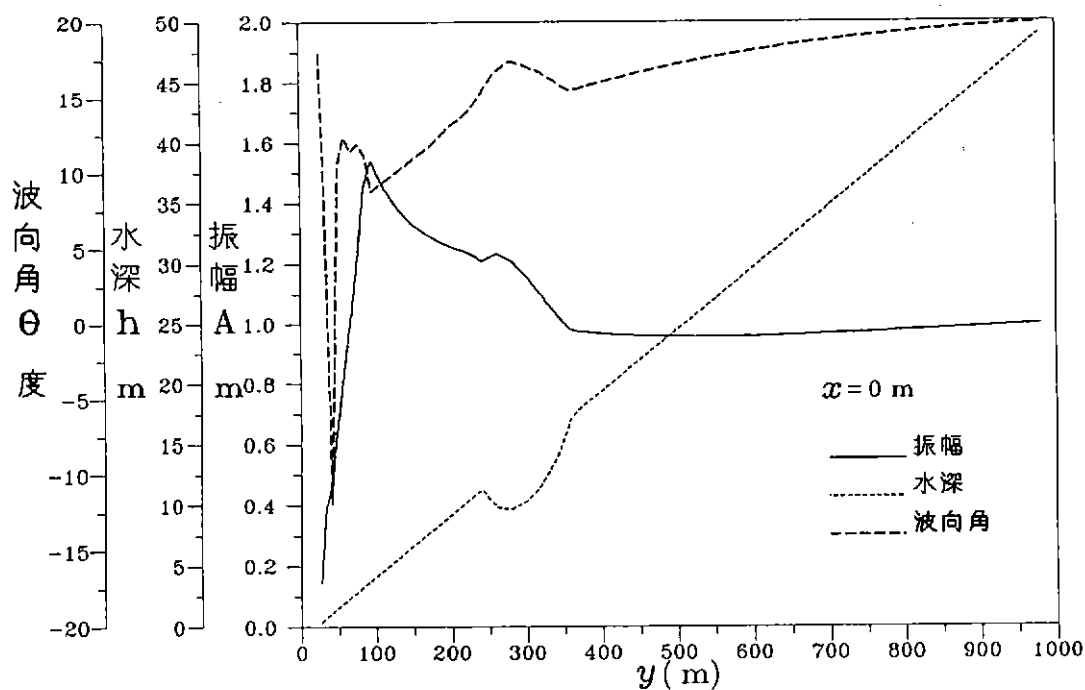


圖 5-5 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=0$)分佈曲線圖

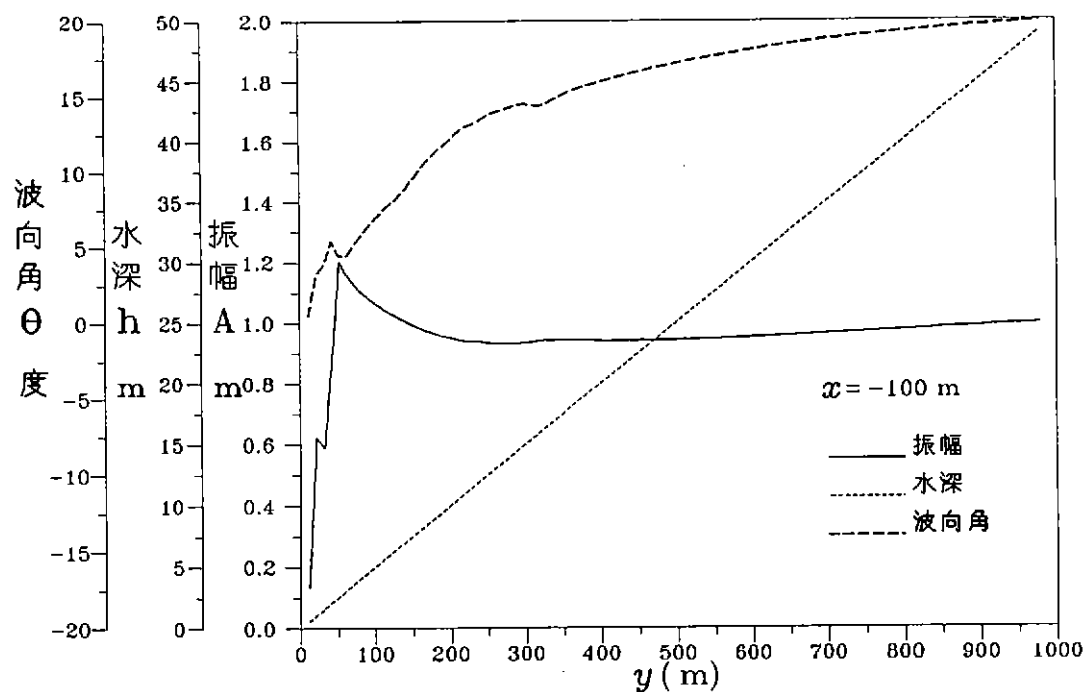


圖 5-6 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=-100$)分佈曲線圖

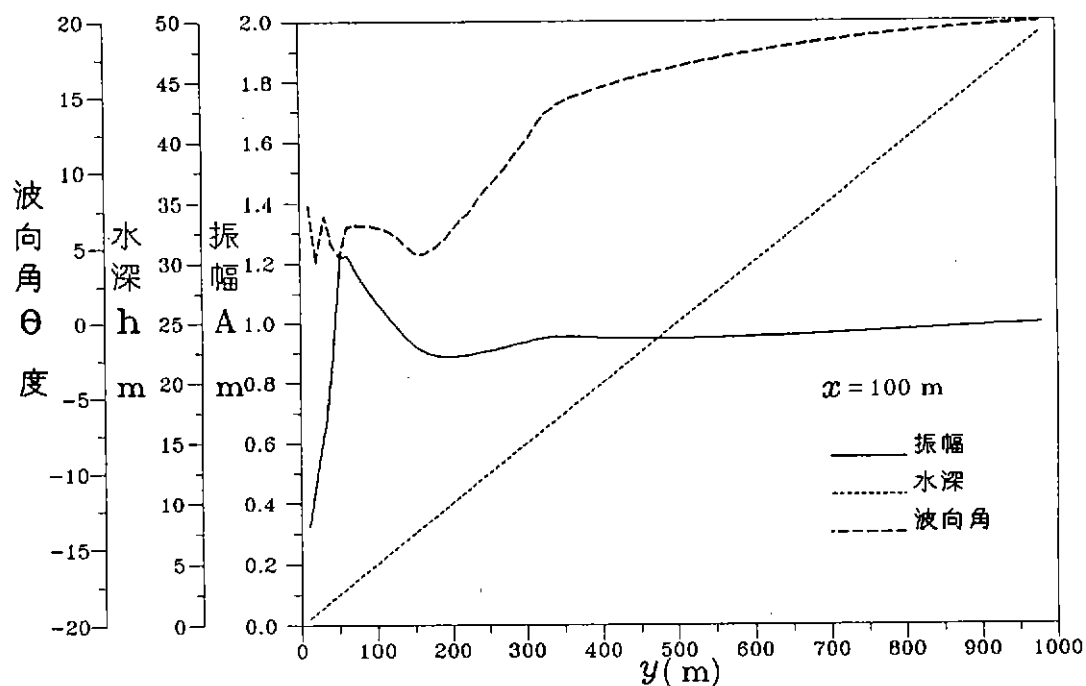


圖 5-7 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=100$)分佈曲線圖

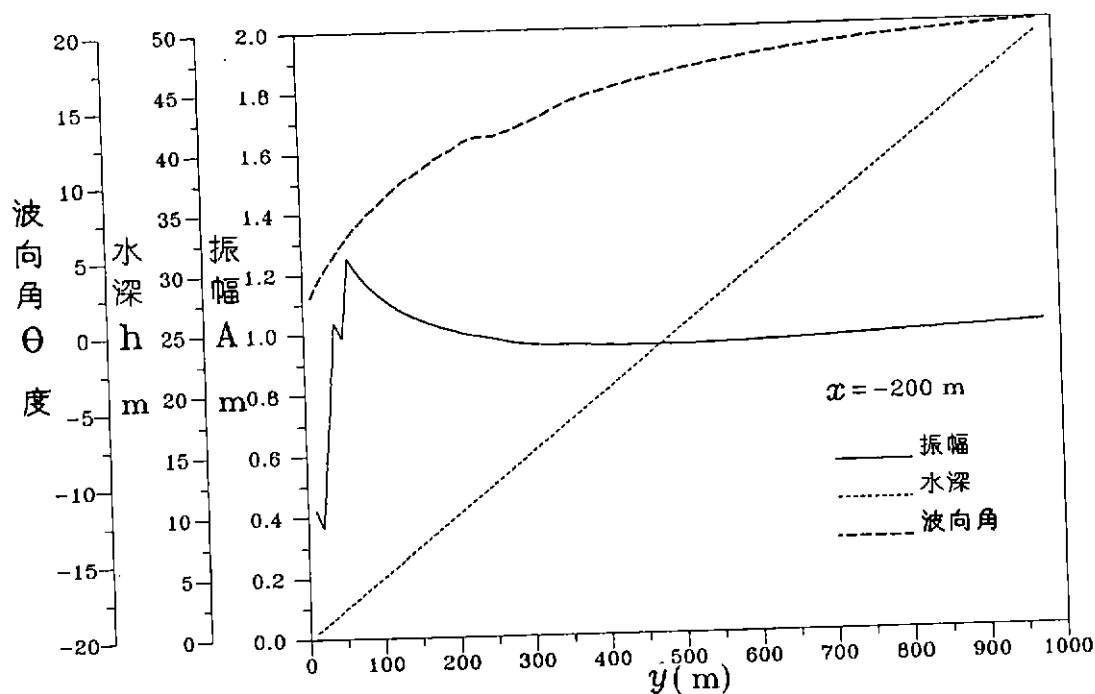


圖5-8 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=-200$)分佈曲線圖

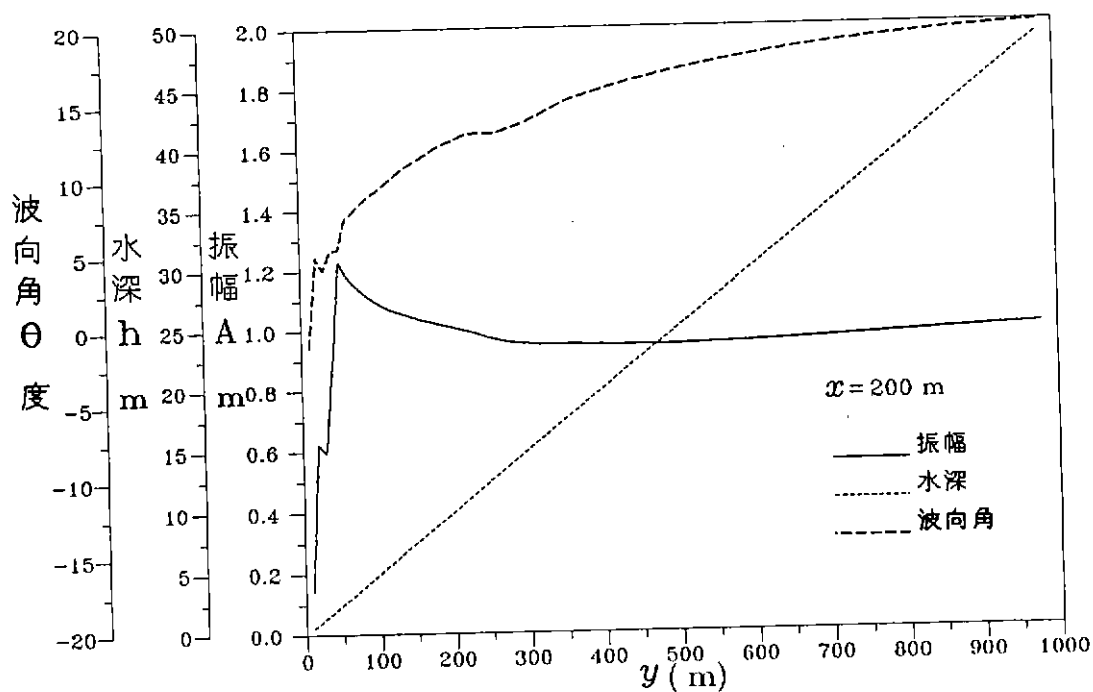


圖5-9 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=200$)分佈曲線圖

陸、近岸海域波浪數值推算模式

一、波浪數值推算模式

在港池波場計算，為引用 Sommerfed 輻射條件於海域無窮遠邊界上，數值計算時常將計算區域分割為有限港池區及外海區，例如 Tsay 及 Liu(1983)，歐等(1990)，而且外海區必需限定為等水深區。但外海區等水深假設，則常造成實際應用時，計算區域必需擴大，或無法引用之情形發生。為克服此些難題，我們引用上述兩種數值方法以完整求得實際波場。其原理為在有限港池區及外海區(如示意圖 6-1)，分別引用前述之有限元素法模式及有限差分法模式計算波場。外海區之外海線為入射波邊界，引用差分法計算波場至與有限港池區相鄰介界處 ∂A ，在介界處計算結果之波場則引用為有限港池區之入射波條件，有限港池區盡可能縮小範圍，以減少有限元素計算之網格數。

在介面邊界 ∂A 上，將引用類似蘇等(1991)局部型式輻射條件，以取代原來標準型式輻射條件(2.18)式。局部型式輻射條件為適當設定介面邊界 ∂A 使邊界上點滿足正交方向與散射波傳輸之方向相同，即在邊界 ∂A 上散射波 ϕ_s 滿足下列局部型式輻射邊界條件：

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} + ik_0 \phi_s = 0, \quad \text{on} \quad \partial A \quad (6.1)$$

因此計算區域之介面邊界 ∂A ，其波函數 ϕ_2 可分為入射波及散射波等二個成份波

$$\phi_2 = \phi_0 + \phi_s, \quad \text{on} \quad \partial A \quad (6.2)$$

其中 ϕ_0 為外海區引用差分法計算波場至與有限港池區相鄰介界處 ∂A 之波高， ϕ_s 為因港池效應在邊界 ∂A 上向外傳遞之散射波。

根據變分法(calculus of variation)之極小化原理，上述控制方程式，邊界條件及區域分割原理(包括邊界連續條件)，可得下列定態泛函數(stationary functional) J^s ：

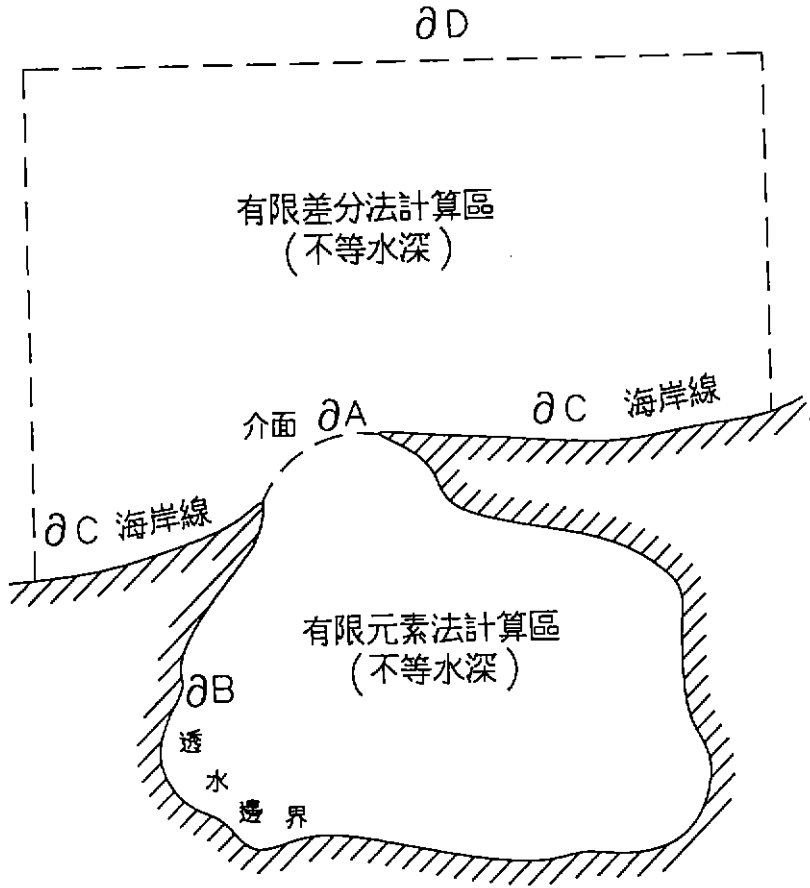


圖 6-1 波浪數值推算模式區域分割示意圖

$$\begin{aligned}
 J^s(f_2, f_s) = & \int \int_B \frac{1}{2} [C_2 C_{2g} (\nabla f_2)^2 - (C_{2g}/C_2 + i\sigma E_0) f_2^2] dA \\
 & + \int_{\partial A} \frac{1}{2} i k_0 C_2 C_{2g} f_s^2 d\ell \\
 & - \int_{\partial A} i k_0 C_2 C_{2g} f_2 f_s d\ell \\
 & - \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_0}{\partial n_2} d\ell \\
 & + \int_{\partial A} i k_0 C_2 C_{2g} f_0 f_s d\ell \\
 & - \int_{\partial B} \frac{i}{2} \alpha C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

將介面邊界 ∂A 上波函數 ϕ_2 與入射波 f_0 及散射波 f_s 等二個成份波之關係式(6.2)代入(6.3)式可化爲

$$\begin{aligned}
 J^s(f_2, f_s) = & \int \int_B \frac{1}{2} [C_2 C_{2g} (\nabla f_2)^2 - (C_{2g}/C_2 + i\sigma E_0) f_2^2] dA \\
 & - \int_{\partial A} \frac{1}{2} i k_0 C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell \\
 & - \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - i k_0 C_2 C_{2g} f_0 \right) d\ell \\
 & - \int_{\partial A} \frac{1}{2} i \alpha C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell \\
 & + Constant
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

同樣利用有限元素法原理，將有限港池區域Ⅱ之值域分割為N個三角形元素，每個元素之邊長以不超過1/10波長為原則，並用一組線性形狀函數(shape function) $\Psi_i^e, i=1,2,3$ 表示元素e之波函數 f_2^e ，波速 C_2^e 及群波速 C_{2g}^e 如(3.3a)、(3.3b)、(3.3c)。

將區域Ⅱ之每一局部元素波函數 f_2^e ，波速 C_2^e 及群波速 C_{2g}^e 值表示式(3.3)，代入泛函數(6.3)式，整理可得下列全區域之矩陣方程式

$$\begin{aligned}
 J^s(f_2, \mu) = & \frac{1}{2} \{f_2\}_{1 \times N} [K_1]_{N \times N} \{f_2\}_{N \times 1} \\
 & + \frac{1}{2} \{f_2^*\}_{1 \times p} [K_2]_{p \times p} \{f_2^*\}_{p \times 1} \\
 & + \{K_3\}_{1 \times p} \{f_2^*\}_{p \times 1} \\
 & + \frac{1}{2} \{f_2^\# \}_{1 \times M} [K_2]_{M \times M} \{f_2^\# \}_{M \times 1}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

式中第一項已知勁度矩陣 $[K_1]$ 及未知波函數向量 $\{f_2\}$ ，由有限港池區(區域Ⅱ)所有三角元素之區域性矩陣 $[K_1^e]$ 及向量 $\{f_2^e\}, e=1,2,\dots,N$ 所組成，定義如(3.5)、(3.6)、(3.7)及(3.8)。

式中第二項已知勁度矩陣 $[k_2]$ 及邊界 ∂A 上未知波函數向量 $\{f_2^*\}$ ，則由邊界 ∂A 上之p個線性元素 $e=1,2,3,\dots,p$ 區域性矩陣 $[K_2^e]$ 及 $\{f_2^{*e}\}$ 所組成：

$$\begin{aligned}
 I_2^e = & - \int_{\partial A^e} \frac{i}{2} k_0 C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell \\
 = & \frac{1}{2} \{f_2^{*e}\}_{1 \times 2} [K_2^e]_{2 \times 2} \{f_2^{*2}\}_{2 \times 1}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

式中

$$\begin{aligned}
 [K_2^e]_{11} &= ik_0 L_b^e \left(\frac{1}{5} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{30} C_{22}^e C_{2g2}^e \right) \\
 [K_2^e]_{22} &= ik_0 L_b^e \left(\frac{1}{30} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{5} C_{22}^e C_{2g2}^e \right) \\
 [K_2^e]_{12} &= ik_0 L_b^e \left(\frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{30} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{30} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g2}^e \right) \\
 [K_2^e]_{21} &= [K_2^e]_{12}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

其中 L_b^e 為線性元素 e 之長度。

C_{2i} 及 C_{2gi} , $i = 1, 2$ 分別為線性元素 e 兩端結點之值, 而線性元素 e 之形狀函數 ψ_i^e , $i = 1, 2$ 定義如式 (3.17)。

式中第三項已知向量 $\{K_3\}$ 則由下列表示式定義:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= - \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0 \right) d\ell \\
 &= \{K_3\}_{1 \times p}^t \{f_2^*\}_{p \times 1}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \{K_3\}_m &= -0.125 \{L_b^m [(\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_m + (\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_{m+1}] \\
 &\quad + L_b^{m-1} [(\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_m + (\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_{m-1}]\}, \quad 2 \leq m \leq p-1 \\
 &= -0.125 L_b^p [(\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_{p-1} + (\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_p], \quad m = p \\
 &= -0.125 L_b^1 [(\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_1 + (\frac{\partial f_0}{\partial n_2} - ik_0 C_2 C_{2g} f_0)_2], \quad m = 1
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

式中最後項已知勁度矩陣 $[K_4]$ 及邊界 ∂B 上未知波函數向量 $\{f_2^\#\}$, 則由邊界 ∂B 上之 M 個線性元素 $e=1, 2, 3, \dots, M$ 區域性矩陣 $[K_2^e]$ 及 $\{f_2^{\#e}\}$ 所組成, 其定義如式 (3.15)、(3.16)、(3.17) 之 $[K_6^e]$ 。

為簡化矩陣方程式我們將已知勁度矩陣 $[K_1]$, $[K_2]$ 及 $[K_3]$ 依結點位置合併為大勁度矩陣 $[K]$ 。已知向量 $\{K_3\}^t$ 補零併為向量 $\{b\}^t$

$$\{b\}_{1 \times N}^t = [\{0\}_{1 \times (N-p)}^t \{K_3\}_{1 \times p}^t] \tag{6.10}$$

因此矩陣方程式(3.4)可簡化為

$$J^s(f_2) = \frac{1}{2} \{f_2\}_{1 \times N}^t [K]_{N \times N} \{f_2\}_{N \times 1} + \{b\}_{1 \times N}^t \{f_2\}_{N \times 1} + constant \quad (6.11)$$

而定態泛函數 J^s 極小化產生於：

$$\frac{\partial J^s}{\partial f_{2i}} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots N \quad (6.12)$$

式中 $f_{2i}, i = 1, 2, 3 \dots N$ 為有限港池區域 II 之結點上波函數值。

將(6.11)代入(6.12)可得

$$[K]_{N \times N} \{f_2\}_{N \times 1} = \{b\}_{N \times 1} \quad (6.13)$$

這是一個包括 N 個未知數， N 個方程式之矩陣方程式，可由高斯消去法 (Gaussian elimination) 求解。

港池擴大率 R 我們定義為港內任意點 $\bar{x}$ 之振幅對外海遠處之入射波之振幅的比值，表示如下：

$$R(\bar{x}) = \left| \frac{f_2(\bar{x})}{f_0(\bar{x}_0)} \right| \quad (6.14)$$

式中 $\bar{x}$ 港內任一點， $\bar{x}_0$ 為外海遠處任一點。

二、例子說明

考慮一矩形港池及不規則海岸線之近海區 (如附圖 6-2)，其水深變化如附圖 6-3 之等水深分佈曲線圖所示，港池長 432 米，寬 100 米，港內平均水深為 15 米，假設外海邊界 ∂D 以外為深水區，一規則波由無限遠進入海域，此處將計算區分別港外區 (區域 I) 及港池區 (區域 II) 兩個區域 (∂A 為二者之介面)，港外區將引用有限差分法模式計算波場分佈至介面 ∂A 處，港池區部分將引用有限元素法模式，計算整個港區之波場分佈。外海兩側邊界 ∂E 層開放邊界，海岸線邊界 ∂C 假設為消波甚良好之完全吸波之斜坡邊界 (反射係數為零)，港內區之港池岸壁，皆假設為部分反射邊界 (反射係數為 0.95)。圖 6-4 為入射波週期為 10 秒，並以 20° 斜向進入海域之整區等波高分佈圖。圖 6-5 為入射波週期為 15 秒，並以 20° 斜向進入海域之整區等波高分佈圖。

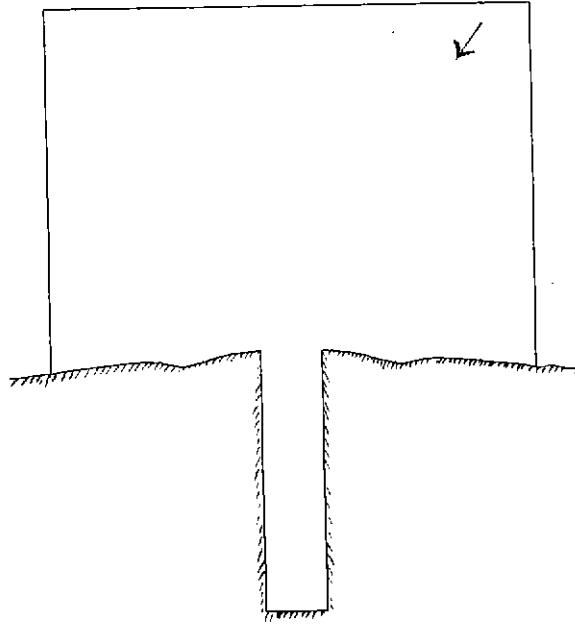


圖 6-2 矩形港池及不規則海岸線之近海區示意圖

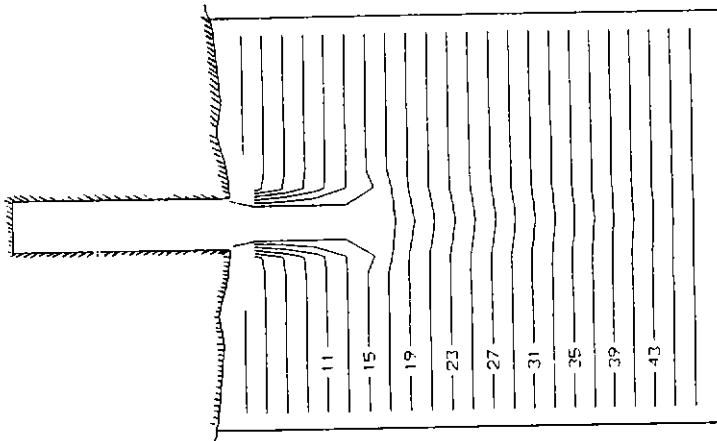


圖 6-3 近岸區域等水深(米)分佈曲線圖

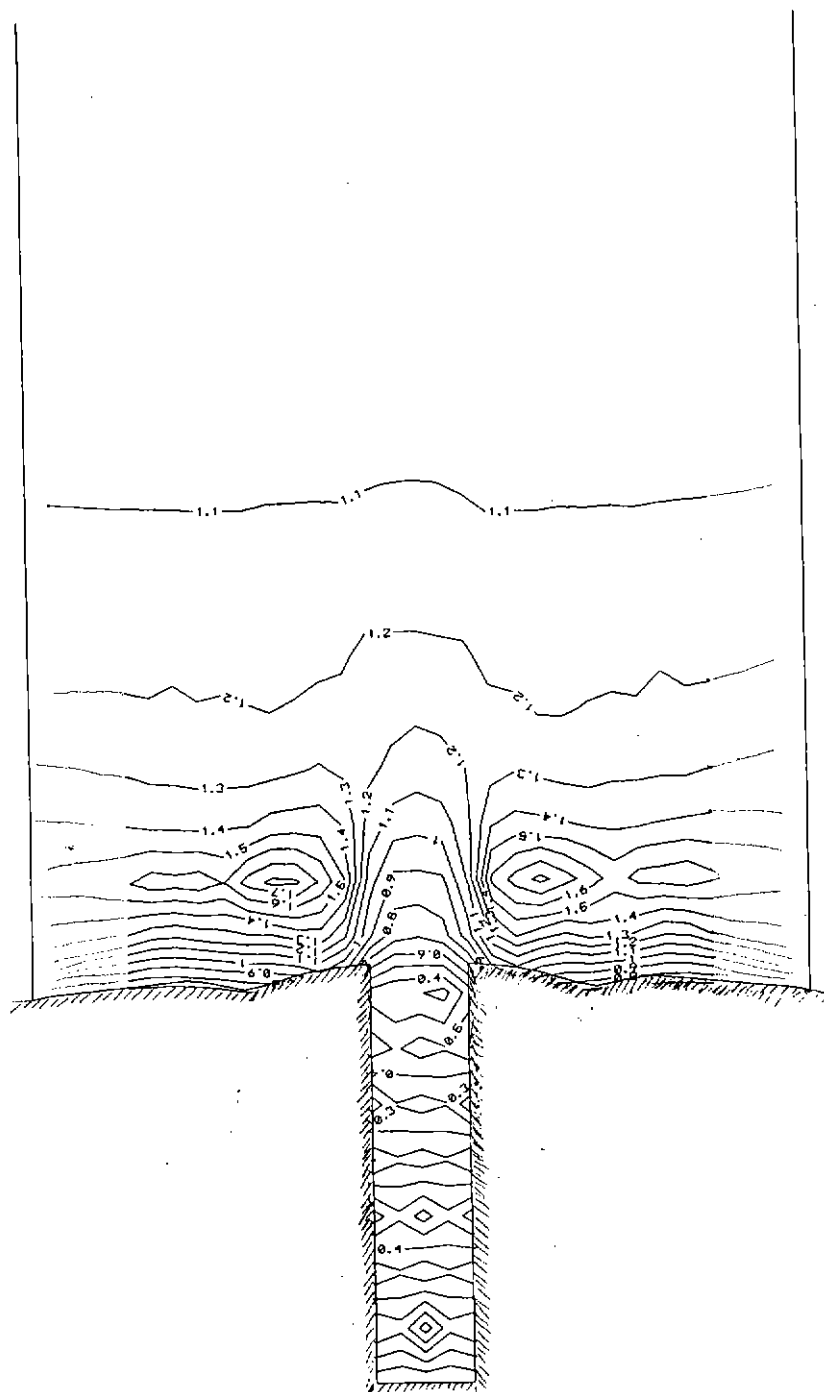


圖 6-4 入射波週期為 10 秒及入射角為 20° 之整區等波高分佈圖

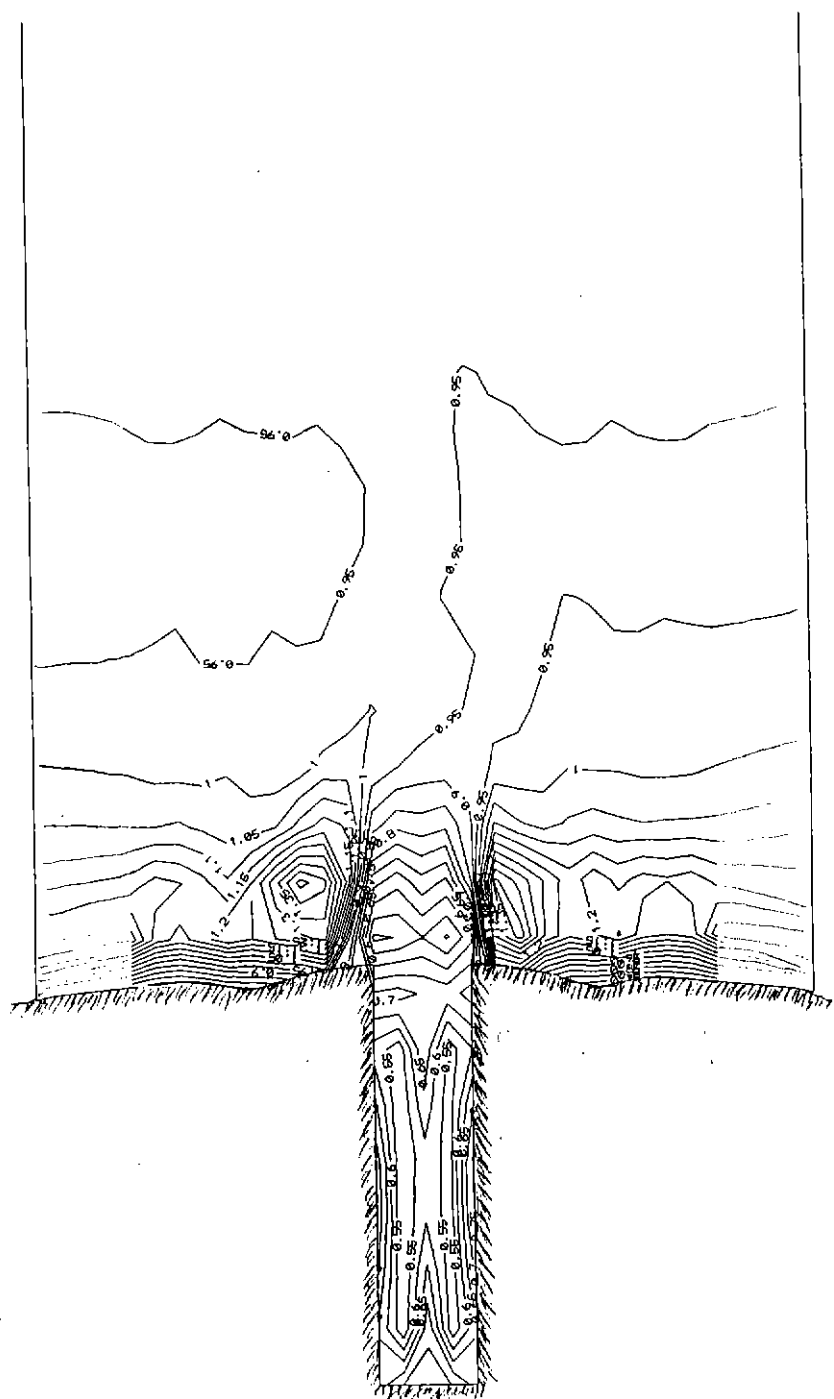


圖 6-5 入射波週期為 20 秒及入射角為 20° 之整區等波高分佈圖

柒、討論及結論

- 一、推算波浪從外海傳遞至近岸海域之波場分佈，如果海岸線為平緩沙灘，反射波不明顯之情形，引用拋物線型態緩坡方程式建立之有限差分法模式甚為適用。在應用貼壁座標轉換，其可取較大之網格點，將節省甚多之記憶體，遠較有限元素法模式為佳。
- 二、推算等水深不規則形狀港池之波場分佈或港池共振曲線變化，可引用較簡易之邊界元素法模式。若港池水深為緩變，則應引用有限元素法模式。在推算港池波場，則不宜使用有限差分法模式（拋物線型態方程式）。邊界元素法模式及有限元素法模式，需要港口外之區域為等水深及海岸線平直無限延伸之理想條件。若無法滿足此二個理想條件，計算之結果將存在部分之誤差。
- 三、本文建立之波場推算模式，乃結合有限差分法模式及有限元素法模式二者之優點。整個計算區可為不等水深，外海區以有限差分法模式由外海深水區推算至適當港口處，由港口處至港池之區域再引用有限元素法模式計算波場分佈。此方法將可改進有限元素法模式，在港口外為等水深及海岸線皆需為平直之不實際假設條件。
- 四、本模式未來將採用海岸防災大型計畫，其相關計畫之現場實測資料或模型試驗結果，進一步驗證。

參考文獻

1. Baker, B. B. and E. T. Copson, "The Mathematical Theory of Huygen's Principle", Oxford University Press, London (1950).
2. Berkhoff, J. C. W., "Computation of Combined Refraction Diffraction", Proc. 13th Coastal Engineering Conference, Vol. 1 (1972).
3. Booij, N., "Gravit Waves on Water with Non-Uniform Depth and Current", thesis present to the Technical University of Delft, The Netherlands, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (1981).
4. Chen, H. S. and C. C. Mei, "Oscillations and Wave Forces in an Offshore Harbor", Ralph M. Parsons Laboratory, Report No. 190, MIT, August (1974).
5. Chen, H. S., "Effects of Bottom Friction and Boundary Absorption on Water Wave Scattering", Appl. Ocean Research, Vol. 8, pp.99 ~ 104 (1986).
6. Chwang, A. T., S. H. Ou and C. H. Su, "Wave Oscillations inside Porous-Wall Harbors", Proc. of 5th Conf. on Hydr. Eng., Taiwan, R.O.C. pp.853 ~ 868 (1990).
7. Ho, R. T. and H. Bomze, "Basin Oscillations in an Offshore Harbor", Paper No. OTC 2331, Proceedings of the Offshore Technology Conference, Vol., 11, Houston, Texas, pp.853 ~ 969 (1975).
8. Hwang, L.S. and E.O. Tuck, "On the Oscillation of Harbors of Arbitrary Shape", J. Fluid. Mech. Vol. 42, No. 3, pp. 447 ~ 464 (1970).
9. Lee, J.J., "Wave-Induced Oscillations in Harbours of Arbitrary Shape", Report KH-R-20, W. M. Keck laboratory of Hydraulics and Water Resources, California, Institute of Technology, Berkeley, Calif. (1969).
10. Lee, J. J., "Wave-induced Oscillations in Harbours of Arbitrary Geometry", J. Fluid Mec., Vol. 45, pp. 375 ~ 394 (1971).

11. Lee, J. J. and F. Raichlen " Oscillations in Harbors with Connected Basins ", Report KH-R-26, W. Keek Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology (1971).
12. Lee, J. J. and F. Raichlen , "Oscillations in Harbors with Connected Basins," J. Waterw. , Har. and Coastal Eng. Div. , Vol. 98, No. WW3, pp.311 ~ 332 (1972).
13. P.L.-F. Liu, "Parabolic Wave Equation in Surface Water Waves", Miscellaneous Report CERC 86. U.S. Army, Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, MS (1986).
14. P.L.-F. Liu, "Wave Transformation " ,in B. LeMehaute and D.M. Hanes (eds.), The Sea Vol. 9: Ocean Engineering Science, Wiley, New York (1989).
15. P.L.-F. Liu and T., -K. Tsay, "Numerical Prediction of Wave Transformation", J. Waterway Port Coastal Ocean Eng. ASCE, Vol. 114, pp.237 ~ 247 (1988).
16. Lozano C. and T. K. Tsay , "Refraction-Diffraction Model for Linear Surface water Waves", J. Fluid Mech. Vol. 101 , pp.705 ~ 720 (1980).
17. Radder, A. C. , "On the Parabolic Equation Method for Water-Wave Propagation " , J. Fluid Mech. Vol. 95 , pp.159 ~ 176 (1979).
18. Segerlind L. J. , Applied Finite Element Analysis, Pentech Press London (1974).
19. Tsay, T. K. and P. L- F. Liu , "Numerical Solution of Water Wave Refraction and Diffraction Problems in the Parabolic Approximation " , J. geophys. Res. , Vol. 87 pp. 7932 ~ 7940(1982).
20. Tsay, T. K. and P. L- F. Liu , "A Finite Element Model for Wave Refraction and Diffraction " , Appl. Ocean Research ,Vol. 5, pp.30 ~ 37 (1983).
21. Tsay, T., K. , W. Zhu and P. L-F. Liu , "A Finite Element Model for Wave Refraction , Diffraction ,Reflection and Dissipation", Applied Ocean Research

- , Vol. 11, No1. pp.33 ~ 38 (1989).
22. Tsay, T., B. A. Ebersole and P. L-F. Liu, "Numerical Modelling of Wave Propagation Using Parabolic Approximation with a Boundary-Fitted Coordinate System", Inter. J. for Num. Methods in Eng., Vol. 27, pp.37 ~ 55 (1989).
 23. 林銘崇、謝宗誠, 「波浪折射-繞射之有限-邊界元素解析」, 中華造船工程學刊, 第四期, 第131 ~ 137頁(1985).
 24. 林銘崇、許永誠, 「波浪折射-繞射與海流共同效應之有限-邊界元素解析」, 國立台灣大學造船工程學研究所, Rept. No. 227 (1985).
 25. 周宗仁、林炤圭, 「應用邊界元素法解析任意地形及水深之港池水面波動問題」, 第八屆海洋工程研討會, 第111 ~ 129頁(1986)。
 26. 周宗仁、林炤圭, 「任意反射率防波堤或岸壁的港池水面振動數值分析」, 第十一屆海洋工程研討會, 第365 ~ 381頁(1989)。
 27. 周宗仁、韓文育, 張景程, 「任意形狀、水深及反射率港池的水面振動實例」, 第十四屆海洋工程研討會, 第423 ~ 443頁(1992a)。
 28. 周宗仁、韓文育、朱忠一, 「消波式碼頭對港內水面振動之影響」, 第六屆水利工程研討會, 第668 ~ 679頁(1992b)。
 29. 陳柏旭、蔡丁貴「局部輻射邊界條件在水波數值模式上應用」, 中華民國第十二屆海洋工程研討會論文集, 第1 ~ 18頁(1990)。
 30. 歐善惠、林西川、林火旺、蘇青和, 「不等水深多孔岸壁港池之共振模式」, 中華民國第十二屆海洋工程研討會論文集, 台中, 第74 ~ 94頁(1990)。
 31. 蘇青和、歐善惠、章梓雄, 「多孔岸壁港池之波能消散現象」, 港灣技術, 第七期, 第1 ~ 24頁(1992)。
 32. 蘇青和、蔡丁貴、歐善惠, 「數值方法及輻射邊界在港池共振應用之探討」, 中華民國第十三屆海洋工程研討會論文集, 第23 ~ 37頁(1991)。

誌 謝

本計畫承國家科學委員會補助，計畫編號：NSC82-0414-P-124-001-B，謹此誌謝，承數學模式組同仁陳毓清小姐之論文繕打，併於此致謝。