

波與旋性流及亂流交互作用研究

計畫主持人：徐進華

協同主持人：李勇榮

參與人員：吳基

波與旋性大尺度流交互作用現象

徐進華

摘要

本研究討論重力波與旋性大尺度流交互作用現象,我們假設波向和流向位在同一條直線上,故流場爲二度空間流,其大尺度流在水平方向爲緩慢變化,且在垂直方向可爲一強大的剪流,在此情況下,波浪場仍如 Shrira (1993) 所提議具有 'near-potentiality' 性質,故我們先利用 Shyu & Phillips (1990) 的方法求出非旋性流部份的解,再利用此解計算由它作用於大尺度流中不均勻旋度所產生旋性擾動的解,此兩種解皆可經由疊代演算過程改善其準確度,故目前的理論實際可適用於旋度在垂直方向變化更劇烈的狀況。

由於目前的解包含波在行進過程中的振幅變化情形,故可用來探討旋性波的作用守恆性質,其結果顯示,當旋性與非旋性的軌跡速度比值超過流在水平方向的變化比率甚多時,波作用守恆定律無法適用或我們無法定義適當的作用密度,但直接利用目前的解計算振幅變化率,可獲得如以往非旋性波的解相同的準確度。

Interactions between Waves and Larger-Scale, Rotational Currents

Jinn-Hwa Shyu

ABSTRACT

The interaction between linear gravity waves and larger-scale currents with arbitrary distribution of vorticity is considered for the case when waves and currents are collinear and the flow fields are therefore two dimensional. The currents vary slowly in the flow direction and their vertical variation (i.e. the vorticity and its variation) can be very rapid. Even in this case, the wave fields, as suggested by Shrira (1993), are very close to potential ones, so that the technique of Shyu & Phillips (1990) is applied in the calculation of the irrotational part of the wave motion, from which the influences of the nonuniform vorticity in the larger-scale currents are subsequently derived. All of these solutions can be improved by an iterative algorithm, ensuring that the present approach can remain valid for an even more severe variation of vorticity.

In this theory, the modulations of amplitudes and wavelengths due to the slow variation of the current velocity along the surface are also determined, from which the wave action conservation properties can also be examined. The results indicate that when the ratio of the rotational orbital velocity to the irrotational one becomes much greater than the proportional rate of change of the surface current velocity, the action conservation principle will fail to describe the variation of amplitudes accurately or even the wave action density cannot be defined adequately in this case. Nevertheless, the present solution can provide the modulation rate of the rotational waves directly with the same accuracy as the previous solutions have for the irrotational waves.

誌謝

本文的部份內容爲作者以前在 Professor O. M. Phillips 指導下進行研究所獲得者,另外,董啓超教授在民國八十年暑假來台與作者共同研究所獲得的結果,對目前的研究也有很大的幫助,爲此作者敬表謝意。本研究的後續工作是在港研所八十三年度研(七)計劃經費支持下完成,故對台灣省政府及省交通處也特表謝意。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
一. 前言	1
二. 緩變波與旋度均勻流交互作用理論	3
三. 緩變波與旋度不均勻流交互作用理論	11
四. 例解	16
五. 波作用守恆性質	20
六. 結論	24
參考文獻	25

一．前言

在海洋中，特別是近岸，波一般皆受潮流，洋流或河口排放流顯著影響，有關波與非旋性大尺度流交互作用的理論目前已有很大的進展(如 Longuet-Higgins & Stewart, 1960; Whitham, 1974; Smith, 1975; Shyu & Phillips, 1990)，但當流具有任意旋度分佈時，行進在其上波的特性至今尚未為人們所清楚瞭解，有關以往波流交互作用研究的回顧請參考 Peregrine (1976) 和 Peregrine & Jonsson (1983)。

當大尺度流中的旋度為均勻分佈時，波的運動仍將為非旋性，在此種情況下，Jonsson, Brink-Kjaer & Thomas (1978) 曾利用 average Lagrangian 方法導出波浪振幅變化的關係式(即波作用守恆方程式)。當旋度在垂直方向為任意分佈時，Thomas (1981) 曾針對波和流性質在水平方向皆為均勻(故波的振幅與波長在水平方向不變)的狀況計算波運動的數值解，Thomas (1990) 在類似的情況下甚至計算非線性波的數值解，但這些數值解和其他數值解一樣，無法清楚顯示不均匀旋度對波浪影響的基本特性。

有關解析解方面，當大尺度流中的旋度在垂直方向為任意分佈時，Kirby & Chen (1989) 導出線性波的離散關係式，此解可清楚地顯示波的傳遞速度與流在垂直方向的分佈間的關係，但他們的理論僅針對‘weak vorticity’的狀況，此項限制在最近 Shrira (1993) 所導出的解析解中已可完全免除。Shrira 以極嚴密的理論，不但導出離散關係式，且導出由波所引起流速分佈兩者的正確解，此項理論雖基於波浪場為‘near-potentiality’(但大尺度流中的 vorticity, 甚至其梯度，皆可以很大)的觀念，但其解應可如作者所預期適用在典型的海洋條件下(本文的計算結果亦可做為其佐証)。

Kirby & Chen (1989) 以及 Shrira (1993) 解的形式皆為某一個小參數的級數，在本研究中我們將採用另一種方法求解。由於當大尺度流中的旋度為均勻分佈時，即使此旋度很大，波的擾動仍為非旋性，再加上波的性質受平均水面上的流速及其旋度影響最大(有強大剪流存在的表面層的效應暫不考慮)，且在水面以下波的軌跡速度迅速減小，因此即使大尺度流中的旋度為不均匀分佈，其旋度在平均水面以下的變化對波的影響應屬次要，此種觀念類似於 Shrira (1993) 的‘near-potentiality’，若其屬實，則我們可以用平均水面上的流速及其旋度，先假設旋度為均勻分佈，求非旋性波的解，再利用所獲得的解求

由此解所代表的擾動所引發旋性流的解(在此一階段,由旋性流自身所導致的旋度傳送可忽略)。接下來我們考慮由於旋性流的存在,邊界條件將因而改變,因此原非旋性流部份的解應加以修改,接著我們再利用修改後的非旋性流的解以及旋性流的初解求更準確之旋性流的解,如此反覆計算,同樣可求出不均勻旋度對波浪運動效應的正確解。

由於在此疊代演算中,每一回僅為改進初解中一些參數的估計值,故即使是初解已可充份顯示此種效應的各種特性,此點與由真正數值方法所獲得的解不同,甚至較 Kirby & Chen (1989) 以及 Shrira (1993) 的級數解更能清楚顯示解的特性。另外,更重要的是,由於目前的方法在求非旋性流部份時,是將 Shyu & Phillips (1990) 的理論加以延伸,故其解不但顯示在任何一點當地的波長,波速及軌跡速度,並顯示這些波浪性質(包括水面位移振幅)在水平方向(因流場改變)作緩慢變化的速率,故由目前的理論我們可以對在有旋性流存在情況下的波作用守恆性質詳加討論。

在第二節裏我們將 Shyu & Phillips (1990) 的解延伸至大尺度流中含均勻旋度的狀況,以此解為基礎,在第三節裏我們進一步求旋性波完整的解,利用此解在第四節裡我們以一個假設的流場對波浪運動實際加以計算並解說。當瞭解了旋性波解中各項的意義及大小後,在第五節裏我們即討論此解中的波作用守恆性質,並找出波作用密度及其群速度在目前情況下適當的近似,以及它們的限制。

二．緩變波與旋度均勻流交互作用理論

當大尺度流中的旋度為均勻分佈，且波行進方向與流向平行時，因流場為二度空間流，故由遠方傳來的波浪所產生的擾動將仍為非旋性（因原有的旋度在目前的情況下不會因對流以及旋線（vortex lines）的旋轉、拉長或收縮而產生變化），故由波浪所引起的流仍可用流勢函數（velocity potential function） ϕ 描述，且 ϕ 滿足 Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

在此種情況下，目前的理論與 Shyu & Phillips (1990) 不同者為動力邊界條件此時不得使用伯努利方程（Bernoulli's equation），而須直接由運動方程獲得，後者當大尺度流為穩定（steady）時可表為

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(W + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = -\omega \times \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

其中 U 和 W 代表大尺度流在 x 和 z 方向的速度分量， $\mathbf{u}$ 代表大尺度流和波兩者流速的總和， ω 代表各點的旋度（目前為定值），利用上式我們可獲得在自由表面上沿平均水面方向（定為 x 軸）的分量近似為

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[g\bar{\zeta} + \frac{1}{2}U^2 \right] + \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta \cos \theta + \eta U \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \right\} = -\omega_y \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (2.3)$$

上式代表線性波近似，故式中 U 、 $\partial U / \partial z$ 、 $\partial \phi / \partial t$ 、和 $\partial \phi / \partial x$ 等皆取在平均水面上的值做為近似，在此一近似下，(2.2) 式中的 $\nabla (gz + p/\rho)$ 在自由表面上沿平均水面方向的分量可近似表為 $\partial(g\bar{\zeta} + g\eta \cos \theta) / \partial x$ ，而 $\bar{\zeta}$ 和 η 的定義可參考圖一， ω_y 則為 ω 在 y 方向的分量。

圖一顯示 (x, z) 座標實際為一曲線座標系統，但在平均水面上由此曲率所產生的效應目前可忽略，在此我們且忽略表面張力的效應，有關各項量級的討論可參考 Shyu & Phillips (1990)。

上式中第一個中括號內的項皆不隨時間變化，故它們本身需互相平衡，因此由(2.3)可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + g' \eta + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta U \omega_y \right] = -\omega_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (2.4)$$

其中 $g' = g \cos \theta$ 為 Phillips (1981) 所提議的有效重力加速度 (effective gravitational acceleration), 此一有效加速度原本尚包含一代表平均水面彎曲效應的項, 此項在討論短波行進于一有限振幅長波上時須加以考慮, 但目前上式可近似代表行進在一大尺度流上波浪場的動力邊界條件, 其準確度與一般緩變波浪的理論一致。

另一方面, 在有流存在情況下, 波的運動邊界條件可表為

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = W + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{at} \quad z = \eta.$$

若波的振幅很小, 我們同樣將上式對 $z = 0$ 做泰勒級數展開, 並忽略高階項, 因此得到

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = \eta \frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{at} \quad z = 0.$$

由連續方程 $\partial W / \partial z = -\partial U / \partial x$, 故上式又可改寫為

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \eta \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0. \quad (2.5)$$

由上式與 (2.1) 和 (2.4) 式, 理論上我們可決定 ϕ 和 η 此兩個未知函數, 但為獲得一可均勻適用於每一點且具有一明白形式的近似解, 我們不直接求解 (2.1) 式, 僅利用後者將 (2.4) 和 (2.5) 式組合成一僅包含 η 的方程式, 當獲得 η 解以後我們可進一步求 ϕ 的近似解。

由於

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = 0,$$

故若波的相位往正 x 方向增加, 則必須

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = i \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (2.6)$$

否則水愈深波的擾動將成指數成長, 此一關係式即使在一彎曲座標系統中, 亦適用於 $z = 0$ 的位置 (參考 Shyu & Phillips, 1990), 且當波被流反射現象發生時

,由於入射波和反射波兩者的相位皆向同一方向行進(能量則朝相反方向進行),故上式可同時適用於入射波和反射波兩者。利用上式我們可將(2.4)和(2.5)這兩個邊界條件組合成一僅包含 η 這個未知函數的微分方程。

首先由波的運動守恆方程(kinematical conservation equation)知,當大尺度流為穩定時,波的觀測頻率(observed frequency) n_0 在各點皆相等,且入射波和反射波有相同的觀測頻率,因此

$$\eta, \phi \sim \exp(-in_0 t)$$

故(2.4)和(2.5)可改寫為

$$-in_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + g' \frac{\partial \eta}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + U \omega_y \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \omega_y \frac{\partial U}{\partial x} = in_0 \omega_y \eta \quad \text{at } z = 0, \quad (2.7)$$

$$-in_0 \eta + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \eta \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{at } z = 0. \quad (2.8)$$

由(2.6)和(2.8),

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = i \frac{\partial \phi}{\partial z} = n_0 \eta + iU \frac{\partial \eta}{\partial x} + i\eta \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{at } z = 0,$$

將其代入(2.7)可得

$$iU^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(2n_0 U + g' + 3iU \frac{\partial U}{\partial x} + U \omega_y \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(-in_0^2 + 2n_0 \frac{\partial U}{\partial x} - in_0 \omega_y + \omega_y \frac{\partial U}{\partial x} \right) \eta = 0. \quad (2.9)$$

上式中 $i\eta U \partial^2 U / \partial x^2$ 和 $i\eta (\partial U / \partial x)^2$ 兩項被省略,它們的量級曾在 Shyu & Phillips (1990) 中詳加討論,目前我們僅指出,由於大尺度流在一個波長距離內僅做一小比率的變化,故含 $\partial^2 U / \partial x^2$ 或 $(\partial U / \partial x)^2$ 的項比含 $\partial U / \partial x$ 的項小一個量級,同理,含 $\partial U / \partial x$ 的項亦比僅含 U 的項或其它主要項小,但這些次小的項已和我們有興趣的波浪振幅與波長的變化率相當,故必須保留。

上式代表一個二階常微分方程,且我們可以將各係數依實數和虛數劃分為

$$\left. \begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{1}{U^2}(2n_0U + g' + U\omega_y), \\ k_1 k_2 &= \frac{1}{U^2}(n_0^2 + n_0\omega_y), \\ P &= -2i\frac{n_0}{U^2}\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\omega_y}{U^2}\frac{\partial U}{\partial x}, \\ Q &= \frac{3}{U}\frac{\partial U}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中 k_1 和 k_2 由後面的結果可看出實際代表入射波和反射波的波數 (wave-number)。利用以上定義, (2.9) 可改寫為

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + [-i(k_1 + k_2) + Q]\frac{\partial \eta}{\partial x} + [-k_1 k_2 + P]\eta = 0. \quad (2.11)$$

上式中各係數, 包括 k_1 和 k_2 , 皆為緩慢變化的函數 (即非定值), 故很難獲得準確且具有封閉形式的解, 而為求其近似解, 一個有效的方法是利用變數轉換 (change of variable) 消去其一階微分項, 為達到此目的, 我們令

$$\eta = v(x)e^{-in_0t} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int [-i(k_1 + k_2) + Q] dx \right\} \quad (2.12)$$

$v(x)$ 即代表新的相依變數 (dependent variable), 將 (2.12) 代入 (2.11), 且忽略所有包含 $\partial^2 U / \partial x^2$ 和 $(\partial U / \partial x)^2$ 的項, 可得

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + v(H + G) = 0, \quad (2.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2, \\ G &= \frac{i}{2} \frac{g'}{U^3} \frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

(2.13)、(2.14) 的形式和 Shyu & Phillips (1990) 中的 (6.5)、(6.6) 式完全相同, 故 (2.13) 式的均勻適用漸近解 (uniformly valid asymptotic solution) 應為

$$v(x) \approx A_0 A_i(-r) - C_0 A'_i(-r), \quad (2.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} &= -\int_0^x H^{\frac{1}{2}} dx, \\ A_0 &= \left(\frac{r}{H}\right)^{\frac{1}{4}} \cos\left(-\int_0^x \frac{1}{2}G/H^{\frac{1}{2}} dx\right), \quad C_0 = r^{-\frac{1}{4}}H^{-\frac{1}{4}} \sin\left(-\int_0^x \frac{1}{2}G/H^{\frac{1}{2}} dx\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$Ai(-r)$ 和 $Ai'(-r)$ 代表 Airy function 和其導函數, 前者滿足方程式

$$\frac{d^2 Ai(-r)}{dr^2} + r Ai(-r) = 0. \quad (2.17)$$

在上述解中我們定阻塞點位置 $x = 0$, 並假設當 $x < 0$ 時 $H > 0$ (且 $r > 0$), 表阻塞點發生於上游; 在此點以上 k_1 和 k_2 變為一組共軛複數。

要証明上述解確滿足 (2.13), 可將 (2.15) 和 (2.16) 代入 (2.13), 並用 $-r Ai(-r)$ 取代 $Ai''(-r)$, 得到

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + v(H + G) = \frac{d^2 A_0}{dx^2} Ai(-r) - \frac{d^2 C_0}{dx^2} Ai'(-r). \quad (2.18)$$

由於 A_0 和 C_0 僅為緩慢變化的係數, 故 $d^2 A_0/dx^2$ 和 $d^2 C_0/dx^2$ 如同 $\partial^2 U/\partial x^2$ 一樣可予省略, 因此 (2.18) 和 (2.13) 的差異可以忽略, 表 (2.15) 和 (2.16) 確為 (2.13) 的近似解, 且因 A_0 、 C_0 和 Ai 在包括阻塞點在內的每一點上皆為 analytical, 故 (2.15) 和 (2.16) 可均勻適用於每一點。

當 $r \gg 0$ 時, $Ai(-r)$ 和 $Ai'(-r)$ 近似為

$$\begin{aligned} Ai(-r) &\approx \pi^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\pi\right), \\ Ai'(-r) &\approx -\pi^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\pi\right). \end{aligned}$$

故在遠離阻塞點位置 ($x \ll 0$)

$$\begin{aligned} \eta &\approx H^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\int_0^x \frac{1}{2}(-Q - iG/H^{\frac{1}{2}}) dx\right] \exp i\left[\int_0^x k_1 dx - n_0 t - \frac{1}{4}\pi\right] \\ &\quad + H^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\int_0^x \frac{1}{2}(-Q + iG/H^{\frac{1}{2}}) dx\right] \exp i\left[\int_0^x k_2 dx - n_0 t + \frac{1}{4}\pi\right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中我們選定 $k_1 < k_2$, 上式為一般所謂的 WKB solution, 它明顯包含一個入射波 (k_1 component) 和一個反射波 (k_2 component) 的疊加, 由於 $-Q \pm iG/H^{\frac{1}{2}}$ 在 $x < 0$ 時為實數, 故 k_1 和 k_2 確為兩者的波數, 且它們的振幅分別為

$$a = \begin{cases} H^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\int_0^x \frac{1}{2} (-Q - iG/H^{\frac{1}{2}}) dx \right] & (k_1 \text{ component}); \\ H^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\int_0^x \frac{1}{2} (-Q + iG/H^{\frac{1}{2}}) dx \right] & (k_2 \text{ component}). \end{cases} \quad (2.20)$$

所有上述的解與 Shyu & Phillips (1990) 中的解形式相同, 甚至 Q 和 G 內的項也和 Shyu & Phillips (1990) 中的完全相同, 但由 (2.10), k_1 和 k_2 目前滿足

$$k^2 - \frac{2n_0 U + g' + U\omega_y}{U^2} k + \frac{n_0^2 + n_0 \omega_y}{U^2} = 0. \quad (2.21)$$

當 $\omega_y = 0$ 時, 上式可化簡為 Shyu & Phillips (1990) 中的 (6.2) 式, 故當 $\omega_y \neq 0$ 時, 在固定一點入射波和反射波的波長皆改變, 為清楚顯示其變化, (2.21) 又可改寫為

$$n_0 = \sigma + Uk, \quad (2.22)$$

其中

$$\sigma = \left(g'k + \frac{\omega_y^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_y}{2} \quad (2.23)$$

即為入射波或反射波的實質頻率 (intrinsic frequency)。 (2.22) 和 (2.23) 的解可用圖二來解說, 由圖二顯示兩種波的群速度 $C_g \equiv \partial\sigma/\partial k$ 亦隨之改變, 因此阻塞點位置將因而改變, 圖三和圖四即顯示當大尺度流的水面流速 U 和波的觀測頻率 n_0 不變, 僅大尺度流的旋度由零增為 $\omega_y = 0.245 \text{ sec}^{-1}$ 時, 兩種阻塞的位置及水面位移的變化。

由於 H 中包含 k_1 和 k_2 且由於 (2.10) 中的 P 含 ω_y , 故入射波和反射波的振幅變化率也將因不同的 ω_y 值而改變, 為瞭解此種變化以及群速度變化對波作用 (wave action) 傳送所產生的影響, 我們接下來求波的流勢函數的解, 以便計算各點的波作用密度。

由 WKB 解 (2.19) 和 (2.20), 單獨一個入射波或反射波的水面位移變化可表為

$$\eta = a(x) \exp \left[i \int_0^x k(x) dx \right] \exp(-in_0 t), \quad (2.24)$$

與此對應的流勢函數可表為

$$\phi = A(x) \exp \left[i \int_0^x k(x) dx + \int_0^z l(x, z) dz \right] \exp(-in_0 t). \quad (2.25)$$

(2.24) 式中的 $a(x)$ 和 $k(x)$ 目前皆已知, 且 n_0 為給定, 但 (2.25) 中的 $A(x)$ 和 $l(x, z)$ 仍需求解, 首先將 (2.25) 代入 (2.6) 可得

$$il = ik + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad \text{at} \quad z = 0$$

or

$$l = k - i \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (2.26)$$

接下來將 (2.24), (2.25) 和 (2.26) 代入運動邊界條件 (2.5), 得到

$$-in_0 a + iUak + U \frac{da}{dx} - A \left(k - i \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.27)$$

上式中 da/dx 、 dA/dx 和 $\partial U/\partial x$ 皆為較小的項, 若忽略這些較小的項

$$A \approx A_0 = -i \frac{\sigma}{k} a, \quad (2.28)$$

由於 A 本身為一緩慢變化的參數, 故將 (2.28) 代入 (2.27) 中的 dA/dx 可進一步獲得

$$A = -i \frac{\sigma}{k} a + \epsilon, \quad (2.29)$$

其中

$$\epsilon = \frac{n_0}{k^2} \frac{da}{dx} - \frac{n_0 a}{k^3} \frac{dk}{dx}. \quad (2.30)$$

由於在代入波作用守恆方程式時, A 或對 x 微分, 或乘以類似 $\partial U/\partial x$ 的項, 故由 ϵ 將產生量級和 $\partial^2 U/\partial x^2$ 或 $(\partial U/\partial x)^2$ 相同的項, 因此 ϵ 通常可以忽略。由 (2.25)–(2.30), 再利用已獲得的 $a(x)$, 可求得 ϕ 的 WKBJ 解 (含入射波和反射波兩者), 而 ϕ 的均勻適用解亦可經由進一步分析獲得, 但目前我們不做這一方面的討論。

由(2.25)、(2.26)和(2.28)我們可獲得遠離阻塞點區域的波浪平均動能密度

$$\text{K.E.} = \frac{\rho}{4} \frac{\sigma^2}{k} a^2,$$

其中基於相同的理由,與 $\partial U/\partial x$ 量級相同的項亦省略,另一方面,由(2.24)可獲得當地波浪平均位能密度

$$\text{P.E.} = \frac{\rho}{4} g' a^2,$$

故由(2.23)可看出,當 $\omega_y \neq 0$ 時,波的動能和位能並不相等,此一結果與Jonsson et al. (1978)所獲得的結果相同,故此時波的總能量密度為

$$E = \frac{\rho}{2} \frac{\sigma^2 + \sigma\omega_y/2}{k} a^2. \quad (2.31)$$

儘管波的能量和群速度皆改變,但我們可以証明上述的解仍滿足波作用守恆原理(action conservation principle)(証明方法請參考Shyu & Phillips (1990)),且在阻塞點,入射波傳入阻塞點的作用通量和反射波流出的量相等。

三．緩變波與旋度不均勻流交互作用理論

當大尺度流中的旋度爲不均勻分佈時，波浪的軌跡速度將把各點不相等的旋度帶至不同的位置，故在固定一點上的旋度將隨時間變化（在目前且爲週期性變化），此一旋性擾動部份無法包含在上節中的流勢函數 ϕ 內，故需另外求解。

當未知的流場爲旋性時，Laplace equation 無法適用，須使用較複雜的運動方程 (equation of motion)，或由後者所導出的旋度方程 (vorticity equation)，故此種旋性的波浪運動一般很難獲得解析解，但由於波浪運動的範圍僅限於深度不及一個波長的表層，在此範圍內平均流的旋度變化一般非很劇烈（表層具有一個流速梯度很尖銳的 surface layer 的情況將另外討論），故我們可以在類似圖五的情況下假設波的擾動主要仍如上一節或 Shyu & Phillips (1990) 的理論所描述，而由不均勻旋度所產生的效應僅爲原來的解加上一些修正項，此種 near-potentiality 的假設亦爲 Shrira (1993) 的理論所採用，其正確性我們可由最後的結果加以驗證。

基於以上所述，我們將大尺度流分爲兩部份

$$U = \bar{U} + U', \quad W = \bar{W} + W', \quad (3.1)$$

其中 $\bar{U}$ 和 $\bar{W}$ （圖五中的虛線部份）取代上節或 Shyu & Phillips (1990) 中的 U 和 W ，而 U' 和 W' 即爲造成大尺度流中具有不均勻旋度的部份，由於波受平均水面上的流速影響最大，故在此點上的流速全部定爲 $(\bar{U}, \bar{W})$ ，另外，波的擾動部份亦分爲

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + u', \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + w'. \quad (3.2)$$

其中 ϕ 與上節中的 ϕ 大致相同（其相異處在以下的討論中將變爲清楚），且我們令 ϕ 滿足不可壓縮 (incompressible) 條件，因此滿足 Laplace equation，實際上，我們可確定 u 和 w 毫無疑問地滿足不可壓縮條件，而波浪運動中的非旋性流與旋性流的劃分在某種程度上爲任意（例如我們可在兩者間分別加減一個非旋性流場而不影響兩者的定義和它們的總和），故即使原非旋性流部份不滿足不可壓縮條件，我們可將其不滿足的部份合併至 u' 和 w' 內（此時 u' 和 w' 仍爲旋性），此一處理亦導致 u' 和 w' 滿足不可壓縮條件，因此我們可定義一 stream function ψ ，使

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.3)$$

故未來我們僅需求 ψ 即可獲得 u' 和 w' 。

爲求 ψ ，我們不需要知道各點的壓力分佈，故可直接求解旋度方程式，且因流場爲二度空間，旋度僅具有 y 方向的分量，因此旋度方程可化簡爲一純量方程式

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} + (W + w) \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

在上式中我們忽略分子擴散的項，但這並不表示我們不考慮分子擴散（甚至 eddy diffusion）對大尺度流所產生的影響，它們的影響已包含在我們假定已知的大尺度流場內，但對波浪擾動部份，當波雷諾數（wave Reynolds number）很大時，分子擴散的效應將很小，故我們仍如以往般加以忽略。在 (3.4) 內 Ω_y 含 $\bar{\Omega}_y + \Omega'_y + \omega'_y$ 三項，其中

$$\bar{\Omega}_y = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial x}, \quad \Omega'_y = \frac{\partial U'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial x}, \quad \omega'_y = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad (3.5)$$

故 $\bar{\Omega}_y$ 和 Ω'_y 爲已知，僅 ω'_y 未知。利用上述定義以及 (3.1) 和 (3.2)，(3.4) 可改寫爲

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial t} + (\bar{U} + U') \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} + (\bar{W} + W') \frac{\partial \omega'_y}{\partial z} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Omega'_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Omega'_y}{\partial z} \quad (3.6)$$

在上式中僅含平均流的項互相達成平衡（此平衡在必要時亦包含擴散項），故剩餘者皆爲時間的週期函數，另外我們且忽略所有波浪擾動的非線性項（如 $(\partial \phi / \partial x)(\partial \omega'_y / \partial x)$ ， $u' \partial \omega'_y / \partial x$ ），最後，由於我們假設 u' 和 w' 小於 $\partial \phi / \partial x$ 和 $\partial \phi / \partial z$ ，因此爲求初解， $u' \partial \Omega'_y / \partial x$ 和 $w' \partial \Omega'_y / \partial z$ 暫時亦省略，此項省略的適當性未來可以獲得證明。

在 (3.6) 式等號右邊兩項可被視爲波浪擾動中所含旋度的來源項 (source terms)，此來源項經由上節討論已爲已知，再加上 U 和 W 爲給定，故 (3.6) 可輕易獲得解。當 ω'_y 獲得以後，接下來可利用

$$\nabla^2 \psi = \omega'_y \quad (3.7)$$

求 ψ ，因而得以計算 u' 和 w' 。當 u' 和 w' 獲得後，我們可重新考慮運動和動力邊界條件，經由類似於第二節的步驟求出新的 η （因此 ϕ ）和離散關係式，由於新

的解和原來的解之間的差對 ω'_y 的影響已為次要，故上述 ω'_y 的解仍有效，或我們可以用疊代過程改進其準確度。

當考慮 u' 和 w' 存在時，運動方程式(2.2)改為

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi + u') + \nabla \left\{ gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(U + \frac{\partial\phi}{\partial x} + u' \right)^2 + \left(W + \frac{\partial\phi}{\partial z} + w' \right)^2 \right] \right\} = -\Omega \times \mathbf{u},$$

其中 $\mathbf{u}$, Ω 仍分別代表流速和旋度兩者的全部向量總和。由於在自由表面上壓力為定值，故在線性波近似下，沿平均水面方向

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[g\zeta + \frac{1}{2}U^2 \right] + \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta \cos\theta + \eta U \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} + Uu' \right] \right\} = -(\bar{\Omega}_y + \Omega'_y) \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial t} \quad \text{at } z = 0.$$

上式中的平均項和擾動項仍需各自平衡，故波浪運動此時需滿足以下動力邊界條件

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + g'\eta + U \frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta U (\bar{\Omega}_y + \Omega'_y) + Uu' \right] = -(\bar{\Omega}_y + \Omega'_y) \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial t} \quad \text{at } z = 0. \quad (3.8)$$

另一方面，在各種流同時存在情況下，運動邊界條件可表為

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(U + \frac{\partial\phi}{\partial x} + u' \right) \frac{\partial\eta}{\partial x} = W + \frac{\partial\phi}{\partial z} + w' \quad \text{at } z = \eta.$$

採用線性波近似後，

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + U \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} + \eta \frac{\partial U}{\partial x} = w' \quad \text{at } z = 0. \quad (3.9)$$

接下來我們同樣利用(2.6)將(3.8)和(3.9)結合成一僅含 η 為相依變數的常微分方程，其結果為

$$iU^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[2n_0 U + g' + 3iU \frac{\partial U}{\partial x} + U(\bar{\Omega}_y + \Omega'_y) \right] \frac{\partial\eta}{\partial x} + \left[-in_0^2 + 2n_0 \frac{\partial U}{\partial x} - in_0(\bar{\Omega}_y + \Omega'_y) \right. \\ \left. + (\bar{\Omega}_y + \Omega'_y) \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial \Omega'_y}{\partial x} \right] \eta = F(x) \quad \text{at } z = 0, \quad (3.10)$$

其中

$$F(x) = -U \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial U}{\partial x} + in_0 u' + iU \frac{\partial w'}{\partial x} + iw' \frac{\partial U}{\partial x} + n_0 w' \quad \text{at} \quad z = 0.$$

上式中 $i\eta U \partial^2 U / \partial x^2$ 和 $i\eta (\partial U / \partial x)^2$ 兩項仍被省略, 另外, 圖五顯示 Ω'_y 在平均水面皆定為零, 故上式中的 Ω'_y 和 $\partial \Omega'_y / \partial x$ 皆可消去, 最後在 $F(x)$ 中的 $u' \partial U / \partial x$ 和 $iw' \partial U / \partial x$ 兩項和其他項相比也較小, 故為求第一階近似, 上式可改寫為

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + [-i(k_1 + k_2) + Q] \frac{\partial \eta}{\partial x} + [-k_1 k_2 + P] \eta = R(x), \quad (3.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{1}{U^2} (2n_0 U + g' + U \bar{\Omega}_y), \\ k_1 k_2 &= \frac{1}{U^2} (n_0^2 + n_0 \bar{\Omega}_y), \\ P &= -2i \frac{n_0}{U^2} \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\bar{\Omega}_y}{U^2} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ Q &= \frac{3}{U} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ R &= \frac{n_0}{U^2} u' + i \frac{1}{U} \frac{\partial u'}{\partial x} - i \frac{n_0}{U^2} w' + \frac{1}{U} \frac{\partial w'}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad \text{at} \quad z = 0. \quad (3.12)$$

(3.11) 式中等號左邊的項和 (2.11) 及 (2.10) 完全相同 (第二節中的 ω_y 和目前的 $\bar{\Omega}_y$ 代表完全相同的物理量), 僅等號右邊目前多出 $R(x)$, 在下一節裏我們將以一模擬的流場從事實際的計算, 其結果顯示 $u' \neq iw'$, 表 $R(x)$ 通常不為零, 且當

$$\eta = a \exp i \left[\int k dx - n_0 t \right]$$

時, $R(x)$ 具有

$$R(x) = r(x) a(x) \exp i \left[\int k dx - n_0 t \right]$$

的形式, 其中 $r(x)$ 為純實數, 因此 $R(x)$ 將直接影響離散關係式 (因而再度改變阻塞點的位置), 且間接影響振幅的變化率。

由 (3.11) 和 (3.12), 目前的波數應滿足

$$k^2 + (k_1 + k_2)k + (k_1 k_2 + r) = 0$$

故

$$k = \frac{(k_1 + k_2) \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 - 4r}}{2}, \quad (3.13)$$

且實質頻率

$$\sigma = \left(g'k + \frac{\bar{\Omega}_y^2}{4} - U^2 r \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{\Omega}_y}{2}. \quad (3.14)$$

此時利用運動邊界條件(3.9)求流勢函數 ϕ 的振幅 $A(x)$ 的結果亦改爲

$$A = -i \frac{\sigma}{k} a + \epsilon + \epsilon_1, \quad (3.15)$$

其中 ϵ 與(2.30)的形式相同,而

$$\epsilon_1 = -\frac{w'}{k} e^{-\chi} - \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w'}{k} e^{-\chi} \right), \quad (3.16)$$

且

$$\chi = i \left[\int k dx - n_0 t \right],$$

((3.16)中的 w' 爲在 $z=0$ 處的值)。由於 ϵ_1 的存在,故實際由大尺度流中的不均勻旋度所引發的流場應爲 u' 和 w' 再加上由 ϵ_1 所代表的流場,兩者的大小及其總和與分佈我們將在下一節用一個模擬的計算加以解說。

四．例解

在本節中我們將假設一個簡單的大尺度流場，應用上一節所獲得的公式求波浪運動的解，由於我們僅需知阻塞點位置及如何連接入射波和反射波，而不需知到阻塞點附近的內解，故目前我們僅計算遠離阻塞點區域的解，並分別計算入射波和反射波。

首先令大尺度流在 x 方向的速度分量為

$$U = \bar{U} + U' = D_0 + D_1 x + D_2 z + D_2 z^2, \quad (4.1)$$

而在 z 方向的分量可視為零（可想像採用一曲線座標系統，此一系統的曲率對以下計算的影響僅為次要），故平均旋度

$$\bar{\Omega}_y = D_1, \quad \Omega'_y = 2D_2 z. \quad (4.2)$$

代入(3.6)可得

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial t} + U \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} = -2D_2 \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (4.3)$$

由於我們可預期 ω'_y 在時間上為準確週期的變化，而在 x 方向亦為近似週期的變化，故

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial t} = -in_0 \omega'_y, \quad \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} \approx ik \omega'_y.$$

代入(4.3)，並利用(2.25)，(2.26)和(2.28)可得

$$\omega'_y = \frac{e^{kz}}{-\sigma + kD_1 z + kD_2 z^2} XT, \quad (4.4)$$

其中

$$XT = 2D_2 \sigma a \exp i \left[\int_0^x k dx - n_0 t \right]. \quad (4.5)$$

獲得 ω'_y 後，接下來利用(3.7)式求 ψ ，該式目前亦可改寫為

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - k^2 \psi = \omega'_y. \quad (4.6)$$

上式為一個以 z 為獨立變數的常微，但為 inhomogeneous，其通解當 ω'_y 具有(4.4)的形式時無法獲得一封閉形式的解，故僅能求級數解。

爲求級數解, 首先需將 ω'_y 做泰勒級數展開, 最簡單者是在 $z = 0$ 位置做級數展開, 但由 (4.4), 當

$$z = z_s = \frac{-kD_1 \pm \sqrt{k^2 D_1^2 + 4\sigma k D_2}}{2kD_2}$$

時, ω'_y 的分母將爲零, 表爲奇點 (singularities), 此兩個奇點目前雖爲複數, 但由複變函數的理論知, 泰勒級數的收斂半徑在複數平面中僅能延伸至原函數最近一個奇點的位置, 故若

$$z_s = \alpha + i\beta$$

則對 $z = 0$ 所做的泰勒級數展開的收斂半徑僅爲 $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$, 此半徑通常皆很小, 故爲獲得水深較深位置上的解, 且更重要的, 爲利用深水邊界條件決定通解中的兩個未定係數, 我們需在較深處做泰勒級數展開, 但此時因 $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ 甚小, 即使 $\alpha > 0$, 此項級數在 $z = 0$ 處, 因接近收斂區的邊緣, 收斂將極慢, 使我們實際上無法利用此一級數解求得在 $z = 0$ 此一極重要位置上可信賴的值, 爲解決此一問題, 我們由深至淺針對數個深度做級數展開, 因此獲得數個級數解, 再利用 analytic continuation 的觀念逐步求出每一個級數解的未定係數。

上述作法另一個好處是, 當我們在水深極深處 $z = z_0$ 做泰勒級數展開, 獲得如

$$\omega'_y = [C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \cdots] XT \quad (4.7)$$

的級數, 此時亦令

$$\psi = [c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots] XT, \quad (4.8)$$

代入 (4.6), 並令等號兩邊相同乘冪項的係數相等, 可得

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2}(c_0 k^2 + C_0), \\ c_3 &= \frac{1}{6}(c_1 k^2 + C_1), \\ c_4 &= \frac{1}{12}(c_2 k^2 + C_2), \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

若再進一步利用(3.3)求 u' 和 w' , 可得

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial z} = XT [c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots], \\ w' &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ikXT [c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots], \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

故此時我們獲得內含 c_0 和 c_1 兩個未定係數的通解, 此兩個未定係數目前更由於我們所選擇的 z_0 位在極深處, 在此處可預期 $u', w' = 0$, 因此由(4.10)可直接決定 $c_0, c_1 = 0$ 。

決定了中心點為最深之級數解的未定係數後, 我們可以計算在其收斂半徑內各點的近似解, 但若太接近此一收斂區的邊緣, 將由於級數收斂太慢, 實際無法利用此一級數的有限項的和獲得可信賴的結果, 因此我們在此一級數的中心點與其收斂邊緣約中間的位置另做一次級數展開, 求得以新位置為中心, 另一個類似於(4.10)的級數解(此一級數解的收斂半徑自然較小), 此解中的未定係數 c_0, c_1 此時可由前一個級數解在新中心點上的值來決定。重複以上步驟, 最後可獲得一中心點非常接近 $z = 0$ 的級數解, 由後者我們可計算在平均水面 $z = 0$ 上的值。

目前我們定 $n_0 = 1.225 \text{ rad sec}^{-1}$, $D_0 = -2 \text{ m sec}^{-1}$, $D = -0.01 \text{ sec}^{-1}$, 故若 D_1 和 D_2 皆為零(表大尺度流為非旋性), 則波的水面位移變化即如圖三所顯示, 若 $D_1 = 0.245 \text{ sec}^{-1}$, 而 D_2 仍為零(表大尺度流為旋性但其旋度為均勻分佈), 則波的水面位移變化即為圖四所顯示者, 但目前 $D_2 = -0.08 \text{ sec}^{-1} \text{ m}^{-1}$, 因此我們採用上述的方法求 u' 和 w' 的級數解。我們在每一個水平位置皆針對 16 m, 8 m, 4 m, 2 m, 1 m, 0.5 m 六種深度做級數展開以獲得六個級數解, 每一個級數解的收斂半徑如圖六所示, 圖中奇點的位置是以 $x = -40 \text{ m}$ 處的狀況為例(圖五即代表此處的流速垂直分佈), 由於最深的 16 m 深度距離水面已有大約一個波長的距離, 故 u' 和 w' 在此點應極接近於零, 因此(4.10)中的 c_0 和 c_1 應可定為零, 由此一級數解我們可準確計算深度在 8 m 以下 u' 和 w' 的值, 並利用 $z = -8 \text{ m}$ 所計算的結果決定下一個以此深度為中心做展開的級數解中的 c_0 和 c_1 , 如此循序計算, 最後可獲得以 $z = -0.5 \text{ m}$ 為中心的級數解, 利用此一級數解我們可準確計算在平均水面 $z = 0$ 位置上的 u' 和 w' 值。

圖八即為針對入射波所計算 u' 和 w' 的分佈, 此一週期旋性流的變化和波原來的非旋性流速分佈(見圖七, 即(2.25)所代表的流速)同相, 前者的量在目前

的情況大約為後者的三分之一，但這並不代表大尺度流中不均勻旋度對波所產生的全部效應。利用在平均水面上所獲得的 u' 和 w' ，我們可計算(3.11)式中的 R 藉以獲得新的離散關係式，由於後者的改變(群速度因而改變)，使阻塞點移至更下游的位置(約在圖四中箭頭所指的位置)。此外，由於 $w' \neq 0$ ，波的非旋性流流勢函數 ϕ 的振幅亦多出一個 ϵ_1 (見(3.15)、(3.16)式)，此 ϵ_1 所代表的流速分佈如圖九所示。由於 ϵ_1 的產生是為平衡平均水面上的 w' (參考(3.9))，故將圖八和圖九中的流速分佈相加後，在平均水面上僅剩下水平方向的分量(見圖十)，且抵消後的流速分佈量很小，故符合我們在(3.6)式中所做的假設，但此項流速分佈仍有圖七中流速的十分之一，圖十一即為將圖十中各點的流速乘以10所獲得的結果，圖內顯示，由於流為旋性，故水面的流速較大(接近圖七中量的10%)，在中間深度(約2米處)，流速遞減較非旋性流快，而在更深處(如波長的二分之一深度)，流向反轉且流速相對較大，凡此皆與旋性流的特性吻合。

當獲得了波浪擾動中的旋性流部份的初解以及非旋性流解的修正項以後，我們可以將它們列入(3.6)式等號右邊的 source terms，並採用新的波數和實質頻率重新計算 u' 和 w' 以及更新的波數和實質頻率，此即為一般數值理論中疊代演算(iterative algorithms)的觀念，利用此種方法我們可以獲得大尺度流中不均勻旋度對波浪運動所產生影響的準確解，但即使是初解，已可充份顯示此種效應的特性與量級，故接下來我們探討在目前情況下波作用守恆的性質。

五．波作用守恆性質

以往要實際計算波行進在不均勻流上的振幅變化,皆使用作用守恆方程式(當大尺度流為二度空間時,目前可採用 Shyu & Phillips (1990) 以及本文中的解直接計算 η 和 ϕ), 但若大尺度流具有不均勻旋度時,波作用是否仍守恆? 以及如何應用守恆方程式? 包括波作用密度以及群速度的計算等問題將變為不確定,一個很明顯的例子是,在計算波作用密度時, (3.15) 中的 ϵ_1 是否應包含在內? 或 (u', w') 是否也應包含在內? 由上節的計算可瞭解,是否將它們包含在內可產生相當大的差異,此項差異在我們計算作用通量(action flux)的變化率(內含振幅的變化率)時將產生不可忽略的誤差,故有必要加以澄清。

有關波作用守恆性質的討論, Dr Frank Henyey 曾建議一種極簡潔的方法(參考 Shyu & Phillips (1990)), 此種方法亦可延伸至目前的情況。首先我們根據前面的計算結果(如圖十)知 $u' - iw'$ 的量很小,其振幅的變化率應更小,因此後者在一般情況下應可省略(但類似 $\partial(w'e^{-x}/k)/\partial x$ 的項仍須保留),為充份利用此項事實,我們定義

$$\tilde{\phi} = \tilde{A} \exp \left[i \int_0^x k(x) dx + \int_0^z l(x, z) dz \right] \exp(-in_0 t), \quad (5.1)$$

其中

$$\tilde{A} = A - \epsilon_1, \quad (5.2)$$

而 A 和 ϵ_1 與 (3.15) 和 (3.16) 相同,因此 $\tilde{\phi}$ 為未將 ϵ_1 包含在內的流勢函數,利用此一定義,動力邊界條件(3.8)式可改寫為

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + g' \eta + U \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \eta U \bar{\Omega}_y + U(u' - iw') \right] \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k} \eta + i \frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k^2} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \eta \right. \\ \left. - i \frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k^3} \frac{\partial k}{\partial x} \eta + \frac{n_0}{k} (u' - iw') \right] \end{aligned}$$

(註: $\Omega_y|_{z=0} = 0$), 其中我們忽略 $[n_0(u' - iw')/k^2](\partial k/\partial x)$ 和 $(n_0/k)e^x \partial[(u' - iw')e^{-x}]/\partial x$ 等較小的項,積分產生

$$-in_0 \tilde{\phi} + g' \eta + U \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \eta U \bar{\Omega}_y - \frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k} \eta - i \frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k^2} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \eta + i \frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k^3} \frac{\partial k}{\partial x} \eta - \frac{\sigma}{k} (u' - iw') = 0. \quad (5.3)$$

將上式的複數共軛乘以 η 可得

$$in_0\tilde{\phi}^*\eta + g'\eta^*\eta + U\frac{\partial\tilde{\phi}^*}{\partial x}\eta + \eta^*\eta U\bar{\Omega}_y - \frac{n_0\bar{\Omega}_y}{k}\eta^*\eta + i\frac{n_0\bar{\Omega}_y}{k^2}\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\eta^*\eta - i\frac{n_0\bar{\Omega}_y}{k^3}\frac{\partial k}{\partial x}\eta^*\eta - \frac{\sigma}{k}(u'^* - iw'^*)\eta = 0, \quad (5.4)$$

其中 $\tilde{\phi}^*$, η^* 分別代表 $\tilde{\phi}$ 和 η 的共軛複數。另外, 由 (2.6) 運動邊界條件 (3.9) 式可改寫為

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + U\frac{\partial\eta}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial U}{\partial x} = w',$$

再利用 $\tilde{\phi}$ 的定義, 上式可進一步改寫為

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + U\frac{\partial\eta}{\partial x} + i\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} + \eta\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

將上式乘以 $\tilde{\phi}^*$ 得到

$$-in_0\eta\tilde{\phi}^* + U\tilde{\phi}^*\frac{\partial\eta}{\partial x} + i\tilde{\phi}^*\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} + \eta\tilde{\phi}^*\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (5.5)$$

利用 (5.2), (3.14), (3.15), 上式中的 $i\tilde{\phi}^*\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}$ 可展開為

$$i\tilde{\phi}^*\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} = i\tilde{A}^*\frac{\partial\tilde{A}}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{k}\eta\eta^*, \quad (5.6)$$

故若我們定義

$$\mathcal{F} = \frac{\rho}{2} \text{Im} \left(\tilde{\phi}^* U \eta + \frac{i}{2} \tilde{\phi}^* \tilde{\phi} + \frac{i}{2} \frac{n_0 \bar{\Omega}_y}{k^2} \eta^* \eta \right), \quad (5.7)$$

則利用 (5.4)–(5.6) 以及 (3.14), 不難證明

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} = 0. \quad (5.8)$$

接下來我們將證明 $\mathcal{F}$ 在目前的近似下實際代表波作用通量 (action flux), 故 (5.8) 顯示波作用在目前的情況下仍守恆。

在本節一開始我們即提到 $u' - iw'$ 代表一較小的量, 故在 (5.3) 和 (5.4) 中我們保留 $u' - iw'$ 和 $u'^* + iw'^*$ (如同我們保留 $(1/a)(\partial a/\partial x)$ 和 $\partial k/\partial x$ 的項), 但忽略含

$(u' - w')\partial k/\partial x$ 或 $\partial[(u' - iw')e^{-x}]/\partial x$ 的項, 因此(3.14)中的 r 與其他項相比亦較小, 且在目前的近似下, 當計算作用通量, 包括估計群速度以及波作用密度時, 所有含 r 的項皆可省略; 因這些項在計算作用通量的變化率時((5.3)或(5.4)即與其有關), 或本身對 x 微分, 或乘以其他緩慢變化參數的導函數, 故變為更小, 因此可省略。

基於以上理由, 波的群速度採用以下的近似:

$$C_g \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial k} \approx \frac{1}{2} \frac{g'}{\sigma + \bar{\Omega}_y/2} \approx \frac{1}{2k} \frac{\sigma^2 + \sigma \bar{\Omega}_y}{\sigma + \bar{\Omega}_y/2} \quad (5.9)$$

(參考(3.14)), 上式與第二節 $\Omega'_y = 0$ 情況所獲得者並無實質上的差異。另一方面, 波的動能我們也僅用 $\tilde{\phi}$ 來代表, 由於 $u' - iw'$ 很小即暗示由 ϵ_1 所代表的流場和 (u', w') 大部份互相抵消, 故 $\tilde{\phi}$ 確代表目前波的運動強度, 因此, 波的平均動能密度

$$\text{K.E.} = \frac{\rho}{4} \frac{\sigma^2}{k} a^2,$$

而其平均位能密度

$$\text{P.E.} = \frac{\rho}{4} g' a^2 = \frac{\rho}{4} \frac{\sigma^2 + \sigma \bar{\Omega}_y}{k} a^2,$$

故總能量密度仍與(2.31)相同, 為

$$E = \frac{\rho}{2} \frac{\sigma^2 + \sigma \bar{\Omega}_y/2}{k} a^2.$$

至此我們已可由第二節最後所獲得的結果直接主張波作用仍滿足守恆定律(關鍵處仍在於 r 較小, 故上式中的 σ 和 k 與(2.31)中的 σ 和 k 之間的差異可以忽略), 另一方面, 當我們將 $\tilde{\phi}$ 和 η 代入(5.7), 並利用(5.9)可獲得

$$\mathcal{F} = \frac{\rho}{2} (U + C_g) \frac{\sigma + \bar{\Omega}_y/2}{k} a^2.$$

此即為在目前近似下的波作用通量, 故由(5.8)亦證明波作用守恆定律。

最後要強調的是, 本節的討論除找出作用密度和群速度的適當定義, 及證明波作用守恆定律外, 並顯示它們的適用範圍。由獲得(5.3)和(5.4)所需的條件看, 當 $u' - iw'$ (因此 r) 量並非很小時, $\partial \mathcal{F}/\partial x \neq 0$, 故利用作用守恆方程式所計

算的振幅變化將產生較大的誤差,此時我們無法找出一更準確的絕熱不變量 (adiabatic invariant)(一個原因是在此種情況下,波浪擾動中所含旋性流部份亦無法忽略),但利用第三節所獲得的結果(該結果滿足原來的邊界條件(3.8)和(3.9),而非(5.3)),我們仍可計算準確的振幅變化及所有非旋性流和旋性流的流場,其準確度和以往非旋性波的ray solution的準確度一致。

八．結論

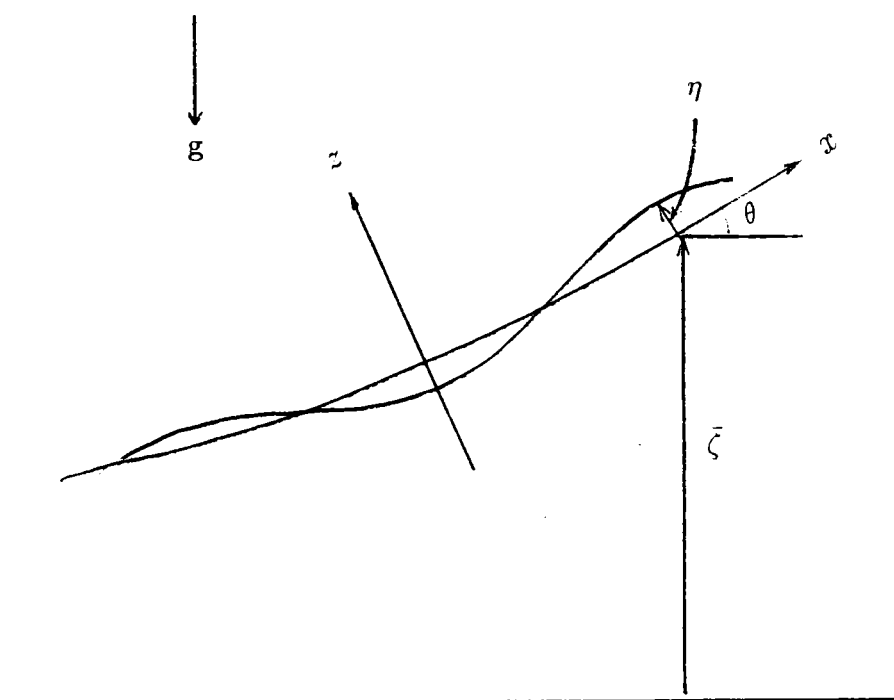
本研究首先將 Shyu & Phillips (1990) 中有關重力波被大尺度流阻塞及反射現象的解延伸至後者具有一均勻旋度的狀況, 由此解我們獲得波行進在此種線性剪流上的離散關係式, 及因流在水平方向緩慢變化, 故波的振幅亦隨之變化的速率, 前者與 Teles da Silva & Peregrine (1988) 的結果相同, 後者亦可滿足波作用守恆定律。

由於我們預期即使大尺度流的旋度在垂直方向為任意分佈, 在一般情況, 波的擾動仍如 Shrira (1993) 所提議具有 near-potentiality 的性質, 故利用上述的解我們進一步求出當大尺度流的旋度在垂直方向為任意分佈, 波浪擾動中的旋性以及非旋性部份的解、新的離散關係式以及振幅變化率, 由此解以及實際的計算顯示, 在一般情況, 波的運動確十分接近 potential flow; 即使大尺度流中的不均勻旋度量極大, 利用疊代演算的過程, 目前的理論仍可提供旋性波的準確解。

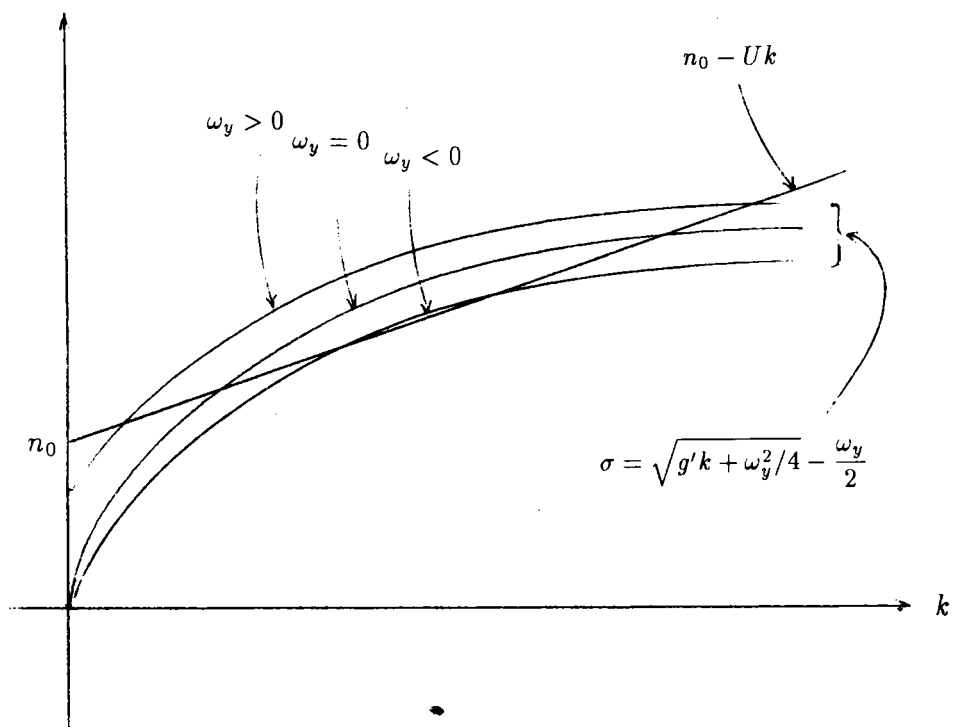
目前的解顯示, 當大尺度流具有不均勻旋度時, 波浪擾動將產生與水面位移同相的週期性變化的旋性流(如圖十一), 此種旋性流的大小可為非旋性波軌跡速度的十分之一或更大, 因此對沉積物的搬運及結構物的受力等皆有影響。旋性擾動另一個重要的影響是, 當其量與非旋性波軌跡速度的比值超過流在水平方向的變化比率甚多時, 波作用守恆定律無法適用(或可以說, 此時我們無法定義一個更準確的波作用密度做為一個絕熱不變量(adiabatic invariant)), 但直接利用目前的解計算振幅變化率, 可以獲得如以往非旋性波的 ray solution 同樣準確的解。

參考文獻

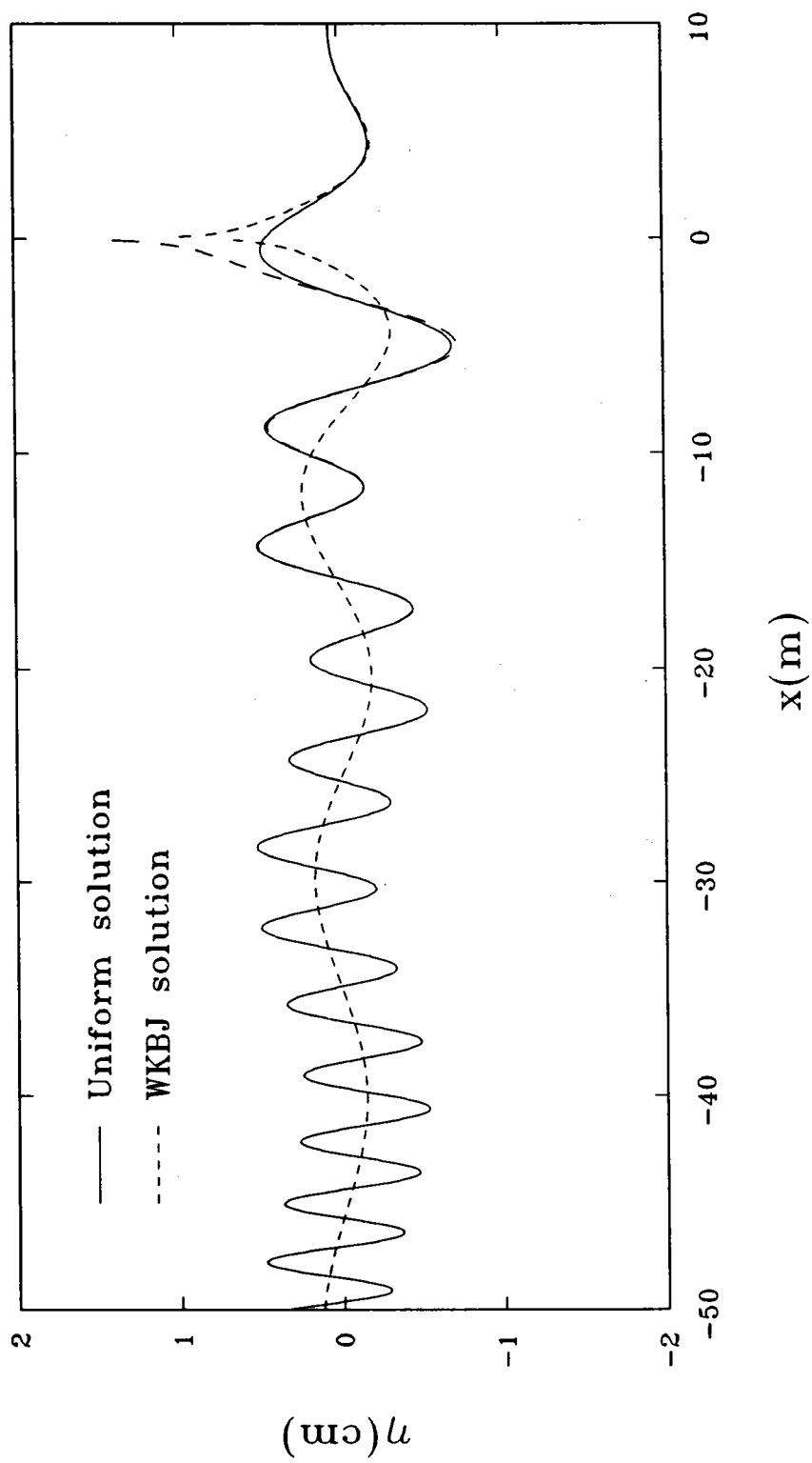
- Jonsson, I. G., Brink-Kjaer, O. & Thomas, G. P. 1978 Wave action and set-down for waves on a shear current. *J. Fluid Mech.* **87**, 401–416.
- Kirby, J. T. & Chen, T.-M. 1989 Surface waves on vertically sheared flows: approximate dispersion relation. *J. Geophys. Res.* **94**, C1, 1013–1027.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1960 Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J. Fluid Mech.* **8**, 565–583.
- Peregrine, D. H. 1976 Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.* **16**, 10–117.
- Peregrine, D. H. & Jonsson, I. G. 1983 Interaction of waves and currents. *Misc. Rep. MR83-6*. Coastal Engng Res. Center, US Army Corps of Engrs, Fort Belvoir, Virginia.
- Shrira, V. I. 1993 Surface waves on shear currents: solution of the boundary-value problem. *J. Fluid Mech.* **252**, 565–584.
- Shyu, Jinn-Hwa & Phillips, O. M. 1990 The blockage of gravity and capillary waves by longer waves and currents. *J. Fluid Mech.* **217**, 115–141.
- Smith, R. 1975 The reflection of short gravity waves on a non-uniform current. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78**, 517–525.
- Teles da Silva, A. F. & Peregrine, D. H. 1988 Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity. *J. Fluid Mech.* **195**, 281–302.
- Thomas, G. P. 1981 Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part 1. Linear waves. *J. Fluid Mech.* **110**, 457–474.
- Thomas, G. P. 1990 Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part 2. Nonlinear waves. *J. Fluid Mech.* **216**, 505–536.
- Whitham, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons.



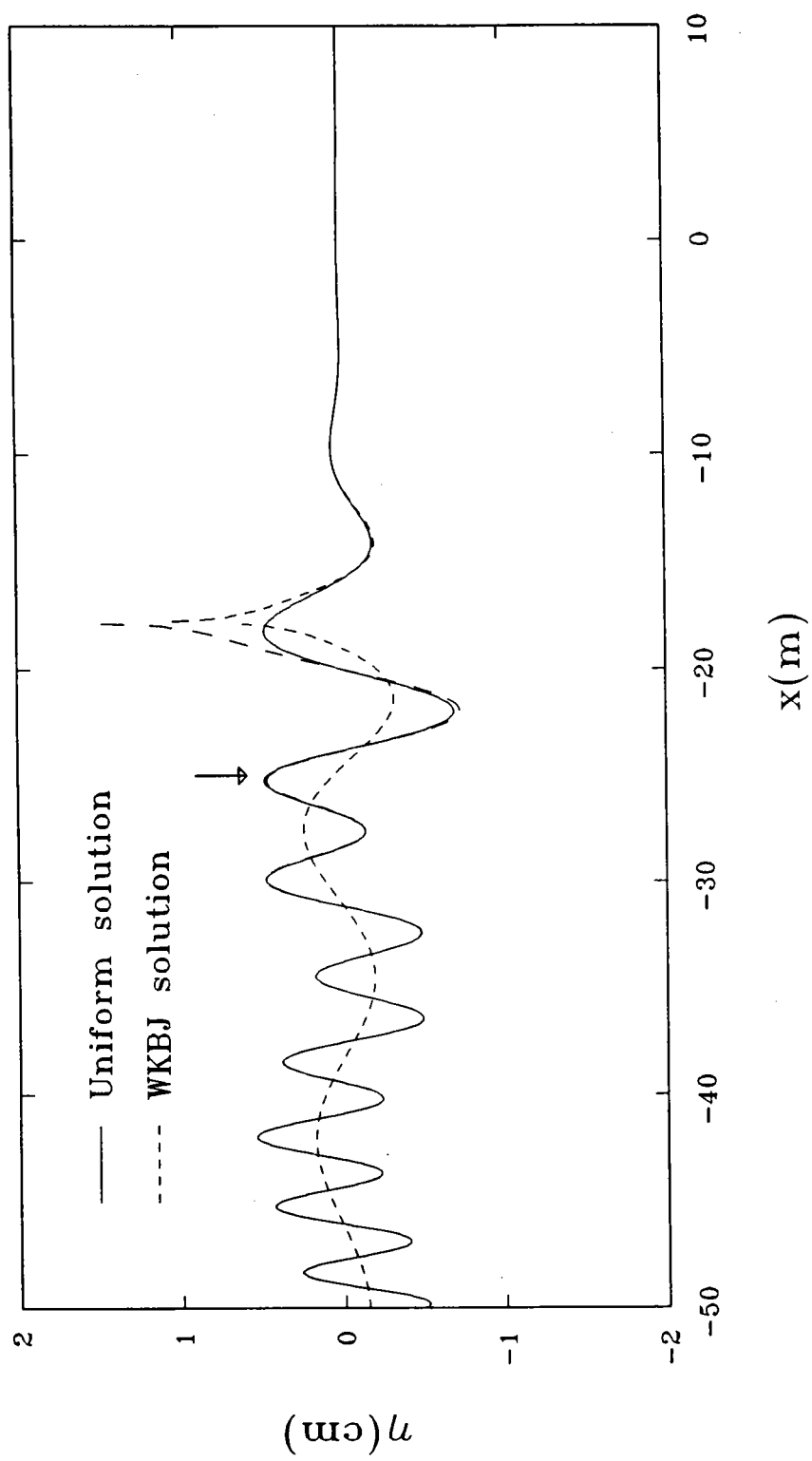
圖一. 示意圖。



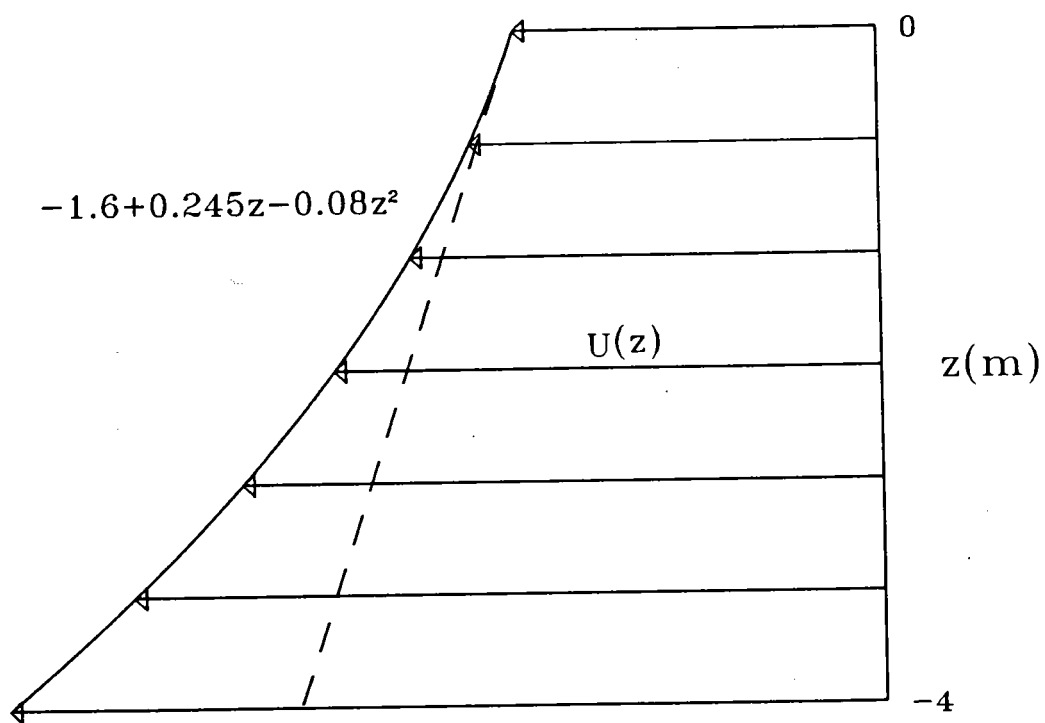
圖二. 離散關係式的解。曲線的斜率代表群速度,直線的斜率代表大尺度流速的負值,兩者在阻塞點將相等。



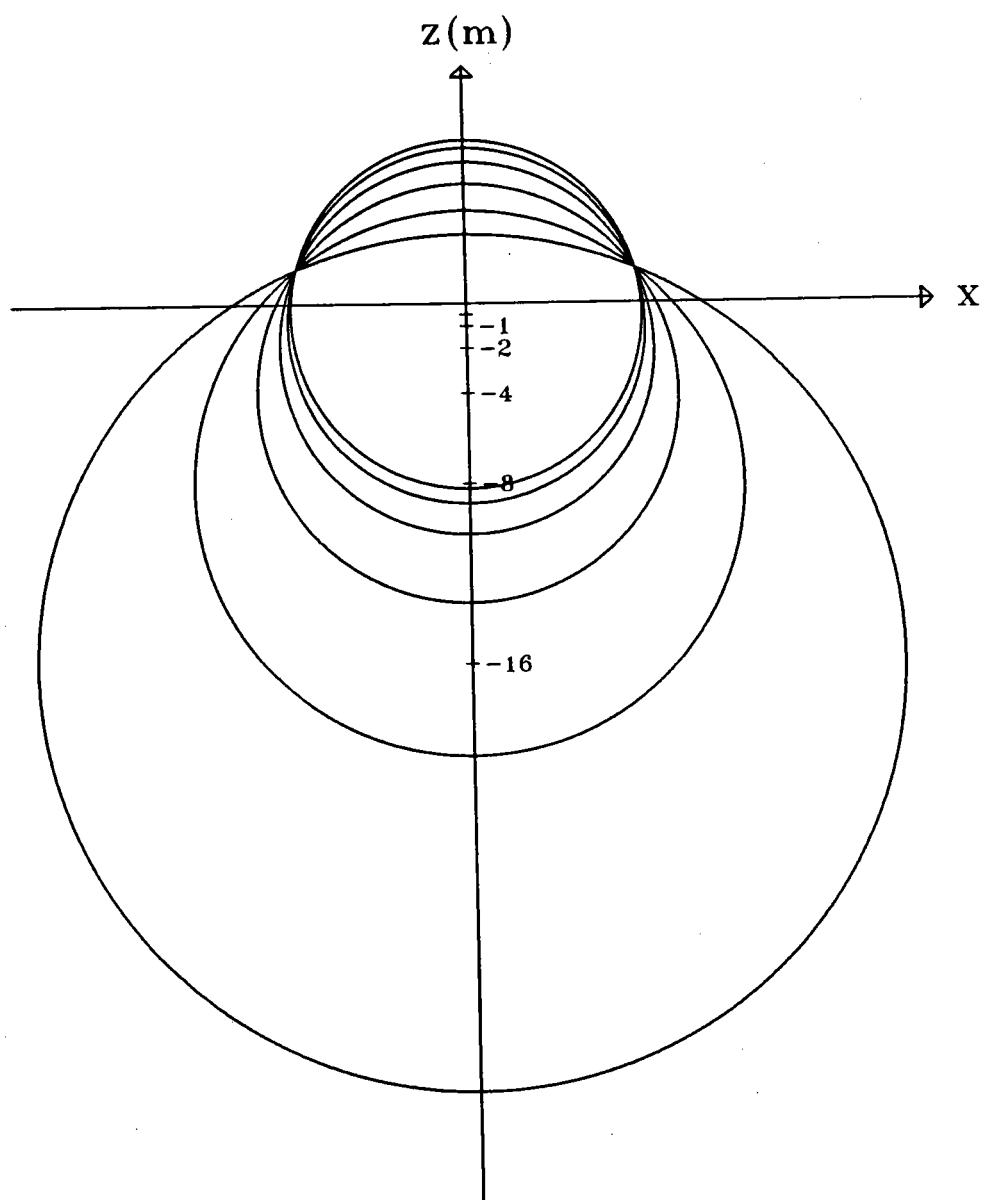
圖三. 阻塞及反射過程中水位移變化的解。流速 $U = -2 - 0.01x$ (m s^{-1}), 觀測頻率 $n_0 = 1.225$ (rad s^{-1}), 較長折線代表 WKBJ 解中的入射波。



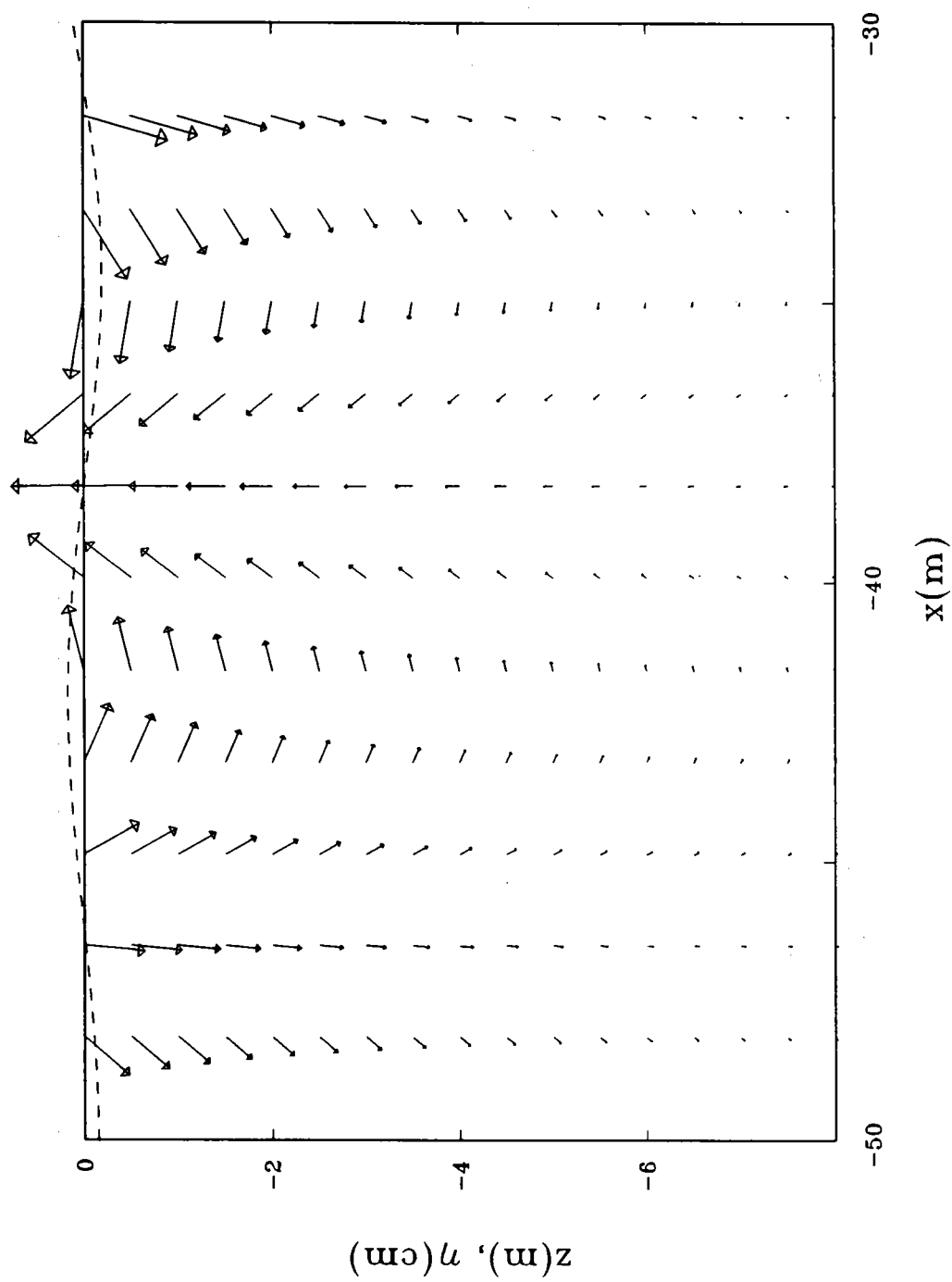
圖四. 與圖三相同, 但大尺度流在垂直方向為一個線性剪流。



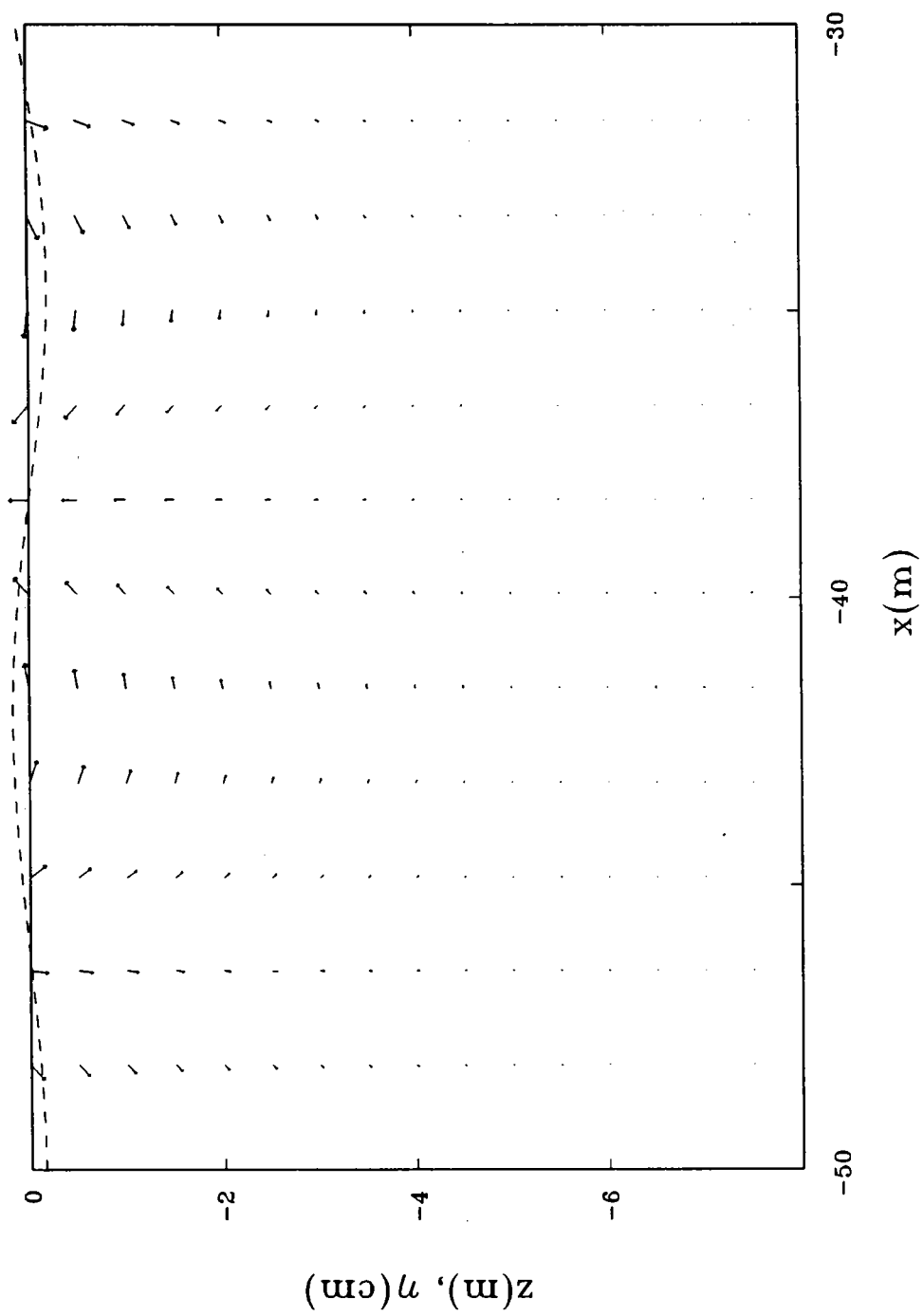
圖五．平均流在垂直方向的分佈及劃分。



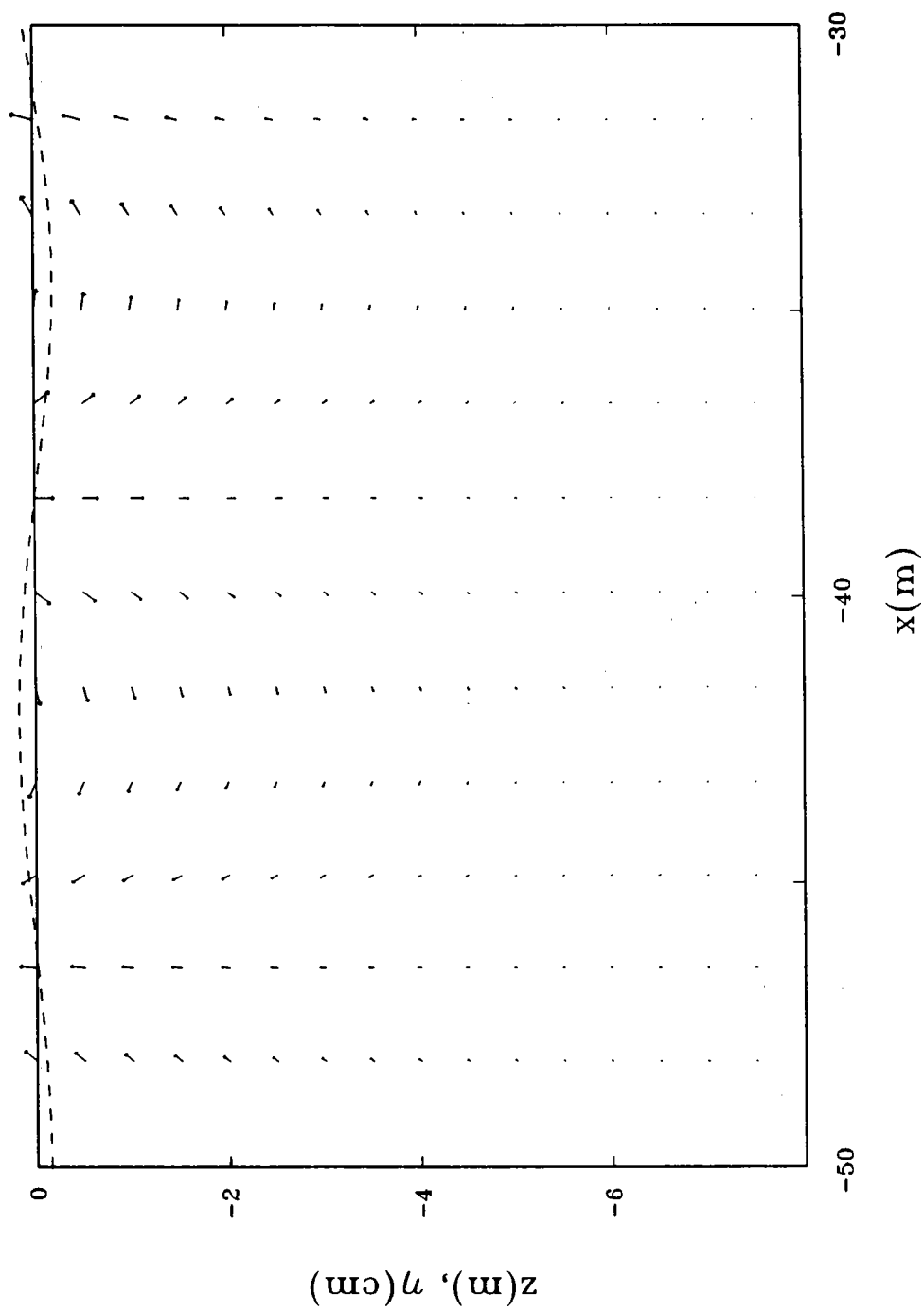
圖六. 級數解的收斂半徑。有標示的深度即為各級數解的中心位置。



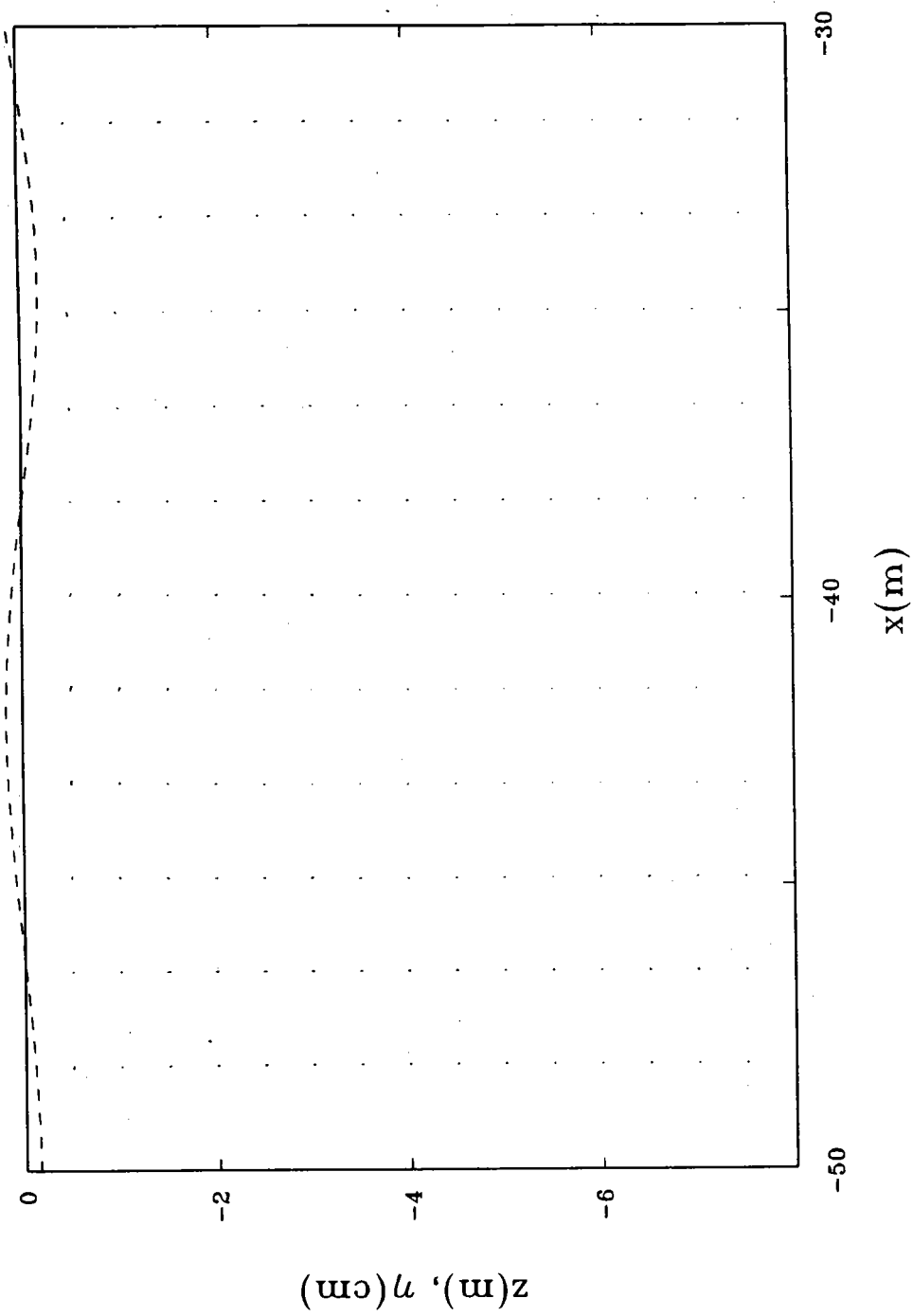
圖七. 未考慮不均勻旋度對波浪影響時的波的流速分佈, 故對應於圖三中的水面位移變化, 此變化如今用虛線代表, 橫座標的數字代表和圖三或圖四相同的位置。



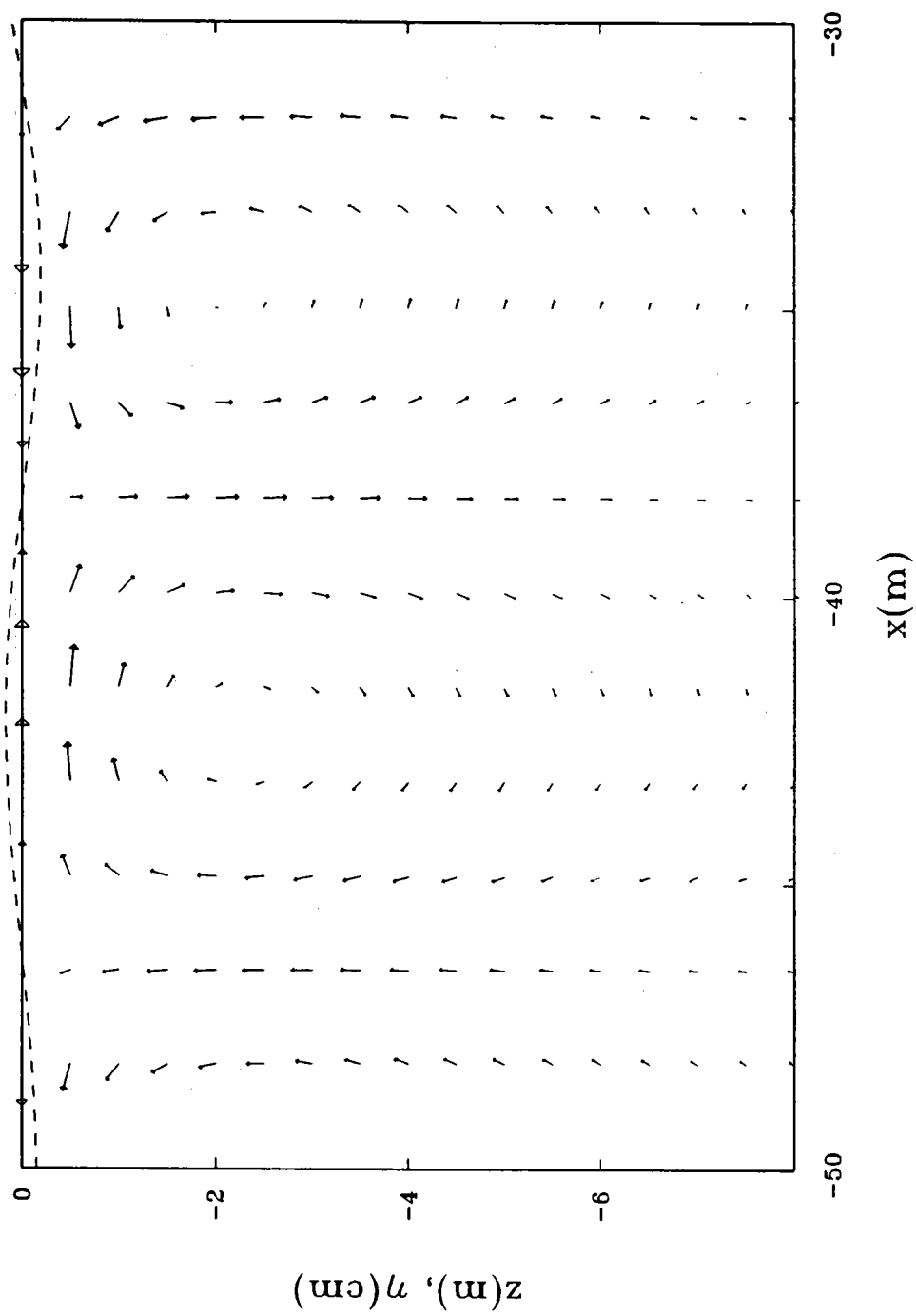
圖八. 與圖七對應之 (u', w') 的分佈。



圖九. 波的非旋性流部份的修正項。



圖十. 圖八和圖九中的流速抵消後的流速分佈。



圖十一將圖十中的流速向量放大十倍後的結果。

波與旋性流及亂流交互作用研究

作 者：徐進華

發行所：台灣省政府交通處港灣技術研究所
台中縣梧棲鎮臨海路83號
電話：(04)6564216

承印者：建州企業有限公司
電話：(04)6270966

本書印製 150 本，非賣品