

透水性結構物之波能消散及港池應用(二)

— 船體對多孔消波體之波能消散影響 —

台灣省政府交通處
港灣技術研究所

台中 梧棲

中華民國八十三年六月

透水性結構物之波能消散及港池應用(二)

— 船體對多孔消波體之波能消散影響 —

執行單位	:	數學模式組
計畫主持人	:	蘇青和 研究員兼組長
研究顧問	:	章梓雄 教授
	:	歐善惠 教授
參與人員	:	莊文傑 副研究員
	:	陳明宗 副研究員
	:	陳冠宇 助理研究員
	:	江中權 助理研究員
	:	陳毓清 技工

**Wave Dissipation of Porous Structure
with Application to Harbor (II)**

— Wave Dissipation of a Floating Body —

— Near a Porous Wave Absorber —

Ching-Ho Su

Institute of Harbor & Marine Technology

Wuchi, Taiwan 43501, R.O.C.

Allen T. Chwang

Department of Mechanical Engineering

The University of Hong Kong

Hong Kong

and

Shan-Hwei Ou

Department of Hydraulics and Ocean Engineering

National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan 701-01, R.O.C.

摘 要

本文以理論解析及數值解析分別探討浮體對多孔消波體波能消散之影響。多孔消波體由單層或多層孔隙牆與不透水直立壁組成，並含一個或多個消波室之消波體設計。當多孔牆為均勻直立式孔隙牆，浮體假設為方形不透水體，文中以理論解析探討消波體前反射係數與入射波波浪參數、浮體高度、厚度、浮體至消波體距離、消波體之孔隙牆厚度、牆特性參數及消波室寬度等參數之相關特性，以進一步了解浮體置於消波體前對消波體之消波影響。為求得不規則形狀浮體及消波體由不規則形狀孔隙牆組成時之消波特性，本文引用邊界元素數值方法求解此類型複雜邊界值問題，數值結果與理論解析結果比較，得到一致之印證。

透水性結構物之波能消散及港池應用(二)

— 船體對多孔消波體之波能消散影響 —

目 錄

摘要	i
目錄	ii
圖目錄	iii
壹、前言	1
貳、理論解析-簡易型多孔消波體	5
一、控制方程式及邊界條件	5
二、波函數表示式	11
三、波函數一般解析解	17
四、平面波一階解	22
五、單一多孔牆之波函數解	25
六、波能消散特性	27
參、理論解析-雙層多孔牆型多孔消波體	35
一、控制方程式及邊界條件	35
二、雙層多孔牆型孔消波體之波函數	37
三、波函數一般解析解	38
四、平面波一階解	40
五、雙多孔牆之波函數解	44
六、波能消散特性	46
肆、數值解析-不規則型多孔消波體	51
一、積分方程式	51
二、邊界元素法模式	54
三、數值結果之印證	66
伍、結論及建議	68
參考文獻	69

圖 目 錄

圖 2-1 自由水面型態多孔消波體設計側視示意圖	5
圖 2-2 單一多孔牆之側視示意圖	25
圖 2-3 無浮體時在不同波浪參數 C_0 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖	29
圖 2-4 有浮板時在不同波浪參數 C_0 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖	29
圖 2-5 有浮體時在不同波浪參數 C_0 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖	30
圖 2-6 有浮體時在不同浮體高度 h_b/h 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖	30
圖 2-7 有浮體時在不同浮體距離 d_1/L 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖	31
圖 2-8 有浮體時在不同消波室寬度 d_2/L 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 浮體距離 d_1/L 相關曲線圖	31
圖 2-9 $C_0 = 0.5$ 時在消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上簡易型 消波體前之等反射係數圖	32
圖 2-10 $C_0 = 2$ 時在消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上簡易型 消波體前之等反射係數圖	32
圖 2-11 有浮體時在不同消波室寬度 d_2/L 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 多孔牆厚度 b_1/h 相關曲線圖	33
圖 2-12 有浮體時在不同消波室寬度 d_2/L 簡易型消波體前反射係數 C_r 與 浮體寬度 b_0/h 相關曲線圖	33
圖 2-13 $C_0 = 0.5$ 時在浮體寬度 b_0/h 與多孔牆厚度 b_1/h 平面上簡易型 消波體前之等反射係數圖	34
圖 2-14 $C_0 = 2$ 時在浮體寬度 b_0/h 與多孔牆厚度 b_1/h 平面上簡易型 消波體前之等反射係數圖	34
圖 3-1 雙層多孔牆型多孔消波體設計側視示意圖	35
圖 3-2 雙多孔牆側視示意圖	44
圖 3-3 無浮體時在不同波浪參數 C_0 雙層型消波體前反射係數 C_r 與 第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖	47
圖 3-4 有浮板時在不同波浪參數 C_0 雙層型消波體前反射係數 C_r 與 第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖	47

圖 3-5 有浮體時在不同波浪參數 C_0 雙層型消波體前反射係數 C_r 與 第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖	48
圖 3-6 有浮體時在不同浮體高度 h_b/h 雙層型消波體前反射係數 C_r 與 第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖	48
圖 3-7 $C_0 = 0.5$ 時在第一消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上 雙層型消波體前之等反射係數圖	49
圖 3-8 $C_0 = 2$ 時在第一消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上 雙層型消波體前之等反射係數圖	49
圖 3-9 $C_0 = 0.5$ 時在浮體寬度 b_0/h 與第一多孔牆厚度 b_1/h 平面上 雙層型消波體前之等反射係數圖	50
圖 3-10 $C_0 = 2$ 時在浮體寬度 b_0/h 與第一多孔牆厚度 b_1/h 平面上 雙層型消波體前之等反射係數圖	50
圖 4-1 多層多孔消波體側視示意圖	51
圖 4-2 雙層多孔消波體視示意圖	54
圖 4-3 雙層多孔消波體無因次波浪參數 C_0 與反射係數 C_r 之相關圖	66
圖 4-4 雙層多孔消波體無因次波浪參數 C_0 與透射係數 C_t 之相關圖	67

第一章 前言

海岸工程常以透水結構物安置於港池內壁、防波堤、離岸堤、突堤，以減低港池、港口及海岸線受波浪之作用，在試驗室也利用透水結構物以消滅不必要之反射波。一般透水結構物之波能消散、反射或穿透等特性，受水深、波浪之波高、週期、尖銳度、入射波方向等條件影響，而結構物之幾何形狀、孔隙率、穿透率、材料特性等也是重要因素。而這些因素也決定結構物本身所受波力、穩定度、波浪朔上、越波等物理特性。基於波浪與透水結構物交互作用之解析困難性，一般常引用線性波解析規則形狀均勻結構物之物理特性(例如長方體透水結構物, Sollitt and Cross (1972), Liu et al. (1986), Huang (1991); 多孔板, Chwang (1983))。而不規則形狀或特殊複雜型態消波體之分析，則有賴模型試驗觀測，或引用經驗公式(如 Hudson equation)。

Jarlan(1961,1965)可能為最早探討多孔牆式防波堤引起波浪能量消散問題，其引用聲學原理解析固定式多孔牆消波，並配合實驗印證，發現反射係數之主要影響因素為波浪尖銳度，而與水槽寬度及系統頻率關係不甚明顯。Richey and Sollitt (1970)則引用Jarlan之防波堤原理進一步深入探討其消波特性。Terrett、Osorio and Lean (1968)引用長波理論及試驗探討多孔牆之消波效果指出，消波室(由多孔牆與不透水直立壁組成)寬度等於波長四分之一加上半波長之倍數時，消波效果最佳，而在寬度為半波長之倍數時完全失去消波作用。

Chwang(1983)探討薄均勻多孔板水平振動產生之重力自由波特性，考慮多孔板造波機放置於等水深無限長水槽中央之情況，解析結果指出，其波浪特性與Havelock(1929)，Biesel and Suquet(1951)及Ursell et al. (1960)等學者解析不透水造波板產生之波浪，不但在水位變化不同，板前波壓分佈狀況也不相似。多孔板之重要特性為滿足達西定律(Darcy's law) (Taylor, 1956)，通過多孔板之流速與薄板兩側壓力差成正比關係。Chwang and Li(1983)應用上述線性多孔板造波機理論，解析放置於半無限長水槽末端之活塞式多孔板造波機所產生之小振幅波特性，並提出波浪捕捉(wave-trapping)現象及描述多孔板特性之多孔影響參數 G_0 (porous-effect parameter)。Chwang and Dong(1984)進一步探討波浪捕捉現象，在考慮上述多孔板放置於半無限長水槽近末端處，他們發現在多孔板與槽端不透水直立壁間之距離等於四分之一波長加上半波長倍數時，板前反射係數最小，此時若多孔影響參數 G_0 等於1時，反射係數為零，反射波完全

消失,此研究顯示多孔板及直立壁形成之消波室具有消波特性。以上分析顯示 Chwang(1983)之多孔板理論,在引用多孔影響參數 G_0 ,可簡易清楚的描述其消波特性。

Twu and Lin(1991)引用 Chwang(1983)之多孔板理論,解析多片孔隙板置於半無限長等水深水槽,對線性波波形及波壓之影響。並以金屬網及海綿網作為多孔板材料,在試驗室對反射係數之特性得到合理之印證,並進一步驗證多孔板之消波特性。有關多層多孔板之消波能力, Jamieson and Mansard (1987)利用一系列多孔板進行試驗,也證明可消滅大部分入射波波能,使反射係數達 0.05 以下。

Chwang、Ou and Su (1989)推廣消波室之消波功能,提出近似封閉式消波室之多孔岸壁(porous-wall)觀念,假設消波室為靜水區(動壓力視為零),探討剛性水面型態多孔岸壁之波浪反射特性。他們發現在垂直入射波作用下,壁前之反射係數甚小,而與消波室寬度無關,僅與多孔影響參數 G_0 之值有關;當多孔影響參數 G_0 等於 1,即入射波波速等於特徵波速時,反射波完全消失。在充滿水體之消波室內,因動壓遠小於靜水壓,而忽略動壓力,此簡化條件將可求得剛性水面型態多孔岸壁之簡易邊界條件,但也因此忽略水體之衝擊力(impact force)效應。蘇、章和歐(1992)進一步探討多孔岸壁在斜向波浪作用之反射及波壓特性,引用斜向多孔影響參數,更週延描述不同方向波浪作用下,剛性水面及自由水面兩種不同型態多孔岸壁之能量消散情形。其解析包括因平均水深不同,在消波室內產生剛性水面及自由水面兩種不同邊界效應;而在考慮散射波(evanescent mode)之條件下,發現剛性水面型態多孔岸壁之消波特性,與假設消波室為靜水區之結果顯然有些差異。

以上之解析已甚完整探討由多孔板設計之多孔岸壁,在不同方向之波浪作用下,不同水深時之波能消散特性。然而 Chwang(1983)提出之多孔板理論適合於多孔物體厚度遠小於波長之狀況,而且其理論因以零厚度處理多孔物體,在摩擦效應遠大於慣性效應之假設下,忽略慣性力之影響,理論簡易計算方便。但若在結構物之厚度與波長比較不甚小時,仍以多孔板觀念來處理多孔物體部分,則與實際不符,厚度及慣性力之影響應納入考慮才合理。

Huang(1991)引用簡化之 Biot 孔隙體理論,延伸 Chwang(1983)之零厚度多孔板理論至有限厚度多孔介質,並將慣性效應納入考慮;當使用規則攝動展開

法,並引用多孔雷諾數(porous Reynolds number)為攝動參數,以解析有限厚度多孔體之造波理論,其發現多孔雷諾數較大時,慣性效應遠較摩擦效應為重要。Huang and Chao(1992)探討有限厚度多孔牆放置於等水深無限長水槽受波浪作用之反射及透射特性,在以多孔雷諾數為攝動參數,求得攝動展開式,並引用變數分離法,利用正交函數之特性求得解析解。因其特徵值為實數,避開 Sollitt and Cross (1972)複數特徵值之複雜性。他們發現當較大之多孔牆厚度、較小之多孔雷諾數及較短之波長時,反射係數增大,而透射係數減小。Huang, Hsieh and Chang(1992)引用理論方法及邊界元素法,解析有限厚度多孔牆造波特性,在小厚度時其理論解及數值解甚為吻合,但較大厚度時與小厚度之數值計算結果,其特性相差甚大。Huang(1991)等之理論因攝動參數之特性,僅適用於小厚度之多孔牆問題,厚度較大時其理論則不適用。

Sollitt and Cross (1972)利用能量等功原理,提出線性摩擦係數描述多孔介質流體之能量消散特性,將摩擦力項線性化處理。並針對多孔介質存在孔隙率,提出多孔流速勢(pore velocity potential)描述多孔介質流體及波浪之運動。最後引用特徵函數展開法(eigenfunction expansions),求得均勻直立式多孔牆受正向入射波作用之反射係數及透射係數,其基本理論含括厚度較大之多孔介質,目前仍為大多數學者所引用,並在實驗室得到合理之驗證。例如井島、佐木(1972)、Madsen (1974)、Madsen and White(1976),Madsen (1983)及涂和郭(1990)之理論皆與 Sollitt and Cross(1972)甚為相似。根據 Sollitt and Cross(1972)理論解析及試驗結果,在無限長水槽受波浪正向作用之多孔牆透射係數隨波長減小、孔隙率減小、穿透性減小、波高增大、牆厚度增大等因素而減小;反射係數則隨波長減小、孔隙率增大、穿透性增大、牆厚度減小等因素而減小。

Lee (1986)利用區域分割法, Sulisz(1985)利用邊界元素法,在引用 Sollitt and Cross (1972)理論,解析較符合實際應用之梯形透過堤受正向波浪作用之反射及穿透特性, Lee(1986)並計算三種實際防波堤例子,且在實驗室進一部驗證,其方法更可解析均勻不等向之多孔介質問題。Dalrymple, Losada and Martin(1991)則解析多孔牆受斜向入射波作用時多孔介質之反射及透射特性,並深入分析複數特徵值之重根解及完整性,其解析使 Sollitt and Cross(1972)之基本理論更週延。李和藍(1992)引用 Sollitt and Cross(1972)之基本原理,探討

非線性波與透水結構物互相作用之二階解,說明二階非線性理論更能描述波浪與透水結構物相互作用現象。涂及劉(1992)則利用有限厚度多孔牆設置水槽內之造波板前,引用 Sollitt and Cross(1972)之基本理論解析造波水槽內反射波之消除問題。Sollitt and Cross(1972)之理論一般應用於大厚度透水結構物,其理論較完整繁複,而 Chwang (1983)之多孔板理論則應用於甚薄之孔隙物體,簡易方便,兩者有互補之效應,在第一年度裡我們已作進一步之整合。

針對複雜型態或不規則消波體,則有賴試驗室之觀測。阿部和鹿島(1988)則曾經收集以透水結構物設計 25 種防波堤及 20 種護岸結構物在試驗室或現場觀測,測得一些包括反射、透過、波力、安定性等重要物理特性。井島等(1976,1977)也針對幾種複雜型態消波體進行模型試驗觀測。郭及黃(1990)利用規則波及不規則波波浪條件,針對半圓形開孔堤體之特殊設計,就其反射及透射之特性加以試驗研究,以驗證其消波效果。基本上試驗之結果,可容易的應用在實際現場,但欲較詳細的了解物理機構,則有賴理論之探討。

國內少許港口,存在危險性之共振現象,或颱風時產生甚大波高,本計劃探討之透水結構物消波設計,希望能提供工程上港口岸壁之改良,以減低波浪作用或共振現象之發生,維護港池之穩定。在上一年度裡我們提出簡易型多孔消波體之設計,並利用理論解析探討其波浪反射、透射及能量消散物理特性。基於研究結果顯示簡易型多孔消波體在實際應用時消波室寬度設計不能太大,及應用時之消波體常為不規則形狀之需要,本年度將進一步解析不規則形狀多孔消波體之消波特性。而且考慮未來消波體應用於港池岸壁時,實際港池船隻之存在影響,本年度將進一步解析船體置於消波體前時整個消波現象之變化。本年度解析特殊設計之不規則型式或複雜型式之消波體,受波浪作用產生之消波特性,其成果提供第三年研究之引用。預期第三年將引用前二年所研究之消波體,設計於具代表性港池,推算新設計港池之共振改變現象。

貳、理論解析-簡易型多孔消波體

一、控制方程式及邊界條件

考慮多孔消波體 (porous wave absorber) 置於 x -軸方向為半無限長之等水深區域, 如圖 2-1 所示, 多孔消波體為由厚度 b_1 垂直多孔牆 (porous structure)、消波室寬為 d_2 , 及上下為不透水平行壁 (高度為 h_p) 所組成一近似封閉消波室之設計。座標定義如示意圖, 軸原點置於多孔牆右側處, 正 x 軸與入射波傳播方向相同, y 軸方向為無限長, $z=0$ 為平均水面, z 軸向上為正, h 為平均水深。考慮消波體前存在一寬為 b_0 、沒入水中之高為 h_b 之不透水浮體, 浮體與海底之距離為 $h_w = h - h_b$, 假設浮體為靜止不隨水位變化而移動或轉動, 浮體與消波體之水平距離為 d_1 。垂直多孔牆部份由等向性、均勻透水結構物介質組成 (稱區域 R_4), 水域部份分四個區域 (如圖 2-1): 浮體前水域 (稱水域 R_1 , $x \leq -b_0 - d_1 - b_1$), 浮體底下之水域 (稱水域 R_2 , $-b_0 - d_1 - b_1 \leq x \leq -d_1 - b_1$, $-h \leq z \leq -h_b$), 浮體與消波體間之水域 (稱水域 R_3 , $-d_1 - b_1 \leq x \leq -b_1$), 垂直多孔牆與不透水壁間之水域 (稱水域 R_5 , $0 \leq x \leq d_2$)。水域之流體運動, 假設滿足不可壓縮、無黏性及非旋流之條件, 因此存在流速勢 (velocity potential) $\Phi_j(x, z, t)$, $j = 1, 2, 3, 5$ 分別滿足拉普拉氏方程式 (Laplace equation):

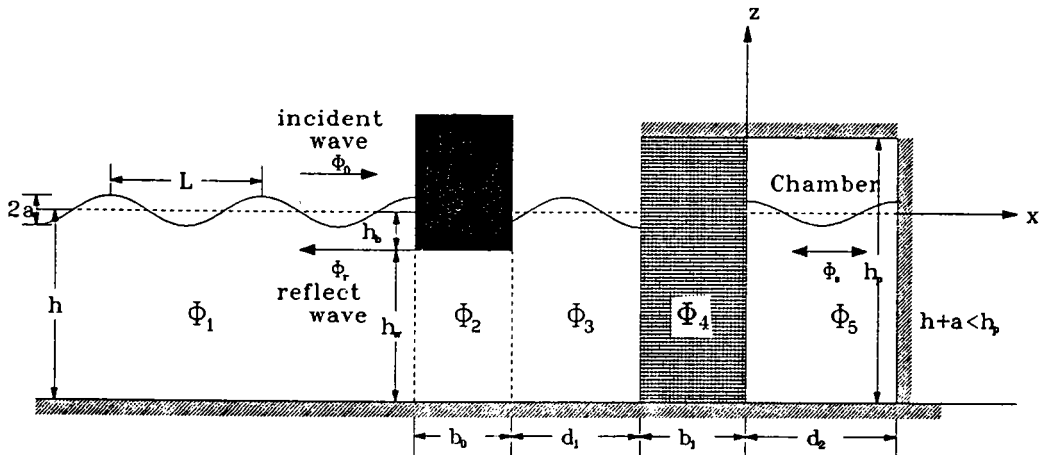


圖 2-1 自由水面型態多孔消波體設計側視示意圖

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 5 \quad (2.1)$$

式中 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_5$ 分別表示在水域 R_1, R_2, R_3, R_5 內之流速勢。

水域內之壓力 P_j 在小振幅波之條件下滿足線性伯努力方程式 (Bernoulli equation) :

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \frac{P_j}{\rho} + gz = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad j = 1, 2, 3, 5 \quad (2.2)$$

式中 ρ 為水之密度， g 為重力加速度。

關於孔隙體內流體運動及波動之現象，引用 Sollitt 及 Cross(1972) 之孔隙介質流體運動理論，假設在多孔牆內介質為剛體結構，流體在孔隙內之運動為不可壓縮，非旋轉流，區域 R_4 存在多孔流速勢 Φ_4 (pore velocity potential) 與滲流速度 $\vec{U}_{4s}$ (seepage velocity) 之關係為 $\nabla \Phi_4 = \vec{U}_{4s}$ ，因此拉普拉氏方程式同樣表示為：

$$\frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

根據線性 Lorentz's 等功原理 (Lorentz's condition of equivalent work) (Sollitt 及 Cross 1972)，即在一週期內以線性機構取代非線性機構，並確定兩者具有相等能量條件下，在多孔介質內之波動頻率與作用於介質外之波浪頻率 σ 相同，並引用無因次摩擦係數 f (dimensionless friction coefficient) 及慣性係數 s (inertial coefficient) 兩個參數，描述流體在孔隙體內之阻尼效應，得到多孔介質流體伯努力方程式：

$$s \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} + \frac{P_4}{\rho} + gz + f \sigma \Phi_4 = 0 \quad (2.4)$$

式中 P_4 為波浪引起之孔隙壓力 (pore pressure)， σ 為波浪週頻率，慣性係數 s (Sollitt 及 Cross, 1972) 定義為

$$s = 1 + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} C_M \quad (2.5a)$$

式中 ε 為孔隙率,表示多孔體孔隙所佔全體積之比率, C_M 為透水結構物產生之附加質量係數,需由試驗決定。 s 之值理論上取決於孔隙率 ε 及多孔結構物之孔隙形狀,一般實際計算取1,例如 Sollitt 及 cross (1972), Madsen (1974), Dalrymple et al. (1991)等,而 Le Méhauté (1957)及 Sulisz(1985)由實驗探討拋石堆結構體(rubble-mound porous structure),則認為 s 值較接近於2。 s 值有待進一步探討,本文僅以理論值 $s = 1$ 從事計算。摩擦係數 f 與作用波浪之特性、介質內流體之水量流速(discharge velocity) $\vec{U}_4$ ($\vec{U}_4 = \varepsilon \vec{U}_{4s}$)、流體運動滯性係數 ν 及透水結構物之孔隙率 ε 、透水度 K_p (intrinsic permeability)、亂流阻力係數 C_f (turbulent resistance coefficient)等有關,在線性理論中不易決定,一般由孔隙體參數(ε, K_p, C_f)及流體參數($\nu, \vec{U}_4$),在體積 V 取週期 T 平均,由以下表示式計算(Sollitt 及 Cross, 1972)

$$f = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_V dV \int_t^{t+T} \left(\frac{\nu}{K_p} |\vec{U}_4|^2 + \frac{C_f \varepsilon}{K_p} |\vec{U}_4|^3 \right) dt}{\int_V dV \int_t^{t+T} \varepsilon |\vec{U}_4|^2 dt} \quad (2.5b)$$

摩擦係數 f 值在實際應用需經多次複雜疊代計算決定,此處在考慮均勻透水結構物區域(R_4)為簡化計算則取常數。 f 值理論上可由零至無限大,一般多孔型態防波堤之數量級為 $O(1)$ 。假設多孔牆之流體運動為無阻泥($f = 0$)及無虛擬質量影響($s = 1$)則多孔介質流體伯努力方程式(2.4)可退化為線性波伯努力方程式(2.2)。

若入射波波向線沿正 x 軸進行,水位變化 η_0 複數表示式為

$$\eta_0(x, t) = a e^{i[\sigma t - k_0(x+b_0+d_1+b_1)]} \quad (2.6)$$

式中 a 為振幅(wave amplitude), $i = \sqrt{-1}$

k_0 為波數(wave number), $k_0 = 2\pi/L_0$, L_0 為波長(wave length)

σ 為週頻率(radian frequency), $\sigma = 2\pi/T$, T 為波浪週期(wave period)。

類似聲波在穿過不同介值傳播(Morse 及 Ingard, 1968)或電磁波通過導引介面(Yeh, 1988)之穿透和反射特性,我們假設線性入射波在多孔牆體內,或通過多孔牆進入消波室,其穿透波進行之週期不改變,則各個區域 $R_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ 流速勢 Φ_j 可表示為:

$$\Phi_j(x, z, t) = \phi_j(x, z)e^{i\sigma t} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.7)$$

式中 $\phi_j(x, z)$ 稱波函數 (wave function)。

將 (2.7) 式代入 (2.1) 或 (2.3) 式化簡可得

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.8)$$

水域 R_1, R_3, R_5 分別滿足線性自由動力邊界 (DBC) 及運動邊界條件 (KBC):

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + g\eta_j = 0, \quad z = 0, \quad j = 1, 3, 5 \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad j = 1, 3, 5 \quad (2.9b)$$

上二式可合併為

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad j = 1, 3, 5 \quad (2.9c)$$

式中 $\eta_j(x, t), j = 1, 3, 5$ 分別表示水域 R_1, R_3, R_5 之水位變化。

當波浪正向作用於浮體, 在區域 R_1 波浪與透水結構物交互作用產生之消散波 (evanescent wave) Φ_{10} , 定義為 $\Phi_{10} = \Phi_1 - \Phi_0$, 其中 Φ_0 為入射波, Φ_{10} 在無窮遠處 ($x \rightarrow -\infty$), 應滿足下列輻射條件 (radiation condition):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{10}}{\partial x} - ik_0 \Phi_{10} \right) = 0 \quad (2.10)$$

即 Φ_{10} 為向負無限遠方向之傳遞波 (out-going wave)。

而在最右邊之消波室不透水右壁滿足

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial x} = 0, \quad x = d_2 \quad (2.11)$$

浮體與水界面之邊界滿足不透水條件

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0, \quad x = -b_0 - d_1 - b_1, \quad -h_b \leq z \leq 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = 0, \quad x = -d_1 - b_1, \quad -h_b \leq z \leq 0 \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \quad -b_0 - d_1 - b_1 \leq x \leq -d_1 - b_1, \quad z = -h_b \quad (2.12c)$$

在多孔牆內與平均水面交界之假想自由表面 $\eta_4(x, t)$ ，滿足線性動力邊界條件(DBC)及運動邊界條件(KBC)：

$$s \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} + g \eta_4 + f \sigma \Phi_4 = 0, \quad z = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (2.13b)$$

同樣二式可合併為

$$s \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} + f \sigma \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} = 0, \quad z = 0 \quad (2.13c)$$

而不透水海底邊界條件為

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad z = -h, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.14)$$

基於入射波條件及線性理論，我們可知波壓皆為週期性函數表示為

$$P_j(x, z, t) = p_j(x, z)e^{i\sigma t}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.15)$$

在任何相鄰水域或孔隙牆之 R_j 及 R_k 兩個區域 ($j \neq k$) 之界面處 S_{jk} 之界面處, 即在 $x=0$, $x=-b_1$, $x=-b_1-d_1$, $x=-b_1-d_1-b_0$, 必滿足壓力連續條件:

$$-i\gamma_j\Phi_j = -i\gamma_k\Phi_k, \quad \text{at } S_{jk}, \quad j \neq k \quad (2.16)$$

及流體質量連續條件:

$$\varepsilon_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = \varepsilon_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad \text{at } S_{jk}, \quad j \neq k \quad (2.17)$$

式中 $\varepsilon_j, \varepsilon_k$ 分別為區域 R_j, R_k 之孔隙率 (porosity), $\gamma_j = f_j + is_j$ 及 $\gamma_k = f_k + is_k$ 分別為區域 R_j 及 R_k 之阻抗係數 (impedance)。在水域區域 $R_j, j=1, 3, 5$ 則 $\varepsilon_j = 1$, 且 $\gamma_j = i$; 在透水結構物區域 R_4 則 $\varepsilon_4 = \varepsilon < 1$, 且 $\gamma_4 = f + is$ 為複數, 即 $s_4 = s$, $f_4 = f$ 。

二、波函數表示式

由控制方程式(2.8)及入射波條件(2.6)式，邊界條件(2.9)、(2.10)、(2.11)、(2.12)、(2.13)、(2.14)等式及週期函數特性條件(2.7)，區域 R_1 至區域 R_5 之波函數 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ 及 ϕ_5 可分別表示為：

$$\begin{aligned}\phi_1(x, z) &= A \cosh[k_0(h+z)]e^{-ik_0(x+b_0+d_1+b_1)} \\ &\quad + R_0^{(1)} A \cosh[k_0(h+z)]e^{ik_0(x+b_0+d_1+b_1)} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} R_r^{(1)} A \cos[k'_r(h+z)]e^{k'_r(x+b_0+d_1+b_1)} \\ x &\leq -b_0 - d_1 - b_1, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\phi_2(x, z) &= T_0^{(2)} A + R_0^{(2)} A(x+b_1+d_1) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(2)} A \cos[I_m(z+h_b)] \cosh[I_m(x+b_1+d_1)] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} R_m^{(2)} A \cos[I_m(z+h_b)] \sinh[I_m(x+b_1+d_1)] \\ -b_0 - d_1 - b_1 &\leq x \leq -d_1 - b_1, \quad -h \leq z \leq -h_b\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\phi_3(x, z) &= +T_0^{(3)} A \cosh[k_0(h+z)]e^{-ik_0(x+b_1)} \\ &\quad + R_0^{(3)} A \cosh[k_0(h+z)]e^{ik_0(x+b_1)} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} T_r^{(3)} A \cos[k'_r(h+z)]e^{-k'_r(x+b_1)} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} R_r^{(3)} A \cos[k'_r(h+z)]e^{k'_r(x+b_1)} \\ -d_1 - b_1 &\leq x \leq -b_1, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\phi_4(x, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \{T_n^{(4)} A \cosh[K_n(h+z)] e^{-i\bar{K}_n x} \\ & + R_n^{(4)} A \cosh[K_n(h+z)] e^{i\bar{K}_n x}\} \\ & -b_1 \leq x \leq 0, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\phi_5(x, z) = & T_0^{(5)} A \cosh[k_0(h+z)] \cos[k_0(x-d_2)] \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} T_r^{(5)} A \cos[k'_r(h+z)] \cosh[k'_r(x-d_2)] \\ & 0 \leq x \leq d_2, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (2.22)$$

表示式(2.18)等號右邊第一項 ϕ_0 為區域 R_1 入射波：

$$\phi_0 = A \cosh[k_0(z+h)] e^{-ik_0(x+b_0+d_1+b_1)} \quad (2.23a)$$

其中常數 A 定義為

$$A = \frac{iga_0}{\sigma \cosh(k_0 h)} \quad (2.23b)$$

k_0 並滿足下列分散關係式(dispersion relation)

$$\sigma^2 = gk_0 \tanh(k_0 h), \quad k_0 > 0 \quad (2.24a)$$

或

$$\frac{1}{C_0} = k_0 h \tanh(k_0 h), \quad k_0 > 0 \quad (2.24b)$$

其中 $C_0 = g/\sigma^2 h$ 稱為無因次波浪影響參數(dimensionless wave-effect parameter)

(2.18)式等號右邊第二項 ϕ_r 為區域 R_1 反射波(reflected wave)：

$$\phi_r = R_0^{(1)} A \cosh[k_0(z+h)] e^{ik_0(x+b_0+d_1+b_1)} \quad (2.25)$$

式中 $R_0^{(1)}$ 為未定係數。

(2.18)式等號右邊第三項 ϕ_{1s} 為區域 R_1 之衰減波(evanescent waves)：

$$\phi_{1s} = \sum_{r=1}^{\infty} R_r^{(1)} A \cos[k'_r(h+z)] e^{k'_r(x+b_0+d_1+b_1)} \quad (2.26)$$

式中 R_r 為未定係數, $r=1,2,3\dots$, k_r 滿足下列特徵方程式

$$\sigma^2 = -gk'_r \tan(k'_r h), \quad r = 1, 2, 3\dots \quad (2.27a)$$

或

$$\frac{-1}{C_0} = k'_r h \tan(k'_r h) \quad (2.27b)$$

ϕ_{1s} 之振幅特性水深方面為週期振盪，水平方向則呈指數遞減，在無窮遠處，應滿足下列條件

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_{1s} = 0 \quad (2.28)$$

表示式(2.19)等號右邊第一項及第二項 ϕ_{20} 為浮體下水域 R_2 行進波之消散成份波函數

$$\phi_{20}(x, z) = T_0^{(2)} A + R_0^{(2)} A(x + d_1 + b_1) \quad (2.29a)$$

表示式(2.19)等號右邊第三項及第四項 ϕ_{2s} 為浮體下水域 R_2 之成份波函數

$$\begin{aligned} \phi_{2s} = & \sum_{m=1}^{\infty} T_m^{(2)} A \cos[I_m(z + h_b)] \cosh[I_m(x + d_1 + b_1)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} R_m^{(2)} A \cos[I_m(z + h_b)] \sinh[I_m(x + d_1 + b_1)] \\ & -b_0 - d_1 - b_1 \leq x \leq -d_1 - b_1, \quad -h \leq z \leq -h_b \end{aligned} \quad (2.29b)$$

其特性在水深方面為週期振盪，水平方向則遞減變化。

式中特徵值

$$I_m = \frac{m\pi}{h_w}, \quad m = 1, 2\dots \quad (2.30)$$

表示式(2.20)等號右邊第一項 ϕ_{3l} 為區域 R_3 向左之進行波:

$$\phi_{3l} = T_0^{(3)} A \cosh[k_0(z+h)] e^{ik_0(x+b_1)} \quad (2.31a)$$

表示式(2.20)等號右邊第二項 ϕ_{3r} 為區域 R_3 向右之進行波:

$$\phi_{3r} = R_0^{(3)} A \cosh[k_0(z+h)] e^{-ik_0(x+b_1)} \quad (2.31b)$$

(2.20)式等號右邊第三項及第四項為區域 R_3 之衰減波(evanescent waves),其振幅特性水深方面為週期振盪,水平方向則呈指數遞減。

假設透水結構物為等向性、均勻之長方形(阻抗係數為 $\gamma_4 = \gamma = s + if$),則表示式(2.21)等號右邊第一項 ϕ_{4r} 定義為

$$\phi_{4r} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(4)} A \cosh[K_n(h+z)] e^{-iK_n x} \quad (2.32a)$$

此項成份波代表在第一個多孔牆內向右進行並呈指數消散之透過消散進行波(exponentially damped sinusoidal propagating waves)。

(2.21)式等號右邊第二項 ϕ_{4l} 定義為

$$\phi_{4l} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(4)} A \cosh[K_n(h+z)] e^{iK_n x} \quad (2.32b)$$

則代表在第一個多孔牆內向左進行並呈指數消散之反射消散進行波。所謂消散進行波,表示波浪為進行波,但其振幅則隨水平距離之增加呈指數衰減。一般 m 愈大之成份波振幅愈小,衰減愈快。而複數特徵值 K_n 為下列特徵方程式之根

$$-i\sigma^2\gamma = gK_n \tanh(K_n h), \quad n = 1, 2, 3... \quad (2.33a)$$

或

$$\frac{-i\gamma}{C_0} = K_n h \tanh(K_n h) \quad (2.33b)$$

K_n 為複數, K_n 之實部 $K_{nr} \geq 0$,虛部 $K_{ni} \leq 0$,根據Dalrymple et al. (1991)之解析,一般在阻尼係數 f 不大(小於1.2以下),或波長較長時皆為一個

特徵值 K_n 對應一個特徵函數,但在一些特別情形時,如阻尼係數 f 較大,且波長較短時一個特徵值可能對應兩個以上之特徵函數,此時表示式則為不完全解,需另行處理,本文主要探討之問題範圍皆滿足完整性。

在 R_5 水域之表示式(2.22)等號右邊第一項 ϕ_{5d} 為區域 R_5 消波室內之駐波(standing wave) :

$$\phi_{5d} = T_0^{(5)} A \cosh[k_0(h+z)] \cos[k_0(x-d_2)] \quad (2.34a)$$

$T_0^{(5)}$ 為未定係數。

(2.22) 式等號右邊第二項 ϕ_{5s} 為消波室內之消散駐波(evanescent standing waves) :

$$\phi_{5s} = \sum_{r=1}^{\infty} T_r^{(5)} A \cos[k'_r(h+z)] \cosh[k'_r(x-d_2)] \quad (2.34b)$$

$T_r^{(5)}$ 為未定係數, ϕ_{5s} 其特性水深方面為週期振盪, 水平方向則呈指數遞減。

為方便特徵值 $k_0, k'_r, r=1,2,3..., I_m, m=0,1,2,3...$ 及 $K_n, n=1,2,3...$ 等符號統一表示, 令 $k_r = -ik'_r, r=1,2,3...$, 且 $\sinh(I_0 x) = x$, 則有 $\cosh(k_r z) = \cos(k'_r z)$, $\cosh(I_0 x)=1$, $\tanh(k_r z) = -\tan(k'_r z)$ 之關係式存在。因此各區域 $R_j, j=1,2,3,4,5$, 之表示式(2.18)、(2.19)、(2.20)及(2.22)可分別改寫為

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z) &= A \cosh[k_0(h+z)] e^{-ik_0(x+b_0+d_1+b_1)} \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty} R_r^{(1)} A \cosh[k_r(h+z)] e^{ik_r(x+b_0+d_1+b_1)} \\ x &\leq -b_0 - d_1 - b_1, \quad -h \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\phi_2(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{(2)} A \cos[I_m(z+h_b)] \cosh[I_m(x+d_1+b_1)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=0}^{\infty} R_m^{(2)} A \cos[I_m(z + h_b)] \sinh[I_m(x + d_1 + b_1)] \\
 & -b_0 - d_1 - b_1 \leq x \leq -d_1 - b_1, \quad -h \leq z \leq -h_b
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3(x, z) &= \sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(3)} A \cosh[k_r(h + z)] e^{-ik_r(x+b_1)} \\
 & + \sum_{r=0}^{\infty} R_r^{(3)} A \cosh[k_r(h + z)] e^{ik_r(x+b_1)} \\
 & -d_1 - b_1 \leq x \leq -b_1, \quad -h \leq z \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_5(x, z) &= \sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(5)} A \cosh[k_r(h + z)] \cos[k_r(x - d_2)] \\
 & 0 \leq x \leq d_2, \quad -h \leq z \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

三、波函數一般解析解

本節將引用正交序列 $\cosh[k_r(h+z)]$, $r = 0, 1, 2, 3\ldots$ 及 $\cos[I_m(h_b+z)]$, $m = 0, 1, 2, 3\ldots$ 分別在水深區 $(-h, 0)$ 及 $(-h, -h_b)$ 之正交性，以求解波函數。將表示式(2.35)在界面 $x = -(b_0 + d_1 + b_1)$ 處引用浮體與水界面之邊界滿足不透水條件(2.12a)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h_b}^0 () \cos[I_m(z + h_b)] dz$ ，則可得

$$-ik_0 E_{0m}^* + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r E_{rm}^* R_r^{(1)} = 0, \quad m = 0, 1, 2.. \quad (2.39a)$$

式中

$$E_{rm}^* = \int_{-h}^{-h_b} \cosh[k_r(h+z)] \cos[I_m(h_b+z)] dz$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, 2, 3\ldots \quad (2.39b)$$

將表示式(2.35)及(2.36)在界面 $x = -(b_0 + d_1 + b_1)$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^{h_b} () \cos[I_m(z + h_b)] dz$ ，則分別可得

$$E'_{0m} + \sum_{r=0}^{\infty} E'_{rm} R_r^{(1)} = J'_{mm} \cosh(b_0 I_m) T_m^{(2)} - J'_{mm} \sinh(b_0 I_m) R_m^{(2)}$$

$$m = 0, 1, 2.. \quad (2.40a)$$

$$-ik_0 E'_{00} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r E'_{r0} R_r^{(1)} = J'_{00} R_0^{(2)} \quad (2.40b)$$

$$-ik_0 E'_{0m} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r E'_{rm} R_r^{(1)} = -I_m J'_{mm} \sinh(b_0 I_m) T_m^{(2)} + I_m J'_{mm} \cosh(b_0 I_m) R_m^{(2)}$$

$$m = 1, 2.. \quad (2.40c)$$

式中

$$E'_{rm} = \int_{-h}^{-h_b} \cosh[k_r(h+z)] \cos[I_m(h_b+z)] dz = \frac{k_r \sinh(k_r h_w)}{k_r^2 + I_m^2}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.41a)$$

$$J'_{mm} = \int_{-h}^{-h_b} \cos^2[I_m(h_b+z)] dz = h_w \quad m = 0$$

$$= 0.5h_w, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41b)$$

組合式(2.39)及式(2.40)可表示為

$$E'_{0m} + \sum_{r=0}^{\infty} E'_{rm} R_r^{(1)} = J'_{mm} \cosh(b_0 I_m) T_m^{(2)} - J'_{mm} \sinh(b_0 I_m) R_m^{(2)}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42a)$$

$$-ik_0 E'_{00} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r (E'_{r0} + E_{r0}^*) R_r^{(1)} = J'_{00} R_0^{(2)} \quad (2.42b)$$

$$-ik_0 (E'_{0m} + E_{0m}^*) + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r (E'_{rm} + E_{rm}^*) R_r^{(1)} = -I_m J'_{mm} \sinh(b_0 I_m) T_m^{(2)}$$

$$+ I_m J'_{mm} \cosh(b_0 I_m) R_m^{(2)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.42c)$$

將表示式(2.37)在界面 $x = -(b_0 + d_1)$ 處引用浮體與水界面之邊界滿足不透水條件(2.12b)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h_b}^0 () \cos[I_m(z + h_b)] dz$ ，則可得

$$-\sum_{r=0}^{\infty} ik_r E_{rm}^* e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r E_{rm}^* e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

同樣將表示式(2.36)及(2.37)在界面 $x = -(d_1 + b_1)$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^{-h_b} () \cos[I_m(z + h_b)] dz$ ，則分別可得

$$J'_{mm}T_m^{(2)} = \sum_{r=0}^{\infty} E'_{rm} e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} E'_{rm} e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.44a)$$

$$J'_{00}R_0^{(2)} = -\sum_{r=0}^{\infty} ik_r E'_{r0} e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r E'_{r0} e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)} \quad (2.44b)$$

$$I_m J'_{mm} R_m^{(2)} = -\sum_{r=0}^{\infty} ik_r E'_{rm} e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r E'_{rm} e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)} \\ m = 1, 2, \dots \quad (2.44c)$$

組合式(2.43)及式(2.44)可表示為

$$J'_{mm}T_m^{(2)} = \sum_{r=0}^{\infty} E'_{rm} e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} E'_{rm} e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45a)$$

$$J'_{00}R_0^{(2)} = -\sum_{r=0}^{\infty} ik_r (E'_{r0} + E_{r0}^*) e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r (E'_{r0} + E_{r0}^*) e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)} \quad (2.45b)$$

$$I_m J'_{mm} R_m^{(2)} = -\sum_{r=0}^{\infty} ik_r (E'_{rm} + E_{rm}^*) e^{ik_r d_1} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r (E'_{rm} + E_{rm}^*) e^{-ik_r d_1} R_r^{(3)} \\ m = 1, 2, \dots \quad (2.45c)$$

引用正交序列 $\cosh[K_n(h+z)]$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 在水深區 $(-h, 0)$ 之正交性，將表示式(2.37)及(2.21)在界面 $x = -b_1$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh[K_n(z+h)] dz$ ，則分別可得

$$\sum_{r=0}^{\infty} N_{rn} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn} R_r^{(3)} = -i\gamma M_{nn} e^{ib_1 K_n} T_n^{(4)} - i\gamma M_{nn} e^{-ib_1 K_n} R_n^{(4)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.46a)$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} k_r N_{rn} T_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{\infty} k_r N_{rn} R_r^{(3)} = -\varepsilon K_n M_{nn} e^{ib_1 K_n} T_n^{(4)} + \varepsilon K_n M_{nn} e^{-ib_1 K_n} R_n^{(4)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.46b)$$

式中

$$N_{rn} = \int_{-h}^0 \cosh[k_r(h+z)] \cosh[K_n(h+z)] dz$$

$$= \frac{1}{k_r^2 - K_n^2} [k_r \sinh(k_r h) \cosh(K_n h) - K_n \sinh(K_n h) \cosh(k_r h)]$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47a)$$

$$M_{nn} = \int_{-h}^0 \cosh^2[K_n(h+z)] dz = h \left[\frac{1}{2} + \frac{\sinh(2K_n h)}{4K_n h} \right]$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47b)$$

同樣將表示式(2.21)及(2.38)在界面 $x = 0$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh[K_n(z+h)] dz$ ，則分別可得

$$-i\gamma M_{nn} T_n^{(4)} - i\gamma M_{nn} R_n^{(4)} = \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn} \cos(k_r d_2) T_r^{(5)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.48a)$$

$$-iK_n \varepsilon M_{nn} T_n^{(4)} + iK_n \varepsilon M_{nn} R_n^{(4)} = \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn} k_r \sin(k_r d_2) T_r^{(5)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.48b)$$

方程組(2.42)、(2.45)、(2.46)及(2.48)合計含有 $R_r^{(1)}$, $R_r^{(3)}$, $T_r^{(3)}$, $T_r^{(5)}$, $r=0,1,2,\dots$, $R_m^{(2)}$, $T_m^{(2)}$, $m=0,1,2,3,\dots$, $R_n^{(4)}$, $T_n^{(4)}$, $n=1,2,3,\dots$ 等未知變數。波函數

無窮級數(2.35)、(2.36)、(2.37)、(2.21)及(2.38)為收斂級數，在實際計算，可依收斂之速度取有限項，因此可求解以上未知變數。

反射係數定義為

$$C_r = |R_0^{(1)}| \quad (2.49)$$

表示浮體前反射波振幅與入射波振幅比值。

透射係數定義為

$$C_t = |T_0^{(5)}| \quad (2.50)$$

表示透過駐波在消波室內右側不透水直立壁前之振幅與入射波振幅比值。

若入射波之水位變化取複數入射波表示式(2.6)之實數部分如下

$$\eta_0(x, y, t) = a_0 \cos[\sigma t - k_0 \cos \theta_0(x + b_0 + d_1 + b_1) - k_0 \sin \theta_0 y] \quad (2.51)$$

則區域 R_1 之波函數 ϕ_1 表示式(2.18)等號右邊第二項為反射波水位變化複數入射波表示式為

$$\eta_r(x, y, t) = a_0 R_0^{(1)} e^{i[\sigma t + k_0(x + b_0 + d_1 + b_1) \cos \theta_0 + k_0 y \sin \theta_0]} \quad (2.52)$$

取複數反射波表示式(2.52)之實數部分可表示如下

$$\begin{aligned} \eta_r(x, y, t) &= a_0 |R_0^{(1)}| \cos[\sigma t + k_0 \cos \theta_0(x + b_0 + d_1 + b_1) - k_0 \sin \theta_0 y + \kappa_r] \\ |R_0^{(1)}| &= \sqrt{R_{0r}^2 + R_{0i}^2}, \quad \kappa_r = \tan^{-1} \left(\frac{R_{0i}}{R_{0r}} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

式中 R_{0r} 及 R_{0i} 分別為 $R_0^{(1)}$ 之實部及虛部。

四、平面波一階解

假設多孔牆內摩擦係數 f 較小，且所有區域內之波浪僅有平面行進波或駐波存在，散射波成份不存在或相對甚小，各級數皆僅取一項，即 $R_0^{(1)}, R_0^{(2)}, T_0^{(2)}, R_0^{(3)}, T_0^{(3)}, R_1^{(4)}, T_1^{(4)}, T_0^{(5)}$ 等未知變數。因此方程組(2.42)、(2.45)、(2.46)及(2.48)可化簡為矩陣方程式：

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.54)$$

式中 $[A]$ 為 8×8 矩陣定義為

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 & A_{34} & A_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{76} & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{86} & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

式中

$$A_{11} = E'_{00} \quad (2.56a)$$

$$A_{12} = -J'_{00} \quad (2.56b)$$

$$A_{13} = J'_{00}b_0 \quad (2.56c)$$

$$A_{21} = ik_r(E'_{00} + E_{00}^*) \quad (2.57a)$$

$$A_{23} = -J'_{00} \quad (2.57b)$$

$$A_{32} = J'_{00} \quad (2.58a)$$

$$A_{34} = -E'_{00}e^{ik_0d_1} \quad (2.58b)$$

$$A_{35} = -E'_{00}e^{-ik_0d_1} \quad (2.58c)$$

$$A_{43} = J'_{00} \quad (2.59a)$$

$$A_{44} = ik_0(E'_{00} + E^*_{00})e^{ik_0d_1} \quad (2.59b)$$

$$A_{45} = -ik_0(E'_{00} + E^*_{00})e^{-ik_0d_1} \quad (2.59c)$$

$$A_{54} = N_{01} \quad (2.60a)$$

$$A_{55} = N_{01} \quad (2.60b)$$

$$A_{56} = i\gamma M_{11}e^{ib_1K_1} \quad (2.60c)$$

$$A_{57} = i\gamma M_{11}e^{-ib_1K_1} \quad (2.60d)$$

$$A_{64} = -k_0N_{01} \quad (2.61a)$$

$$A_{65} = k_0N_{01} \quad (2.61b)$$

$$A_{66} = \varepsilon K_1 M_{11}e^{ib_1K_1} \quad (2.61c)$$

$$A_{67} = -\varepsilon K_1 M_{11}e^{-ib_1K_1} \quad (2.61d)$$

$$A_{76} = -i\gamma M_{11} \quad (2.62a)$$

$$A_{77} = -i\gamma M_{11} \quad (2.62b)$$

$$A_{78} = -N_{01} \cos(k_0d_2) \quad (2.62c)$$

$$A_{86} = -iK_1\varepsilon M_{11} \quad (2.63a)$$

$$A_{87} = iK_1\varepsilon M_{11} \quad (2.63b)$$

$$A_{88} = -N_{01}k_0 \sin(k_0d_2) \quad (2.63c)$$

而未知向量 $\{x\}$ 為 8×1 向量, 定義為

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} R_0^{(1)} \\ T_0^{(2)} \\ R_0^{(2)} \\ T_0^{(3)} \\ R_0^{(3)} \\ T_0^{(4)} \\ R_0^{(4)} \\ T_0^{(5)} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

係數向量 $\{b\}$ 為 8×1 向量, 為

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} -E'_{00} \\ ik_0(E'_{00} + E_{00}^*) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

矩陣方程式(2.54)可由高斯消去法求得解。

$$-i\gamma M_{nn}T_n^{(4)} - i\gamma M_{nn}R_n^{(4)} = \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn}T_r^{(5)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.68a)$$

$$-iK_n\epsilon M_{nn}T_n^{(4)} + iK_n\epsilon M_{nn}R_n^{(4)} = \sum_{r=0}^{\infty} -N_{rn}ik_rT_r^{(5)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.68b)$$

平面波一階解與式(2.54)至(2.65)皆大部份相同,僅式(2.62c)之 A_{78} 及式(2.63c)之 A_{88} 改爲

$$A_{78} = -N_{01} \quad (2.69a)$$

$$A_{88} = iN_{01}k_0 \quad (2.69b)$$

六、波能消散特性

假設消波體前之浮體不存在,即相當於 $b_0/h = 0$ 及 $h_b/h = 0$,此時在不同波浪參數 C_0 ,圖2-3為反射係數 C_r 與消波室寬度參數 d_2/L 之相關曲線圖,圖中顯示各條曲線皆呈週期變化,不同 C_0 值時,週期長度相同皆為0.5。當 $C_0 = 0.5$ 時最小值為0.07(發生在 $d_2/L = 0.04 + 0.5n, n=0,1,2..$),最大值為0.72(發生在 $d_2/L = 0.43 + 0.5n, n=0,1,2..$)。但隨 C_0 值之增加,圖中 C_r 極大值及極小值皆增大,而極點位置隨 C_0 增大明顯向右平移。例如 $C_0 = 2$ 時最小值為0.37(發生在 $d_2/L = 0.13 + 0.5n, n=0,1,2..$),最大值為0.97(發生在 $d_2/L = 0.49 + 0.5n, n=0,1,2..$)。顯示產生反射係數極小值之無因次消波室寬度並非定值,而與入射波之(波長)週期相關。

若消波體前二分之一波長處($d_1/L = 0.5$),存在一寬度為二分之一水深($b_0/h = 0.5$),且零厚度($h_b/h = 0$)之浮板,則反射係數 C_r 與消波室寬度參數 d_2/L 之相關曲線圖如圖2-4。比較圖2-3與圖2-4顯示二者非常相似,僅當有浮板存在時,反射係數值較大,例如當 $C_0 = 0.5$ 時最小值為0.12(發生在 $d_2/L = 0.01 + 0.5n$),最大值為0.74(發生在 $d_2/L = 0.35 + 0.5n$),而且極值位置些微左移。若浮板厚度增大為五分之一水深之浮體。圖2-5為其反射係數 C_r 與 d_2/L 之相關曲線圖,基本上有浮體($h_b/h > 0$)之極值又較有浮板($h_b/h = 0$)之極值為大,例如當 $C_0 = 0.5$ 時最小值為0.21(發生在 $d_2/L = 0.00 + 0.5n$),最大值為0.78(發生在 $d_2/L = 0.26 + 0.5n$),極值位置又向左移,而圖2-5與圖2-4(或圖2-3)較不相似的地方,則是 $C_0 = 1$ 時,反射係數 C_r 最小值反較 $C_0 = 0.5$ 時為小,此現象說明浮體之厚度將影響反射係數之分佈特性。

圖2-6則為考慮不同浮體厚度 h_b/h 之反射係數 C_r 與消波室寬度參數 d_2/L 相關曲線圖,圖中顯示厚度 h_b/h 愈大, C_r 值愈小。而圖2-7則為考慮不同浮體至消波體距離 d_1/L 時, C_r 與 d_2/L 相關曲線圖,顯示浮體至消波體距離 d_1/L 也是影響反射係數一個重要因素。而從圖2-8之 C_r 與 d_1/L 相關曲線圖,更顯示其關係曲線為週期變化(同樣週期為0.5)。此處為更清楚的顯示消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 二者之相互影響,圖2-9及圖2-10分別為波浪參數 $C_0 = 0.5$ 及 $C_0 = 2$ 時,在 d_2/L 與 d_1/L 平面上之等反射係數圖,圖中之二者分佈有甚大之差異,紅色為最大值,深藍色為最小反射係數值。其次多孔牆厚度 b_1/h 及浮體寬度 b_0/h 同樣也是影響反射係數之因素。圖2-11及圖2-12分別為 C_r 與 b_1/h 相關

曲線圖及 C_r 與 b_0/h 相關曲線圖。反射係數 C_r 與多孔牆厚度 b_1/h 或浮體寬度 b_0/h 相關曲線並非呈週期變化,而是存在一最佳厚度(或寬度)值。圖 2-13 及圖 2-14 分別為波浪參數 $C_0 = 0.5$ 及 $C_0 = 2.0$ 時在 b_0/h 與 b_1/h 平面上之等反射係數圖,同樣提供選擇最佳厚度 b_1/h 或寬度 b_0/h 之依據。

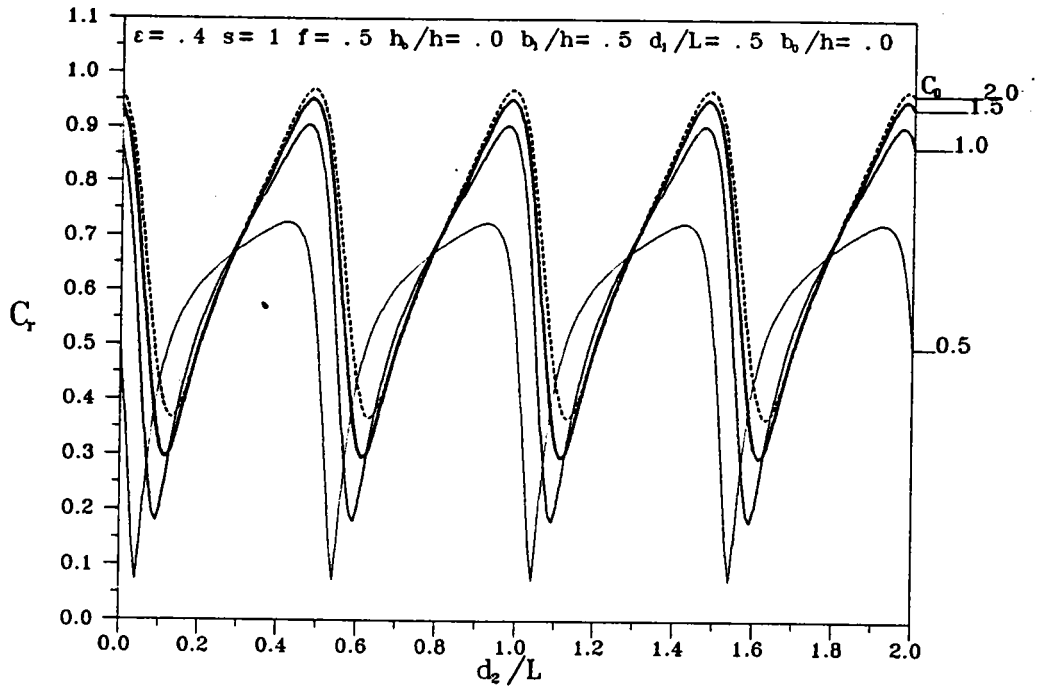


圖2-3無浮體時在不同波浪參數 C_0 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖

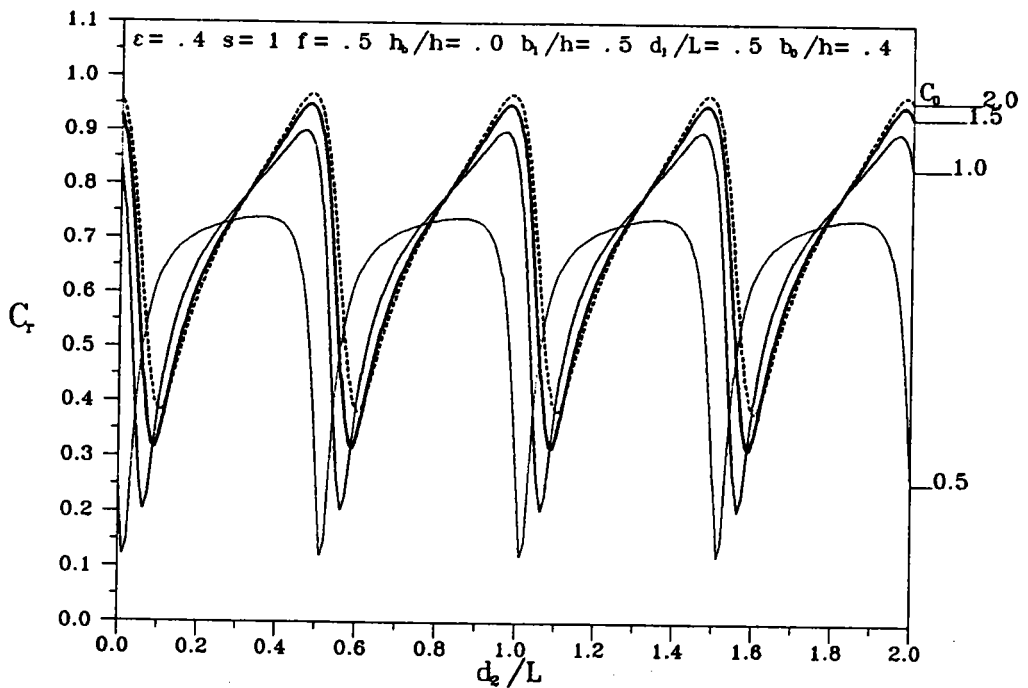


圖2-4有浮板時在不同波浪參數 C_0 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖

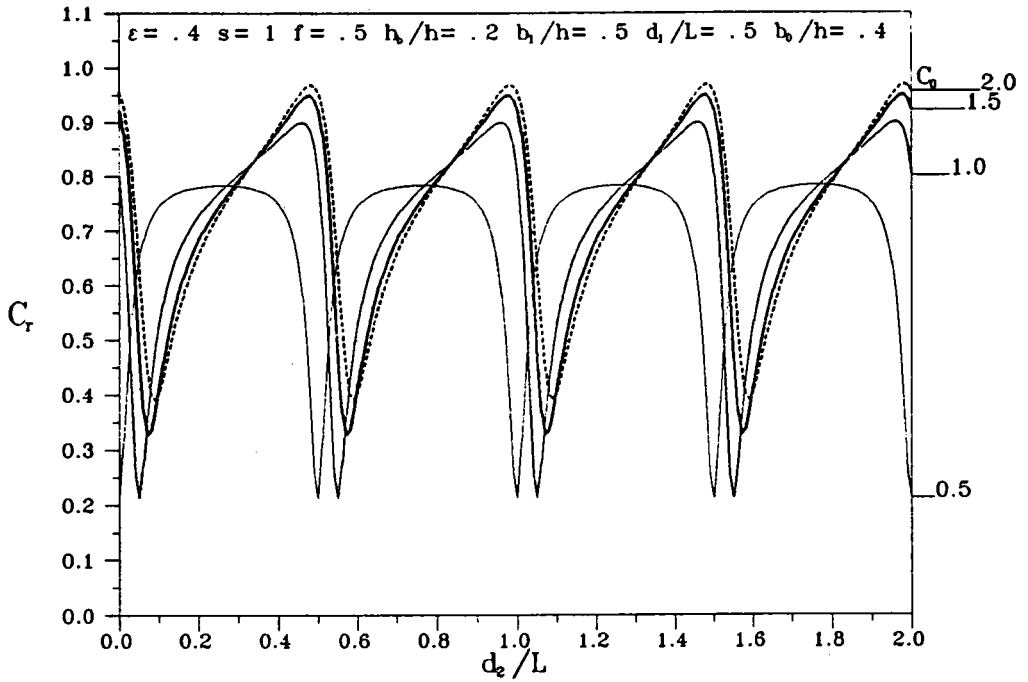


圖2-5有浮體時在不同波浪參數 C_0 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖

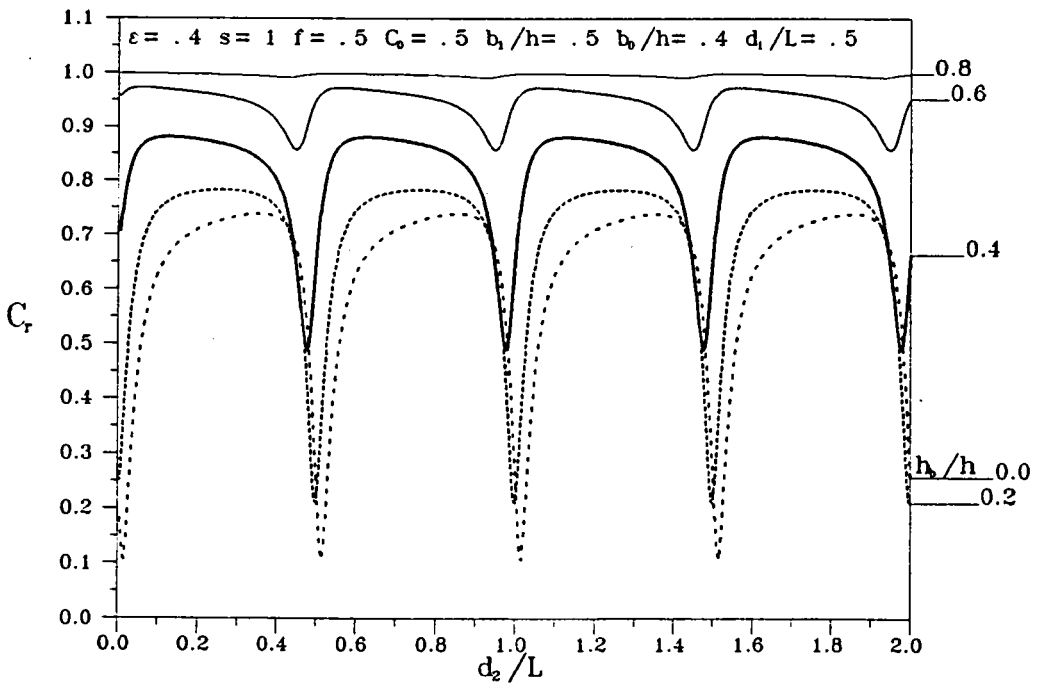


圖2-6有浮體時在不同浮體高度 h_b/h 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖

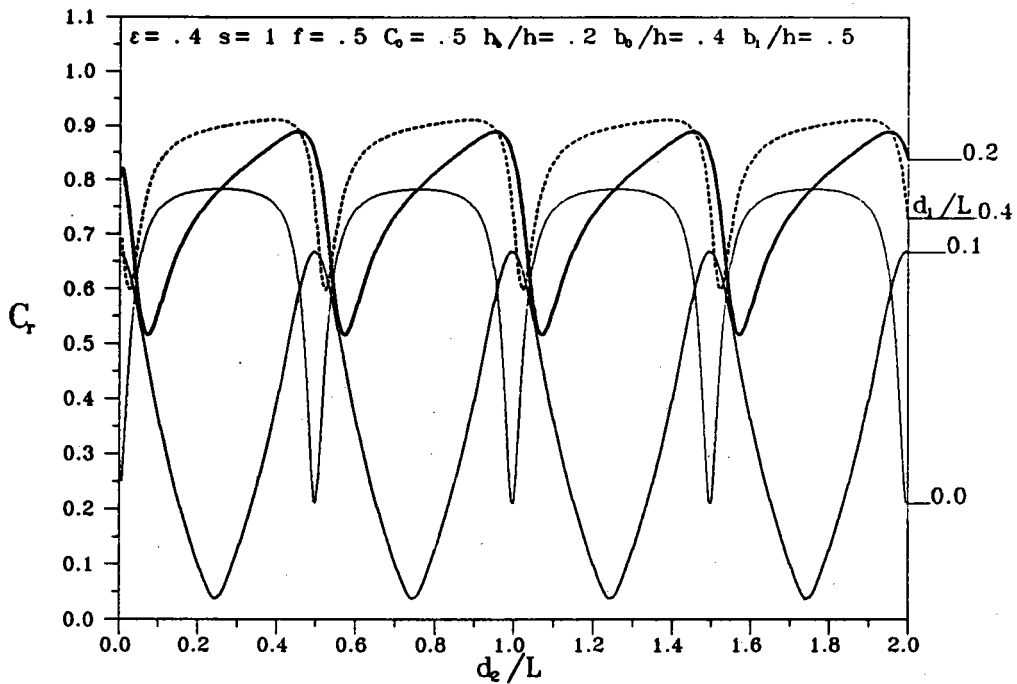


圖2-7有浮體時在不同浮體距離 d_1/L 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與消波室寬度 d_2/L 相關曲線圖

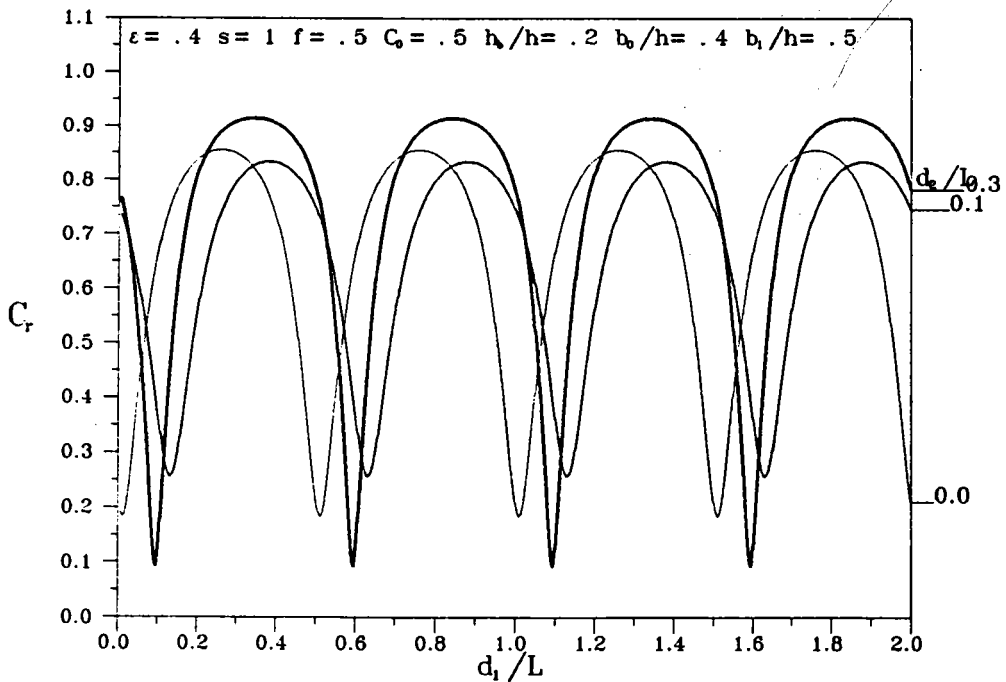


圖2-8有浮體時在不同消波室寬度 d_2/L 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與浮體距離 d_1/L 相關曲線圖

$$b_0/h = 0.4 \quad h_b/h = 0.2 \quad b_1/h = 0.5 \quad C_0 = 0.5$$

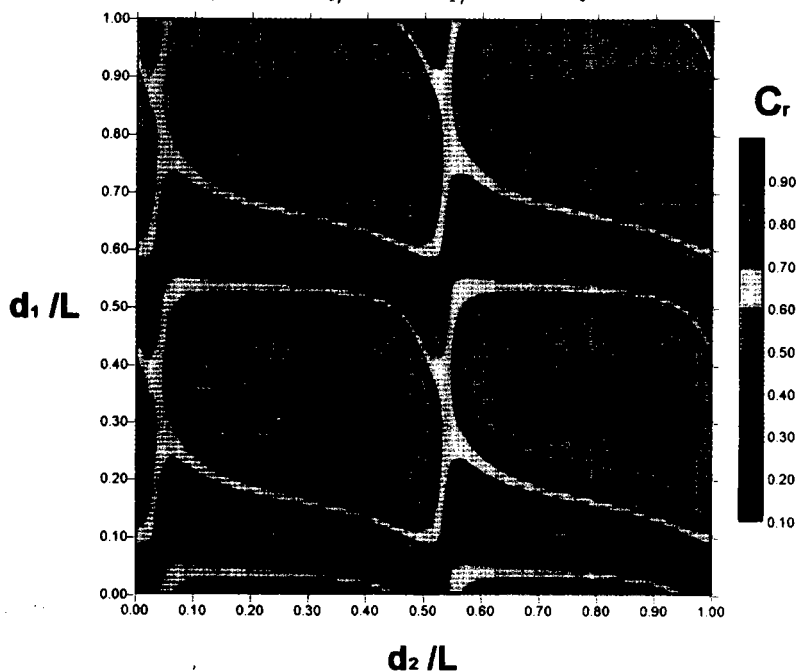


圖 2-9 $C_0 = 0.5$ 時在消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上
簡易型消波體前之等反射係數圖

$$b_0/h = 0.4 \quad h_b/h = 0.2 \quad b_1/h = 0.5 \quad C_0 = 2$$

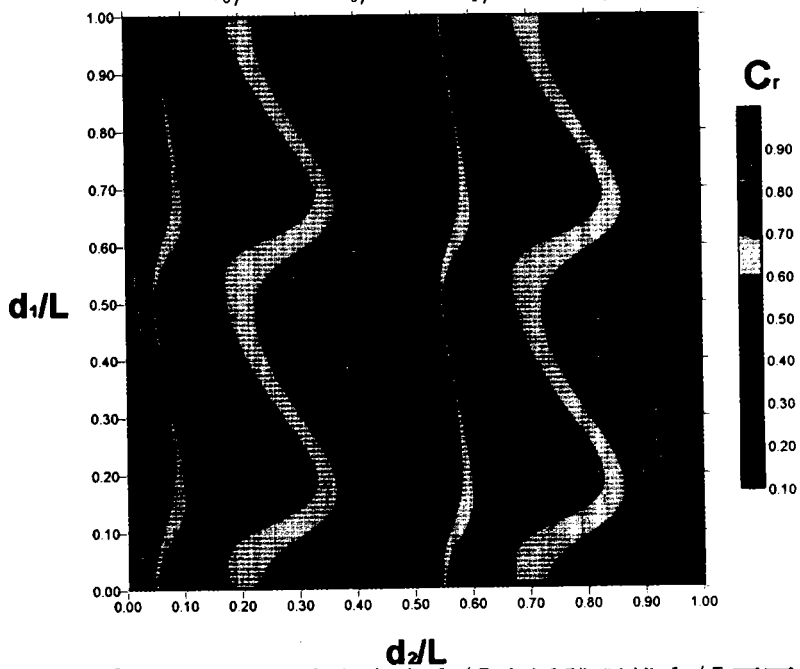


圖 2-10 $C_0 = 2$ 時在消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上
簡易型消波體前之等反射係數圖

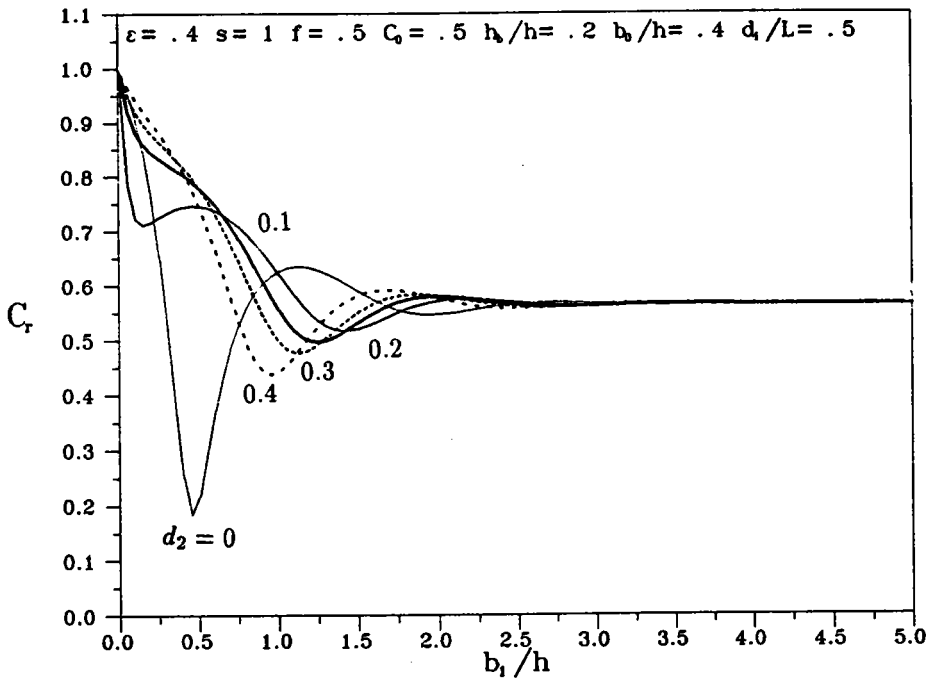


圖 2-11 有浮體時在不同消波室寬度 d_2/L 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與多孔牆厚度 b_1/h 相關曲線圖

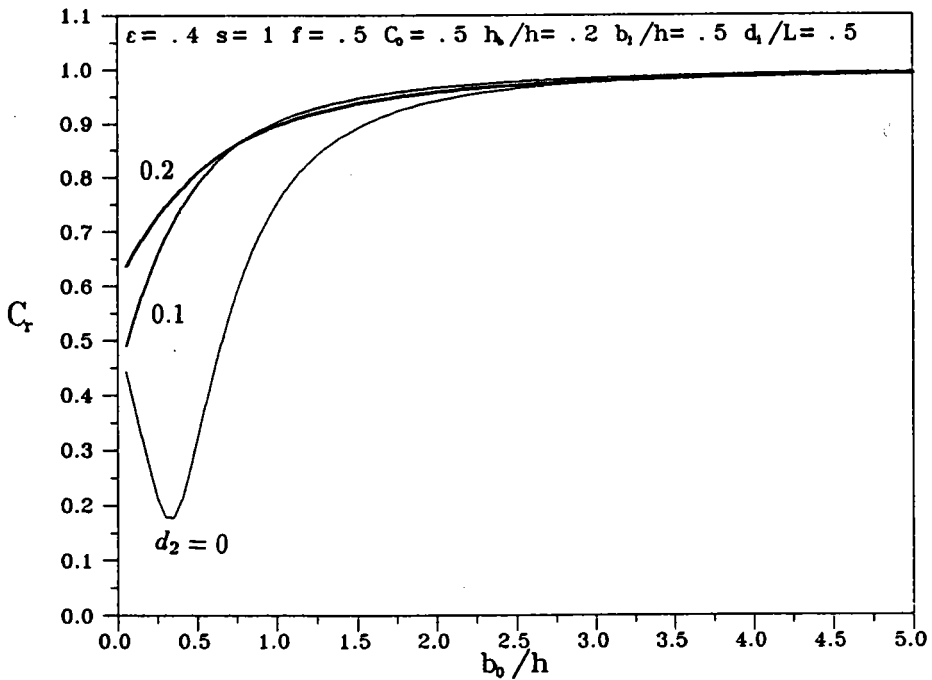


圖 2-12 有浮體時在不同消波室寬度 d_2/L 簡易型消波體前
反射係數 C_r 與浮體寬度 b_0/h 相關曲線圖

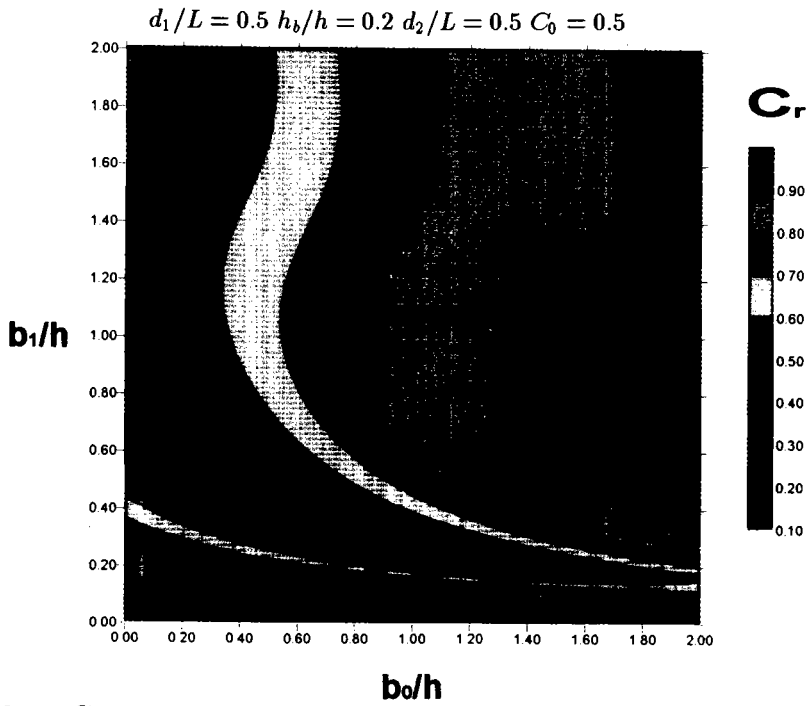


圖 2-13 $C_0 = 0.5$ 時在浮體寬度 b_0/h 與多孔牆厚度 b_1/h 平面上
簡易型消波體前之等反射係數圖

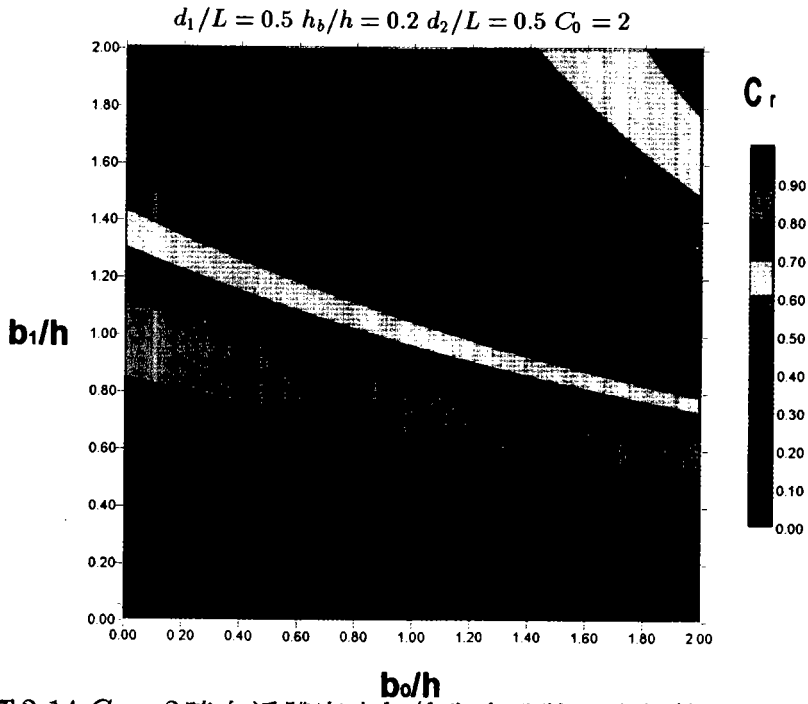


圖 2-14 $C_0 = 2$ 時在浮體寬度 b_0/h 與多孔牆厚度 b_1/h 平面上
簡易型消波體前之等反射係數圖

參、理論解析-雙層多孔牆型多孔消波體

一、控制方程式及邊界條件

考慮雙層多孔牆型多孔消波體(porous wave absorber)置於x-軸方向為半無限長之等水深區域，如圖3-1所示，消波體由厚度分別為 b_1 及 b_2 之垂直多孔牆、消波室寬分別為 d_2 及 d_3 ，及上下為不透水平行壁(高度為 h_p)所組成。座標定義如示意圖，軸原點置於第一個多孔牆之右側處，正x軸與入射波傳播方向相同，y軸方向為無限長， $z=0$ 為平均水面，z軸向上為正， h 為平均水深。考慮消波體前存在一寬為 b_0 、沒入水中之高為 h_b 之不透水浮體，浮體與海底之距離為 $h_w = h - h_b$ ，假設浮體為靜止不隨水位變化而移動或轉動，浮體與消波體之水平距離為 d_1 。兩個多孔牆部份為等向性、均勻透水結構物孔隙介質組成(稱區域 R_4 及 R_6 ，阻抗係數分別為 $\gamma = f + is$ 及 $\gamma' = f' + is'$ ，孔隙率分別為 ϵ, ϵ')，水域部份分五個區域(如圖3-1)：浮體前水域(稱水域 R_1 ， $x \leq -b_0 - d_1 - b_1$)，浮體底下之水域(稱水域 R_2 ， $-b_0 - d_1 - b_1 \leq x \leq -d_1 - b_1$ ， $-h \leq z \leq -h_b$)，浮體與消波體間之水域(稱水域 R_3 ， $-d_1 - b_1 \leq x \leq -b_1$)，第一多孔牆與第二多孔牆壁間之水域(稱水域 R_5 ， $0 \leq x \leq d_2$)，第二多孔牆與不透水壁間之水域(稱水域 R_7 ， $d_2 + b_2 \leq x \leq d_2 + b_2 + d_3$)。

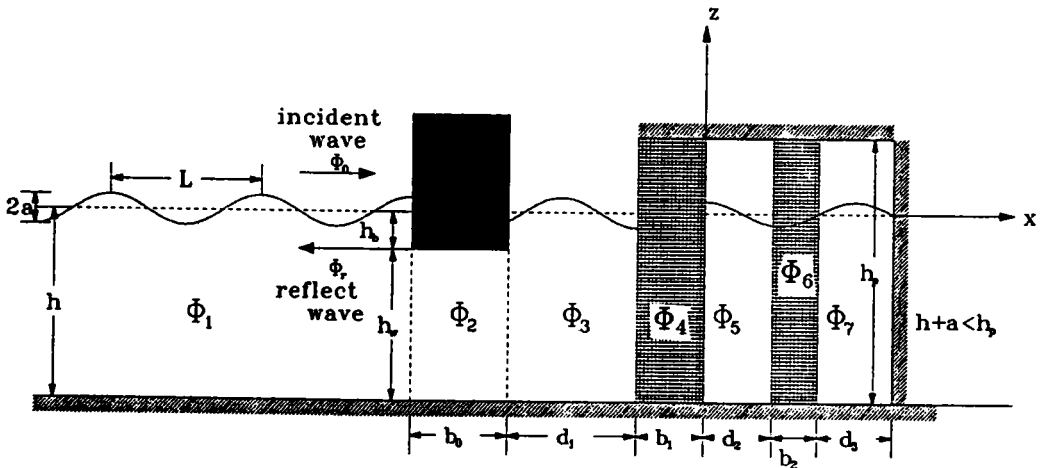


圖 3-1 雙層多孔牆型多孔消波體設計側視示意圖

水域之流體運動，假設滿足不可壓縮、無黏性及非旋流之條件，因此存在流速勢 (velocity potential) $\Phi_j(x, z, t)$, $j = 1, 2, 3, 5, 7$ 分別滿足拉普拉氏方程式 (Laplace equation) (2.1)，水域內之壓力 P_j 在小振幅波之條件下滿足線性伯努力方程式 (Bernoulli equation) (2.2)。孔隙體區域 R_4 及 R_6 流體運動及波動之現象，其孔流速勢 (pore velocity potential) Φ_4 及 Φ_6 ，同樣滿足拉普拉氏方程式 (2.3)。而流體在孔隙體內之阻尼效應，滿足多孔介質流體伯努力方程式 (2.4)。

入射波波向線沿正 x 軸進行，水位變化 η_0 複數表示式為 (2.6)，則各個區域 R_j , $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 流速勢 Φ_j 可表示為：

$$\Phi_j(x, z, t) = \phi_j(x, z)e^{i\sigma t} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (3.1)$$

式中 $\phi_j(x, z)$ 稱波函數 (wave function)，同樣波函數滿足控制方程式 (2.8)。

在自由表面邊界條件，水域 R_1, R_3, R_5, R_7 分別滿足線性自由動力邊界 (DBC) 及運動邊界條件 (KBC) 式 (2.9)。而在兩個多孔牆 (R_4 及 R_6) 與平均水面交界之假想自由表面 $\eta_4(x, t)$ 及 $\eta_6(x, t)$ ，則滿足線性動力邊界條件 (DBC) 及運動邊界條件 (KBC) 式 (2.13)。

不透水邊界條件則有：浮體與水界面之邊界滿足不透水條件 (2.12)，在最右邊之消波室不透水右壁滿足不透水條件 (2.11)，及不透水海底邊界條件為 (2.14)。

當波浪正向作用於浮體，在區域 R_1 波浪與透水結構物交互作用產生之散射波 Φ_{10} 在無窮遠處 ($x \rightarrow -\infty$)，應滿足下列輻射條件 (radiation condition)：式 (2.10)。

在任何相鄰水域或孔隙牆之 R_j 及 R_k 兩個區域 ($j \neq k$) 之界面處 S_{jk} 之界面處，即在 $x = d_2 + b_2$ ， $x = d_2$ ， $x = 0$ ， $x = -b_1$ ， $x = -b_1 - d_1$ ， $x = -b_1 - d_1 - b_0$ ，必滿足壓力連續條件 (2.16) 及流體質量連續條件 (2.17)。在第一層透水結構物區域 R_4 則 $\varepsilon_4 = \varepsilon < 1$ ，且 $\gamma_4 = f + is$ 為複數，即 $s_4 = s$ ， $f_4 = f$ 。在第二層透水結構物區域 R_6 則 $\varepsilon_6 = \varepsilon' < 1$ ，且 $\gamma_6 = f' + is'$ 為複數，即 $s_6 = s'$ ， $f_6 = f'$ 。

二、雙層多孔牆型孔消波體之波函數

由控制方程式(2.8)及入射波條件(2.6)式，邊界條件(2.9)、(2.10)、(2.11)、(2.12)、(2.13)、(2.14)等式及週期函數特性條件(3.1)，區域 R_1 至區域 R_4 之波函數 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 及 ϕ_4 可分別表示為式(2.35)、(2.36)、(2.37)及(2.21)。而區域 R_5 至區域 R_7 之波函數 ϕ_5, ϕ_6 及 ϕ_7 可分別表示為

$$\begin{aligned}\phi_5(x, z) = & \sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(5)} A \cosh[k_r(h+z)] e^{-ik_r(x-d_2)} \\ & + \sum_{r=0}^{\infty} R_r^{(5)} A \cosh[k_r(h+z)] e^{ik_r(x-d_2)} \\ & 0 \leq x \leq d_2, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\phi_6(x, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \{T_n^{(6)} A \cosh[K'_n(h+z)] e^{-iK'_n x} \\ & + R_n^{(6)} A \cosh[K'_n(h+z)] e^{iK'_n x}\} \\ & d_2 \leq x \leq d_2 + b_2, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\phi_7(x, z) = & \sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(7)} A \cosh[k_r(h+z)] \cos[k_r(x-d_2-b_2-d_3)] \\ & d_2 + b_2 \leq x \leq d_2 + b_2 + d_3, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

式中複數特徵值 K'_n 為下列特徵方程式之根

$$-i\sigma^2\gamma' = gK'_n \tanh(K'_n h) \quad , n = 1, 2, 3... \quad (3.5a)$$

或

$$\frac{-i\gamma'}{C_0} = K'_n h \tanh(K'_n h) \quad (3.5b)$$

其中 K'_n 為複數, K'_n 之實部 $K'_{nr} \geq 0$ ，虛部 $K'_{ni} \leq 0$ ， $\gamma' = f' + is'$ 。

三、波函數一般解析解

本節將引用正交序列 $\cosh[k_r(h+z)]$, $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ 及 $\cos[I_m(h_b+z)]$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ 分別在水深區 $(-h, 0)$ 及 $(-h, -h_b)$ 之正交性，以求解波函數。

將表示式(2.35)在界面 $x = -(b_0 + d_1 + b_1)$ 處引用浮體與水界面之邊界滿足不透水條件(2.12a)，並與表示式(2.35)及(2.36)在界面 $x = -(b_0 + d_1 + b_1)$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)組合可得如(2.42)之關係式。同樣將表示式(2.37)在界面 $x = -(b_0 + d_1)$ 處引用浮體與水界面之邊界滿足不透水條件(2.12b)，並與表示式(2.36)及(2.37)在界面 $x = -(d_1 + b_1)$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)組合得如(2.45)之關係式。同樣引用正交序列 $\cosh[K_n(h+z)]$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 在水深區 $(-h, 0)$ 之正交性，將表示式(2.37)及(2.21)在界面 $x = -b_1$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)可得如(2.46)之關係式。

將表示式(2.21)及(3.2)在界面 $x = 0$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh[K_n(z+h)]dz$ ，則分別可得

$$-i\gamma M_{nn}T_n^{(4)} - i\gamma M_{nn}R_n^{(4)} = \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn}e^{ik_r d_2} T_r^{(5)} + \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn}e^{-ik_r d_2} R_r^{(5)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6a)$$

$$-K_n \epsilon M_{nn}T_n^{(4)} + K_n \epsilon M_{nn}R_n^{(4)} = -\sum_{r=0}^{\infty} N_{rn}k_r e^{ik_r d_2} T_r^{(5)} + \sum_{r=0}^{\infty} N_{rn}k_r e^{-ik_r d_2} R_r^{(5)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6b)$$

將表示式(3.2)及(3.3)在界面 $x = d_2$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh[K'_n(z+h)]dz$ ，則分別可得

$$\sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn}T_r^{(5)} + \sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn}R_r^{(5)} = -i\gamma' M'_{nn}e^{-iK'_n d_2} T_n^{(6)} - i\gamma' M'_{nn}e^{iK'_n d_2} R_n^{(6)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7a)$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn} k_r T_r^{(5)} + \sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn} k_r R_r^{(5)} = -K'_n \epsilon' M'_{nn} e^{-iK'_n d_2} T_n^{(6)} + K'_n \epsilon' M'_{nn} e^{iK'_n d_2} R_n^{(6)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7b)$$

式中

$$N'_{rn} = \int_{-h}^0 \cosh[k_r(h+z)] \cosh[K'_n(h+z)] dz$$

$$= \frac{1}{k_r^2 - K_n'^2} [k_r \sinh(k_r h) \cosh(K'_n h) - K'_n \sinh(K'_n h) \cosh(k_r h)]$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7c)$$

$$M'_{nn} = \int_{-h}^0 \cosh^2[K'_n(h+z)] dz = h \left[\frac{1}{2} + \frac{\sinh(2K'_n h)}{4K'_n h} \right]$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7d)$$

最後將表示式(3.3)及(3.4)在界面 $x = d_2 + b_2$ 處引用界面連續條件(2.16)、(2.17)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh[K'_n(z+h)] dz$ ，則分別可得

$$-i\gamma' M'_{nn} e^{-iK'_n(d_2+b_2)} T_n^{(6)} - i\gamma' M'_{nn} e^{iK'_n(d_2+b_2)} R_n^{(6)} = \sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn} \cos(k_r d_3) T_r^{(7)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8a)$$

$$-iK'_n \epsilon' M'_{nn} e^{-iK'_n(d_2+b_2)} T_n^{(6)} + iK'_n \epsilon' M'_{nn} e^{iK'_n(d_2+b_2)} R_n^{(6)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn} k_r \sin(k_r d_3) T_r^{(7)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8b)$$

方程組(2.42)、(2.45)、(2.46)、(3.6)、(3.7)及(3.8)合計含有 $R_r^{(1)}$, $R_r^{(3)}$, $T_r^{(3)}$, $R_r^{(5)}$, $T_r^{(5)}$, $T_r^{(7)}$ $r=0,1,2,\dots$, $R_m^{(2)}$, $T_m^{(2)}$, $m=0,1,2,3,\dots$, $R_n^{(4)}$, $T_n^{(4)}$, $R_n^{(6)}$, $T_n^{(6)}$, $n=1,2,3,\dots$ 等未知變數。波函數無窮級數(2.35)、(2.36)、(2.37)、(2.21)、(3.2)、(3.3)及(3.4)為收斂級數，在實際計算，可依收斂之速度取有限項，因此可求解以上未知變數。

四、平面波一階解

假設多孔牆內摩擦係數 f 及 f' 皆較小，且所有區域內之波浪僅有平面行進波或駐波存在，散射波成份不存在或相對甚小，各級數皆僅取一項，即計有 $R_0^{(1)}, R_0^{(2)}, T_0^{(2)}, R_0^{(3)}, T_0^{(3)}, R_1^{(4)}, T_1^{(4)}, R_0^{(5)}, T_0^{(5)}, R_1^{(6)}, T_1^{(6)}, T_0^{(7)}$ 等 12 個未知變數。因此方程組 (2.42)、(2.45)、(2.46)、(3.6)、(3.7) 及 (3.8) 可化簡為矩陣方程式：

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (3.9)$$

式中 $[A]$ 為 12×12 矩陣定義為

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 & A_{34} & A_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{76} & A_{77} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{86} & A_{87} & A_{88} & A_{89} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{98} & A_{99} & A_{9,10} & A_{9,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,8} & A_{10,9} & A_{10,10} & A_{10,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,10} & A_{11,11} & A_{11,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,10} & A_{12,11} & A_{12,12} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

式中

$$A_{11} = E'_{00} \quad (3.11a)$$

$$A_{12} = -J'_{00} \quad (3.11b)$$

$$A_{13} = J'_{00}b_0 \quad (3.11c)$$

$$A_{21} = ik_r(E'_{00} + E_{00}^*) \quad (3.12a)$$

$$A_{23} = -J'_{00} \quad (3.12b)$$

$$A_{32} = J'_{00} \quad (3.13a)$$

$$A_{34} = -E'_{00}e^{ik_0d_1} \quad (3.13b)$$

$$A_{35} = -E'_{00}e^{-ik_0d_1} \quad (3.13c)$$

$$A_{43} = J'_{00} \quad (3.14a)$$

$$A_{44} = ik_0(E'_{00} + E_{00}^*)e^{ik_0d_1} \quad (3.14b)$$

$$A_{45} = -ik_0(E'_{00} + E_{00}^*)e^{-ik_0d_1} \quad (3.14c)$$

$$A_{54} = N_{01} \quad (3.15a)$$

$$A_{55} = N_{01} \quad (3.15b)$$

$$A_{56} = i\gamma M_{11}e^{ib_1K_1} \quad (3.15c)$$

$$A_{57} = i\gamma M_{11}e^{-ib_1K_1} \quad (3.15d)$$

$$A_{64} = -k_0N_{01} \quad (3.16a)$$

$$A_{65} = k_0N_{01} \quad (3.16b)$$

$$A_{66} = \varepsilon K_1 M_{11}e^{ib_1K_1} \quad (3.16c)$$

$$A_{67} = -\varepsilon K_1 M_{11}e^{-ib_1K_1} \quad (3.16d)$$

$$A_{76} = -i\gamma M_{11} \quad (3.17a)$$

$$A_{77} = -i\gamma M_{11} \quad (3.17b)$$

$$A_{78} = -N_{01}e^{ik_0d_2} \quad (3.17c)$$

$$A_{79} = -N_{01}e^{-ik_0d_2} \quad (3.17d)$$

$$A_{86} = -K_1 \varepsilon M_{11} \quad (3.18a)$$

$$A_{87} = K_1 \varepsilon M_{11} \quad (3.18b)$$

$$A_{88} = N_{01} k_0 e^{ik_0 d_2} \quad (3.18c)$$

$$A_{89} = -N_{01} k_0 e^{-ik_0 d_2} \quad (3.18d)$$

$$A_{9,8} = N'_{01} \quad (3.19a)$$

$$A_{9,9} = N'_{01} \quad (3.19b)$$

$$A_{9,10} = i\gamma' M'_{11} e^{-iK'_1 d_2} \quad (3.19c)$$

$$A_{9,11} = i\gamma' M'_{11} e^{iK'_1 d_2} \quad (3.19d)$$

$$A_{10,8} = -N'_{01} k_0 \quad (3.20a)$$

$$A_{10,9} = N'_{01} k_0 \quad (3.20b)$$

$$A_{10,10} = K'_1 \varepsilon' M'_{11} e^{-iK'_1 d_2} \quad (3.20c)$$

$$A_{10,11} = -K'_1 \varepsilon' M'_{11} e^{iK'_1 d_2} \quad (3.20d)$$

$$A_{11,10} = -i\gamma' M'_{11} e^{-iK'_1 (d_2 + b_2)} \quad (3.21a)$$

$$A_{11,11} = -i\gamma' M'_{11} e^{iK'_1 (d_2 + b_2)} \quad (3.21b)$$

$$A_{11,12} = -N'_{01} \cos(k_0 d_3) \quad (3.21c)$$

$$A_{12,10} = -iK'_1 \varepsilon' M'_{11} e^{-iK'_1 (d_2 + b_2)} \quad (3.22a)$$

$$A_{12,11} = iK'_1 \varepsilon' M'_{11} e^{iK'_1 (d_2 + b_2)} \quad (3.22b)$$

$$A_{12,12} = -N'_{01} k_0 \sin(k_0 d_3) \quad (3.22c)$$

而未知向量 $\{x\}$ 爲 12×1 向量, 定義爲

$$\{x\} = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} \\ T_0^{(2)} \\ R_0^{(2)} \\ T_0^{(3)} \\ R_0^{(3)} \\ T_0^{(4)} \\ R_0^{(4)} \\ T_0^{(5)} \\ R_0^{(5)} \\ T_0^{(6)} \\ R_0^{(6)} \\ T_0^{(7)} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

係數向量 $\{b\}$ 爲 12×1 向量, 表示爲

$$\{b\} = \begin{pmatrix} -E'_{00} \\ ik_0(E'_{00} + E_{00}^*) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

矩陣方程式(3.9)可由高斯消去法求得解。

五、雙多孔牆之波函數解

因爲無不透水牆(如圖3-2),當波浪穿過透水牆,波浪與透水結構物交互作用產生之成份波 Φ_7 , 在無窮遠處($x \rightarrow +\infty$),應滿足下列輻射條件(radiation condition):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \Phi_7}{\partial x} + ik_0 \Phi_7 \right) = 0 \quad (3.25)$$

即 Φ_7 爲向正無限遠方向之傳遞波(out-going wave)。

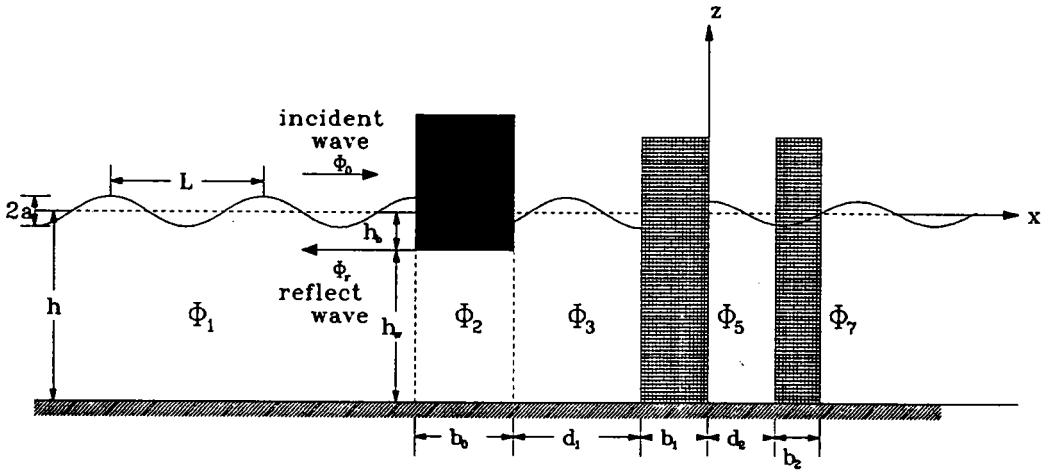


圖 3-2 雙多孔牆側視示意圖

波函數 ϕ_7 表示式(3.4)改爲

$$\phi_7(x, z) = \sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(7)} A \cosh[k_r(h+z)] e^{-ik_r(x-d_2-b_2)} \quad (3.26)$$

$$d_2 + b_2 \leq x, \quad -h \leq z \leq 0$$

同樣將表示式(3.3)及(3.26)在界面 $x = d_2 + b_2$ 處引用界面連續條件(2.16)·(2.17), 每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh[K'_n(z+h)] dz$, 則分別可得

$$-i\gamma' M'_{nn} T_n^{(6)} - i\gamma' M'_{nn} R_n^{(6)} = \sum_{r=0}^{\infty} N'_{rn} T_r^{(7)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27a)$$

$$-iK'_n \epsilon' M'_{nn} T_n^{(6)} + iK'_n \epsilon' M'_{nn} R_n^{(6)} = \sum_{r=0}^{\infty} -N'_{rn} i k_r T_r^{(7)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27b)$$

此處平面波一階解與式(3.11)至(3.22)皆都相同, 僅式(3.21c)中之 $A_{11,12}$ 及式(3.22c)中之 $A_{12,12}$ 改爲

$$A_{11,12} = -N'_{01} \quad (3.28a)$$

$$A_{12,12} = iN'_{01} k_0 \quad (3.28b)$$

六、波能消散特性

考慮雙層多孔牆及雙消波室之消波體,同樣假設消波體前無浮體存在,則在兩個多孔牆厚度分別為 $b_1/h = 0.25$ 及 $b_2/h = 0.25$,此兩個牆厚度和與圖 2-3 中單層多孔牆消波體之牆厚度 $b_1/h = 0.5$ 相同,且第一消波室寬為 $d_2/L = 0.25$ 時,圖 3-3 為在不同波浪浪數 C_0 之反射係數 C_r 與第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖,與圖 2-3 比較顯然整體的反射係數值圖 3-3 值較小,此現象說明雙層多孔牆(雙消波室)之消波效果,顯然較單層多孔牆消波體(單消波室)為佳。圖 3-4 及圖 3-5 則分別於同樣條件下,消波體前距離為二分之一波長($d_1/L = 0.5$)放置寬度為二分之一水深度($b_0/h = 0.5$)之浮板(零厚度, $h_b/h = 0$),及寬為二分之一水深度($b_0/h = 0.5$)高度為二分之一水深($h_b/h = 0.5$)之浮體,其反射係數 C_r 與 d_3/L 相關曲線圖,針對圖 3-4 與圖 3-5 分別與圖 2-4 及圖 2-5 之單層多孔牆消波體比較,也同樣顯示雙層之消波效果較單層為佳。

圖 3-6 中則為雙層多孔牆型消波體,在考慮不同浮體高度時之反射係數 C_r 與 d_3/L 相關圖,其特性與圖 2-6 單層多孔牆型消波體也甚為相似。

若假設第一消波室寬度 d_2/L 與第二消波室寬度 d_3/L 之和為定值 1 之條件下,圖 3-7 及圖 3-8 分別為波浪參數 $C_0 = 0.5$ 及 $C_0 = 2.0$ 時在 d_2/L 與 d_1/L 平面之等反射係數圖,由圖中我們可選取較低反射係數值,以達到較佳之消波效果。

若假設第一多孔牆厚度 b_1/h 及第二多孔牆厚度 b_2/h 之和為定值 2.0 之條件下,圖 3-9 及圖 3-10 分別為波浪參數 $C_0 = 0.5$ 及 $C_0 = 2$ 時在 b_0/h 及 b_2/h 平面上之等反射係數圖,由圖中我們也可決定較佳之牆厚度及浮體寬度之相關值。

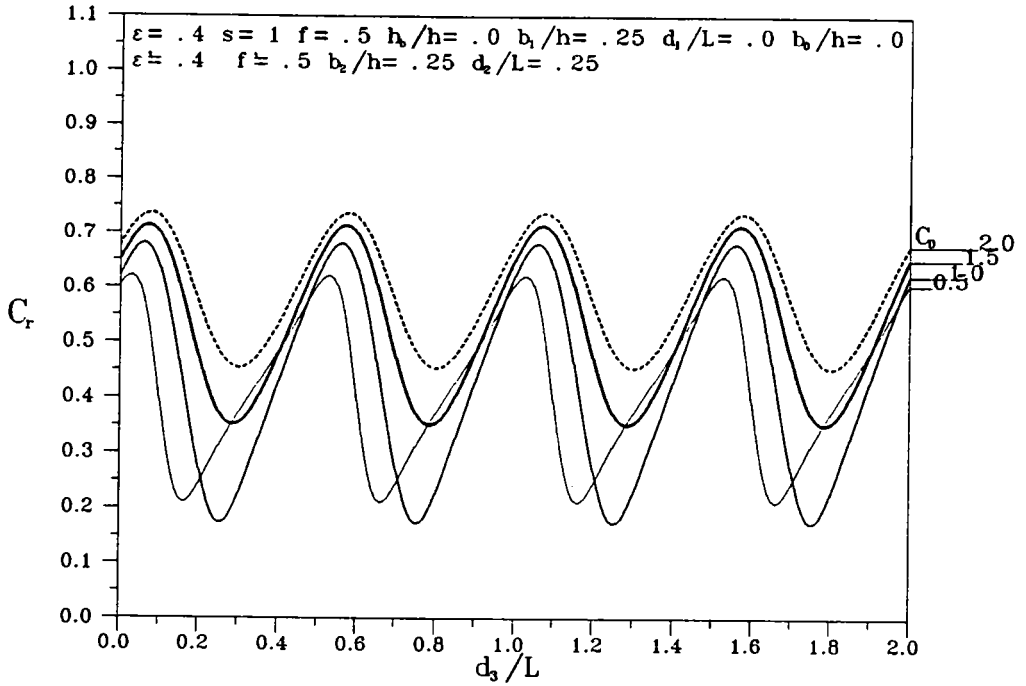


圖3-3無浮體時在不同波浪參數 C_0 雙層型消波體前
反射係數 C_r 與第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖

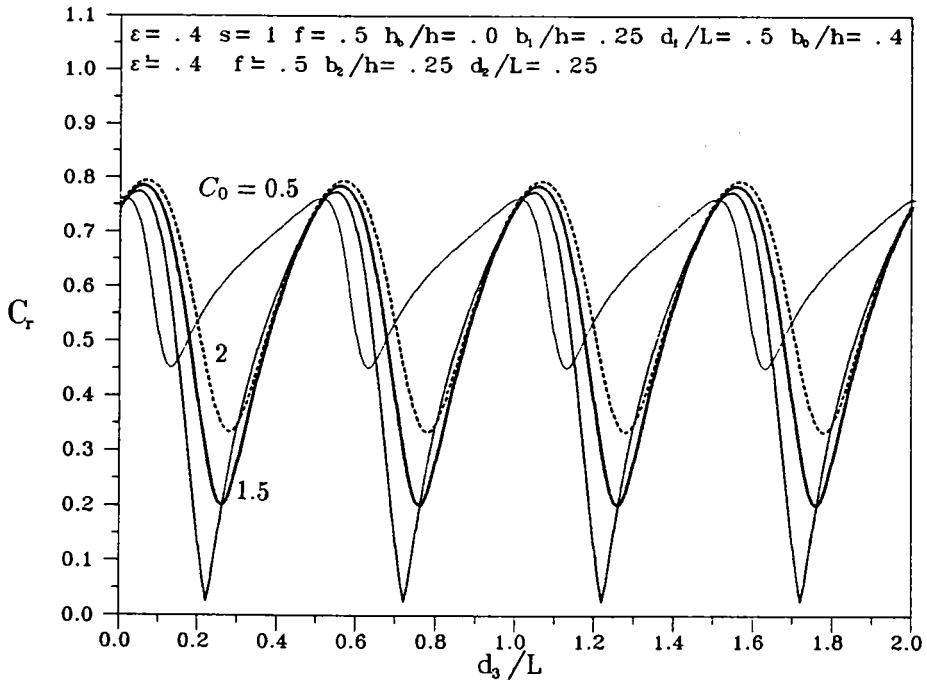


圖3-4有浮板時在不同波浪參數 C_0 雙層型消波體前
反射係數 C_r 與第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖

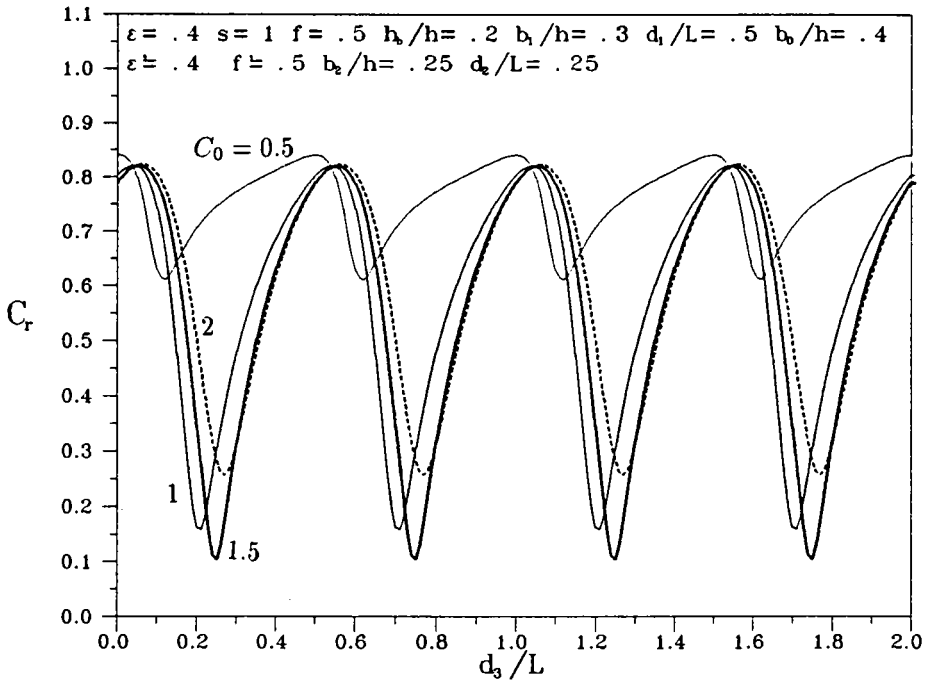


圖3-5有浮體時在不同波浪參數 C_0 雙層型消波體前
反射係數 C_r 與第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖

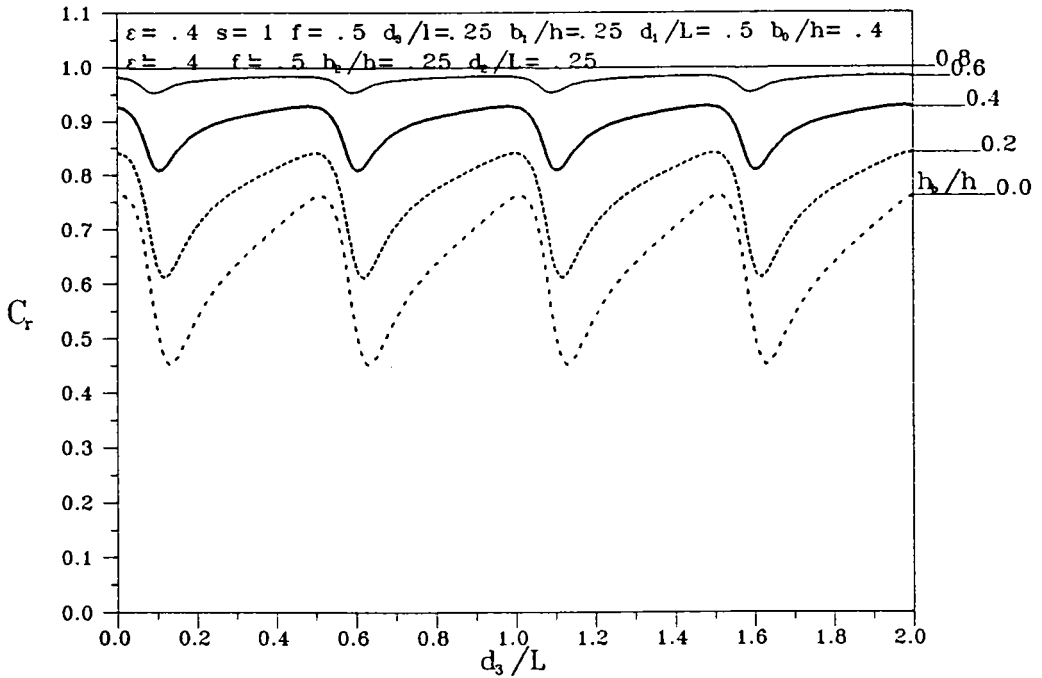


圖3-6有浮體時在不同浮體高度 h_b/h 雙層型消波體前
反射係數 C_r 與第二消波室寬度 d_3/L 相關曲線圖

$$b_0/h = 0.4 \quad h_b/h = 0.2 \quad b_1/h = 0.25 \quad b_2/h = 0.25 \quad d_2/L + d_3/L = 1 \quad C_0 = 0.5$$

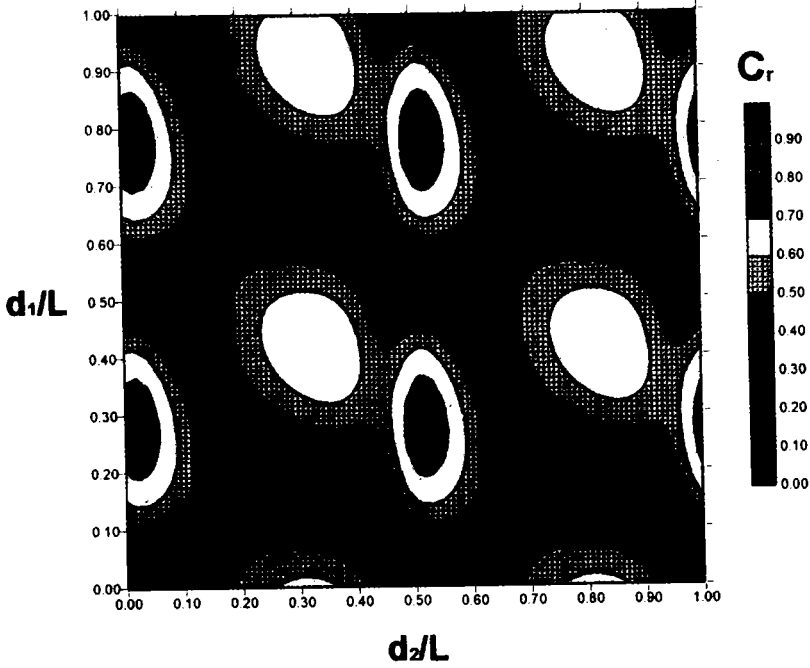


圖 3-7 $C_0 = 0.5$ 時在第一消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上
雙層型消波體前之等反射係數圖

$$b_0/h = 0.4 \quad h_b/h = 0.2 \quad b_1/h = 0.25 \quad b_2/h = 0.25 \quad d_2/L + d_3/L = 1 \quad C_0 = 2$$

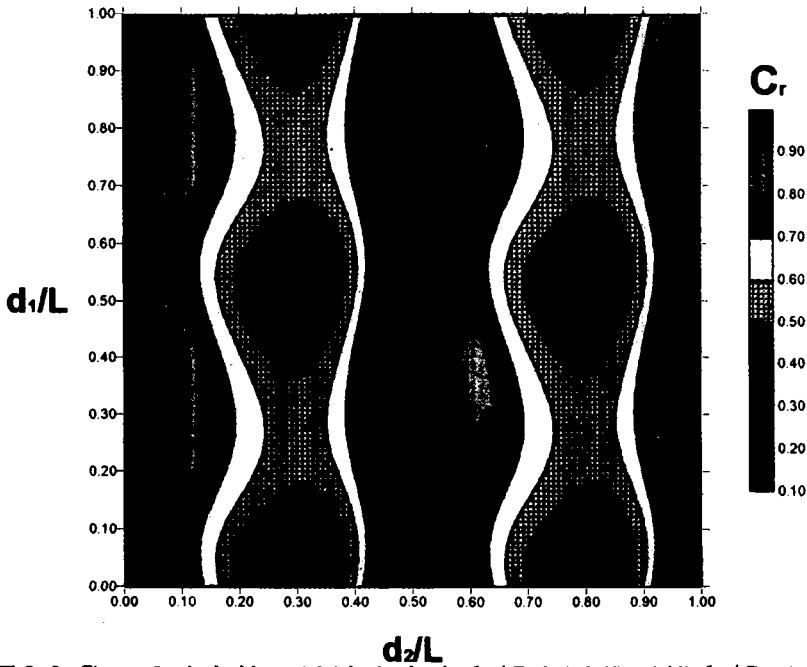


圖 3-8 $C_0 = 2$ 時在第一消波室寬度 d_2/L 與浮體距離 d_1/L 平面上
雙層型消波體前之等反射係數圖

$$b_1/h + b_2/h = 2 \quad d_1/L = 0.5 \quad h_b/h = 0.2 \quad d_2/L = 0.5 \quad C_0 = 0.5$$

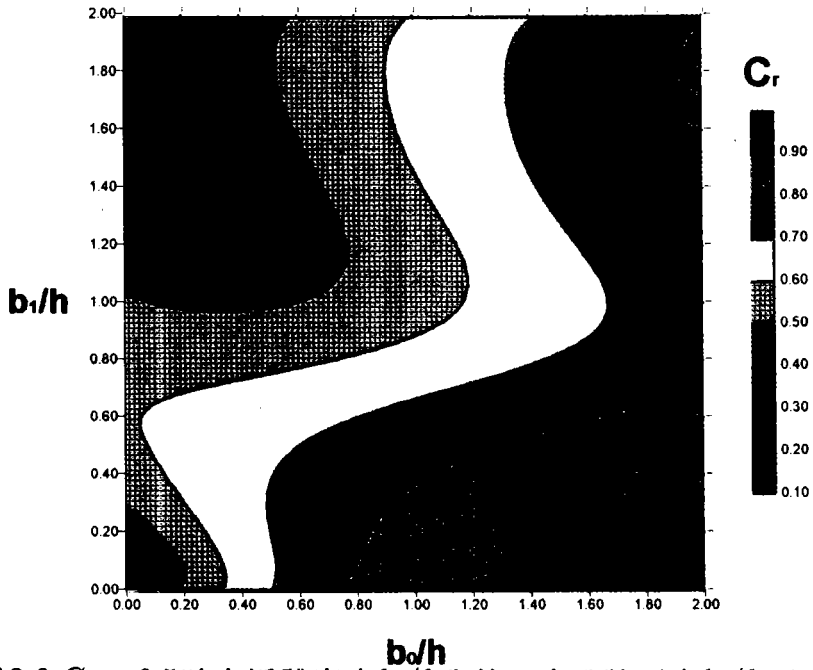


圖 3-9 $C_0 = 0.5$ 時在浮體寬度 b_0/h 與第一多孔牆厚度 b_1/h 平面上
雙層型消波體前之等反射係數圖

$$b_1/h + b_2/h = 2 \quad d_1/L = 0.5 \quad h_b/h = 0.2 \quad d_2/L = 0.5 \quad C_0 = 2$$

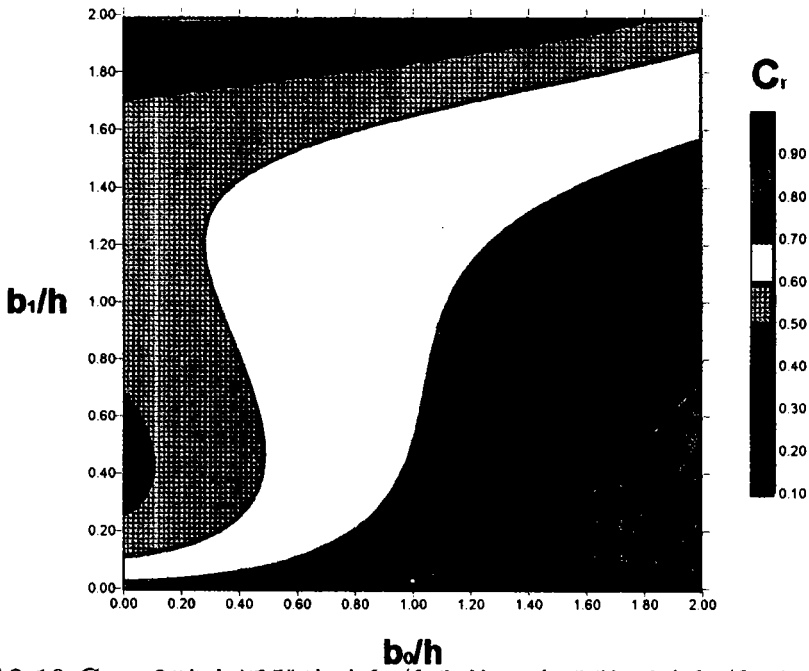


圖 3-10 $C_0 = 2$ 時在浮體寬度 b_0/h 與第一多孔牆厚度 b_1/h 平面上
雙層型消波體前之等反射係數圖

肆、數值解析-不規則型多孔消波體

一、積分方程式

當多孔消波體為不規則形狀,如孔隙牆由不同孔隙介質組成,或水平或垂直方向由多層孔隙牆組成,如示意圖4-1。且浮體為不規則形狀,浮體至消波體

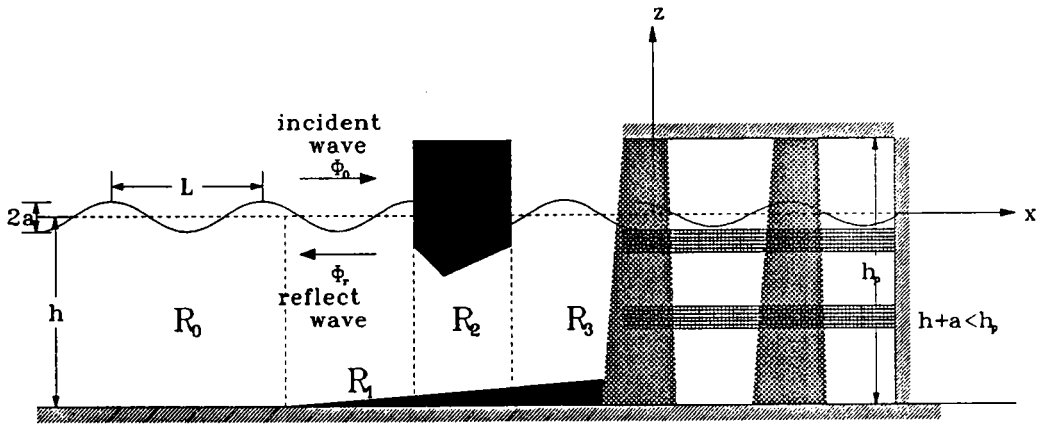


圖4-1多層多孔消波體側視示意圖

間水域或消波體內不為等水深,則無法以理論解析求得解,本節將引用數值解析法以求得此複雜邊界值問題。將所有孔隙牆分割,使每個區域內皆為等向性、均勻透水結構物,則每個區域內及每個水域,假設以區域 $R_j, j=1,2,\dots,n$ 表示,共有 n 個區域,其滿足控制方程式(2.8)之Weber解,在區域 R_j 之波函數 ϕ_j 可表示為下列積分方程(Baker及Copson, 1950):

$$\phi_j(\bar{x}) = b \int_{S_j} \left[\phi_j(\bar{x}_0) \frac{\partial G^{(0)}(r)}{\partial n_j} - G^{(0)}(r) \frac{\partial \phi_j(\bar{x}_0)}{\partial n_j} \right] ds$$

$$j = 1, 3, 4, \dots, n, \quad \bar{x} \in R_j \quad \text{or} \quad \bar{x} \in S_j \quad (4.1)$$

式中 S_j 為區域 R_j 之封閉邊界。

$b = \frac{-i}{4}$, 當 $\bar{x}$ 在區域 R_j 內部。

$b = \frac{-i}{2}$, 當 $\bar{x}$ 在平滑區域邊界 S_j 上。

$b = \frac{-i\pi}{2\beta}$, 當 $\bar{x}$ 在內角為 β 之邊界 S_j 上。

$G^{(0)}(r)$ 為 green 函數或稱基本解 (fundamental solution) 定義為

$$G^{(0)}(r) = \ln(r) \quad (4.2)$$

式中 $\ln(r)$ 為自然對數函數 (natural logarithmic function) 。 $r = |\bar{x}_0 - \bar{x}|$, $\bar{x}_0$ 為邊界上之點, $\bar{x}$ 為邊界上或區域內任一點。

一般在入射波區, 即離浮體適當距離之等水深區域水域, 其之波函數可以特徵函數表示為式 (2.35) 。有關邊界條件, 區域 R_j 之整個外圍邊界以 S_j 表示, 區域 R_j 與區域 $R_k (j \neq k)$ 之介面以 S_{jk} 或 S_{kj} 表示, S_{jk} 屬於邊界 S_j 之一部份, S_{kj} 屬於邊界 S_k 之一部份; 在任何相鄰 R_j 及 R_k 兩個區域 ($j \neq k$) 之界面處 S_{jk} 或 S_{kj} 之界面處, 必滿足下列壓力連續條件, 必滿足壓力連續條件:

$$-i\gamma_j\Phi_j = -i\gamma_k\Phi_k, \quad \text{at } S_{jk}, \quad j \neq k \quad (4.3a)$$

及流體質量連續條件:

$$\varepsilon_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} = -\varepsilon_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k}, \quad \text{at } S_{jk}, \quad j \neq k \quad (4.3b)$$

式中 $\varepsilon_j, \varepsilon_k$ 分別為區域 R_j, R_k 之孔隙率 (porosity), $\gamma_j = f_j + is_j$ 及 $\gamma_k = f_k + is_k$ 為分別為區域 R_j 及 R_k 之阻抗係數 (impedence) 。在水域區域 R_j 則 $\varepsilon_j = 1$, 且 $\gamma_j = i$; 在透水結構物區域 R_j 則 $\varepsilon_j < 1$, 且 γ_j 為包括實部及虛部之複數。 n_j 及 n_k 分別表示區域 R_j 及區域 R_k 在各自封閉面 S_j 及 S_k 上向外法線方向之單位向量, $n_j = -n_k$ 。浮體與水界面之邊界或不透水牆部份 (以 S_{jb} 表示) 滿足不透水條件

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} = 0, \quad \text{at } S_{jb} \quad (4.4)$$

式中 n_j 表示浮體區域邊界面向外法線方向之單位向量。

區域 R_j 在自由表面之邊界以 S_{jf} 表示, 區域 R_j 在不透水地面之邊界以 S_{jj} 表示。任何水域 R_j 之自由表面之界面處 S_{jf} , 滿足自由表面邊界條件(2.9); 任何透水結構物區域 R_j 之自由表面之界面處 S_{jf} , 滿足假想自由表面邊界條件(2.13); 任何區域 R_j 之不透水地面之界面處 S_{jj} , 則滿足不透水邊界條件(2.14)。

積分方程式(4.1)對不規則形狀之離岸堤不易求得完整解析解, 下節我們將利用邊界元素法求解波場。

二、邊界元素法模式

基本上邊界元素法可求解任何不規則形狀及不等水深之多層多孔消波體，但此處為方便其原理之說明，本節將僅取雙層多孔消波體為例，其放置位於 x -軸方向為無限長之區域，多層多孔消波體與 x -軸垂直，如側視圖4-2所示，在入射波區，即離浮體適當距離之等水深區域水域之平均水深為 h 。兩個多孔牆部份為等向性、均勻透水結構物孔隙介質組成(稱區域 R_4 及 R_6 ，阻抗係數分別為 $\gamma_4 = f_4 + is_4$ 及 $\gamma_6 = f_6 + is_6$ ，孔隙率分別為 ϵ_4 及 ϵ_6)，而剖面可為不規則形狀，浮體(稱區域 R_b)同樣可為不規則形狀。座標定義如示意圖， xy 平面置於平均海平面上，軸原點置於堤上方中心位置處，正 x 軸與入射波傳播方向相同， y 軸方向為無限長，離岸堤並有相同截面，其垂直進入書面為正， z 軸向上為正。同樣水域部份分為五個區域(如圖4-2)：入射波區，即離浮體適當距離之等水深區域水域(稱水域 R_0 ， $x \leq -d_0$)，入射波區至浮體前水域(稱水域 R_1)，浮體下之水域(稱水域 R_2)，浮體至消波體間之水域(稱水域 R_3)，兩個消波室水域(稱水域 R_5 及 R_7)。

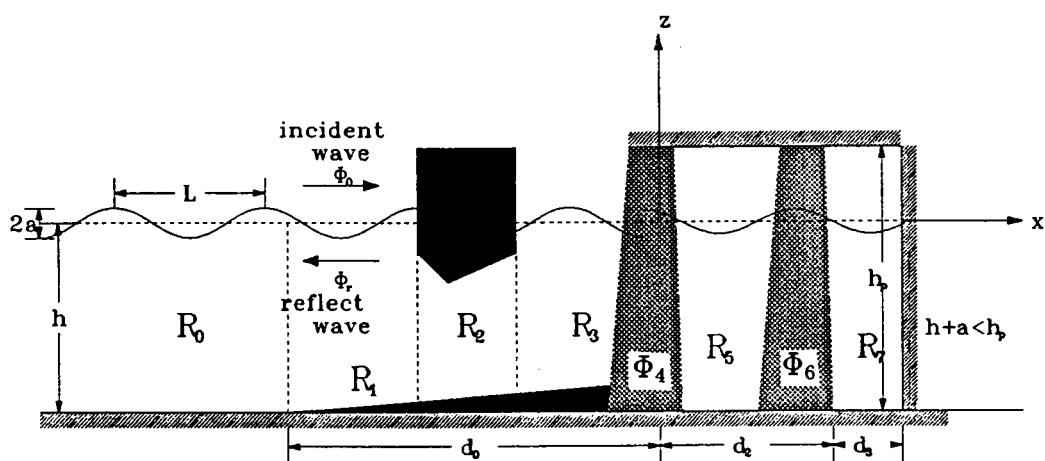


圖4-2雙層多孔消波體視示意圖

本文將引用邊界元素法，將區域 R_e ， $e=1,2..7$ 之邊界 S_e 分別切割為 N_e 個線段， N_e 個中結點(mid-node)，每個線段代表一個元素，並引用常數元素，假設每一個線段上每個點之 ϕ_e 及 $\frac{\partial \phi_e}{\partial n}$ 皆為定值，而以線段中結點值代表元素值，元素上 $G_0^{(0)}$ ， $\frac{\partial G_0^{(0)}}{\partial n}$ 之值將引用高斯積分法直接計算，而 N_e 個結點編號區域 R_1, R_3, R_5, R_7 以逆時鐘方向編排，而區域 R_2, R_4, R_6 以順時鐘方向編排。區域 R_j 及區域 R_k 之界面 S_{jk} (或 S_{kj}) 相鄰之結點數為 N_{jk} (或 N_{kj})。

假設方程式(4.1)中之 $\bar{x}$ 點為邊界上結點，則可化為下列矩陣方程式

$$[G_e]\{P_e\} = [H_e]\{Q_e\}, \quad e = 1, 2, ..7 \quad (4.5)$$

式中 $[H_e], [G_e]$ 皆為 $N_e \times N_e$ 矩陣，其矩陣元素 $[H_e]_{jk}, [G_e]_{jk}$ 分別定義為下列線積分(line integral)表示式

$$[H_e]_{jk} = b \int_{\Gamma_k} \frac{\partial G_0^{(0)}(r)}{\partial n_e} d\ell_k - \delta_{jk}$$

$$e = 1, 2...7, \quad j, k = 1, 2, 3...N_e \quad (4.6a)$$

$$[G_e]_{jk} = b \int_{\Gamma_k} G_0^{(0)}(r) d\ell_k$$

$$e = 1, 2..7, \quad j, k = 1, 2, 3...N_e \quad (4.6b)$$

式中 Γ_k 為第 k 個元素， $r = |\bar{x}_j - \bar{x}|$ ， $\bar{x}_j$ 為區域 R_e 之邊界 S_e 上元素之結點， $j=1,2,3...N_e$ ， $\bar{x}$ 為第 k 個元素 Γ_k 上任一點， δ_{jk} 為克郎克函數(Kronecker delta function)， $G^{(0)}(r)$ 為 green 函數，而 $\{Q_e\}$ 及 $\{P_e\}$ 為 $N_e \times 1$ 向量，其向量元素分別定義為

$$\{Q_e\}_j = \phi_e(\bar{x}_j), \quad e = 1, 2...7, \quad j = 1, 2...N_e \quad (4.7a)$$

$$\{P_e\}_j = \frac{\partial \phi_e(\bar{x}_j)}{\partial n_e}, \quad e = 1, 2...7, \quad j = 1, 2...N_e \quad (4.7b)$$

在區域 R_r 及區域 R_e 之界面 S_{re} (或 S_{er}) ($r, e=1, 2, \dots, 7, r \neq e$) 相鄰之結點滿足

$$\begin{aligned} -i\gamma_r\{Q_{re}\}_j &= -i\gamma_e\{Q_{er}\}_j \\ j &= 1, 2, \dots, N_{re} \quad \text{at} \quad S_{re}(S_{er}), \quad r, e = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r\{P_{re}\}_j &= -\varepsilon_e\{P_{er}\}_j \\ j &= 1, 2, \dots, N_{re} \quad \text{at} \quad S_{re}(S_{er}), \quad r, e = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned} \quad (4.8b)$$

式中 $\{Q_{re}\}_j = \phi_r(\bar{x}_j)$, $\{P_{re}\}_j = \frac{\partial \phi_r(\bar{x}_j)}{\partial n_r}$ 為屬區域 R_r 在界面 S_{re} 之值, 而 $\{Q_{er}\}_j = \phi_e(\bar{x}_j)$, $\{P_{er}\}_j = \frac{\partial \phi_e(\bar{x}_j)}{\partial n_e}$ 為屬區域 R_e 在界面 S_{er} 之值。

在區域 R_e 之自由表面邊界面 $S_{ef}, e=1, 3, 4, 7$ 處應滿足自由表面邊界條件 (2.9) 或 (2.13), 可表示為

$$\phi_e = \frac{g}{-i\sigma^2\gamma_e} \frac{\partial \phi_e}{\partial z}, \quad \text{at} \quad S_{ef}, \quad e = 1, 3, 4, 7 \quad (4.9)$$

式中 $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_7 = i$, 若以矩陣方程式表示則為

$$\{Q_{ef}\} = C_{ef}\{P_{ef}\}, \quad e = 1, 3, 4, 7 \quad \text{at} \quad S_{ef} \quad (4.10a)$$

或

$$\{Q_{ef}\}_j = C_{ef}\{P_{ef}\}_j, \quad e = 1, 3, 4, 7 \quad \text{at} \quad S_{ef}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{ef} \quad (4.10b)$$

式中係數 $C_{ef} = \frac{g}{-i\sigma^2\gamma_e}$, $e = 1, 3, 4, 7$, $\{Q_{ef}\}_j = \phi_e(\bar{x}_j)$, $\{P_{ef}\}_j = \frac{\partial \phi_e(\bar{x}_j)}{\partial n_e}$, N_{ef} 為區域 R_e 之自由表面邊界面 S_{ef} 處之結點數。

在水域 R_1, R_2, R_3 與浮體之界面邊界面 S_{1b}, S_{2b}, S_{3b} , 或消波室內水域 R_7 與不透水牆之界面邊界面 S_{7b} 處應滿足不透水邊界條件, 或可表示為

$$\begin{aligned} \{P_{eb}\}_j &= \frac{\partial \phi_e(\bar{x}_j)}{\partial n_e} = 0 \\ e &= 1, 2, 3, 7, \quad j = 1, 2, \dots, N_{eb} \quad \text{at} \quad S_{eb} \end{aligned} \quad (4.11)$$

式中 $N_{eb}, e = 1, 2, 3, 7$ 為區域 R_e 之浮體面邊界 S_{eb} 處之結點數。

在區域 R_e 之地表面邊界面 $S_{ee}, e=1, 2, \dots, 7$ 處應滿足不透水邊界條件(2.14), 或可表示為

$$\{P_{ee}\}_j = \frac{\partial \phi_e(\bar{x}_j)}{\partial n_e} = 0, \quad e = 1, 2, \dots, 7, \quad j = 1, 2, \dots, N_{ee} \quad \text{at } S_{ee} \quad (4.12)$$

式中 $N_{ee}, e = 1, 2, \dots, 7$ 為區域 R_e 之地表面邊界面 S_{ee} 處之結點數。

最後將求得在反射界面 S_{01} 之邊界條件之表示式。類似表示式(2.35)在區域 R_0 波函數之表示式為

$$\begin{aligned} \phi_0(x, z) &= A \cosh[k_0(h+z)]e^{-ik_0(x+d_0)} \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty} R_r^{(0)} A \cosh[k_r(h+z)]e^{ik_r(x+d_0)} \\ x &\leq -d_0, \quad -h \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

取(4.13)其對 x 之微分量可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0(x, z)}{\partial x} &= -ik_0 A \cosh[k_0(h+z)]e^{-ik_0(x+d_0)} \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty} ik_r R_r^{(0)} A \cosh[k_r(h+z)]e^{ik_r(x+d_0)} \\ x &\leq -d_0, \quad -h \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

區域 R_0 在界面 S_{01} 邊界處 ($x=-d_0$) 之波函數表示式為

$$\begin{aligned} \phi_0(-d_0, z) &= A \cosh[k_0(h+z)] + \sum_{r=0}^{\infty} R_r^{(0)} A \cosh[k_r(h+z)] \\ x &= -d_0, \quad -h \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \phi_0(-d_0, z)}{\partial x} = -ik_0 A \cosh[k_0(h+z)] + \sum_{r=0}^{\infty} ik_r R_r^{(0)} A \cosh[k_r(h+z)]$$

$$x = -d_0, \quad -h \leq z \leq 0 \quad (4.16)$$

使用正交序列 $\cosh[k_r(h+z)]$, $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ 在水深區 $(-h, 0)$ 之正交性，將表示式(4.15)及(4.16)，每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh k_r(z+h) dz$, $r = 0, 1, 2, \dots$ ，則分別可得

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_0(-d_0, z)}{\partial x} \cosh[k_0(h+z)] dz = -ik_0 A (1 - R_0^{(0)}) Y_{00}, \quad r = 0 \quad (4.17a)$$

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_0(-d_0, z)}{\partial x} \cosh[k_r(h+z)] dz = ik_r A R_r^{(0)} Y_{rr}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17b)$$

式中

$$Y_{rr} = \int_{-h}^0 \cosh^2[k_r(h+z)] dz = h \left[\frac{1}{2} + \frac{\sinh(2k_r h)}{4k_r h} \right]$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

因此 $R_0^{(0)}, R_r^{(0)}, r=1, 2, 3, \dots$ 可表示為

$$R_0^{(0)} = 1 + \frac{1}{ik_0 A Y_{00}} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_0(-d_0, z)}{\partial x} \cosh[k_0(h+z)] dz \quad (4.19a)$$

$$R_r^{(0)} = \frac{1}{ik_r A Y_{rr}} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_0(-d_0, z)}{\partial x} \cosh[k_r(h+z)] dz, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19b)$$

將(4.18)式帶入(4.15)式，可求得在界面 S_{01} 之值為

$$\begin{aligned}\phi_0(-d_0, z) &= 2A \cosh[k_0(h+z)] \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A \cosh[k_r(h+z)]}{ik_r A Y_{rr}} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_0(-d_0, z')}{\partial x} \cosh[k_r(h+z')] dz' \\ r &= 0, 1, 2, 3... \quad \text{at} \quad S_{01}, \quad -h \leq z \leq 0\end{aligned}\quad (4.20)$$

若界面 S_{01} 分割常數元數之結點數為 N_{01} ，則(4.20)式右邊積分形式可簡化為離散形式如下

$$\begin{aligned}\phi_0(-d_0, z_j) &= 2A \cosh[k_0(h+z_j)] \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{01}} \frac{\partial \phi_0(-d_0, z_k)}{\partial x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A}{ik_r Y_{rr}} \cosh[k_r(h+z_j)] \cosh[k_r(h+z_k)] \Delta z_k \\ r &= 0, 1, 2, 3..., \quad \text{at} \quad S_{01}, \quad j = 1, 2...N_{01}\end{aligned}\quad (4.21)$$

因界面 S_{01} 與 z 軸平行(垂直邊界之分量與 x 軸平行), 對區域 R_0 在邊界 S_{01} 之 $\bar{n}_0$ 與 x 軸同向, 對區域 R_1 在邊界 S_{10} 之 $\bar{n}_1$ 與 x 軸反向, 因此在界面 S_{01} 上滿足 $\phi_0(-d_0, z_j) = \phi_1(-d_0, z_j)$, $\frac{\partial \phi_0(-d_0, z_j)}{\partial n_0} = -\frac{\partial \phi_1(-d_0, z_j)}{\partial n_1}$, 則式(4.21)可表示為

$$\begin{aligned}\phi_1(-d_0, z_j) &= 2A \cosh[k_0(h+z_j)] \\ &- \sum_{k=1}^{N_{01}} \frac{\partial \phi_1(-d_0, z_k)}{\partial n_1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A}{ik_r Y_{rr}} \cosh[k_r(h+z_j)] \cosh[k_r(h+z_k)] \Delta z_k \\ r &= 0, 1, 2, 3..., \quad \text{on} \quad S_{01}, \quad j = 1, 2...N_{01}\end{aligned}\quad (4.22)$$

或表示為下列矩陣方程式

$$\{Q_{10}\} = \{C_{10}\} + [D_{10}]\{P_{10}\}, \quad \text{on} \quad S_{01} \quad (4.23)$$

式中 $\{Q_{10}\}$ 及 $\{P_{10}\}$ 為 $N_{01} \times 1$ 向量, 其向量元素分別定義為

$$\{Q_{10}\}_j = \phi_1(\bar{x}_j), \quad \text{on} \quad S_{01} \quad j = 1, 2...N_{01} \quad (4.24a)$$

$$\{P_{10}\}_j = \frac{\partial \phi_1(\bar{x}_j)}{\partial n_1}, \quad \text{on } S_{01} \quad j = 1, 2, \dots, N_{01} \quad (4.24b)$$

係數向量 $\{C_{10}\}$ 及矩陣 $[D_{10}]$ 分別定義為

$$\{C_{10}\}_j = 2A \cosh[k_0(h + z_j)], \quad \text{on } S_{01} \quad j = 1, 2, \dots, N_{01} \quad (4.25a)$$

$$[D_{10}]_{jk} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{-A}{ik_r Y_{rr}} \cosh[k_r(h + z_j)] \cosh[k_r(h + z_k)] \Delta z_k$$

$$\text{on } S_{01} \quad j, k = 1, 2, \dots, N_{01} \quad (4.25b)$$

為引用界面處 S_{jk} (或 S_{kj}) 之連續條件, 將區域 R_j 之邊界 S_j , 分為界面邊界及非界面邊界兩部份, 例如為引用界面處 S_{12} (或 S_{21}) 之連續條件, 將區域 R_1 之邊界 $S_1 = S_{10} + S_{1f} + S_{12} + S_{11}$, 分為 S_{1t} 及 S_{12} 兩部分, 其中 $S_{1t} = S_{10} + S_{1f} + S_{11}$ 為邊界 S_1 除 S_{12} 以外之其他邊界。其邊界上之結點數 $N_1 = N_{01} + N_{1f} + N_{12} + N_{11}$, 也分為 N_{1t} 及 N_{12} 兩部分。

同樣將區域 R_2 之邊界 $S_2 = S_{21} + S_{2b} + S_{23} + S_{22}$, 分為 S_{21} , S_{23} 及 S_{2t} 三部分, 其中 $S_{2t} = S_{2b} + S_{22}$ 為邊界 S_2 除 S_{21} 及 S_{23} 以外之其他邊界。其邊界上之結點數 $N_2 = N_{21} + N_{2b} + N_{23} + N_{22}$, 也分為 N_{21} , N_{23} 及 N_{2t} 三部分。其他區域依此類推。

因此各向量 $\{P_i\}$ 及 $\{Q_i\}$, $i=1, 2, \dots, 7$ 可分別定義如下

$$\{P_1\} = \begin{Bmatrix} P_{1t} \\ P_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{1t} \\ Q_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.26a)$$

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} P_{et} \\ P_{e,e-1} \\ P_{e,e+1} \end{Bmatrix}, \quad \{Q_e\} = \begin{Bmatrix} Q_{et} \\ Q_{e,e-1} \\ Q_{e,e+1} \end{Bmatrix}, \quad e = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.26b)$$

$$\{P_7\} = \begin{Bmatrix} P_{7t} \\ P_{76} \end{Bmatrix}, \quad \{Q_7\} = \begin{Bmatrix} Q_{7t} \\ Q_{76} \end{Bmatrix} \quad (4.26c)$$

且各對應矩陣 $[G_i]$ 及 $[H_i]$, $i=1,2,\dots,7$ 可分別定義如下

$$[G_1] = [G_{1t} \ G_{12}], \quad [H_1] = [H_{1t} \ H_{12}] \quad (4.27a)$$

$$[G_e] = [G_{et} \ G_{e,e-1} \ G_{e,e+1}], \quad [H_e] = [H_{et} \ H_{e,e-1} \ H_{e,e+1}]$$

$$e = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.27b)$$

$$[G_7] = [G_{7t} \ G_{76}], \quad [H_7] = [H_{7t} \ H_{76}] \quad (4.27c)$$

則表示式(4.1), 當 $e=1$, $[G_1]\{P_1\} = [H_1]\{Q_1\}$ 可化爲

$$[G_{1t} \ G_{12}] \begin{Bmatrix} P_{1t} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = [H_{1t} \ H_{12}] \begin{Bmatrix} Q_{1t} \\ Q_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.28a)$$

同樣 $[G_e]\{P_e\} = [H_e]\{Q_e\}$ 化爲

$$[G_{et} \ G_{e,e-1} \ G_{e,e+1}] \begin{Bmatrix} P_{et} \\ P_{e,e-1} \\ P_{e,e+1} \end{Bmatrix} = [H_{et} \ H_{e,e-1} \ H_{e,e+1}] \begin{Bmatrix} Q_{et} \\ Q_{e,e-1} \\ Q_{e,e+1} \end{Bmatrix}$$

$$e = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.29b)$$

$[G_7]\{P_7\} = [H_7]\{Q_7\}$ 化爲

$$[G_{7t} \ G_{76}] \begin{Bmatrix} P_{7t} \\ P_{76} \end{Bmatrix} = [H_{7t} \ H_{76}] \begin{Bmatrix} Q_{7t} \\ Q_{76} \end{Bmatrix} \quad (4.29c)$$

在界面處 S_{jk}

$$\varepsilon_j \{P_{jk}\} = -\varepsilon_k \{P_{kj}\}, \quad \text{on } S_{jk} \quad (4.30a)$$

$$-i\gamma_j \{Q_{jk}\} = -i\gamma_k \{Q_{kj}\}, \quad \text{on } S_{jk} \quad (4.30b)$$

因此式(4.29a)、(4.29b)、(4.29c)化爲

$$[G_{1t} \ G_{12} \ -H_{12}] \begin{Bmatrix} P_{1t} \\ P_{12} \\ Q_{12} \end{Bmatrix} = [H_{1t}] \{Q_{1t}\} \quad (4.31a)$$

$$[G_{et} \ G_{e,e-1} \ -H_{e,e-1} \ G_{e,e+1} \ -H_{e,e+1}] \begin{Bmatrix} P_{et} \\ P_{e,e-1} \\ Q_{e,e-1} \\ P_{e,e+1} \\ Q_{e,e+1} \end{Bmatrix} = [H_{et}] \{Q_{et}\} \quad (4.31b)$$

$e = 2, 3 \dots 6$

$$[G_{7t} \ G_{76} \ -H_{76}] \begin{Bmatrix} P_{7t} \\ P_{76} \\ Q_{76} \end{Bmatrix} = [H_{7t}] \{Q_{7t}\} \quad (4.31c)$$

式(4.31a)、(4.31b)及(4.31c)可組成

$$\begin{bmatrix} G_{1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} G_{12} & \frac{-\gamma_2}{\gamma_1} H_{12} & 0 & 0 \\ 0 & G_{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{21} & -H_{21} & G_{23} & -H_{23} \\ 0 & 0 & G_{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_3} G_{32} & \frac{-\gamma_2}{\gamma_3} H_{32} \\ 0 & 0 & 0 & G_{4t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{5t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{6t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{7t} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\varepsilon_4}{\varepsilon_3} G_{34} & \frac{-\gamma_4}{\gamma_3} H_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{43} & -H_{43} & G_{45} & -H_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\varepsilon_4}{\varepsilon_5} G_{54} & \frac{-\gamma_4}{\gamma_5} H_{54} & \frac{-\varepsilon_6}{\varepsilon_5} G_{56} & \frac{-\gamma_6}{\gamma_5} H_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65} & -H_{65} & G_{67} & -H_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon_6}{\varepsilon_7} G_{76} & \frac{-\gamma_6}{\gamma_7} H_{76} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \\ P_{3t} \\ P_{4t} \\ P_{5t} \\ P_{6t} \\ P_{7t} \\ P_{21} \\ Q_{21} \\ P_{23} \\ Q_{23} \\ P_{43} \\ Q_{43} \\ P_{45} \\ Q_{45} \\ P_{65} \\ Q_{65} \\ P_{67} \\ Q_{67} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{4t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{5t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{6t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{7t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{1t} \\ Q_{2t} \\ Q_{3t} \\ Q_{4t} \\ Q_{5t} \\ Q_{6t} \\ Q_{7t} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

不失一般性，在邊界 $S_{et}, e=1,2...7$ 上之 ϕ 值假設為已知(詳細原理將於下說明)，即式(4.38)右邊之 $\{Q_{et}\}, e=1,2...7$ 皆為已知，因此可利用高斯消去法求解在邊界 $S_{et}, e=1,2...7$ 上之 $\{P_{et}\}, e=1,2...7$ ，及在界面 $S_{e,e+1}$ 上之 $\{P_{e,e+1}\}, \{Q_{e,e+1}\}, e=1,2...6$ 等未知變數。

以下將說明此一般性假設之理由；根據數值分析理論，在區域邊界上，一般有三種邊界條件，第一種為必要邊界條件(essential boundary condition)，即求解之變數為已知，例如 ϕ 值已知。第二種為自然邊界條件(natural boundary condition)，即求解變數之微分量為已知，例如 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 為已知。第三種為混合型邊界(mixed boundary condition)，即變數與變數微分量間為線性關係，例如 $\phi = a'_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} + a'_1$ ，式中 a'_0 及 a'_1 為常數。此處不透水界面 $S_{ee}, e=1,2...7, S_{1b}, S_{2b}, S_{3b}, S_{7b}$ 屬自然邊界條件；反射介面 S_{10} ，及自由表面 $S_{ef}, e=1,3,4...7$ 屬混合型邊界條件。

以下我們說明將三種邊界應用在求解(4.32)式問題之法則如下：

- (1.) 若邊界上第 j 點為自然邊界條件時，即 $\{P_{et}\}_j$ 已知，而 $\{Q_{et}\}_j$ 為未知，則將其對應之矩陣 $[G_{et}]_{jk}$ 與 $[Q_{et}]_{jk} \quad k=1,2,N_e$ 互調，同時 $\{P_{et}\}_j$ 與 $\{Q_{et}\}_j$ 兩變數對應點也互調，此時方程式右邊皆為已知值。
- (2.) 若邊界點為混合邊界條件時，例如滿足 $\{Q_{et}\} = [D_{et}]\{P_{et}\} + \{C_{et}\}$ 關係數

時,則將係數 $\{D_{et}\}\{P_{et}\}$ 移到方程式左邊,係數 $\{C_{et}\}$ 獨立分離留置於方程式右邊,此時方程式右邊也皆為已知值。

(3.) 若邊界點滿足必要邊界條件時,即符合我們一般性之假設,不另行處理。

求解方程(4.38)則在各個區域 $R_e, e=1,2,...7$ 外圍邊界 S_e 之每個結點上之 ϕ_e 及 $\frac{\partial \phi_e}{\partial n_e}$ 值皆可求得。假設方程式(2-41)中之 $\bar{x}_j^e$ 點為區域 $R_e, e=1,2,...7$ 內(不包括邊界 S_e)任一點,則可由下列表示式求得 ϕ 值

$$\phi(\bar{x}_j^e) = \sum_{k=1}^{N_e} b[\phi_e(\bar{x}) \int_{\Gamma_k} \frac{\partial G_0^{(0)}(r)}{\partial n_e} d\ell_k + \frac{\partial \phi(\bar{x})}{\partial n_e} \int_{\Gamma_k} G_0^{(0)}(r) d\ell_k] \quad (4.33)$$

$e = 1, 2, ..., 7, \quad j = 1, 2, 3, ...$

式中 Γ_k 為第 k 個元素, $r = |\bar{x}_j^e - \bar{x}|$, $\bar{x}_j^e$ 為區域 R_e 內(不包括邊界 S_e)任一點, $j=1,2,3,...N_e$, $\bar{x}$ 為第 k 個元素 Γ_k 上任一點。

同樣離岸堤前之反射係數定義為

$$C_r = |R_0^{(0)}| \quad (4.34)$$

表示浮體前($x = -d_0$)反射波振幅與入射波振幅比值。

其中 $R_0^{(0)}$ 可由式(4.19a)化簡之下列離散式求得

$$R_0^{(0)} = 1 + \frac{1}{i k_0 A Y_{00}} \sum_{k=1}^{N_{01}} \{P_{10}\}_k \cosh[k_0(h + z_k)] \Delta z_k \quad (4.35)$$

式中 $\{P_{10}\} = \frac{\partial \phi_1(d_1 + d_3, z_k)}{n_1}$, N_{12} 為反射邊界之元素分割數。

若消波室水域 R_7 為一規則矩形(寬為 d_3),且消波室左側至原點距離為 d_2 ,則類似表示式(2.38)在區域 R_7 波函數之表示式為

$$\phi_7(x, z) = \sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(7)} A \cosh[k_r(h + z)] \cos[k_r(x - d_2 - d_3)]$$

$$d_2 \leq x \leq d_2 + d_3, \quad -h \leq z \leq 0 \quad (4.36)$$

消波體之透射係數定義為

$$C_t = |T_0^{(7)}| \quad (4.37)$$

表示透過波在消波室右側($x = d_2 + d_3$)之振幅與入射波振幅比值。

對式(4.36)每個項分別做積分運算 $\int_{-h}^0 () \cosh k_0(z+h)dz$,則可得

$$\int_{-h}^0 \phi_7(x, z) \cosh k_0(z+h)dz = T_0^{(7)} AY_{00} \quad (4.38)$$

因此 $T_0^{(7)}$ 可由式(4.38)化簡之下列離散式求得

$$T_0^{(7)} = \frac{1}{AY_{00}} \sum_{k=1}^{N_{7b}} \{Q_{7b}\}_k \cosh[k_0(h+z_k)] \Delta z_k \quad (4.39)$$

式中 $\{Q_{7b}\} = \phi_7(d_2 + d_3, z_k)$, N_{7b} 為消波室右側不透水壁之元素分割數。

三、數值結果之印證

本節將以雙層多孔牆型多孔消波體為例子，以理論解印証數值解之結果。假設浮體寬 $h_0/h = 0.4$ ，浮體高 $h_b/h = 0.2$ ，浮體距消波體為 $d_1/L = 0.5$ ，第一消波室寬為 $d_2/L = 0.25$ ，第二消波室寬為 $d_2/L = 0.25$ ，透水結構物部份為長方形、等向性、均勻其孔隙率分別為 $\varepsilon = 0.4$ 及 $\varepsilon' = 0.4$ ，而阻抗係數分別為 $\gamma = s + if = 1 + i0.5$ 及 $\gamma' = s' + if' = 1 + i0.5$ ，牆厚度分別為 $b_1/h = 0.25$ 及 $b_2/h = 0.25$ 。第一消波室寬為 $d_2/L = 0.25$ ，第二消波室寬為 $d_2/L = 0.25$ ，圖 4-3 為不同波浪參數 (C_0) 之波浪作用下無因次波浪參數 C_0 與反射係數 C_r 之相關圖。圖 4-4 為不同波浪參數 (C_0) 之波浪作用下無因次波浪參數 C_0 與透射係數 C_t 之相關圖。直線部分為理論解，實心圓點為邊界元素數值計算結果。圖中顯示數值計算與理論解之結果，甚為一致，證明本文數值方法之正確性。

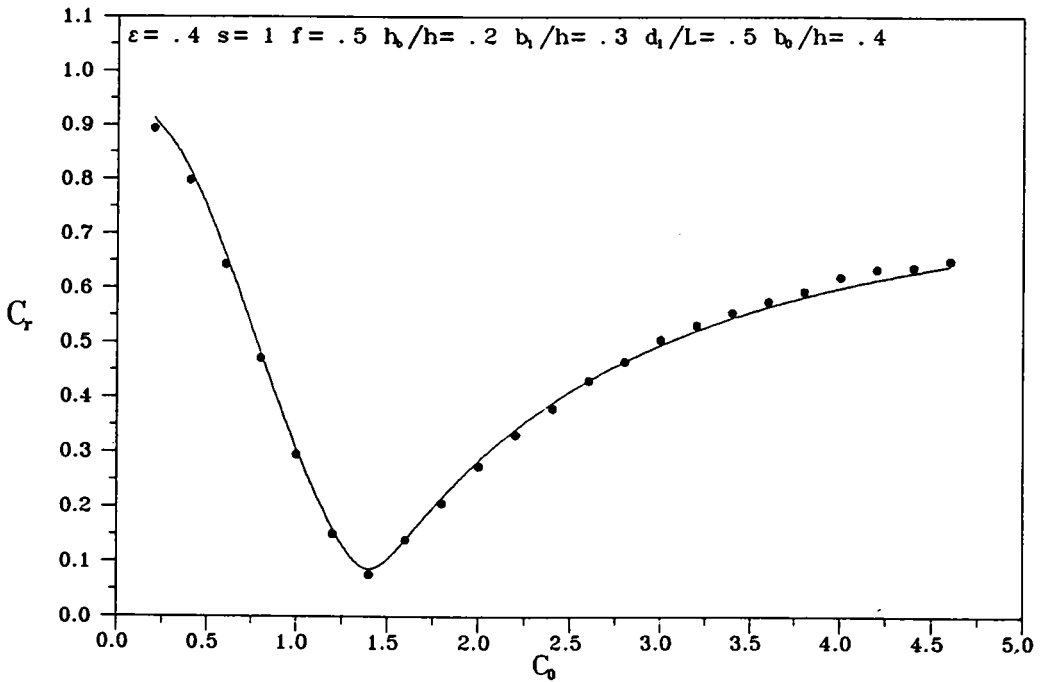


圖 4-3 雙層多孔消波體無因次波浪參數 C_0 與反射係數 C_r 之相關圖

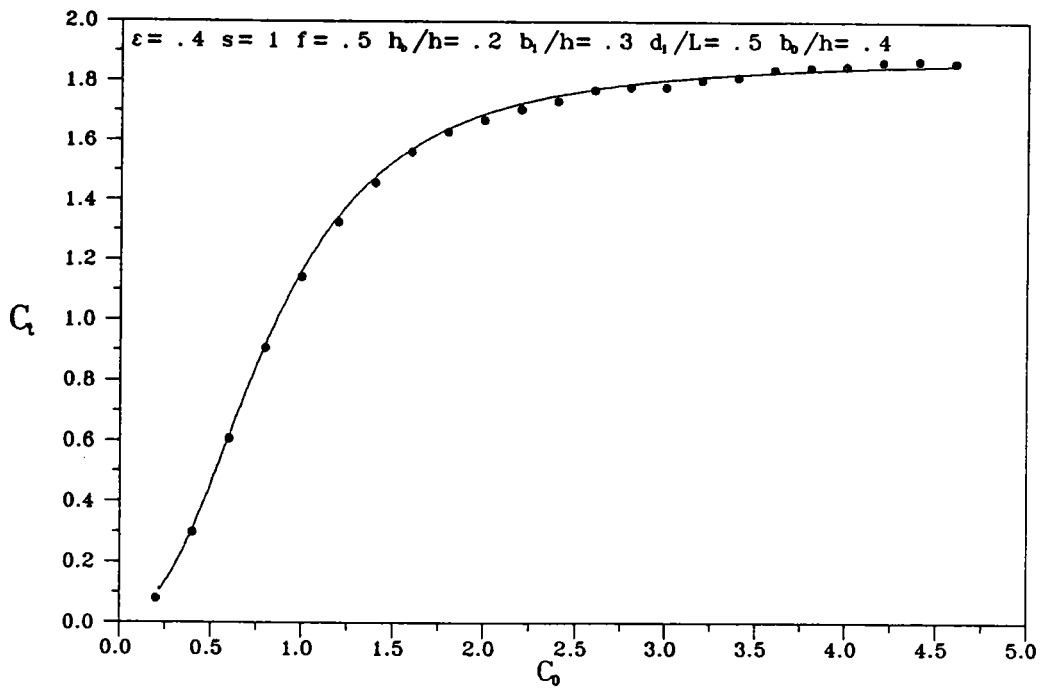


圖 4-4 雙層多孔消波體無因次波浪參數 C_0 與透射係數 C_t 之相關圖

伍、討論及結論

1. 本文以理論解析及數值解析分別探討浮體對多孔消波體波能消散之影響。
• 多孔消波體由單層或多層孔隙牆與不透水直立壁組成含一個或多個消波室之消波體設計。消波體前存在一不隨波浪運動之方形或不規則形狀浮體(或浮板)。解析之範圍已包括正向波作用於不規則形狀,多種不同透水性結構物組成之消波體設計及浮體之影響。
2. 以理論解析由多層多孔牆與不透水壁組成消波體,放置於等水深半無限長區域之末端,受波浪作用之反射係數,主要受入射波參數 C_0 、波長(週期)、每個消波室寬度($d_2/L, d_3/L..$)、每個多孔牆厚度($b_1/h, b_2/h..$)及每個多孔牆特性參數(包括孔隙率 ϵ ,摩擦係數 f 及慣性係數 s)。等因素影響。
• 若有浮體(或浮板)存在於消波體前,則浮體之寬度 d_1/L 、厚度 b_0/h 及高度 h_b/h 對反射係數皆為重要影響因素。
3. 對於多孔消波體之波能消散特性,消波室發揮甚大的能量轉移功能,多孔牆發揮甚大的能量消滅功能。對特定的波浪(C_0)及多孔牆特性參數(ϵ, s, f)
• 由無因次消波室寬度($d_1/L, d_2/L, d_3/L..$)與無因次多孔牆厚度($b_1/h, b_2..$)平面上之等反射係數圖,可安排求得較佳之消波條件。而消波體前之浮體,將可能改變消波特性。
4. 本文引用邊界元素法,解析波浪作用於多孔消波體部份,將可解析不規則形狀之浮體及孔隙體,及多層不均勻透水結構物問題,為一甚為有效之解析方法。邊界元素法模式之邊界條件形式,計有自然邊界(natural B. C.),及混合邊界(mixed B.C.)。反射介面、透過介面及自由表面則屬混合邊界,不透水海底屬自然邊界條件,不同區域(包括不同透水結構物或水域)間則引用水位與壓力連續條件。
5. 數值解析結果與理論解析比較,在不同波浪作用之條件,反射係數及透射係數皆得到一致之印證。本模式將可應用於解析任何不規則形狀及多層透水結構物之消波體問題。

參考文獻

1. Baker, B. B. and E. T. Copson , "The Mathematical Theory of Huygen's Principle", Oxford University Press, London, (1950).
2. Biesel F. and F. Suquet , "Les Appareils Generateurs de Houle Enlaboratoire" . La Houille Branche PP. 147-165,475-496,723-737 (1951).
3. Chwang, A.T., "A Porous-Wavemaker Theory ", J. Fluid Mech. , Vol.132, pp. 395 ~ 406 (1983).
4. Chwang, A.T. and W. Li , "A Piston-Type Porous Wave-Maker Theory", J. Eng. Math., Vol.17 , pp. 301 ~ 313 (1983).
5. Chwang, A. T. and Z. Dong , "Wave-Trapping Due to a Prouss Plate" ,Proc. 15th ONR Sym. on Naval Hydrodyn. ,Hamburg ,Germany, pp. 407 ~ 417 (1984).
6. Chwang, A. T. , S. H. Ou and C. H. Su , "Dissipation of Wave Energy by a Porous Wall " , CKHORT-89-005 , Dept. of Hydraulics and Ocean Eng.,National Cheng Kung Univ. ,Taiwan, R.O.C. (1989).
7. Dalrymple, R. A. , M. A. Losada and P. A. Martin , " Reflection and Transmission from Porous Structures under Oblique Wave Attack " ,J. Fluid Mech. , Vol.224, pp. 625 ~ 644 (1991).
8. Havelock T. H. , "Forced Surface-Waves on Water ". Phil. Mag. Vol.8 pp. 569-576 (1929).
9. Huang, L. H. , "The Inertial Effect of a Finite Thickness Porous Wavemaker.", J. Hydr. Res. ,29(3),pp. 417 ~ 432 (1991).
10. Huang, L. H. and H. I. Chao , "Reffection and Transmission of Water Wave by Porous Breakwater", J. Wtrwys. , Har. Coast. Div. ,ASCE, ,100(4),pp. 437 ~ 452 (1992).
11. Huang, L. H. , P. C. Hsieh and G. Z. Chang , "The Interaction of Water Wave

- and Porous Breakwater" ,Paper Submitted to J. Wtrwys. , Har. Coast. Div. ,ASCE (1992).
12. Jamieson, W.W. and E.P.D. Mansard , " An Efficient Upright Wave Absorber " ,Proc. of Coast. Hydro. dyna. Conf. ,pp. 124 ~ 139 (1987).
 13. Jarlan, G.L.E., " A Perforated Vertical Wall Breakwater", The Dock and Harbour Authority, Vol. 41, pp.394 ~ 398 (1961).
 14. Jarlan, G.L.E., "The Application of Acoustic Theory to the Reflective Properties of Coastal Engineering Structures" , National Research Council of Canada, Rep. No. DME/NAE pp. 23 ~ 63 (1965).
 15. Lee,C. P., " Wave Interaction with Permeable Structures", Ph. D. Dissertation ,Ocean Engineering Program ,Department of Civil Engineering ,Oregon State University , Corvallis, Oregon , U.S.A. (1986).
 16. Le Méhauté, B. , " Perméabilité des Diguees en Enrochements aux Ondes de Gravité périodiques " , Bouille Blanche , Vol. 6, pp. 903 ~ 919 (1957).
 17. Liu , P. L. -F. , S. B. Yoon and R.A. Dalrymple , "Wave Reflection from Energy Dissipation Region : ,J. Waterw., Port, Coastal and Ocean Eng . , ASCE Vol. 112, pp. 632 ~ 644(1986).
 18. Madsen, O.S. , " Wave Transmission through Porous Structures " , J. Waterw., Port, Coastal and Ocean Eng . , ASCE Vol. 100, pp. 169 ~ 188(1974).
 19. Madsen ,O.S. and S.M. White," Wave Transmission through Trapezoidal Breakwaters " , Proc. 15th Conf. on Coastal Eng. , ASCE, Honolulu, Hawaii, pp.2662 ~ 2676 (1976).
 20. Madsen, P.A., " Wave Reflection from a Vertical Permeable Wave Absorber", Coastal Eng. ,Vol.7,pp. 381 ~ 396 (1983).
 21. Morse, P.M. and K.U. Ingard, Theoretical Acoustics , Princeton Univ. Press, U.S.A. (1968).

22. Richey E.P. and C.K. Sollitt, "Wave Attenuation by Porous Walled Breakwater", J. Water. Har. and Coast. Eng. Div. ASCE Vol. 96 pp. 643 ~ 663 (1970).
23. Sollitt, C.K. and R.H. Cross, "Wave Transmission through Permeable Breakwaters", Proc. 13th Conf. on Coastal Eng. ASCE, Vancouver, Canada, pp.1827 ~ 1846 (1972).
24. Sulisz, W. , " Wave Reflection and Transmission at Permeable Breakwaters of Arbitrary Cross Section ", Coastal Eng. , Vol. 9 , pp. 371 ~ 386 (1985).
25. Taylor, G.I. , "Fluid Flow in Regions Bounded by Porous Surfaces". Proc. Roy. Soc. London, A 234 , pp.456 ~ 475 (1956).
26. Terrett, F.L., J.D.C. Osorio and G.H. Lean , "Model Studies of a Perforated Breakwater", Proc. 11th Conf. on Coastal Eng.,Ch. 70 : pp. 1104 ~ 1120 (1968).
27. Twu S.W. and D. T. Lin , "On a highly effective wave absorber " , Coast. Eng. ,Vol. 15 ,pp. 389 ~ 405 (1991).
28. Ursell F. ,R. G. Dean and Y.S. Yu , " Forced Small-Amplitude Water waves : A Comparison of Theory and Experiment" . J. Fluid Mech. Vol. 7 pp. 33-52 (1960).
29. Yeh, P. , Optical Waves in Layered Media , John Wiley & Sone, New York, U.S.A. (1988).
30. 李兆芳、藍元志 , 「波浪與透水結構物互相作用之二階解」 , 中華民國第十四屆海洋工程研討會論文集 , 第316 ~ 329頁(1992).
31. 涂盛文、郭仲仁 , 「有限厚度孔隙牆消除特性之研究」 , 中華民國第十二屆海洋工程研討會論文集 , 第544 ~ 558頁(1990).
32. 涂盛文、劉正棋 , 「利用有限厚度孔隙牆消除造波水槽之再反射」 , 中華民國第十四屆海洋工程研討會論文集 , 第299 ~ 315頁(1992).

33. 郭金棟、黃貴麟，「半圓形開孔堤體反射透射特之試驗研究」，中華民國第十二屆海洋工程研討會論文集，第502～523頁(1990).
34. 蘇青和、章梓雄、歐善惠，「多孔岸壁受斜向波浪作用之反射及波壓特性」，力學期刊，第八卷，第67～76頁(1992)。
35. 阿部宣行、鹿島遼一，「防波堤、護岸の構造型式調査」，日本電力中央研究所研究報告，調查報告 U88012, pp. 1～96 (1988).
36. 井島武士、佐々木富雄、湯村やす，「游水部なもつ直立消防波波護岸の研究」，九州大學工學部水工土木學教室海岸研究室, pp. 1～49 (1972).
37. 井島武士、奥圖英明、湯村やす、牛房幸光，「直立消防波波護岸における透過壁と遊水部の機能」，日本第23回海岸工程演講會論文集, pp. 85-88 (1976).
38. 井島武士、奥圖英明、牛房幸光，「直立消防波波護岸の構造と周波數特性について」，日本第24回海岸工程演講會論文集, pp. 255-259 (1977).

透水性結構物之波能消散及港池應用(二)
— 船體對多孔消波體之波能消散影響 —

編輯者：蘇 青 和
發行人：張 金 機
發行所：台灣省交通處港灣技術研究所
打字排版：港灣技術研究所數學模式組
台中縣梧棲鎮臨海路83號
04-6564415

中華民國83年出版

非賣品