

近岸海域波浪和近岸流數值推算及可視化研究(三)

主持人：蘇青和

港灣技術研究所數學模式組

研究員兼組長

協同主持人: 蔡丁貴

國立台灣大學土木工程研究所

教授

研究助理：陳明宗

港灣技術研究所數學模式組

副研究員

: 沈芳澄

國立台灣大學土木工程研究所

碩士班研究生

Computations and Visualigations of Wave and Nearshore Current in the Coast Zone (III)

Ching-Ho Su

Head

Mathematical Modelling Devision

Institute of Harbor & Marine Technology

Wuchi, Taichung District, Taiwan

Ting-Kwi Tsay

Professor

Department of Civil Engineering

National Taiwan University

Taipei, Taiwan

摘 要

結合橢圓型態及拋物線型態之緩坡方程式,本計畫首先建立一實用性近岸海域波場推算模式。計算區域分港外區及港內區兩個區域,外海區域可為不等水深,在解析拋物線型態之緩坡方程式,並引用貼壁座標系統及有限差分法,可由深海推算整個波場至與港內區之介面處;此方法優點為可取較大網格點數,減低電腦記憶體。港內區可為不等深、不規則形狀港池,以解析包括波浪折射、繞射、反射等效應之橢圓型態緩坡方程式,並引用有限元素法原理,此部分並考慮岸壁與海底邊界能量之消散效應。

其次本計畫考慮以潮汐及波浪為主要外力,在引用有限元素法,建立一套近岸地區潮流及近岸流數值模式。因考慮波浪與潮汐二者時間尺度之差異甚大,及時間變數處理不同,將潮汐與波浪造成之流場分別獨力處理。潮流模式在配合實際之地形及海象特性,為考量包括潮汐、風、科氏力、流體剪應力及底床摩擦力等外力之時間相關問題。沿岸流模式主要外力為包括幅射應力、底床摩擦力等,為與時間無關之模式。近岸流之波場為已知,可由前述之波場推算模式求得。

本研究除在模式本身物理領域上做探討外,針對數值模式之前置作業,如網格自動分割,結點最佳編號等數值技術,及數值計算之結果波流場達到可視化繪圖,及動態模擬也是研究重點,而此部分之技術將可轉移相關計畫之數值模式使用。

ABSTRACT

A new combinative method of parabolic-type equation and elliptic-type equation ,which are based on the mild-slope equation , is presented to describe wave field at nearshore zone. The domain is divided at the harbor entrance into twos : the outer ocean region and the region bounded by the limits of the harbor. The outer region can be computed wave propations near an irregular depth. With a boundary-fitted curvilinear coordinate system and finite difference method , the parabolic approximation is applied to the mild-slope equation . The wave field in outer region is computed from deep water into the entrance. Parabolic model can be used a lager grid point, only need less memory of computer. In the harbor region , the arbitray shape and variable water depth are included in the finite element model, which the field equation is of elliptic type. Wave refraction ,Diffraction anf reflection are included in the elliptic model, and the effect of bottom friction and absorbing boundaries are also examined.

The purpose of these project is to develop a finite element model to simulate tidal current and nearshore current , which reduced by wind and wave respectively. Because of the time scale is much diffenent between wave and tide , a tidal current model and a nearshore current model is develpoed respectively. Tidal current are computed on the basis of tide ,wind ,coriolis force , shear stress and bottom friction , these is a time dependent model. Nearshore current is a time independent model , which are computed on the basis of radiation stress and bottom friction . The wave field data , as input data in nearshore model ,is computed from wave model .

Not only the model will be studied, but also the pre-processor of the model, such as the auto-mesh, op- timal grid numbering visual plotting and visualization, is still the main topics. The pre-porcessor techniques can support the other numerical models in different projects.

近岸海域波浪和近岸流數值推算及可視化研究(三)

目 錄

摘要	i
英文摘要	ii
目錄	iii
壹、前言	1
貳、港池波場推算模式—Model WE21	7
參、近岸波場推算模式—Model WP21	23
肆、近岸潮流模式—Model CT31	36
伍、沿岸流模式—Model CL21	51
陸、實例說明	58
一、Model WE21 :實例說明	58
二、Model WP21 :實例說明	64
三、Model CT31 :實例說明	69
四、Model CL21 :實例說明	72
柒、討論及結論	75
參考文獻	77

壹、前 言

有關近岸海域之水波數值推算問題，在地形變化不劇烈，即地形緩慢變化之海域或港池，Berkhoff (1972) 提出緩坡方程式(mild-slope equation)，並引用有限元素法求解波浪之折繞射共同效應，在外海邊界上則以邊界元素法處理。Chen 及 Mei (1974)，Chen (1986) 發展一混合元素法(hybrid finite element method)，分別求解淺水波方程式及緩坡方程式。其作法為邊界內以一般有限元素法運算，而其港口外圍邊界則以解析解形式展開。Tsay 及 Liu (1983)、Tsay et al. (1989)、林及謝(1985)、林及許(1985)、歐等(1990)與蘇(1993)使用與 Chen 及 Mei (1974) 類似原理，以求解緩坡方程式。Chen (1986)、Tsay et al. (1989) 之數值模式則包括海底摩擦效應及岸壁部份反射邊界及碎波之能量消散效應。歐等(1990)及蘇(1993)之數值模式則考慮港池為多孔消波岸壁之透水性岸壁。

上述學者之波場推算模式，其理論在外海邊界無窮遠處應滿足 Sommerfeld 輻射邊界條件，即與港池或結構物作用產生之波浪，在無窮遠之外海處應僅有向外之消散進行波(out-going progressive wave)存在。而為滿足此項邊界條件，各種數值方法計算之海域，常分割為有限港池區及半無限外海區二個區域，而且外海區域必假設為等水深區(Chen 及 Mei (1974)、Tsay 及 Liu (1983)、歐等(1990))。若有海岸線存在之情形，則又必須滿足海岸線平直，且兩邊無限延伸之理想條件；但在沿岸地區，除非擴大數值計算區域，否則外圍鮮少為固定水深及海岸線平直等理想條件，因此實際計算非常不方便。

陳及蔡(1990)、蘇等(1991)在有限海域外圍設定局部型式之輻射條件，以取代原來標準型式之無窮遠處輻射條件，以避開外海區域必為等水深區之假設。陳及蔡(1990)探討兩種輻射條件應用於計算圓形島之折繞射造成之差異。他們發現在考慮地形及波長等因素，適當設置外圍邊界，局部輻射邊界也可得到相近結果。蘇等(1991)探討局部型式輻射條件及原來標準型式輻射條件，應用在港池共振計算之差異。他們解析一等水深矩形港池共振問題，同樣發現在離 $1/5$ 波長處，即近於滿足輻射條件。基本上滿足輻射條件位置應與相對波長、水深分佈、港池或結構物尺度大小等有關。而在較複雜不規則港池或地形，局部型式輻射條件於實際應用時得需再作進一步的探討。局部型式輻射條件之優點為可避免外圍等水深之不方便假設。

在等水深或水深變化不明顯之港池或海域，考慮線性規則波浪條件，波浪繞射現象可以引用荷姆茲方程式(Helmholtz equation)描述。邊界元素法將二維區域問題，利用低維之邊界元素求解，對複雜之港池或海岸線，處理甚為方便。Hwang及Tuck (1970)、Ho及Bomze (1975)、Lee (1969, 1971)、Lee及Raichlen (1971, 1972)、Chwang et al. (1990)、蘇等(1992)等引用邊界元素法(boundary element method)或稱積分方程法(integral equation method)，在利用Weber解，由荷姆茲方程式求得積分方程式，將邊界分割為有限個邊界元素，因而化積分方程式為一矩陣方程式以求得解。周宗仁等(1986, 1989, 1992a, 1992b)應用邊界元素法解析任意地形及水深之港池水面波動，並延伸至任意反射率防波堤或岸壁的港池水面振動問題，其引用之控制方程式，則為三維拉普拉氏方程式(Laplace equation)。

橢圓形態緩坡方程式，其微分方程屬封閉型態，在邊界必需給定適當的邊界值，才能求得解。以上所述之數值模式皆屬這類型問題，因此在有限海域外圍邊界上需給定適當的入射波條件，而為了滿足入射波由無限遠進入計算區之條件，計算外圍必需向外深海區延伸，但此卻造成區域之擴大、增大計算所需之電腦記憶體容量。而且在有限元素法模式中解析之變數為波場水位變化，為達到合理描述波場分佈變化，網格間之距離不宜太長，一般一個特徵波長內至少取7~10個計算點，如向深海擴大計算區時，網格點數量大增，相對計算機之記憶體增加量，甚為龐大，除非有較大型之電腦，否則一般電腦可能就無法執行。網格點間距離不宜太長之限制及外圍邊界無法內移之限制為有限元素法模式在實際應用之重缺點。其次在這樣龐大的區域，切割元素也是一項甚為費時費力之工作，而最後結點之最佳編號，以減少矩陣之帶寬，也是重要之工作。

本文將針對外圍計算區甚大之問題，提出一適當解決之方法，而針對模式元素切割，及結點最佳編號也提出一較佳之處理方法。

波浪從深海區進入近海淺水區，因地形或結構物之影響，波向及波高皆將改變，如何推算其能量分佈變化為一重要工作。早期計算近海波場之折射及淺化現象，一般引用波向線理論(wave ray theory)，波向線理論為假設波能延著波向線進行，波向線可能因地形變化改變，因此波向線間之距離可能改變，但能量為守恒，波向線間距減小，表示波高增大，但波向線理論上不能相交，因為相交點之距離為零，波高無限大為不合理，因此波向線理論無法包容波浪繞射現象

Booij(1981), Lozano and Liu(1980)及Radder(1979),等學者引用拋物線解析法(parabolic approximation)以解析包括析射及繞射現象之波場,在引用拋物線方程式(parabolic wave equation),改進波向線理論不能容納波向線相交之現象,其理論較完整的納入繞射效應, Liu(1986), Liu(1989), Liu et al (1980)等則納入海底摩擦,碎波和波流交互等效應,更完整的描述實際波場變化。

Liu and Tsay(1985), Tsay and Liu(1982), Tsay et al (1989)等則針對近岸地區之不規則地形及區域,引用曲線座標系統(curvilinear coordinate system),並以數值方法計算貼壁座標系統(boundary-fitted curvilinear coordinate),將不規則地區轉換為長方形網格系統。原有之拋物線方程式經座標轉換新座標再以差分原理,化為差分方程式。此種方法將可解決區域不規則形狀時之數值網格切割困擾。

拋物型態之波方程式,在微分方程屬拋物線型,因此一般引用有限差分法建立數值模式;而波場計算則由深海推算至近岸區。拋物線模式,其理論基本上無法納入波浪之反射效應,而與海岸線之夾角需為小入射角($20^{\circ} \sim 30^{\circ}$),也是一般之限制(Liu, 1989)。不過因為拋物線模式所解之波場變數為振幅及相位變化,因此網格點間距不必像有限元素法模式所要求之嚴格,將可減少甚多之電腦記憶體。

本文將引用拋物線模式由深海處推算近岸地區至港口外適當之處,再引用計算結果做為港內區有限元素法模式之入射波條件,以完整的解析整個近岸地區(包括港池)之波場。

影響近岸域之流場,主要外力有潮汐作用、波力、風力、流體剪應力、科氏力、地形邊界效應、底床摩擦力等項目,而流體密度變化、濃差效應,除某些特定地區造成較大影響,一般實際情形影響不大。潮汐可視為一種淺水長波,其引致之流場稱為潮流,潮流一般較為規則化,而颱風產生之暴潮及流況則較複雜。風剪力所引起之流場稱為風吹流,其影響之深度有限。另將波浪視為一外力,其引致之流場,稱為沿岸流,波場本身即為一複雜之現象,因此沿岸流之計算較為複雜。

海域潮汐水流計算方面文獻中, Hansen(1962), 首先應用顯式有限差分法

模擬二維暴潮水流現象。Leenderste(1967)依據 Hansen 理論,利用隱式、顯式交替方向差分法建立二維模式模擬河口及海岸附近之水流流況。另外, Dronker(1969)忽略非線性項之影響,以 Leenderste 方法模擬演算潮汐水流。之後, Leenderste 等(1973,1971),以空間交錯格網(space-staggered grid)建立多層水深平均之三維模式模擬潮汐水流,此方法亦廣為其他研究所採用。國內亦有系列之研究採用 Leendertse 及 Liu 之差分法建立二維或三維模式模擬海域流況,如 Tsai et al. (1987),蔡、宋(1990),蕭、蔡(1991)等學者。

Yih and Chen(1982),劉肖孔(1988)以及李賢文(1989)等人的論著,則探討有關台灣海峽的潮汐數值計算,這些文獻研究的主要重點在於整個台灣海峽大區域潮汐海流之水理分析,其結果與局部海域水理特性分析不同。

使用層化積分模式計算流在文獻中為數已然不少。Wang and Connor(1975)使用有限元素法發展出單層及雙層深度積分模式用來計算海岸地區流況。高等(1989)利用美國 ALDEN 公司發展出之單層深度積分模式模擬深澳灣海域流況。而相關之參考文獻可參考 Kawaharu、Hirano and Tsubota(1982)。使用單層水深積分模式模擬流場可得到滿意之結果,但是流場在水深方向之變化則無法獲得。

如以數值方法模擬大範圍三維流場,首先遭遇之問題在於所考慮區域之平面尺度遠大於水深,以致於數值計算格網足以代表欲模擬區域時,格網節點數往往過多,而數值計算所需電腦容量甚大,且電腦計算時間過久;導致數值模擬大範圍,以三維流場於實際上、經濟上不可行。解決此問題之方法之一即為採用層化積分模式,李、郭(1989)建立三維多層模式,層化積分模式可區分為單層水深積分模式及多層深度積分模式,此種模式之基本精神為利用深度積分平均量表現模擬之流場特性,進而配合層次上下交界面之界條件化簡原有三維之數值計算為二維之計算但仍保有三維問題之特性。

至於使用多層深度積分模式模擬流場,其使用之數值方法有有限差分法及有限元素法。使用有限差分法的可以 Leendertse、Alexander and Liu(1973)為代表。Leendertse and Liu(1977)加考慮紊流能量於模式中使數值模擬結果更能代表實際之流況。使用有限元素法的較早可以 Kawahara、Kobayashi and Nakata(1982)為代表。其層化積分模式均採用壓力為靜水壓力之假設配合層次積分觀念使三維數值計算簡化為各層次之二維流場計算。李、郭(1989)利用

有限元素法為基礎,建立一個以模擬三維流場之多層深度積分模式,利用層次深度積分觀念推導多層深度積分方程式;利用有限元素法推導各層次積分有限元素方程式;對時間之數值積分方法,則用已知解析之計算例,以驗證所發展出來模式之正確性。

Chu and Yeh(1984)建立港灣水理模式(Harbour Hydrodynamic Model,簡稱HHM)也是依照Leenertse(1973)之空間離散方法以顯性之正規蛙躍法(leap frog)所建立之多維水理數值模式。HHM模式曾應用於美國的漢堡灣(Humboldt Bay)Chu et al.(1986),中東的阿拉伯灣(Arabian Gulf)Chu et al.(1988),及美國的普及灣(Puget Sound)Chu et al.(1989),對於複雜幾何條件之適用性及水理現象之模擬均獲致不錯的結果。

海流模式可用來計海域、港灣、河口及湖泊之三維(三度空間變化)或二維(深度平均)的水理變化。所謂流況變化即指水體內之水流速度和水位變化。至於三維或二維的選擇,三維模式適用於深水或深度變化較大的港灣與海域。但三維模式之應用需要龐大的計算容量和較長的計算時間,而且需要較多的邊界條件、參數值和水位、水流速的觀測值資料。

關於近岸流場(nearshore current)方面,Longuet-Higgins and Stewart(1964)提出輻射應力(radiation stress)之觀念,應用於解析波浪波一流和波一波交互作用,進而合理的說明波浪溯升(set up),下降(set down),沿岸流(longshore current),裂流(rip current)及近岸流系統等現象。

近岸流場因地形變化複雜及海岸結構物配置不規則,理論計算不易,除較規則地形變化或配置簡單之結構物,可求得較簡易之流場經驗公式外,一般常引用有限差分法或有限元素法等數值方法推算流場。

Longuet-Higgins(1970), Tronton(1970)計算因波浪斜向所產生之沿岸流流速剖面, Horikawa and Sasaki (1968,1972), Sasaki (1974,1975) Sakaki and Horikawa (1978),也配合實驗之驗證及現場觀測求得沿岸流及裂流流速剖面分佈之經驗公式。Stive and Battjes(1986), Goda and Watanabe(1991),則探討不規則波產生之沿岸流特性。

Nada(1974), Ebersole and Dalrymple(1980), Nishimura(1982),磨(1987)及孫(1991)等引用輻射應力之觀念,使用有限差分法解析近岸流之流場,其底部摩

擦項(摩擦係數)則引用不同之經驗公式表示。Liu and Lennou(1978),林、蔡(1982)等學者則引用有限元素法解析近岸流場。

解析近岸流場前必需先推算波浪場,再利用推算之波浪場結果,才能進一步計算流場,因此波場與流場之數值計算結果間建立橋樑為一個重要的原則。流場部分,我們擬引用有限元素法做為處理本研究之數值方法。

在執行模擬海洋現場之有限元素法數值模式運作時,大區域之網格自動分割及結點最佳編號,為一個甚為重要的過程,元素分割不佳,結點編號未做合理的考慮,將造成前置作業時間延長,電腦記憶體浪費,甚至無法執行,並且影響計算結果之精確性。市面上之有限元素法套裝軟體雖然具有元素分割及結點編號之功能,但因價格昂貴,且並不完全適合我們的需求,本計畫擬參照分割原理,自行開發是一個較實務的途徑。

波場或流場計算結果之繪圖,一般軟體可繪製等波高係數曲線圖或向量圖,為提昇繪圖水準,我們擬引用可視化繪圖軟體,並配合本所工作站動態模擬軟體,使數值計算之波流場能達到可視化及動態模擬之水準。

貳、港池波場推算模式—Model WE21

一、緩坡方程式及邊界條件

考慮包括任意不規則形狀港池及緩變地形變化之近岸海域，如圖 2-1-1 平面示意圖， x 軸置於海岸線上，原點為海岸線上適當點，正 y 軸向外海方向。有限港池區（包括港內區與港口處半徑 R_a 之半圓區）稱區域 II，水深 $h_2(x, y)$ 為緩慢變化之不等水深區；港外區（稱區域 I）為外海無限範圍，為等水深區（水深 h_1 ），區域 I 與區域 II 之相連邊界為半徑 R_a 之半圓（理論上不一定為半圓），以 ∂A 表示。假設滿足不可壓縮、無黏性及非旋流之條件因此存在流速勢（velocity potential） $\Phi_j(x, y, z, t)$, $j = 1, 2$ 分別滿足三維拉普拉氏方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.1.1)$$

Φ_1, Φ_2 分別表示在區域 I 及區域 II 之流速勢。假設入射波 ζ_0 波向線與正 x 軸成 θ_0 角度（如圖 2-1-1），其複數表示式為：

$$\zeta_0(x, y, t) = a_0 e^{-i[k_0(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0) - i\sigma t]} \quad (2.1.2a)$$

或

$$\zeta_0(r, \theta, t) = a_0 e^{-i[k_0 r \cos(\theta - \theta_0) - i\sigma t]} \quad (2.1.2b)$$

式中 a_0 為波浪振幅 (wave amplitude), $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, i = \sqrt{-1}$

k_0 為週波數 (radian wave number), $k_0 = 2\pi/L_0$, L_0 為波長 (wave length)

σ 為週頻率 (radian frequency), $\sigma = 2\pi/T$, T 為波浪週期 (wave period)

區域 I 及區域 II 之流速勢 Φ_1 及 Φ_2 皆分別滿足線性自由表面動力邊界條件及運動邊界條件，即

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, \quad z = 0 \quad (2.1.3a)$$

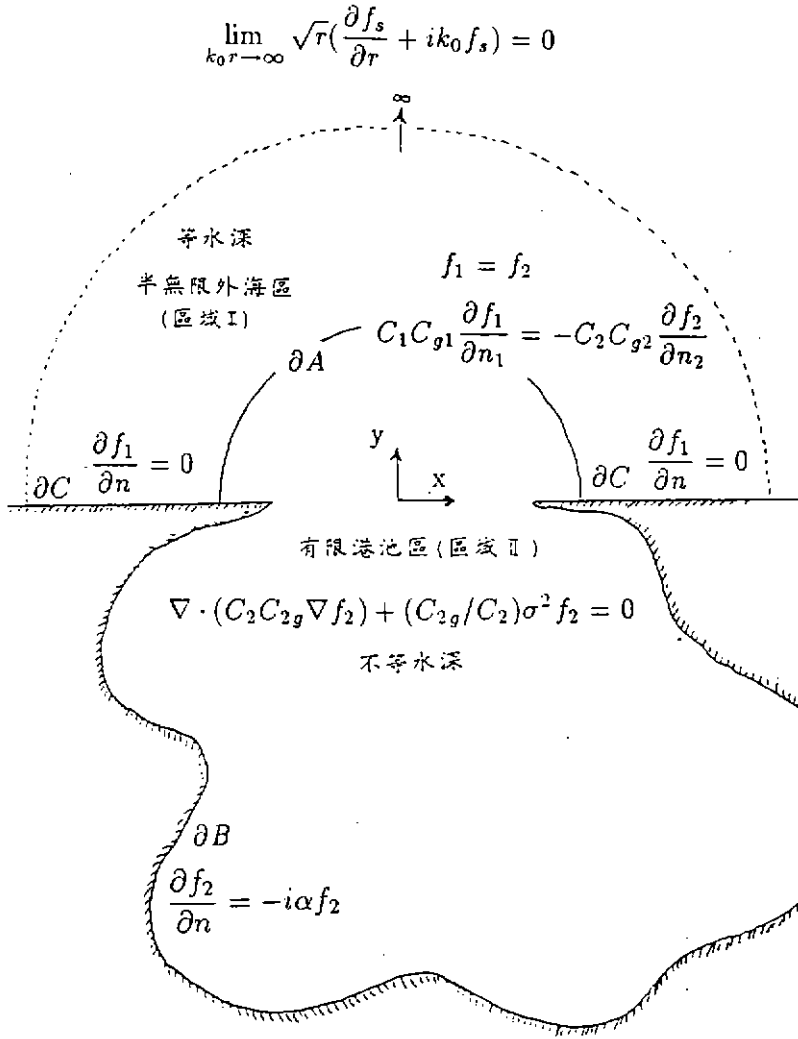


圖2-1-1 有限元素法計算區域示意圖

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + g \zeta_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad z = 0 \quad (2.1.3b)$$

式中 $\zeta_1(x, y, t)$, $\zeta_2(x, y, t)$ 分別表示在區域 I 及區域 II 之水位變化， g 為重力加速度。

上二式可合併為

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, \quad z = 0 \quad (2.1.3c)$$

基於入射波條件及線性理論,我們可假設水位變化 ζ_j 為週期性函數,可表示為

$$\zeta_j(x, y, t) = f_j(x, y)e^{i\sigma t}, \quad j = 1, 2 \quad (2.1.4)$$

式中 f_1, f_2 分別稱為區域I及區域II之波函數(wave function)。

在外海區(區域I)為等水深區,假設海底不透水,則滿足

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = -h_1 \quad (2.1.5)$$

在有限港池區(區域II)為不等深區,同理假設海底不透水,則滿足

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0, \quad z = -h_2(x, y) \quad (2.1.6)$$

在外海區(區域I),根據控制方程式(2.1.1),入射波條件(2.1.2)式,邊界條件(2.1.5)式及水位變化週期性條件(2.1.4)式,則流速勢 $\Phi_1(x, y, z, t)$ 可表示為:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A_0 \cosh[k_0(h_1 + z)]f_1(x, y)e^{i\sigma t} \quad (2.1.7)$$

其中常數 A_0 定義為

$$A_0 = \frac{ig}{\sigma \cosh(k_0 h_1)} \quad (2.1.8)$$

式中波函數 $f_1(x, y)$ 滿足下列荷姆茲方程式(Helmholtz equation)

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k_0^2 f_1 = 0 \quad (2.1.9)$$

且波數 k_0 滿足分散關係式(dispersion relation)

$$\sigma^2 = g k_0 \tanh(k_0 h_1) \quad (2.1.10)$$

在外海區(區域I)之波速為 $C_1 = L_0/T$, 群波速(group velocity)為 $C_{1g} = \kappa_1 C_1$

式中 κ_1 定義為

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_0 h_1}{\sinh 2k_0 h_1} \right] \quad (2.1.11)$$

在有限港池區(區域II), 假設深度為緩慢變化, 流速勢 $\Phi_2(x, y, z, t)$ 表示為:

$$\Phi_2(x, y, z, t) = A_0 \phi_2(x, y, z) e^{i\sigma t} \quad (2.1.12)$$

式中 ϕ_2 為波函數。

我們引用 Booij(1981) 修正 Berkhoff(1972) 提出之一階修正緩坡方程式(modified mild slope equation) :

$$\nabla \cdot (C_2 C_{2g} \nabla f_2) + (C_{2g}/C_2 + i\sigma E_0) \sigma^2 f_2 = 0 \quad (2.1.13a)$$

式中 $f_2(x, y) \cosh[k(h_2 + z)]$ 為波函數 $\phi_2(x, y, z)$ 之一階項, $f_2(x, y)$ 為二維波函數, E_0 為每單位波能密度之能量消散。 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 二維梯度運算子, $C_2 = L_2/T$ 為波速, $k_2 = 2\pi/L_2$ 為波數, $C_{2g} = \kappa_2 C_2$ 為群波速(group velocity), κ_2 定義為

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_2 h_2}{\sinh 2k_2 h_2} \right] \quad (2.1.13b)$$

在淺水波(shallow water wave), $k_2 h_2 \ll 1$, $C_2 = \sqrt{g h_2}$, $C_{2g} = C_2$, 則方程式(2.1.13)可簡化為

$$\nabla \cdot (h_2 \nabla f_2) + (\sigma^2/g + i\sigma E_0/g) f_2 = 0 \quad (2.1.14)$$

在深水波(deep water wave), $k_2 h_2 \gg 1$, $C_2 = g/\sigma$, $C_{2g} = 0.5 C_2$, 則方程式(2.1.13)可簡化為修正荷姆茲方程式

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + (k_2^2 + \frac{i\sigma E_0}{gh_2})f_2 = 0 \quad (2.1.15)$$

荷姆茲方程式(2.1.9)及修正緩坡方程式(2.1.13)分別為港外區及有限港池區之主要控制方程式。

假設外海岸線為平直向兩測無限延伸,其岸壁為直立不可穿透,以 ∂C 表示,則 f_1 在海岸線垂直分量滿足

$$\frac{\partial f_1}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial C \quad (2.1.16)$$

外海地區之波函數 f_1 ,除包括入射波 f_0 ,及受平直海岸線反射之反射波 f_r (假設港口為封閉),還包括港內由港口向外散射之散射波 f_s ,表示為

$$f_1 = f_0 + f_r + f_s \quad (2.1.17)$$

其中散射波在無窮遠處,滿足輻射條件(Sommerfeld radiation condition)

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial f_s}{\partial r} + ik_0 f_s \right) = 0 \quad (2.1.18)$$

假設港池以多孔消波體設計為內壁,則其邊界上(以 ∂B 表示)應滿足多孔邊界條件

$$\frac{\partial f_2}{\partial n} = -i\alpha f_2 \quad \text{on } \partial B \quad (2.1.19)$$

式中 α 為阻尼係數(impedance coefficient)。

在區域 I 及區域 II 之界面處 ∂A ,應分別滿足波函數及波函數之法線方向導數連續條件:

$$f_1 = f_2 \quad \text{on } \partial A \quad (2.1.20a)$$

$$C_1 C_{g1} \frac{\partial f_1}{\partial n_1} = -C_2 C_{g2} \frac{\partial f_2}{\partial n_2} \quad \text{on } \partial A \quad (2.1.20b)$$

式中 $\vec{n}_1$ 及 $\vec{n}_2$ 分別表示區域 I 及區域 II 在界面向外法線方向之單位向量, $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ 。

二、有限元素法模式

本節將使用混合元素法(hybrid finite element method) (Chen 及 Mei, 1974), (Tsay 及 Liu, 1983)以求解上述橢圓型態緩坡方程式之邊界值問題。在有限港池區域 II 為有限範圍,切割為有限個三角形元素,以求解元素結點上之未知波函數,圖 2-2-1 為一 10 度開口圓形港池之元素切割及編號例子。外海區域 I 為

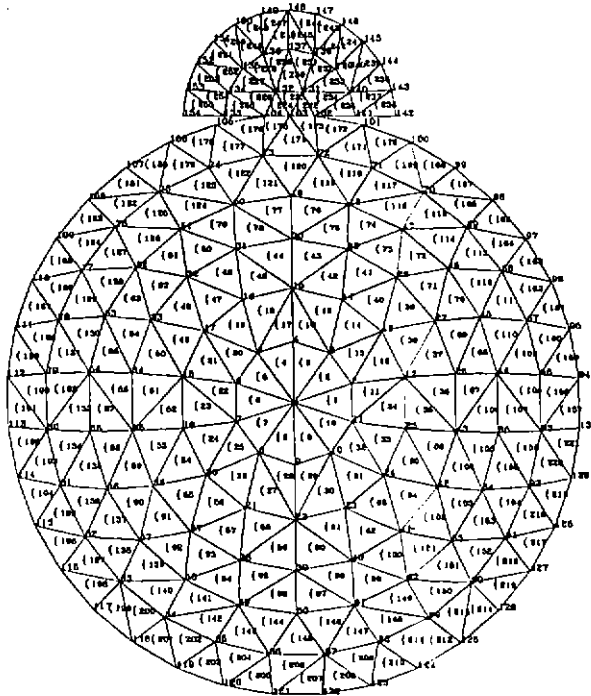


圖 2-2-1 10 度開口圓形港池三角形元素分割示意圖

無限範圍,我們則應用特徵函數(eigenfunctions)表示法(Tsay 及 Liu, 1983),將波函數 f_1 之各成份波 f_0 、 f_r 、 f_s 分別表示如下:

$$\begin{aligned} f_0(x, y) = f_0(r, \theta) &= A_0 e^{-ik_0 r \cos(\theta - \theta_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n^{(1)}(k_0 r) \cos[n(\theta - \theta_0)] \end{aligned} \quad (2.2.1a)$$

$$\begin{aligned} f_r(x, y) = f_r(r, \theta) &= A e^{-ik_0 r \cos(\theta + \theta_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n^{(1)}(k_0 r) \cos[n(\theta + \theta_0)] \end{aligned} \quad (2.2.1b)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n^{(1)}(k_0 r) \cos[n(\theta + \theta_0)] \quad (2.2.1b)$$

$$f_s(x, y) = f_s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n H_n^{(1)}(k_0 r) \cos(n\theta) \quad (2.2.1c)$$

式中常數 A 定義如式(2.1.8), $J_n^{(1)}(k_0 r)$ 為第一類 n 階貝索函數 (first kind the n-th order Bessel function), $H_n^{(1)}(k_0 r)$ 為第一類第 n 階漢克函數 (first kind the n-th order Hankel function)。 μ_n 為未知係數。係數 ϵ_n 定義為

$$\epsilon_n = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.2.1d)$$

入射波 f_0 表示式(2.2.1a)滿足入射波(2.1.2)之條件, 反射波 f_r 表示式(2.2.1b)滿足平直海岸線不透水邊界條件, 散射波 f_s 表示式(2.2.1c)滿足散射波邊界條件(2.1.18)式。上述無窮級式收斂甚快, 實際計算可取有限項。

根據變分法 (calculus of variation) 之極小化原理, 上述控制方程式, 邊界條件及區域分割原理 (包括邊界連續條件), 可得下列定態泛函數 (stationary functional) J_0^s :

$$\begin{aligned} J_0^s(f_2, f_s) = & \int \int_B \frac{1}{2} [C_2 C_{2g} (\nabla f_2)^2 - (C_{2g}/C_2 + i\sigma E_0) f_2^2] dA \\ & + \int_{\partial A} \frac{1}{2} C_2 C_{2g} f_s \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ & + \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ & - \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_0}{\partial n_2} d\ell \\ & + \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_0 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ & - \int_{\partial B} \frac{i}{2} \alpha C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

利用有限元素法原理, 將港池區域 II 之值域分割為 N 個三角形元素, 每個元素之邊長以不超過 1/10 波長為原則, 並用一組線性形狀函數 (shape function) $\Psi_i^e, i=1, 2, 3$ 表示元素 e 之波函數 f_2^e , 波速 C_2^e 及群波速 C_{2g}^e 如下:

$$f_2^e = \sum_{i=1}^3 \Psi_i^e f_{2i}^e, \quad e = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.2.3a)$$

$$C_2^e = \sum_{i=1}^3 \Psi_i^e C_{2i}^e, \quad e = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.2.3b)$$

$$C_{2g}^e = \sum_{i=1}^3 \Psi_i^e C_{2gi}^e, \quad e = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.2.3c)$$

式中 C_{2i}^e 及 C_{2gi}^e 為元素 e , 結點 i 之已知波速及群波速值, f_{2i}^e 為元素 e , 結點 i 之未知波函數 f_2 值。將區域 I 波函數 f_0, f_r 及 f_s 之表示式(2.2.1)及區域 II 之每一局部元素波函數 f_2^e , 波速 C_2^e 及群波速 C_{2g}^e 值表示式(2.2.3), 代入泛函數(2.2.2)式, 整理可得下列全區域之矩陣方程式

$$\begin{aligned} J_0^s(f_2, \mu) = & \frac{1}{2} \{f_2\}_{1 \times N}^t [K_1]_{N \times N} \{f_2\}_{N \times 1} \\ & + \frac{1}{2} \{\mu\}_{1 \times q}^t [K_2]_{q \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \\ & + \{f_2^*\}_{1 \times p}^t [K_3]_{p \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \\ & + \{K_4\}_{1 \times p}^t \{f_2^*\}_{p \times 1} \\ & + \{K_5\}_{1 \times q}^t \{f_2^*\}_{p \times 1} \\ & + \frac{1}{2} \{f_2^\#\}_{1 \times M}^t [K_6]_{M \times M} \{f_2^\#\}_{M \times 1} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

式中第一項已知勁度矩陣 $[K_1]$ 及未知波函數向量 $\{f_2\}$, 由有限港池區(區域 II)所有三角元素之區域性矩陣 $[K_1^e]$ 及向量 $\{f_2^e\}$, $e=1, 2, \dots, N$ 所組成

$$\begin{aligned} I_1^e = & \frac{1}{2} \int \int_{B^e} [C_2^e C_{2g}^e (\nabla f_2^e)^2 - (C_{2g}^e / C_2^e) f_2^e] dA \\ = & \frac{1}{2} \{f_2^e\}_{1 \times 3}^t [K_1^e]_{3 \times 3} \{f_2^e\}_{3 \times 1}, \quad e = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

式中 $\{f_2^e\}^t$ 為 $\{f_2^e\}$ 之轉置(transposal matrix)矩陣, 而矩陣 $[K_1^e]$ 之元素定義為

$$[K_1^e]_{ms} = \frac{1}{4\Delta^e} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{12 - \delta_{ij}} \cdot C_{2i}^e C_{2gj}^e (b_m b_s + c_m c_s)$$

$$-\frac{\sigma^2 \Delta^e}{60} \sum_{k=1}^3 d_{2k}(2 + 4\delta_{ms}\delta_{mk}\delta_{sk} + \delta_{mk} + \delta_{sk}), \quad m, s = 1, 2, 3 \quad (2.2.6)$$

其中 Δ^e 為元素 e 之面積

δ_{ij} 為克朗乃克函數 (Kronecker delta function), δ_{ij} 定義為

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$d_{2i} = C_{2gi}/C_{2i} + i\sigma E_{0i}, i = 1, 2, 3$$

$a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$ 為 e 元素線性形狀函數 ψ_i^e 之係數, 其定義為

$$\psi_i^e(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta^e, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.7)$$

若 (x_i, y_i) 為元素 e 之第 i 結點, $i=1, 2, 3$, 或以 i, j, k 表示逆時鐘方向之三結點則

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.8a)$$

$$b_i = y_j - y_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.8b)$$

$$c_i = x_k - x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.8c)$$

式中第二項已知勁度矩陣 $[K_2]$ 及未知散射波函數向量 $\{\mu\}$, 由下式定義

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\partial A} \frac{1}{2} C_2 C_{2g} f_s \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell \\ &= \frac{1}{2} \{\mu\}_{1 \times q}^t [K_2]_{q \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

其中 q 為散射波漢克函數展開之項數, R_a 為界面 ∂A 半圓之半徑, H_j' 則為 $H_j^{(1)}$ 之微分函數, $j=0, 1, 2, \dots, q-1$ 。

矩陣 $[K_2]$ 之元素定義為

$$[K_2]_{ms} = \pi R_a k_0 C_2 C_{2g} 0.5 H'_{m-1} H_{m-1}^{(1)} \epsilon_m \delta_{ms}, \quad m, s = 1, 2 \dots q \quad (2.2.10)$$

式中第三項已知勁度短矩 $[K_3]$ 及邊界 ∂A 上未知波函數向量 $\{f_2^*\}$ 則由下列表示式定義

$$\begin{aligned} I_3 &= + \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} dl \\ &= \{f_2^*\}_{1 \times p}^t [K_3]_{p \times q} \{\mu\}_{q \times 1} \end{aligned} \quad (2.2.11a)$$

矩陣 $[K_3]$ 之元素定義為

$$\begin{aligned} [K_3]_{ms} &= -k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_s [\cos(s-1)\theta'_{m-1} + \cos(s-1)\theta'_m], \quad 2 \leq m \leq p-1, 2 \leq s \leq q \\ &= -k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_0, \quad 2 \leq m \leq p-1, \quad s=1 \\ &= -0.5k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_s \cos(s-1)\theta'_1, \quad m=1 \quad 2 \leq s \leq q \\ &= -0.5k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_s \cos(s-1)\theta'_{p-1}, \quad m=p \quad 2 \leq s \leq q \\ &= -0.5k_0 L_a C_2 C_{2g} H'_0, \quad m=1, p \quad s=1 \end{aligned} \quad (2.2.11b)$$

其中

$L_a = \frac{\pi R_a}{p-1}$, 為界面 ∂A 半圓上每個線段之長, $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{p-1}$ 為界面 ∂A 半圓上 $p-1$ 個線段至原點與 x 軸之角度。

式中第四項已知向量 $\{K_4\}$ 則由下列表示式定義:

$$\begin{aligned} I_4 &= - \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_2 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} dl \\ &= \{K_4\}_{1 \times p}^t \{f_2^*\}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (2.2.12a)$$

向量 $\{K_4\}$ 之元素定義為

$$\begin{aligned} \{K_4\}_m &= -0.5k_0 L_a C_2 C_{2g} (u_{m-1} + u_m), \quad 2 \leq m \leq p-1 \\ &= u_1, \quad m=1 \\ &= u_{p-1}, \quad m=p \end{aligned} \quad (2.2.13a)$$

$$u_m = i \cos(\theta_m - \theta_0) e^{ik_0 R_a \cos(\theta_m - \theta_0)} + i \cos(\theta_m + \theta_0) e^{ik_0 R_a \cos(\theta_m + \theta_0)}$$

$$m = 1, 2, 3 \dots p-1 \quad (2.2.13b)$$

式中第五項已知向量 $\{K_5\}$ 則由下列表示式定義：

$$I_5 = \int_{\partial A} C_2 C_{2g} f_0 \frac{\partial f_s}{\partial n_2} d\ell$$

$$= \{K_5\}_{1 \times q}^t \{\mu\}_{q \times 1} \quad (2.2.14a)$$

向量 $\{K_5\}$ 之元素定義為

$$\{K_5\}_m = 2\pi k_0 R_a C_2 C_{2g} i^{m-1} J_{m-1} H'_{m-1} \cos[(m-1)\theta_0], \quad 2 \leq m \leq p$$

$$= 2\pi k_0 R_a C_2 C_{2g} J_0 H'_0, \quad m = 1 \quad (2.2.14b)$$

$$J_m = J_m^{(1)}(k_0 R_a), \quad m = 1, 2, 3 \dots p-1 \quad (2.2.14c)$$

式中最後項已知勁度矩陣 $[K_6]$ 及邊界 ∂B 上未知波函數向量 $\{f_2^\#\}$ ，則由邊界 ∂B 上之 M 個線性元素 $e=1, 2, 3 \dots M$ 區域性矩陣 $[K_6^e]$ 及 $\{f_2^{\#e}\}$ 所組成：

$$I_6^e = - \int_{\partial B^e} \frac{i}{2} \alpha C_2 C_{2g} f_2^2 d\ell$$

$$= \frac{1}{2} \{f_2^{\#e}\}_{1 \times 2}^t [K_6^e]_{2 \times 2} \{f_2^{\#e}\}_{2 \times 1}, \quad e = 1, 2 \dots M \quad (2.2.15)$$

矩陣 $[K_6^e]$ 之元素定義為

$$[K_6^e]_{11} = i\alpha L_b^e \left(\frac{1}{5} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{30} C_{22}^e C_{2g2}^e \right)$$

$$[K_6^e]_{22} = i\alpha L_b^e \left(\frac{1}{30} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{5} C_{22}^e C_{2g2}^e \right)$$

$$[K_6^e]_{12} = i\alpha L_b^e \left(\frac{1}{20} C_{21}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{30} C_{21}^e C_{2g2}^e + \frac{1}{30} C_{22}^e C_{2g1}^e + \frac{1}{20} C_{22}^e C_{2g2}^e \right)$$

$$[K_6^e]_{21} = [K_6^e]_{12}, \quad e = 1, 2, 3 \dots M \quad (2.2.16)$$

其中 L_b^e 為線性元素 $e=1, 2 \dots M$ 之長度。

C_{2i} 及 C_{2gi} , $i = 1, 2$ 分別為線性元素 e 兩端結點之值,而線性元素 e 之形狀函數 ψ_i^e , $i = 1, 2$ 定義為

$$\psi_1(x) = 1 - x/L_b, \quad 0 \leq x \leq L_b \quad (2.2.17a)$$

$$\psi_2(x) = x/L_b, \quad 0 \leq x \leq L_b \quad (2.2.17b)$$

最後為簡化矩陣方程式我們將未知向量 $\{f_2\}_{1 \times N}^t$ 與 $\{\mu\}_{1 \times q}^t$ 合併為 $\{x\}_{1 \times n}^t$:

$$\{x\}_{1 \times n}^t = [\{f_2\}_{1 \times N}^t \{ \mu \}_{1 \times q}^t] \quad (2.2.18)$$

其中 $n=N+q$ 。

將已知勁度矩陣 $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ 及 $[K_6]$ 依結點位置合併為大勁度矩陣 $[K]$ 示意如下

$$[K]_{n \times n} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ K_1(K_6) & & & K_3 \\ & 0 & K_3 & K_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

最後將已知向量 $\{K_4\}^t$ 及 $\{K_5\}^t$ 合併為向量 $\{b\}^t$

$$\{b\}_{1 \times n}^t = [\{0\}_{1 \times (N-p)}^t \{K_4\}_{1 \times p}^t \{K_5\}_{1 \times q}^t] \quad (2.2.20)$$

因此矩陣方程式(2.2.4)可簡化為

$$J_0^s(x) = \frac{1}{2} \{x\}_{1 \times n}^t [K]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} + \{b\}_{1 \times n}^t \{x\}_{n \times 1} + constant \quad (2.2.21)$$

而定態泛函數 J_0^s 極小化產生於:

$$\frac{\partial J_0^s}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (2.2.22)$$

式中 x_i , $i = 1, 2, 3 \dots n$ 為向量 $\{x\}$ 之第 i 個元素。

將(2.2.21)代入(2.2.22)可得

$$[K]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} = \{b\}_{n \times 1} \quad (2.2.23)$$

這是一個包括 n 個未知數 x_i , n 個方程式之矩陣方程式, 可由高斯消去法 (Gaussian elimination) 求解。

港池擴大率 R 我們定義為港內任意點 $\vec{x}$ 之振幅對港口外之入射波與反射波和之振幅 (假設港口為封閉) 的比值, 表示如下:

$$R(\vec{x}) = \left| \frac{f_2(\vec{x})}{f_0(\vec{x}_0) + f_r(\vec{x}_0)} \right| \quad (2.2.24)$$

式中 $\vec{x}$ 港內任一點, $\vec{x}_0$ 為港口外任一點。

三、網格自動分割及結點最佳編號

一般近海地區甚為不規則, 又包括港池之區域則甚為廣大, 基於三角元素之邊長不能太大 (一般取拾分之一特性波長), 在實際波場計算時, 元素及結點經常超過數萬個以上, 產生如此龐大之結點, 為甚大之工程, 如以人工為之, 則需花費甚大量之人力及時間, 而且因人為錯誤甚容易發生, 元素數據再詳細偵測又需要花費更多的時間, 不甚經濟。因此如何提高網格分割技術, 成為模式計算過程, 甚為重要的工作, 而利用程式自動元素產生則是必要的一個手段。本文取用 Segerlind(1920) 之三角元素分割原理, 以快速產生整個區域三角元素之編號、座標等數據, 其原理此處不再引述, 僅將其步驟及要點簡述如下:

1. 將計算區域依形狀適當的分割為數個四邊形 (或三角形), 其中三角形視為四邊形之一種特例。
2. 每個四邊形有四個頂點 (若為三角形時, 在三邊之一再取適當一點做第四結點), 在四個邊上取一點 (一般可取中點), 即總共需選取四邊形邊上 8 個結點。

3. 每個四邊形之兩雙對邊長度最好不要相差太大,以平行四邊形最佳(此可保證切割後元素大小不致相差太多),若為三角形則在適當之一邊,分割為二個邊,仍為四個邊。
4. 指定每個四邊形(三角形)兩雙對邊應分割之點數,點數愈多,分割之元素愈小。
5. 指定四邊形與四邊形間之交界面關係。

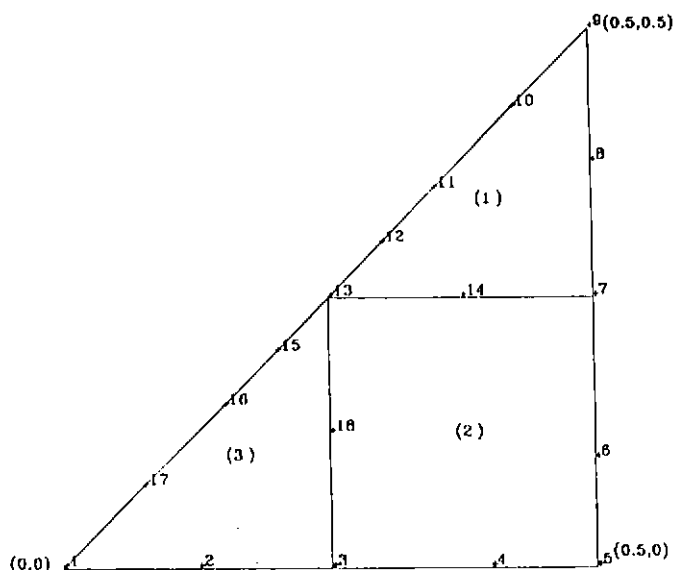


圖 2-3-1 等腰直角三角形分割四邊形區域示意圖

經上述之設定即可執行自動元素分割,今以一等腰直角三角形(腰長0.5,如圖 2-2-2)為例,說明其分割過程如下:

1. 將三角形分割3個區域(如附圖 2-3-1)每個區域各取8個結點(邊界上結點一般取中點,如特殊需求將可移動以增加某些區域之元素密度),總計18個結點,其座標如下:

(0, 0) (0.125, 0) (0.25, 0) (0.4, 0) (0.5, 0) (0.5, 0.1) (0.5, 0.25) (0.5, 0.375)
 (0.5, 0.5) (0.425, 0.425) (0.35, 0.35) (0.3, 0.3) (0.25, 0.25) (0.375, 0.25) (0.2, 0.2)
 (0.15, 0.15) (0.075, 0.75) (0.25, 0.125)。

三個區域之結點編號依順時鐘方向分別有8個結點為

- (1) 13, 14, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- (2) 3, 4, 5, 6, 7, 14, 13, 18
- (3) 1, 2, 3, 18, 13, 15, 16, 17

[註] 三個結點對(13,7), (3,5), (1,3)連接之線段分別為1,2,3三個區域之第一個邊,依此類推,每個區域有四個邊。

2. 決定分割元素之大小,將每個區域之兩雙對邊分別分割為

- (1) 4×2 個線段, (2) 4×4 個線段, (3) 2×4 個線段

3. 輸入區域與區域界面之關係,每個區域之四個邊界與相鄰區域邊界之關係如下(0代表該邊不與任何區域相鄰):

- (1) 2, 0, 0, 0 (2) 2, 0, 1, 3 (3) 0, 2, 0, 0

分割結果如圖2-3-2,計64個元素,45個結點,帶寬(即所有元素中三個結點編號差之最大值加1)為28(在第52元素)。

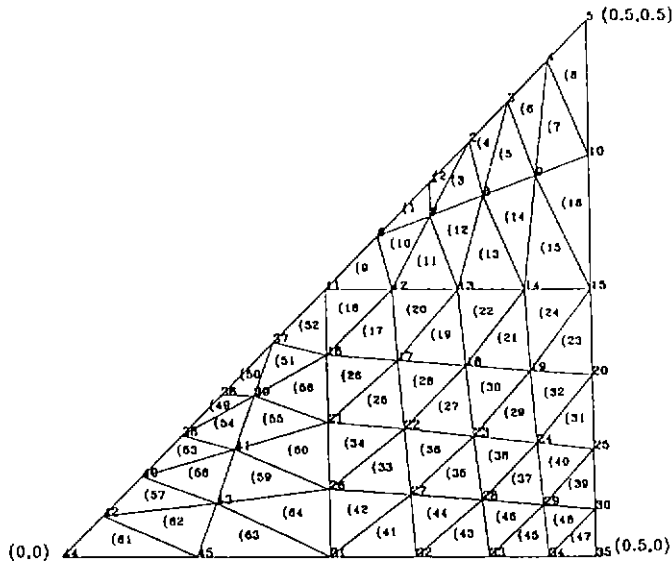


圖2-3-2 等腰直角三角形區域三角元素分割示意圖

式(2.2.19)中矩陣[K]之主頻帶寬,定義為最外圍非零值至主對角線之距離,頻帶寬將決定矩陣方程式(2.2.23),以高斯消去法求解時之電腦記憶體容量。頻帶寬度主要由下列二個數之最大值決定(1)元素結點差最大值加1 (2)界面邊界 ∂A 上任意兩結點編號差最大值加1。

基於以上二個因素決定矩陣[K]頻帶寬,頻帶寬度之極小化甚為重要,而目前現有的一般理論此處並不適合,但本文將不詳細探討頻帶寬度之極小化理論,僅提出一簡單原理,將處理帶寬最佳化之過程說明如后:

- (1) 取一主軸貫穿計算區,其方向以沿著較長之區域為佳,例如長方形之區域,則取平行長邊為主軸。
- (2) 以主軸平行長邊設定一長方形,並涵蓋整個計算區,如以主軸上為正,則有底邊,左邊,右邊,上邊等四邊包圍整個計算區。
- (3) 由左向右依序將介面 ∂A 邊界上之M個結點重新編號: 1,2, ...M。
- (4) 由最上邊介面 ∂A 邊界延主軸向下移動,由右向左,或由左向右依序重新編號,以至底邊為止。以此方法求得之結點編號,將可大量減少原自動元素分割之帶寬。

參、近岸波場推算模式—Model WP21

一、拋物線方程式及貼壁曲線座標

考慮近岸海域(如示意圖3-1-1),海岸線可為不規則形狀,海域水深 $h(x,y)$ 為緩慢變化(mild slope),我們將探討波浪從外海進入近岸海域時之波場變化。

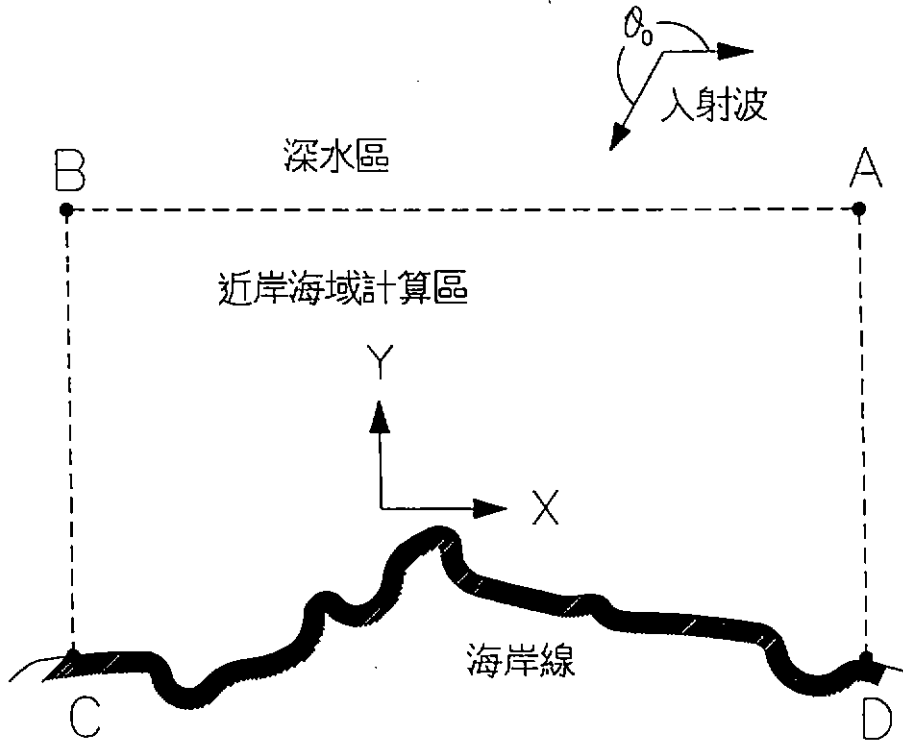


圖3-1-1 近岸海域示意圖

根據 Tsay and Liu's(1982)之建議,在近岸緩變地形之區域水深 $h(x,y)$ 可分為 $\bar{h}$ 及 $\hat{h}$ 兩部分

$$h = \bar{h} + \hat{h} \quad (3.1.1)$$

式中 $\bar{h}(x,y)$ 稱修正水深(modified depth)其選擇要件為：在修正水深 $\bar{h}$ 對應之各波場波向線不會相交。而一般選取 $\bar{h}$ 之方法可參考 Lozano and Liu(1980)之法則。 $\hat{h}$ 則為 $\bar{h}$ 對應實際地形 $h(x,y)$ 之微小修正量。

假設在近岸海域之波場波函數(wave function) $\phi(x, y, t)$ 可表示為

$$\phi(x, y, t) = F(x, y)A(x, y)e^{i(S(x, y) + \sigma t)} \quad (3.1.2)$$

式中 $A(x, y)$ 及 $S(x, y)$ 分別為對應修正水深 $\bar{h}$ 之振幅(amplitude)及相位(phase), σ 為週頻率。 $F(x, y)$ 稱繞射因子(diffraction factor)主要考慮實際水深與修正水深差,即 h_0 效應產生之影響效果。

根據波向線理論(the wave ray theory)振幅 $A(x, y)$ 及相位 $S(x, y)$ 分別滿足下列eikonal equation及transport equation:

$$(\nabla S)^2 = \bar{k}^2 \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \cdot (A^2 \bar{C} \bar{C}_g \nabla S) = 0 \quad (3.1.4)$$

其對應波數(wave number) $\bar{k}$ 滿足下列分散關係式(dispersion relation)

$$\sigma^2 = g \bar{k} \tanh \bar{k} \bar{h} \quad (3.1.5)$$

而其對應波速(phase velocity) $\bar{C} = \sigma / \bar{k}$ 及群速度(group velocity) $\bar{C}_g = d\sigma / d\bar{k}$, σ 為週頻率(radian frequency)。

其中波數向量(wave number vector) $\bar{K}$, 滿足非旋轉條件

$$\nabla \times \bar{K} = 0 \quad (3.1.6)$$

式中

$$\bar{K} = (\bar{k}_x, \bar{k}_y) = (\bar{k} \cos \theta, \bar{k} \sin \theta), \quad \bar{k} = |\bar{K}| \quad (3.1.7)$$

將表示式(3.1.2)及關係式(3.1.3)及(3.1.4)代入修正緩坡方程式(2.1.13a), 並取 $E_0=0$, 則可化為

$$2i\bar{K} \cdot \nabla F + \left(\frac{2\nabla A}{A} + \frac{\nabla G}{G} \right) \cdot \nabla F + \nabla^2 F + \hat{k}^2 F = 0 \quad (3.1.8)$$

式中 $\hat{k}^2$ 定義為

$$\hat{k}^2 = k^2 - \bar{k}^2 + \frac{i\bar{G}}{G} \nabla \left(\frac{G}{\bar{G}} \right) \cdot \nabla S + \frac{\nabla G}{G} \cdot \frac{\nabla A}{A} + \frac{\nabla^2 A}{A} \quad (3.1.9)$$

其中

$$G = CC_g, \quad \bar{G} = \bar{C}\bar{C}_g \quad (3.1.10a)$$

式中海域波速 (phase velocity) $C = \sigma/k$ 及群速度 (group velocity) $C_g = d\sigma/dk$, 波數 (wave number) k 滿足下列分散關係式 (dispersion relation)

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.1.10b)$$

若忽略式(3.1.8)二次以上之微分項可化簡為

$$\hat{k}^2 = k^2 - \bar{k}^2 \quad (3.1.11)$$

假如取曲線座標系統 (curvilinear co-ordinate system) (ξ, η) 與原來直角座標系統 (x, y) 滿足下列轉關係

$$x = T_x(\xi, \eta) \quad (3.1.12a)$$

$$y = T_y(\xi, \eta) \quad (3.1.12b)$$

則在 (x, y) 座標系統之橢圓方程式 (elliptic equation) (2.1.13a) 可化為在 (ξ, η) 座標系統之拋物線方程式 (parabolic equation) 如下：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2i}{J_4} \left(\frac{-\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k}_x + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{GJ_4^2} (J_3 \frac{\partial G}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}) + \frac{2}{AJ_4^2} (J_3 \frac{\partial A}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \xi}) \right] \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ & + \left[\frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k}_x - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{GJ_4^2} (J_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \eta}) + \frac{2}{AJ_4^2} (J_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \eta}) \right] \frac{\partial F}{\partial \xi} \\ & + \frac{1}{J_2} (J_3 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - 2J_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + J_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}) + \hat{k}^2 F = 0 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

式中

$$J_1 = \left(\frac{\partial T_x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta}\right)^2 \quad (3.1.14a)$$

$$J_2 = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial T_x}{\partial \eta} + \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial T_y}{\partial \eta} \quad (3.1.14b)$$

$$J_3 = \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_y}{\partial \xi}\right)^2 \quad (3.1.14c)$$

$$J_4 = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial T_y}{\partial \eta} - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \quad (3.1.14d)$$

因爲在 (ξ, η) 平面上海岸線與 η 線平行，一般相位線(phase line)多少會與等水深線平行，所以式(3.1.13)中 F 對 η 之二次微分項可忽略，簡化爲

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k}_x + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{G J_4^2} (J_3 \frac{\partial G}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}) + \frac{2}{A J_4^2} (J_3 \frac{\partial A}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \xi}) \right] \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ & + \left[\frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k}_x - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k}_y \right) + \frac{1}{G J_4^2} (J_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \eta}) + \frac{2}{A J_4^2} (J_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \eta}) \right] \frac{\partial F}{\partial \xi} \\ & + \frac{1}{J_2} \left(-2J_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + J_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right) + \hat{k}^2 F = 0 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

同樣波數方程式(3.1.6)在 (ξ, η) 座標系統可化爲

$$\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}_y}{\partial \xi} + \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}_x}{\partial \xi} - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}_y}{\partial \eta} - \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}_x}{\partial \eta} = 0 \quad (3.1.16)$$

而transport equation(3.1.4)在 (ξ, η) 座標系統上可化爲

$$\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{G} \bar{k}_x A^2) - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{G} \bar{k}_y A^2) - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{G} \bar{k}_x A^2) + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{G} \bar{k}_y A^2) = 0 \quad (3.1.17)$$

爲引用有限差分法解析邊界值問題，網格切割之規則形狀要求，一般解將直角座標系統 (x, y) 平面上不規則狀區域，經貼壁曲線座標系統(boundary fitted curvilinear co-ordinate system)轉換爲在 (ξ, η) 平面上之長方形區域，如示意圖3-1-2。 (x, y) 平面上海岸線 $\widehat{CD}$ ，及沿海岸線方向曲線 $\widehat{AB}$ ，經轉換爲 (ξ, η) 平面上之線段 $\overline{CD}(\eta = 0)$ ，及線段 $\overline{AB}(\eta = \eta_0)$ ， (x, y) 平面上向(離)岸之曲線 $\widehat{DA}$ 及 $\widehat{CB}$ ，

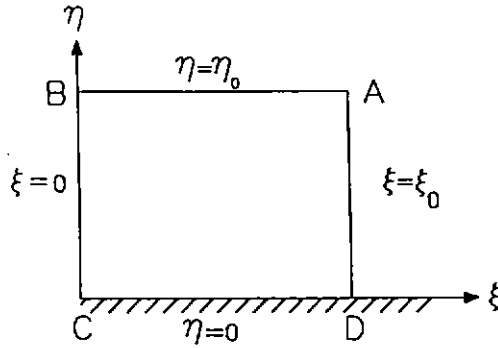


圖 3-1-2 座標轉換示意圖

經轉換為 (ξ, η) 平面上之線段 $\overline{DA}(\xi = 0)$ 及線段 $\overline{CB}(\xi = \xi_0)$ 。一般可先給定 η_0 值, η_0 值大小即控制轉換後尺度大小, 對應 $\overline{BC}$ 及 $\overline{DA}$, 必轉換至 $\xi = 0$ 及 $\xi = \xi_0$ 。如何求得座標轉換函數 (3.1.9) 式, 並保持一些重要幾何特性, 是轉換時一個重要考慮因素。

本文將在保角 (conformal mapping) 之條件下, 求解轉換函數 T_x 及 T_y , 並假設其滿足拉普拉氏方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.1.18a)$$

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.1.18b)$$

對應 (ξ, η) 之座標系統也滿足拉普拉氏方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.19a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.19b)$$

而且滿足 Cauchy-Riemann 條件

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.1.20a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.1.20b)$$

引用 Cauchy-Riemann 條件 (3.1.20), 則對應 ξ 之控制方程式 (3.1.19a) 邊界條件爲

$$\xi = \xi_0, \quad \text{on } \overline{DA} \quad (3.1.21a)$$

$$\xi = 0, \quad \text{on } \overline{BC} \quad (3.1.21b)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{AB} \quad (3.1.21c)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{CD} \quad (3.1.21d)$$

式中 $\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla$ 表示正向微分 (normal derivative), $\vec{n}$ 沿邊界向區域外之單位向量。

同樣對應 η 之控制方程式 (3.1.16b) 邊界條件爲

$$\eta = 0, \quad \text{on } \overline{CD} \quad (3.1.22a)$$

$$\eta = \eta_0, \quad \text{on } \overline{AB} \quad (3.1.22b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{BC} \quad (3.1.22c)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \overline{DA} \quad (3.1.22d)$$

此處將引用邊界元素法原理, 求解上述兩組邊界值問題 (3.1.19a)・(3.1.21) 及 (3.1.19b)・(3.1.22)。

拉普拉氏方程式 (3.1.19a) 及 (3.1.19b) 之 Weber 解在區域內分別可表示爲下列積分方程 (Baker 及 Copson, 1950):

$$\xi(\bar{x}) = b_0 \int_{\partial R} \left\{ \xi \frac{\partial}{\partial n} [\ln(r)] - [\ln(r)] \frac{\partial \xi}{\partial n} \right\} d\ell \quad (3.1.23a)$$

$$\eta(\bar{x}) = b_0 \int_{\partial R} \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial n} [\ln(r)] - [\ln(r)] \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\} d\ell \quad (3.1.23b)$$

式中 ∂R 為近海區域 R 之封閉邊界, $\partial R = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ 。

$b_0 = \frac{-i}{4}$, 當 $\bar{x}$ 在區域內部。

$b_0 = \frac{-i}{2}$, 當 $\bar{x}$ 在平滑區域邊界上。

$b_0 = \frac{-i\pi}{2\beta}$, 當 $\bar{x}$ 在內角為 β 之邊界點上。

$\ln(r)$ 為自然對數函數 (natural logarithmic function)。

$r = |\bar{x}_0 - \bar{x}|$, $\bar{x}_0$ 為邊界上之點, $\bar{x}$ 為邊界上 ∂R 或區域 R 內任一點。

積分方程式 (3.1.23a) 及 (3.1.23b) 式對不規則形狀之區域不易求得解析解, 將利用邊界元素法求解波場。將 (x, y) 平面區域之邊界 $\partial B = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$, 分別切割為 N 個線段, N 個中結點 (mid-node), 每個線段代表一個元素, 並引用常數元素, 假設每一個線段上每個點之 η, ξ 及 $\frac{\partial \eta}{\partial n}, \frac{\partial \xi}{\partial n}$ 皆為定值, 而以線段中結點值代表元素值, 元素上 $\ln(r), \frac{\partial \ln(r)}{\partial n}$ 之值將引用高斯積分法, 直接計算, 而 N 個結點編號一般以逆時鐘方向編排。

假設方程式 (3.1.23a) 中之 $\bar{x}$ 點為邊界上結點, 則可化為下列矩陣方程式

$$[G]\{P_1\} = [H]\{Q_1\} \quad (3.1.24)$$

式中 $[H], [G]$ 皆為 $N \times N$ 矩陣, 其矩陣元素 $[H]_{jk}, [G]_{jk}$ 分別定義為下列線積分 (line integral) 表示式

$$[H]_{jk} = b_0 \int_{\Gamma_k} \frac{\partial}{\partial n} \ln(r) d\ell_k - \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \dots N \quad (3.1.25a)$$

$$[G]_{jk} = b_0 \int_{\Gamma_k} \ln(r) d\ell_k, \quad j, k = 1, 2, 3 \dots N \quad (3.1.25b)$$

式中 Γ_k 為第 k 個元素, $r = |\bar{x}_j - \bar{x}|$, $\bar{x}_j$ 為區域 R 之邊界 ∂R 上元素之結點, $j=1,2,3,\dots,N$, $\bar{x}$ 為第 k 個元素 Γ_k 上任一點, δ_{jk} 為克郎克函數 (Kronecker delta function), 而 $\{Q_1\}$ 及 $\{P_1\}$ 為 $N \times 1$ 向量, 其向量元素分別定義為

$$\{Q_1\}_j = \eta(\bar{x}_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.26a)$$

$$\{P_1\}_j = \frac{\partial \eta(\bar{x}_j)}{\partial n}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.26b)$$

同樣方程式 (3.1.23b) 中之 $\bar{x}$ 點為邊界上結點, 則可化為下列矩陣方程式

$$[G]\{P_2\} = [H]\{Q_2\} \quad (3.1.27)$$

$\{Q_2\}$ 及 $\{P_2\}$ 為 $N \times 1$ 向量, 其向量元素分別定義為

$$\{Q_2\}_j = \xi(\bar{x}_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.28a)$$

$$\{P_2\}_j = \frac{\partial \xi(\bar{x}_j)}{\partial n}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.28b)$$

分別利用矩陣方程式 (3.1.24) 之邊界條件 (3.1.21), 以及矩陣方程式 (3.1.27) 之邊界條件 (3.1.22), 即可求得邊界上之 $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial n}, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial n}$ 值。

當在整個邊界 ∂R 上座標 (x, y) 對應之 (ξ, η) 值求得後, 反言之座標 (ξ, η) 其對應之 (x, y) 亦可獲得, 即

$$x = T_x(\xi, 0), \quad y = T_y(\xi, 0), \quad \text{on } \overline{CD} \quad (3.1.29a)$$

$$y = T_x(\xi, \eta), \quad x = T_y(\xi, \eta_0), \quad \text{on } \overline{AB} \quad (3.1.29b)$$

$$x = T_x(0, \eta), \quad y = T_y(0, \eta), \quad \text{on } \overline{DA} \quad (3.1.29c)$$

$$y = T_x(\xi_0, \eta), \quad y = T_y(\xi_0, \eta), \quad \text{on } \overline{BC} \quad (3.1.29d)$$

利用 Cauchy-Riemann Condition, $\frac{\partial T_x}{\partial n}$ 及 $\frac{\partial T_y}{\partial n}$ 在邊界上之值可由下式求得

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = \frac{\partial T_x}{\partial \eta} = -\frac{\partial T_y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = \frac{\partial T_y}{\partial \eta} = \frac{\partial T_x}{\partial \xi}, \quad \text{on } \overline{AB} \quad (3.1.30a)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = -\frac{\partial T_x}{\partial \eta} = -\frac{\partial T_y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = -\frac{\partial T_y}{\partial \eta} = -\frac{\partial T_x}{\partial \xi}, \quad \text{on } \overline{CD} \quad (3.1.30b)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} = \frac{\partial T_y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = \frac{\partial T_y}{\partial \eta} = -\frac{T_x}{\partial \eta}, \quad \text{on } \overline{BC} \quad (3.1.30c)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial n} = -\frac{\partial T_x}{\partial \xi} = -\frac{T_y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial T_y}{\partial n} = -\frac{\partial T_y}{\partial \xi} = -\frac{\partial T_x}{\partial \eta}, \quad \text{on } \overline{AD} \quad (3.1.30d)$$

假設 (ξ, η) 為區域 R 內部之點則 $\bar{T} = (T_x, T_y)$ 可由下式求得

$$\bar{T}(\xi, \eta) = b_0 \int_{\partial R} \left\{ \bar{T} \frac{\partial}{\partial n} [\ln(r)] - \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} [\ln(r)] \right\} ds \quad (3.1.31)$$

式中 ∂R 為邊界 $(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$ 積分。 $r = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$, (ξ', η') 為邊界上 ∂R 之任一點。

二、有限差分法

當 (x, y) 平面之不規則形狀區域，經上節轉換為貼壁曲線座標系統 (ξ, η) 平面上之矩形區域後，並切割為 $N_x \times N_y$ 個矩形，其每個矩形大小為 $\Delta\xi \times \Delta\eta$ 。本節將引用有限差分法利用三個控制方程式(3.1.15)、(3.1.16)及(3.1.17)求解海域之振幅 A ，繞射因子 F ，相位 S 或波向角 (θ_0) 等三個變數。

因爲修正水深 $\bar{h}$ 沿著等 η 線幾乎與等深線相同, 所以

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{k}}{\partial \xi}, \quad \text{on } \eta = \text{const} \quad (3.2.1)$$

將(3.1.7)代入(3.1.16)並引用(3.2.1)之關係式可化爲

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right) + \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} \sin \theta + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} \cos \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \xi} \sin \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \xi} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

定義波向角

$$\theta_i^j = \theta(\xi_i, \eta_j) \quad (3.2.3a)$$

式中

$$\xi_i = i \Delta \xi, \quad \eta_j = j \Delta \eta \quad (3.2.3b)$$

微分量 $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ 取前差法 (formard-difference method)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta \eta} \quad (3.2.4a)$$

微分量 $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ 取中差分 (central-difference method)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1} + \theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j}{4 \Delta \xi} \quad (3.2.4b)$$

將(3.2.4)代入(3.2.2)則可化爲下列差分方程式

$$-\theta_{i-1}^{j+1} + c_1 \theta_i^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1} = c_2 + \theta_{i-1}^j + c_1 \theta_i^j - \theta_{i+1}^j \quad (3.2.5)$$

其中係數 c_1, c_2 分別定義爲

$$c_1 = \frac{4 \Delta \xi}{\Delta \eta} \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right)^{-1} \quad (3.2.6a)$$

$$c_2 = \frac{4\Delta\xi}{k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right)^{-1} \quad (3.2.6b)$$

方程式(3.2.2)對變數波向角 θ 而言含有非線性項,因此差分方程式(3.2.5)將使用疊代法(iterative numerical method)以求解 θ ,係數 c_1, c_2 皆包括 θ 之隱函數, θ 之值以上一次之疊代結果代入。

同樣定義 $A_i^j = A(\xi_i, \eta_j), i = 1, 2, \dots, N_x, j = 1, 2, \dots, N_y$ 則方程式(3.1.17)可化為差分方程式

$$-A_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{c_4}{c_3} \frac{4\Delta\xi}{\Delta\eta} - \frac{2c_5}{c_3} \Delta\xi \right) A_i^{j+1} + A_{i+1}^{j+1} = A_{i-1}^j + \left(\frac{c_4}{c_3} \frac{4\Delta\xi}{\Delta\eta} + \frac{2c_5}{c_3} \Delta\xi \right) A_i^j - A_{i+1}^j \quad (3.2.7)$$

其中係數 c_3, c_4, c_5 分別定義為

$$c_3 = 2 \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right) \quad (3.2.8a)$$

$$c_4 = 2 \left(\frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta - \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta \right) \quad (3.2.8b)$$

$$c_5 = \frac{1}{G} \left[\frac{\partial T_x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{G} \bar{k} \sin \theta) + \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{G} \bar{k} \cos \theta) - \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{G} \bar{k} \cos \theta) - \frac{\partial T_y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{G} \bar{k} \sin \theta) \right] \quad (3.2.8c)$$

差分方程式(3.2.7)對振幅 A 而言為一線性方程式,假設方程式(3.2.5)中之波向角 θ 求得,則係數 c_3, c_4, c_5 皆為已知。

同樣繞射因子 F 之相關微分量分別定義如下

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{F_{i+1}^j - F_i^j}{\Delta \xi} \quad (3.2.9a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{F_i^{j+1} - F_i^j}{\Delta \eta} \quad (3.2.9b)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2\Delta \xi \Delta \eta} (F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1} - F_{i+1}^{j-1} + F_i^{j-1}) \quad (3.2.9c)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2(\Delta \xi)^2} (F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1} - 2F_{i+1}^j - 2F_i^j + F_{i+1}^{j-1} + F_i^{j-1}) \quad (3.2.9d)$$

因此式(3.1.15)可化為下列差分式

$$\begin{aligned} & (-1 + \frac{c_7 \Delta \xi}{2c_9} + \frac{c_8 \Delta \xi}{c_9 \Delta \eta}) F_{i-1}^{j+1} + [2 - \frac{2c_6 (\Delta \xi)^2}{c_9 \Delta \eta} - \frac{k_0^2 (\Delta \xi)^2}{c_9}] F_i^{j+1} \\ & + (-1 - \frac{c_7 \Delta \xi}{2c_9} - \frac{c_8 \Delta \xi}{c_9 \Delta \eta}) F_{i+1}^{j+1} = (1 - \frac{c_7 \Delta \xi}{2c_9} + \frac{c_8 \Delta \xi}{c_9 \Delta \eta}) F_{i-1}^j \\ & - [2 + \frac{2c_6 (\Delta \xi)^2}{c_9 \Delta \eta} - \frac{k_0^2 (\Delta \xi)^2}{c_9}] F_i^j + (1 + \frac{\eta \Delta \xi}{2q} - \frac{p \Delta \xi}{q \Delta \eta}) F_{i-1}^j \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

其中係數 c_6, c_7, c_8, c_9 分別定義為

$$c_6 = \frac{2i}{J_4} \left(-\frac{\partial T_y}{\partial \xi} \bar{k} \cos \theta + \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \bar{k} \sin \theta \right) + \frac{1}{G J_4^2} (J_3 \frac{\partial G}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \xi}) + \frac{2}{G J_4^2} (J_3 \frac{\partial A}{\partial \eta} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \xi}) \quad (3.2.11a)$$

$$c_7 = \frac{2i}{J_4} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \eta} \bar{k} \cos \theta - \frac{\partial T_x}{\partial \eta} \bar{k} \sin \theta \right) + \frac{1}{G J_4^2} (J_1 \frac{\partial G}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial G}{\partial \eta}) + \frac{2}{A J_4^2} (J_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} - J_2 \frac{\partial A}{\partial \eta}) \quad (3.2.11b)$$

$$c_8 = \frac{2J_2}{J_4^2} \quad (3.2.11c)$$

$$c_9 = \frac{J_1}{J_4^2} \quad (3.2.11d)$$

數值計算繞射因子 F 以海岸線 $\eta = \eta_0$ 為起始線, 並假設在起始線上 F 為常數, 並且假設側邊界 $\xi = 0$ 及 $\xi = \xi_0$ 滿足

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{and} \quad \xi = \xi_0$$

當海域之振幅 A , 繞射因子 F 及波向角 (θ_0) (或相位 S) 等變數求得, 則由方程式(3.1.2)可求得波場水位變化。

肆、近岸潮流模式—Model CT31

一、運動方程式及連續方程式

考慮近岸海域區域(如示意圖4-1-1), x, y 軸分別代表離向岸方向(離岸方向為正), 及沿岸方向, z 軸表垂直方向(上向為正), 水深分佈為 $h(x, y)$, 水位變化為 $\zeta(x, y, t)$ 。

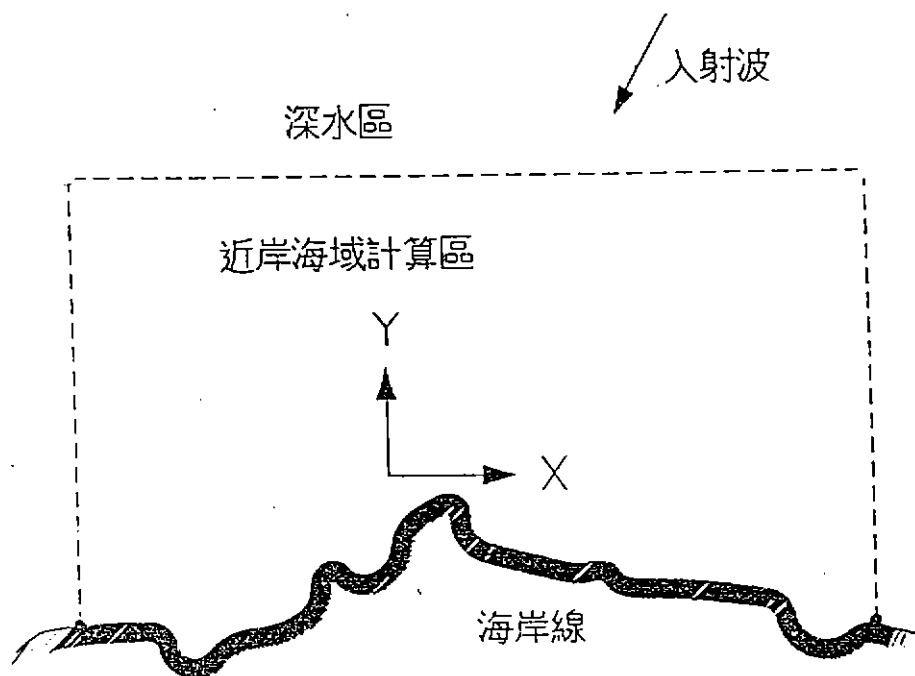


圖 4-1-1 近岸海域區域示意圖

根據質量守恒原理(the conservation of mass), 不可壓縮流體可表示為下列連續方程式(continuity equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.1.1)$$

式中 $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ 分別為 x, y 及 z 方向之流速。

根據動量守恒原理(conservation of momentum)不可壓縮流可表示為下列運動方程式(monementum equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (4.1.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (4.1.2b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\omega_x v + \omega_y u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (4.1.2c)$$

式中 f 為柯氏力參數 (Coriolis parameter phase velocity), $f = 2\omega_e \sin \phi$, ω 為地球自轉相位速度, ω_x, ω_y 分別為地球自轉之 x 分量及 y 分量, ϕ 為緯度 (latitude)。 $\tau_{ij}, i, j = x, y, z$, 表示分子粘滯力 (molecular velocity) 及亂流動量傳遞 (turbulent momentum transfer) 之合成剪應力。 p 為壓力, ρ 為水密度。

一般典型近岸區垂直方向之流速 (w), 遠較水平速度 (u, v) 為小, 垂直之深度 (幾拾米), 遠較水平之尺度 (幾公里) 為小, 因此在較長波之條件下垂直方向之動量方程式, 主要力量為壓力及重力, 其他力量予以忽略, 式 (4.1.2c) 化簡為

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (4.1.3a)$$

$$\text{or } p = \rho g(\zeta - z) \quad (4.1.3b)$$

因此

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (4.1.4a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (4.1.4b)$$

將 (4.1.4) 代入 (4.1.2a) 及 (4.1.2b) 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (4.1.5a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (4.1.5b)$$

而三維自由表面運動邊界條件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u(x, y, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v(x, y, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w(x, y, \zeta) = 0, \quad z = \zeta(x, y, t) \quad (4.1.6)$$

及不透水邊界條件

$$u(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial y} + w(x, y, -h) = 0, \quad z = -h(x, y) \quad (4.1.7)$$

假設垂直之水平速度方向變化甚明顯，則單層之二維模式無法完整的描述流場分佈，甚至垂直方向若有反向的流速分佈，其計算之結果更有失真之現象發生。因此將引用多層積分原理以求解多層流場變化。將垂直方向分為 n_0 層，以 $z_1, z_2, z_3 \dots z_{n_0}$ 表示其高層，其中 $z_0 = \zeta, z_{n_0} = -h$ ，每層之厚度以 $h^{(\ell)}, \ell = 1, 2, \dots, n_0$ 表示， $h^{(\ell)} = z^{(\ell-1)} - z^{(\ell)}$ ，並假設第 2, 3, ... n_0 等層厚度不改變，僅水面第一層 $h^{(1)} = \zeta - z^{(1)}$ 之變動量小於該層厚度，即第一層不會消失。

此處將引用類似上節之垂直積分原理，以積分運算 $\int_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} (\) dz$ 作用於連續方程式(4.1.1)及運動方程式(4.1.5a)(4.1.5b)，而得

$$\frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial y} + w \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} = 0, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial t} + U^{(\ell)} \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x} + V^{(\ell)} \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial y} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} u \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} \\ & = fV^{(\ell)} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xx}^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}^{(\ell)}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho h^{(\ell)}} \tau_{xz} \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}}, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial t} + U^{(\ell)} \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x} + V^{(\ell)} \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} v \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} \\ & = -fU^{(\ell)} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{yx}^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}^{(\ell)}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho h^{(\ell)}} \tau_{yz} \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}}, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

式中 $U^{(\ell)}, V^{(\ell)}, F_{xx}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{xy}^{(\ell)}$ 等皆為第 k 層之平均量, 可以通式定義為

$$X^{(\ell)} = \frac{1}{h^{(\ell)}} \int_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} x \, dz \quad (4.1.11)$$

其中右上標 (ℓ) 代表第 ℓ 層, 小寫 x 代表 $u, v, w, \tau_{xy}^{(\ell)}, \tau_{yy}^{(\ell)}, \tau_{yz}^{(\ell)}$ 等變數, 大寫 X 代表 $U, V, W, F_{xx}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{xy}^{(\ell)}$ 等變數,

而且式中 $x \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}}$ 定義為

$$x \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} = x \Big|_{z_{\ell-1}} - x \Big|_{z_\ell} \quad (4.1.12)$$

層次界面之變量 u, v 以其上下兩層之平均值 U, V 表示為

$$u \Big|_{z_\ell} = \frac{1}{2} (U^{(\ell)} + U^{(\ell+1)}) \quad (4.1.13a)$$

$$v \Big|_{z_\ell} = \frac{1}{2} (V^{(\ell)} + V^{(\ell+1)}) \quad (4.1.13b)$$

層次界面之變量 w 由 (4.1.8) 式可得

$$w \Big|_{z_{\ell-1}} = - \sum_{m=\ell}^{n_0} h^{(m)} \left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(m)}}{\partial y} \right) \quad \ell = 1, 2, \dots, n_0 \quad (4.1.14a)$$

當 $\ell = 1$ 時又可化為

$$w \Big|_{z_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \sum_{m=1}^{n_0} h^{(m)} \left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(m)}}{\partial y} \right) \quad (4.1.14b)$$

每層之平均值 $W^{(\ell)}$ 由下式求得

$$W^{(\ell)} = \frac{1}{2} \left(w \Big|_{z_{\ell-1}} + w \Big|_{z_{\ell}} \right) \quad (4.1.14c)$$

各層內之流體剪應力 $F_{xx}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{xy}^{(\ell)}, F_{yx}^{(\ell)}$ 表示為

$$F_{xz}^{(\ell)} = \rho E_v \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x} \quad (4.1.15a)$$

$$F_{xy}^{(\ell)} = F_{yx}^{(\ell)} = \rho \frac{E_v}{2} \left(\frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial y} \right) \quad (4.1.15b)$$

$$F_{yy}^{(\ell)} = \rho E_v \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial y} \quad (4.1.15c)$$

式中 E_v 為水平剪應力黏滯性係數。

層次界面剪應力以二次方法計算表示為表示

$$\tau_{xz} \Big|_{z_{\ell}} = \left(\rho E_h \frac{\partial u}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} \right) \Big|_{z_{\ell}} \quad (4.1.16a)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z_{\ell}} = \left(\rho E_h \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} \right) \Big|_{z_{\ell}} \quad (4.1.16b)$$

式中 E_h 為垂直剪應力黏滯性係數，其因次為長度平方。而表面風剪力為

$$\tau_{xz} \Big|_{z_o} = F_{xs} \quad (4.1.17a)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z_o} = F_{ys} \quad (4.1.17b)$$

海面風剪力，其分量 F_{xs}, F_{ys} 依 Dean(1984) 可表示為

$$F_{xs} = \rho E_w W_d^2 \cos(\theta_w) \quad (4.1.18a)$$

$$F_{ys} = \rho E_w W_d^2 \sin(\theta_w) \quad (4.1.18b)$$

式中 W_d 為距海平面 10 米處風速。 E_w 為風剪力係數。 θ_w 為風與 x 軸之夾角。

海底摩擦剪應力表示為

$$\tau_{xz} \Big|_{z_{n_0}} = F_{xb} \quad (4.1.19a)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z_{n_0}} = F_{yb} \quad (4.1.19b)$$

海底摩擦力在 x 及 y 方向之分量 F_{xb} 及 F_{yb} 依 Smith and Cheng(1987) 可表示為

$$F_{xb} = \rho E_b U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (4.1.20a)$$

$$F_{yb} = \rho E_b V \sqrt{U^2 + V^2} \quad (4.1.20b)$$

式中 E_b 為海底摩擦係數。

綜合式(4.1.9)、(4.1.10)及(4.1.14)即層化積分表示式。

二、有限元素法模式

多層模式引用控制方程式為(4.1.9)、(4.1.10)及(4.1.14)之時間值問題(time dependent problem), 求解之變數包括水位變化 ζ 及每層 $\ell = 1, 2, \dots, n_0$ 之平均流速 $U^{(\ell)}$, $V^{(\ell)}$, 垂直方向之流速 $W^{(\ell)}$, 同上一章將引用有限元素法將上述積分表示式化為有限元素方程式之 Weak form 如下：

$$\begin{aligned} \int \int_R \psi_i [& U_{,t}^{(\ell)} + U^{(\ell)} U_{,x}^{(\ell)} + V^{(\ell)} U_{,y}^{(\ell)} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} (u \Big|_{z_{\ell-1}} - u \Big|_{z_{\ell}}) \\ & - fV^{(\ell)} + g\zeta_{,x} - \frac{1}{\rho} (F_{xx,x} + F_{xy,x}) - \frac{1}{\rho h^{(\ell)}} (\tau_{xz} \Big|_{z_{\ell-1}} - \tau_{xz} \Big|_{z_{\ell}})] dR = 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$i = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0$

$$\begin{aligned} \int \int_R \psi_i [U_{,t}^{(\ell)} + UV_{,x}^{(\ell)} + V^{(\ell)}V_{,x}^{(\ell)} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}}(v \Big|_{z_{t-1}} - v \Big|_{z_t}) \\ + fU^{(\ell)} + g\zeta_{,y} - \frac{1}{\rho}(F_{yx,x}^{(\ell)} + F_{yy,x}) - \frac{1}{\rho h^{(\ell)}}(\tau_{yz} \Big|_{z_{t-1}} - (\tau_{yz} \Big|_{z_t}))] dR = 0 \quad (4.2.2) \\ i = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \end{aligned}$$

$$\int \int_{R^e} \psi_i [\zeta_{,t} + \sum_{m=1}^{n_0} h^{(m)}(U_{,x}^{(m)} + V_{,y}^{(m)})] dR = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \int \int_R \psi_i W^{(\ell)} dR = \frac{1}{2} \left(\int \int_R \psi_i w \Big|_{z_{t-1}} dR + \int \int_R \psi_i w \Big|_{z_t} dR \right) \\ i = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.2.4a) \end{aligned}$$

$$w \Big|_{z_{t-1}} = - \sum_{m=\ell}^{n_0} h^{(m)} \left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(m)}}{\partial y} \right) \quad \ell = 2 \dots n_0 \quad (4.2.4b)$$

$$w \Big|_{z_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \sum_{m=1}^{n_0} h^{(m)} \left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(m)}}{\partial y} \right), \ell = 1 \quad (4.2.4c)$$

式中 R 為計算區域, ψ 為權重函數 (weighting function)。

本文利用 Galerkin 有限元素之近似觀念 (Galerkin approximation), 即權重函數取用元素之形狀函數, 將計算區域 R 分割為有限個元素 (以 $R^{(e)}$ 表示), 此處取用線性三角形元素, 計有 N 個元素, 對流場每個元素上之變量 $U^{(\ell)}, V^{(\ell)}, \zeta, h^{(\ell)}$ 皆可表示為

$$U^{(\ell)} = \sum_{i=1}^3 U_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.2.5a)$$

$$V^{(\ell)} = \sum_{i=1}^3 V_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.2.5b)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \psi_i \quad (4.2.5c)$$

$$h^{(\ell)} = \sum_{i=1}^3 h_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.2.5d)$$

式中 $U_i^{(\ell)}$ 表示為元素 $R^{(e)}$ 上結點 i 之 $U^{(\ell)}$ 值, $i=1,2,3$, 一般以逆時鐘方向排列, 其座標分別為 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3) 。 ψ_i 為線性三角形元素之形狀函數定義為

$$\psi_1(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (5.2.6a)$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (5.2.6b)$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (5.2.6c)$$

式中 $A^{(e)}$ 為元素 $R^{(e)}$ 之面積。

為簡化符號, 本文此後將引用張量符號 (Tensor notation) 之定義, 即方程式等號同一側重複之下標具有累加之意。

將每層計算區域分割為 N 個線性三角形元素, 以 $R^{(e)}$ 表示, 其形狀函數, $\psi_i, i=1,2,3$ 如 (4.2.6) 式。水位及各層變數物理量以形狀函數展開式如下

$$U^{(\ell)} = U_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.2.7a)$$

$$V^{(\ell)} = V_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.2.7b)$$

$$\zeta = \zeta_i \psi_i \quad (4.2.7c)$$

$$h^{(\ell)} = h_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.2.7d)$$

其對 x 微分量表示為

$$U_{,x}^{(\ell)} = U_i^{(\ell)} \psi_{i,x} \quad (4.2.8a)$$

$$V_{,x}^{(\ell)} = V_i^{(\ell)} \psi_{i,x} \quad (4.2.8b)$$

$$\zeta_{,x} = \zeta_i \psi_{i,x} \quad (4.2.8c)$$

$$h_{,x}^{(\ell)} = h_i^{(\ell)} \psi_{i,x} \quad (4.2.8d)$$

其對 y 微分量表示為

$$U_{,y}^{(\ell)} = U_i^{(\ell)} \psi_{i,y} \quad (4.2.8e)$$

$$V_{,y}^{(\ell)} = V_i^{(\ell)} \psi_{i,y} \quad (4.2.8f)$$

$$\zeta_{,y} = \zeta_i \psi_{i,y} \quad (4.2.8i)$$

$$h_{,y}^{(\ell)} = h_i^{(\ell)} \psi_{i,y} \quad (4.2.8j)$$

將表示 (4.2.5) 、 (4.2.6) 、 (4.2.7) 及 (4.2.8) 分別代入 Weak form(4.2.1) 、 (4.2.2) 、 (4.2.3) 及 (4.2.4), 並引用下列由部分積分公式及 divergence 定理推導之關係式

$$\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \frac{\partial X}{\partial y} dR = \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i X n_y d\Gamma - \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} X dR \quad (5.2.9a)$$

$$\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \frac{\partial X}{\partial x} dR = \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i X n_x d\Gamma - \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} X dR \quad (5.2.9b)$$

式中 X 代表相關物理量, 如 $F_{xx}^{(\ell)}, F_{xy}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{yx}^{(\ell)}, \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x}, \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x}, \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial y}, \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial y}$ 等, n_x, n_y 為垂直邊界向外單位向量在 x 方向及 y 方向分量。 $R^{(e)}$ 表示第 e 個元素之區域, $\Gamma^{(e)}$ 表示元素 e 之外圍邊界。

各層次之物理量以該層之平均量代表, 如 (4.1.11) 式。而層次與層次間之界面上之物理量以上下兩層之平均值表示, 如 (4.1.13) 式, 其中各層流體剪應力引用 (4.1.15) 式, 流體內層次界面之剪應力引用 (4.1.18) 式, 水表面之剪應力引用 (4.1.17) 式; 海底面之剪應力引用 (4.1.20) 式; 則可化為下列方程式

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRU_{j,t}^{(\ell)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dRU_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} \\
 & + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dRV_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{2} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(U_k^{(\ell-1)} - U_k^{(\ell+1)} \right) \\
 & - f \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRV_j^{(\ell)} - g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,x} dR \zeta_j \\
 & + E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(U, x)_j^{(\ell)} - E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,x} dRU_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(U, y)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dRU_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(V, x)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,x} dRV_j^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{\rho} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(\tau_{xz} \Big|_{z_t}^{z_{t-1}} \right)_k = 0
 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRV_{j,t}^{(\ell)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dRU_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \\
 & + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dRV_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{2} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(V_k^{(\ell-1)} - V_k^{(\ell+1)} \right) \\
 & + f \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRU_j^{(\ell)} - g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,y} dR \zeta_j \\
 & + E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(V, y)_j^{(\ell)} - E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dRV_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(V, x)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,x} dRV_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(U, y)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,y} dRU_j^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{\rho} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(\tau_{yz} \Big|_{z_t}^{z_{t-1}} \right)_k = 0
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \zeta_{j,t} + \sum_{b=1}^{n_0} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dRh_j^{(m)} U_k^{(m)} \right. \\
 & \left. + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dRh_j^{(m)} V_k^{(m)} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

$$\begin{aligned}
 \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR W_j^{(\ell)} &= \frac{1}{2} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i w \Big|_{z_{(\ell-1)}} dR + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i w \Big|_{z_\ell} dR \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \sum_{m=\ell}^{n_0} h^{(m)} (U_{,x}^{(m)} + V_{,y}^{(m)}) dR \right. \\
 &\quad \left. + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \sum_{m=\ell+1}^{n_0} h^{(m)} (U_{,x}^{(m)} + V_{,y}^{(m)}) dR \right] \\
 &= -\sum_{m=\ell+1}^{n_0} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR h_j^{(m)} U_k^{(m)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR h_j^{(m)} V_k^{(m)} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR h_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR h_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

式中

$$\begin{aligned}
 (\tau_{xy} \Big|_{z_{\ell-1}})_i &= \left[\left(\rho E_h \frac{\partial U}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} \right) \Big|_{z_{\ell-1}} \right]_i \\
 &= \left[4\rho E_h \frac{U^{(\ell)} - U^{(\ell+1)}}{(h^{(\ell)} + h^{(\ell+1)})^2} \sqrt{(U^{(\ell)} - U^{(\ell+1)})^2 + (V^{(\ell)} - V^{(\ell+1)})^2} \right]_i \\
 &\quad i = 1, 2, 3, \quad \ell = 2, 3 \dots n_0
 \end{aligned} \tag{4.2.14a}$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{yz} \Big|_{z_{\ell-1}})_i &= \left[\left(\rho E_h \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} \right) \Big|_{z_{\ell-1}} \right]_i \\
 &= \left[4\rho E_h \frac{V^{(\ell)} - V^{(\ell+1)}}{(h^{(\ell)} + h^{(\ell+1)})^2} \sqrt{(U^{(\ell)} - U^{(\ell+1)})^2 + (V^{(\ell)} - V^{(\ell+1)})^2} \right]_i \\
 &\quad i = 1, 2, 3, \quad \ell = 2, 3 \dots n_0
 \end{aligned} \tag{4.2.14b}$$

$$(\tau_{xz} \Big|_{z_o})_i = (\tau_{sx})_i = \left[\rho E_w W_d^2 \cos(\theta_w) \right]_i \tag{4.2.14c}$$

$$(\tau_{yz} \Big|_{z_o})_i = (\tau_{sy})_i = \left[\rho E_w W_d^2 \sin(\theta_w) \right]_i \tag{4.2.14d}$$

$$(\tau_{xy} \Big|_{z_{n_0}})_i = [\tau_{bx}]_i = [\rho E_b U^{(n_0)} \sqrt{(U^{(n_0)})^2 + (V^{(n_0)})^2}]_i \quad (4.2.14e)$$

$$(\tau_{yz} \Big|_{z_{n_0}})_i = [\tau_{by}]_i = [\rho E_b V^{(n_0)} \sqrt{(U^{(n_0)})^2 + (V^{(n_0)})^2}]_i \quad (4.2.14f)$$

式(4.2.10), (4.2.11), (4.2.12), (4.2.13)又可分別化爲

$$M_{ij} U_{j,t}^{(\ell)} = a_i^{(\ell)} \quad \ell = 2, 3 \dots n_0 \quad (4.2.15a)$$

$$M_{ij} V_{j,t}^{(\ell)} = b_i^{(\ell)} \quad \ell = 2, 3 \dots n_0 \quad (4.2.15b)$$

$$M_{ij} \zeta_{j,t} = c_i \quad \ell = 2, 3 \dots n_0 \quad (4.2.15c)$$

$$M_{ij} W_j^{(\ell)} = d_i^{(\ell)} \quad \ell = 2, 3 \dots n_0 \quad (4.2.15d)$$

式中 M_{ij} 定義爲

$$M_{ij} = \int \int_{R(e)} \psi_i \psi_j dR \quad (4.2.16)$$

係數 $a_i^{(\ell)}$, $b_i^{(\ell)}$, c_i 及 $d_i^{(\ell)}$ 分別定義如下：

$$\begin{aligned} a_i^{(\ell)} = & -M_{kij}^x U_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} - M_{kij}^y V_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} \\ & - \frac{1}{2} M_{ijk} \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j (U_k^{(\ell-1)} - U_k^{(\ell+1)}) + f M_{ij} V_j^{(\ell)} \\ & + g M_{ji}^x \zeta_j - E_v N_{ij}^x (U_{,x})_j^{(\ell)} + E_v M_{ij}^{xx} U_j^{(\ell)} \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^y (U_{,y})_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{yy} U_j^{(\ell)} \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^y (V_{,x})_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{yx} V_j^{(\ell)} \\ & - \frac{1}{\rho} M_{ijk} \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j (\tau_{xz} \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}})_k \end{aligned} \quad (4.2.17a)$$

$$\begin{aligned}
 b_i^{(\ell)} = & -M_{kij}^x U_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} - M_{kij}^y V_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} M_{ijk} \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j (V_k^{(\ell-1)} - V_k^{(\ell+1)}) - f M_{ij} U_j^{(\ell)} \\
 & + g M_{ji}^y \zeta_j - E_v N_{ij}^y (V_{,y})_j^{(\ell)} + E_v M_{ij}^{yy} V_j^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (V_{,x})_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{xx} V_j^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (U_{,y})_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{xy} U_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{\rho} M_{ijk} \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j (\tau_{yz} \Big|_{z_t}^{z_{t-1}})_k
 \end{aligned} \tag{4.2.17b}$$

$$c_i = - \sum_{m=1}^{n_0} [M_{kij}^x h_j^{(m)} U_k^{(m)} + M_{kij}^y h_j^{(m)} V_k^{(m)}] \tag{4.2.17c}$$

$$\begin{aligned}
 d_i^{(\ell)} = & - \sum_{m=\ell+1}^{n_0} (M_{kij}^x h_j^{(m)} U_k^{(m)} + M_{kij}^y h_j^{(m)} V_k^{(m)}) \\
 & - \frac{1}{2} M_{kij}^x h_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} + M_{kij}^y h_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)}
 \end{aligned} \tag{4.2.17d}$$

式中 M_{ij}^x , M_{ij}^y , M_{ijk}^x , M_{ijk}^y , N_{ij}^x , N_{ij}^y , 定義為

$$M_{ij}^x = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_j dR \tag{4.2.18a}$$

$$M_{ij}^y = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_j dR \tag{4.2.18b}$$

$$M_{ijk}^x = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_j \psi_k dR \tag{4.2.18c}$$

$$M_{ij}^y = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_j \psi_k dR \tag{4.2.18d}$$

$$N_{ij}^x = \int \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma \tag{4.2.18e}$$

$$N_{ij}^y = \int \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma \tag{4.2.18f}$$

其他係數定義如下：

$$M_{ijk} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_i \phi_j \phi_k dR \quad (4.2.19a)$$

$$M_{ij}^{xx} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,x} \phi_{j,x} dR \quad (4.2.19b)$$

$$M_{ij}^{yy} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,y} \phi_{j,y} dR \quad (4.2.19c)$$

$$M_{ij}^{xy} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,x} \phi_{j,y} dR \quad (4.2.19d)$$

$$M_{ij}^{yx} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,y} \phi_{j,x} dR \quad (4.2.19e)$$

方程式(4.2.15a)、(4.2.15b)、(4.2.15c)及(4.2.15d)爲對時間一階率微分法，本文引用二步驟顯示法(Kawahara, Takench and Yoskida, 1978)對時間做數值積分表示如下差分式，其中第一步驟：

$$M_{ij}\{U_j^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij}\{U_j^{(\ell)}\}^n + \frac{\Delta t}{2}\{a_i^{(\ell)}\}^n \quad (4.2.20a)$$

$$M_{ij}\{V_j^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij}\{V_j^{(\ell)}\}^n + \frac{\Delta t}{2}\{b_i^{(\ell)}\}^n \quad (4.2.20b)$$

$$M_{ij}\{\zeta_j\}^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij}\{\zeta_j\}^n + \frac{\Delta t}{2}\{c_i\}^n \quad (4.2.20c)$$

$$M_{ij}\{W_j^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} = \{d_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2.20d)$$

式中 Δt 爲時間間距，右上標 n 表時間間距個數，即 $t = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots$ ，當 $n = 0$ 代表啓始時間之值。第二步驟計算式爲

$$M_{ij}\{U_j^{(\ell)}\}^{n+1} = M_{ij}\{U_j^{(\ell)}\}^n + \Delta t\{a_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2.21a)$$

$$M_{ij}\{V_j^{(\ell)}\}^{n+1} = M_{ij}\{V_j^{(\ell)}\}^n + \Delta t\{b_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2.21b)$$

$$M_{ij}\{\zeta_j\}^{n+1} = M_{ij}\{\zeta_j\}^n + \Delta t\{c_i\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.2.21c)$$

$$M_{ij}\{W_j^{(\ell)}\}^{n+1} = \{d_i^{(\ell)}\}^{n+1} \quad (4.2.21d)$$

二步驟顯示法爲積分一個時間間距時先計算半個時距之值再據以完成整個時距之計算，此方法具有二階精確度。此方法滿足條件穩定，時間間距之大小一般受限於Courant-Friendrichs-lewy條件

$$\Delta t \leq (1-2) \frac{\Delta d}{\sqrt{2gh}} \quad (4.2.22)$$

式中 Δd 為元素之最小邊長。

邊界條件,在海面一般主要外力為風力,海底則引用經驗式描述摩擦力之作用。模式側面邊界有固定邊界及開放邊界。固定邊界一般假設為不透水直立壁,垂直於岸壁之速度為零,同時假定非滑動(non-slip),即平行於岸壁之速度不為零,在開口邊界則需給定實測之潮位或每層流速。計算過程為已知時間 $t = n\Delta t$ 時水位 $\{\zeta_i\}^n$ 及所有每層 ℓ 之流場, $\{U_i^{(\ell)}\}^n, \{V_i^{(\ell)}\}^n, \{W_i^{(\ell)}\}^n$,並由(4.2.14)式計算 $t = n\Delta t$ 時剪應力,其次由第一步驟差分式(4.2.20)計算 $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ 時之 $\{U_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}}, \{V_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}}, \{W_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}}$,及 $\{\zeta_i\}^{n+\frac{1}{2}}$,最後再由(4.2.21)求解 $t = (n+1)\Delta t$ 時間之水位 $\{\zeta_i\}^{n+1}$ 及每層 $\{V_i^{(\ell)}\}^{n+1}, \{V_i^{(\ell)}\}^{n+1}$ 及 $\{W_i^{(\ell)}\}^{n+1}$ 及(4.2.14)式計算 $t = (n+1)\Delta t$ 時之剪應力,如此完成一個時間間距之計算。

伍、沿岸流模式—Model CL21

一、控制方程式

假設波浪與海流之交互作用甚為明顯，即波力應視為獨立外力，因此將水平速度區分為一平均速度及因波力造成出之速度變化表示為

$$u = u^* + u' \quad (5.1.1a)$$

$$v = v^* + v' \quad (5.1.1b)$$

式中 u^*, v^* 為一平均流速， u', v' 為波力造成之速度分量。

而水位變化 ζ 包括因流速影響產生之 ζ_a ，因波浪與海流交互作用產生之平均水位變化 ζ_v ，如水位抬昇(set up)或水位降低(set down)，表示為 $\zeta = \zeta_a + \zeta_v$ 。類似前述之垂直積分原理，以 $\int_{-h}^{\zeta} dz$ 做積分運算於連續方程式(4.1.1)及運動方程式(4.1.5a)及(4.1.5b)則可得下列方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}[U(h + \zeta)] + \frac{\partial}{\partial y}[V(h + \zeta)] + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = fV - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{\rho(h + \zeta)} (F_{xs} - F_{xb}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -fU - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{\rho(h + \zeta)} (F_{ys} - F_{yb}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

式中 U, V 分別為 x 方向及 y 方向之平均流速定義為

$$U = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u dz \quad (5.1.5a)$$

$$V = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} v dz \quad (5.1.5b)$$

$F_{xx}, F_{xy}, F_{yx}, F_{yy}$ 定義如式(4.1.15), 式中 E_v 依 Longuet-higgins (1970) 之建議可表示為

$$E_v = N_c \ell_c \sqrt{g(h + \zeta)} \quad (5.1.6a)$$

式中 N_c 為常數, 其值小於 0.016, ℓ_c 為特性長度, 定義為

$$\ell_c = (h + \zeta) / \tan \beta \quad (5.1.6b)$$

式中 $\tan \beta$ 為平均底床坡度。

F_{xs} 及 F_{ys} 定義如式(4.1.18), 此處假設無風剪力作用, $F_{xs} = F_{ys} = 0$, F_{xb} 及 F_{yb} 則定義如式(4.1.20)。

輻射應力 (radiation stress) $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_{yx}$ 定義為

$$S_{xx} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} (u'u' + \frac{p}{\rho}) dz - \frac{1}{2}g(h + \zeta) - U'U' \quad (5.1.7a)$$

$$S_{yy} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} (v'v' + \frac{p}{\rho}) dz - \frac{1}{2}g(h + \zeta) - V'V' \quad (5.1.7b)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u'v' dz - U'V' \quad (5.1.7c)$$

式中 U', V' 分別定義為

$$U' = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u' dz \quad (5.1.8a)$$

$$V' = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} v' dz \quad (5.1.8a)$$

假如波場及波力引起之流場週期皆為 T ，針對 (5.1.2)，(5.1.3) 及 (5.1.4) 等式取週期平均 $\frac{1}{T} \int_0^T () dt$ ，並定義 $D = h + \zeta$ ，則可化簡為

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{UD}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{UD}) = 0 \quad (5.1.9a)$$

$$\overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = f\overline{V} - g \frac{\partial(\overline{D} - h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{F_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_{xy}}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho \overline{D}} \overline{F_{xb}} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{S_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S_{xy}}}{\partial y} \right) \quad (5.1.9b)$$

$$\overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = -f\overline{U} - g \frac{\partial(\overline{D} - h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{F_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_{yy}}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho \overline{D}} \overline{F_{yb}} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{S_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S_{yy}}}{\partial y} \right) \quad (5.1.9c)$$

式中各物理量變數上之短線—代表週期平均量。且 $\overline{D} = \overline{h + \zeta} = h + \overline{\zeta}$ ，其中 $\overline{\zeta} = \overline{\zeta_a} + \overline{\zeta_v}$ 。

假設入射波（波高 H ，波數 k ，頻率 σ ）為小振幅線性波，其波向與 x 軸夾 θ_o 角，表示為

$$\zeta_o(x, y, t) = \frac{H}{2} \cos(k \cos \theta_o x + k \sin \theta_o y - \sigma t) \quad (5.1.10)$$

則根據 (Dean and Dalrymple, 1984)

$$\overline{S_{xx}} = E_o [n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2}] \quad (5.1.11a)$$

$$\overline{S_{yy}} = E_o [n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2}] \quad (5.1.11b)$$

$$\overline{S_{xy}} = \frac{E_o}{2} n_c \sin 2\theta_o \quad (5.1.11c)$$

式中

$$n_c = \frac{kh}{\sinh(2kh)} + \frac{1}{2} \quad (5.1.12)$$

n_c 稱為波浪之群速 (group velocity) 與相位速度 (phase velocity) 比值, E_o 為每單位長度之能量。

$$E_o = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (5.1.13)$$

水位變化中之因波浪引起之平均水位變化量 $\bar{\zeta}_v$, 本文將分別引用 Horikawa 碎波前淺化區及碎波後之經驗公式求得。碎波前之水位為下降 (set down) 表示為

$$\bar{\zeta}_v = -\frac{H^2}{8} \frac{k}{\sinh(2kh)} \quad (5.1.14a)$$

碎波後之水位提昇 (set up) 表示為

$$\bar{\zeta}_v = 0.167(h_b - h) - \frac{H_b^2}{8} \frac{k}{\sinh(2kh_b)} \quad (5.1.14b)$$

式中 h_b 為碎波處水深, H_b 為碎波處波高, 碎波條件則引用淺水波臨界尖銳度為指標, 即

$$(H/L)_{max} = 0.142 \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (5.1.14c)$$

式中 L 為波長

沿岸流之控制方程式為 (5.1.9a), (5.1.9b) 及 (5.1.9c) 等三式, 以求解 $\bar{U}$, $\bar{V}$ 及 $\bar{D}$ 三個未知量。

二、有限元素法模式

近岸流數值模式引用控制方程式為 (5.1.9a) · (5.1.9b) 及 (5.1.9c) 與時間無關之問題, 同上一章將引用有限元素法將上述積分表示式化為有限元素方程式之 Weak form 如下:

$$\int_R \int \psi_i \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{UD}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{VD}) \right] dR = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2.1)$$

$$\int \int_R \psi_i \left[\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - f \bar{V} + g \frac{\partial (\bar{D} - h)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{F}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho \bar{D}} \bar{F}_{xb} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{S}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_{xy}}{\partial y} \right) \right] dR = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \quad (5.2.2)$$

$$\int \int_R \psi_i \left[\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + f \bar{U} + g \frac{\partial (\bar{D} - h)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{F}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho \bar{D}} \bar{F}_{yb} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{S}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_{yy}}{\partial y} \right) \right] dR = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \quad (5.2.3)$$

式中 R 為計算區域, ψ_i 為元素之形狀函數, $i=1,2,3$ 。同樣將計算區域 R 分割為 N 個線性三角形元素, 以 $R^{(e)}$ 表示, 此處在不混淆之條件下, 將省略各符號之上橫線段, 如 $\bar{U}$ 以 U 表示, 對流場每個元素上之變量 U, V, D, H, h, n_c 及 ζ 皆可表示為

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \psi_i \quad (5.2.4a)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i \psi_i \quad (5.2.4b)$$

$$D = \sum_{i=1}^3 D_i \psi_i \quad (5.2.4c)$$

$$H = \sum_{i=1}^3 H_i \psi_i \quad (5.2.4d)$$

$$h = \sum_{i=1}^3 h_i \psi_i \quad (5.2.4e)$$

$$n_c = \sum_{i=1}^3 n_{ci} \psi_i \quad (5.2.4f)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \psi_i \quad (5.2.4g)$$

經整理式(5.2.1)、(5.2.2)及(5.2.1)可分別化為下列之表示式

$$\begin{aligned}
 & \int \int_R^{(e)} \psi_i \left(\frac{\partial(UD)}{\partial x} + \frac{\partial(VD)}{\partial y} \right) dR \\
 &= \int \int_{R^{(e)}} \left(\psi_i U \frac{\partial D}{\partial x} + \psi_i D \frac{\partial U}{\partial x} + \psi_i V \frac{\partial D}{\partial y} + \psi_i D \frac{\partial V}{\partial y} \right) dR \\
 &= -M_{jik}^x U_k D_j - M_{jik}^x U_j D_k - M_{jik}^y V_k D_j - M_{jik}^y V_j D_k \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left\{ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial D}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} \right. \\
 & - E_v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + E_b \frac{U}{D} \sqrt{U^2 + V^2} \\
 & + \frac{1}{8} \rho g \frac{\partial}{\partial x} [H^2 n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2] + \frac{1}{16} \rho g \frac{\partial}{\partial y} (H^2 n_c \sin 2\theta_o) \left. \right\} dR \\
 &= M_{jik}^x U_k U_j + M_{jik}^y V_k U_j - f M_{ij} V_j + g M_{ji}^x D_j - g M_{ji}^x h_j \\
 & - E_v N_{ij}^x (U, x)_j + E_v M_{ij}^x (U, x)_j - E_v N_{ij}^y (U, y)_j + E_v N_{ij}^y (U, y)_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (V, y)_j + \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (V, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\
 & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^x [H^2 n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^y (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial D}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} \right. \\
 & - E_v \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + E_b \frac{V}{D} \sqrt{U^2 + V^2} \\
 & + \frac{1}{8} \rho g \frac{\partial}{\partial y} [H^2 n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2] + \frac{1}{16} \rho g \frac{\partial}{\partial x} (H^2 n_c \sin 2\theta_o) \left. \right\} dR \\
 &= M_{jik}^x U_k V_j + M_{jik}^y V_k V_j + f M_{ij} U_j + g M_{ji}^y D_j - g M_{ji}^y h_j \\
 & - E_v N_{ij}^x (V, x)_j + E_v M_{ij}^x (V, x)_j - E_v N_{ij}^y (V, y)_j + E_v N_{ij}^y (V, y)_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (U, y)_j + \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (U, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\
 & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^y [H^2 n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^x (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

經化簡(5.2.5), (5.2.6)及(5.2.7)可表示

$$A_{ij}D_j = a_i \quad (5.2.8a)$$

$$A_{ij}U_j = b_i \quad (5.2.8b)$$

$$A_{ij}V_j = c_i \quad (5.2.8c)$$

式中

$$A_{ij} = M_{jik}^x U_k + M_{jik}^y V_j \quad (5.2.9a)$$

$$a_i = -M_{jik}^x U_j D_k - M_{jik}^y U_j D_k \quad (5.2.9b)$$

$$\begin{aligned} b_i = & fM_{ij}V_j - gM_{ji}^x D_j + gM_{ji}^y h_j \\ & + E_v N_{ij}^x (U, x)_j - E_v M_{ij}^x (U, x)_j + E_v N_{ij}^y (U, y)_j - E_v N_{ij}^y (U, y)_j \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (V, y)_j - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (V, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\ & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^x [H^2 n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^y (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j \end{aligned} \quad (5.2.9c)$$

$$\begin{aligned} c_i = & -fM_{ij}U_j - gM_{ji}^y D_j + gM_{ji}^x h_j \\ & + E_v N_{ij}^x (V, x)_j - E_v M_{ij}^x (V, x)_j + E_v N_{ij}^y (V, y)_j - E_v N_{ij}^y (V, y)_j \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (U, y)_j - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (U, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\ & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^y [H^2 n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^x (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j \end{aligned} \quad (5.2.9d)$$

陸、實例說明

一、Model WE21 :實例說明

取用縱深 $\ell = 1.021$ 英呎, 寬 0.207 英呎, 等水深 $h=0.844$ 英呎之矩形港池, 並假設其外海之海岸線皆平直向兩側無限延伸, 做為有限元素法模式之計算例子說明。有限元素法模式矩形港池之三角元素切割如附圖(6-1-1), 此處將取矩形港池之端點 $A(0, -1.021)$ 作觀察點。當波浪由外海正向入射作用於港池, 圖 6-1-2 為矩形港池之無因次波浪參數 $k_0\ell$ 與擴大率 R 之相關曲線圖, 實線為有限元素法模式, 虛線為蘇(1993)邊界元素法模式, 黑點則為 Lee (1969) 之試驗結果, 數值計算結果與試驗結果甚為吻合。

若港池岸壁為部分反射體, 根據蘇(1993)解析之結果, 消波岸壁港池之消波特性主要由阻尼係數(impedance) α 決定其物理特性。阻尼係數 α 為一複數, 其實部之物理意義相當於電學之電阻(resistance), 主要決定作用於消波岸壁後之反射波振幅大小; 其虛部則相當於電學之電抗(reactance), 主要決定入射波與反射波之相位差。若 α 為實部及虛部皆不為零之複數, 蘇(1993)發現港池共振週期及其擴大率皆可能改變, α 之虛部主要影響共振週期之變化, 其值為負數時, 將增長原有共振週期, 其絕對值愈大改變愈大, 反之其值為正數時, 將減短原有共振週期, 其絕對值愈大改變也愈大; 實部則影響振幅大小, 其絕對值愈大能量消散也愈大。

波浪作用於透水結構物, 若在假設無相位差及正向波作用之條件下, 阻尼係數與反射係數 C_r 之關係式, 根據蘇(1993)可表示為

$$\alpha = -k_0 \frac{1 - C_r}{1 + C_r}, \quad 0 \leq C_r \leq 1 \quad (6.1.1)$$

在考慮反射係數 C_r 分別為 1, 0.95, 0.9, 0.85, 圖 6-1-3 則為矩形港池之端點 A 處之共振曲線比較圖, 圖中顯示隨反射係數 C_r 之減少, 在共振點之擴大率快速的減少, 顯示反射係數將影響共振大小甚巨。

假設港池岸壁採用蘇(1993)單層多孔板之消波體, 則阻尼係數 α 可表示為

$$\alpha = \frac{-k_0 G_0 \tan(k_0 d)}{\tan(k_0 d) - i G_0} \quad (6.1.2)$$

其中 d 為消波室寬度, G_0 為多孔影響參數 (porous-effect parameter), 定義為

$$G_0 = \frac{\rho b_0 \sigma}{\mu k_0} \quad (6.1.3)$$

式中 μ 為流體動力滯性係數, b_0 為波浪作用下多孔板特性係數 (長度單位)。當 $d/L \neq 0.25$ 時, 阻尼係數 α 為複數。當 $d/L = 0.25$ 時, 單層多孔板之消波體前反射波最小, 阻尼係數 α 為實數, 其表示式化簡如下

$$\alpha = -k_0 G_0 = -k_0 \frac{1 - C_r}{1 + C_r} \quad (6.1.4)$$

表示式 (6.1.1) 與表示式 (6.1.4) 相同。

單層多孔板消波體岸壁之港池之波能消散現象, $d/L \neq 0.25$ 時, 阻尼係數 α 為複數, 其表示式如 (6.1.2)。圖 6-1-4 為幾種不同多孔影響參數 G_0 當 $d/L = 0.01$ 時港池在底部 A 點處擴大率 R 與無因次波數 $k_0 \ell$ 之相關曲線圖。當 $G_0 = 0$ ($\alpha = 0$) 時之曲線相當於不透水直立壁港池, 圖中顯示在 $G_0 = 0.01$ ($\alpha = -0.012 + i0.002$), 第一共振點些微右移在 $k_0 \ell = 1.35$ (共振週期減短), 擴大率減為 5.13, 此時阻尼係數之實部及虛部皆不為零, 其絕對值也不大, 虛部為正值, 為減短第一共振週期之因素, 實部絕對值些微之加大, 則為擴大率減小之因素。當 G_0 值增大為 $G_0 = 0.05$ ($\alpha = -0.039 + i0.031$), 共振點明顯較 $G_0 = 0.01$ 時向右移, 而落在 $k_0 \ell = 1.50$, 擴大率且較減小為 3.48; 此則因阻尼係數之實部及虛部其絕對值皆較 $G_0 = 0.01$ 時為大, 虛部正值之增大, 為再度減短第一共振週期之原因, 同樣實部絕對值些微之加大, 則為擴大率減小之因素。而當 G_0 值再增大 $G_0 = 0.30$ ($\alpha = -0.016 + i0.077$), 共振點位置又右移在 $k_0 \ell = 1.60$, 擴大率反而增大為 5.77, 此則因阻尼係數之虛部增大, 虛部正值之增大再減短第一共振週期, 而實部絕對值因些微之減小, 擴大率反而增大。當 $G_0 = 1.0$ ($\alpha = -0.005 + i0.080$), 共振點位置不再右移, 但擴大率繼續增大為 7.05, 則因為阻尼係數之虛部增加不大, 而實部絕對值減小, 擴大率反而增大。第二共振點處 $k_0 \ell = 4.19$ 隨 G_0 值之改變也有類似之現象, 只是其擴大率較小, 變化較不顯著。比較圖 6-1-3 與圖 6-1-4, 分別為 $d/L = 0.25$ 及 $d/L = 0.01$ 兩種單層多孔板消波體岸壁港池 A 點之結果, 顯示二

者之波能消散現象不同。前者隨 G_0 值之增大,共振點之擴大率快速減小,共振週期改變不明顯。但後者隨 G_0 之增大,擴大率減小或增大,共振週期之改變現象則甚為明顯。阻尼係數 α 在 $d/L=0.25$ 之情況為實數如(6.1.4)式,在 $d/L=0.01$ 時為包括實部及虛部之複數如(6.1.2)式,因此前者僅改變擴大率之大小值,但不改變共振週期,但後者不但影響擴大率之值,而且改變其共振週期。

[註]:有關本模式之使用請參考蘇等(1995)Model WE21使用手冊。

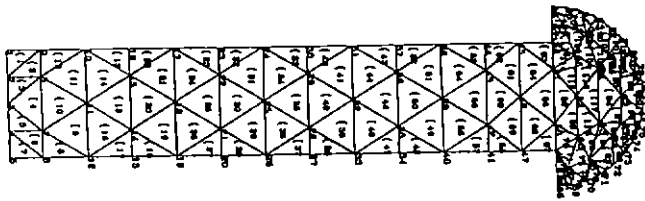


圖 6-1-1 矩形港池三角形元素分割示意圖

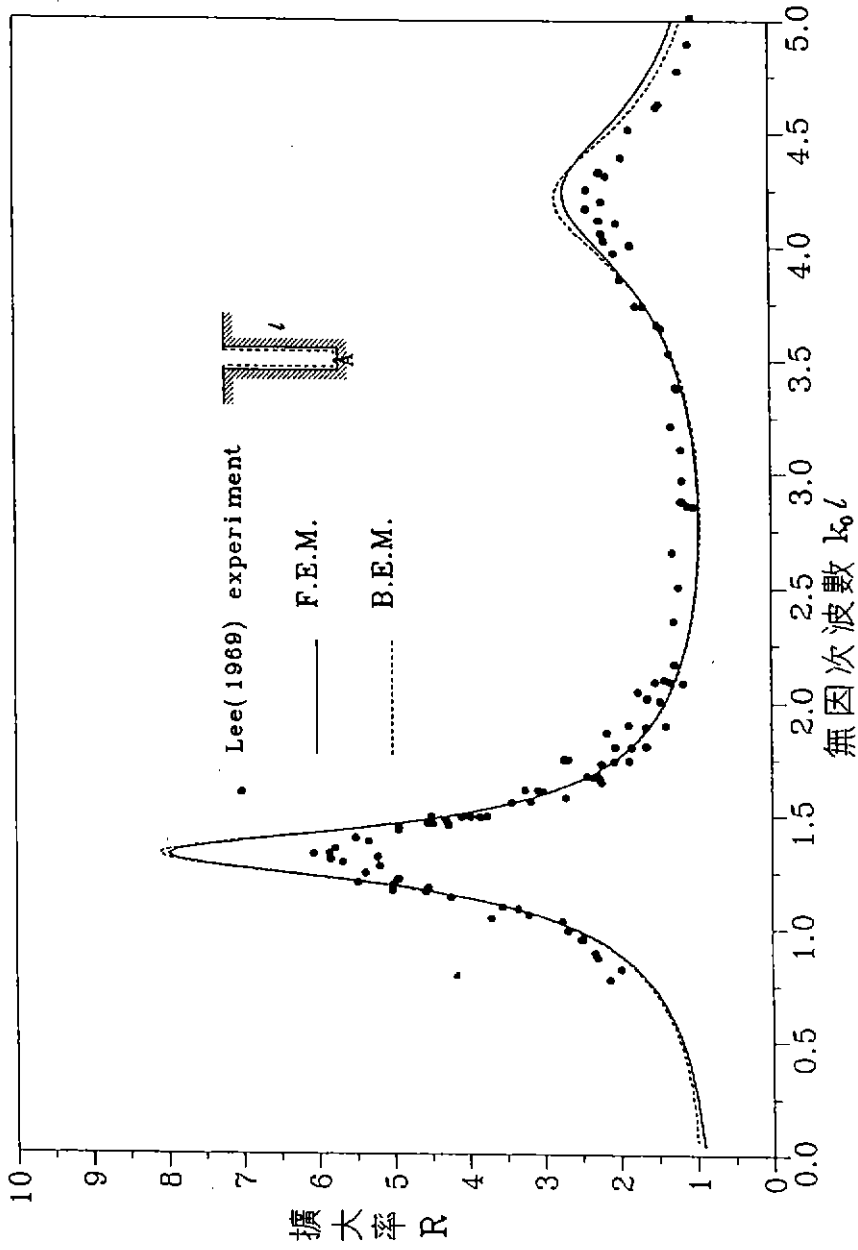


圖 6-1-2 矩形港池端點 A 處無因次波浪參數 $k_0 l$ 與擴大率 R 之相關曲線圖

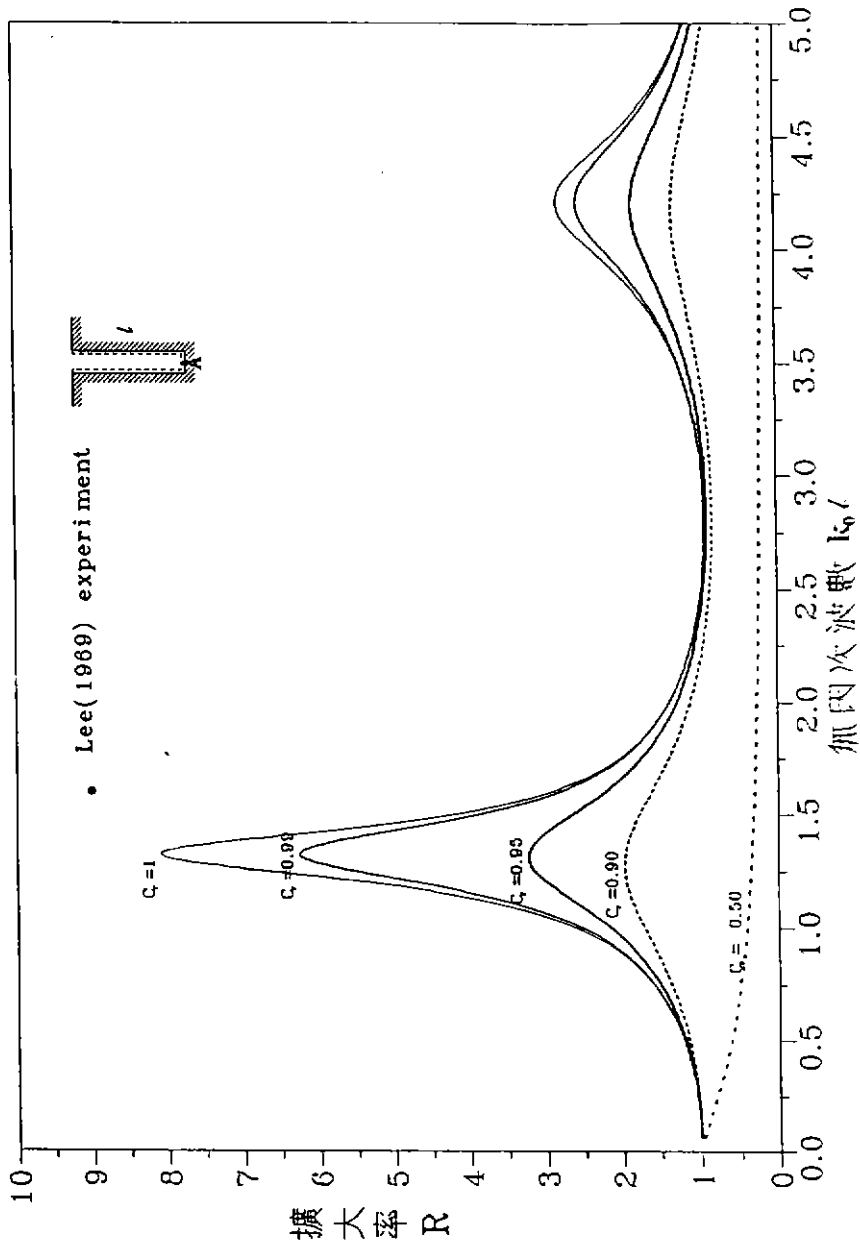


圖 6-1-3 矩形港池端點 A 處在不同反射係數 C_r 無因次波浪參數 $k_0 l$ 與擴大率 R 之相關曲線圖

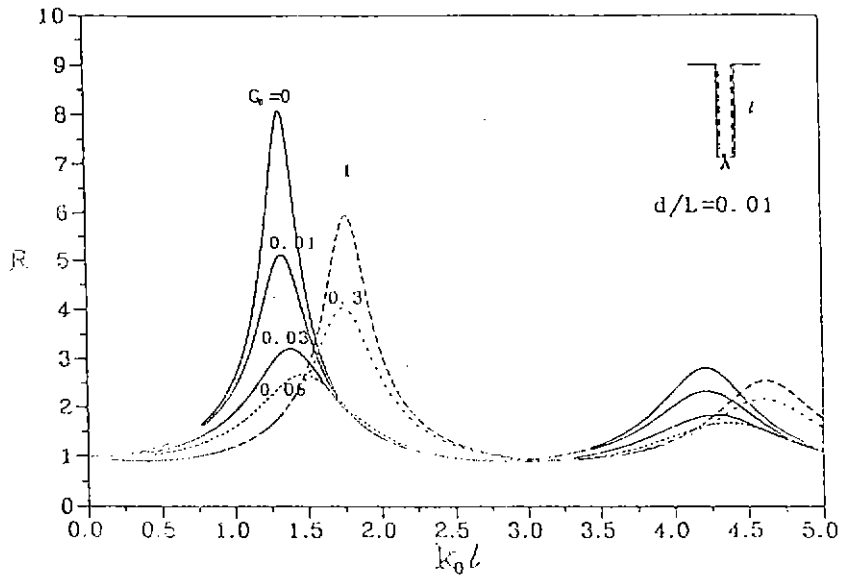


圖6-1-4 單層多孔板消波體岸壁之矩形港池當消波室寬度 $d/L = 0.01$ 在港池底端A點處幾種不同多孔影響參數 G_0 值之擴大率 R 與無因次波數 $k_0 l$ 相關曲線圖

二、Model WP21：實例說明

考慮一等斜率 $1/20$ 之海岸地區，在海岸線中央處有一凸岬存在，其等深線分佈如圖 6-2-1，計算區大小約為 $(0 < y < 1000m)$ ， $-400m < x < 400m$ 。本例子將計算週期 10 秒之波浪，由外海以入射角 20° 之方向進入海岸後產生之波場分佈。

區域在 (x, y) 平面原座標系統之網格分佈如圖 6-2-2a，經貼壁座標轉換後區域在 (ξ, η) 平面之網格分佈如圖 6-2-2b，在 (ξ, η) 平面之計算範圍為 $(0 < \eta < 1000m, 0 < \xi < 800m)$ ，網格大小分別為 $\Delta\xi = 9m, \Delta\eta = 10m$ 。圖 6-2-3 為計算區之等波高(米)分佈曲線圖，圖 6-2-4 為計算區之等波向角(度)分佈曲線圖，圖 6-2-5 至圖 6-2-7 別為幾個剖面之波高，水深，入射角沿著離岸方向之分佈曲線比較圖。

[註]：有關本模式之使用請參考蘇等(1995)Model WP21 使用手冊。

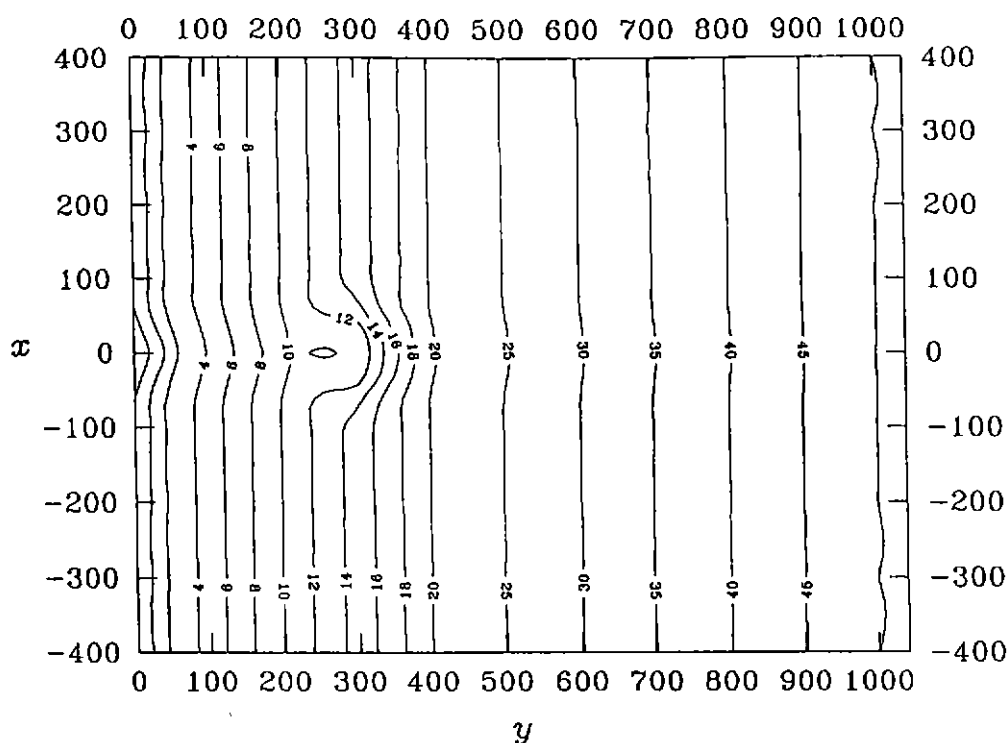


圖6-2-1 近岸區域等深線分佈圖

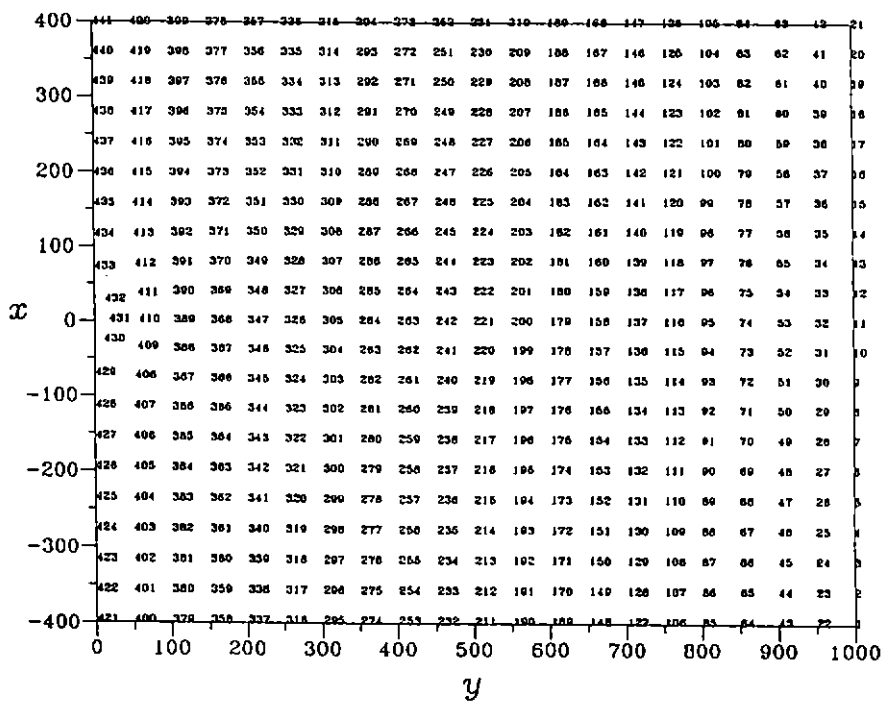


圖6-2-2a 近岸區域在(x,y)平面之網格分割示意圖

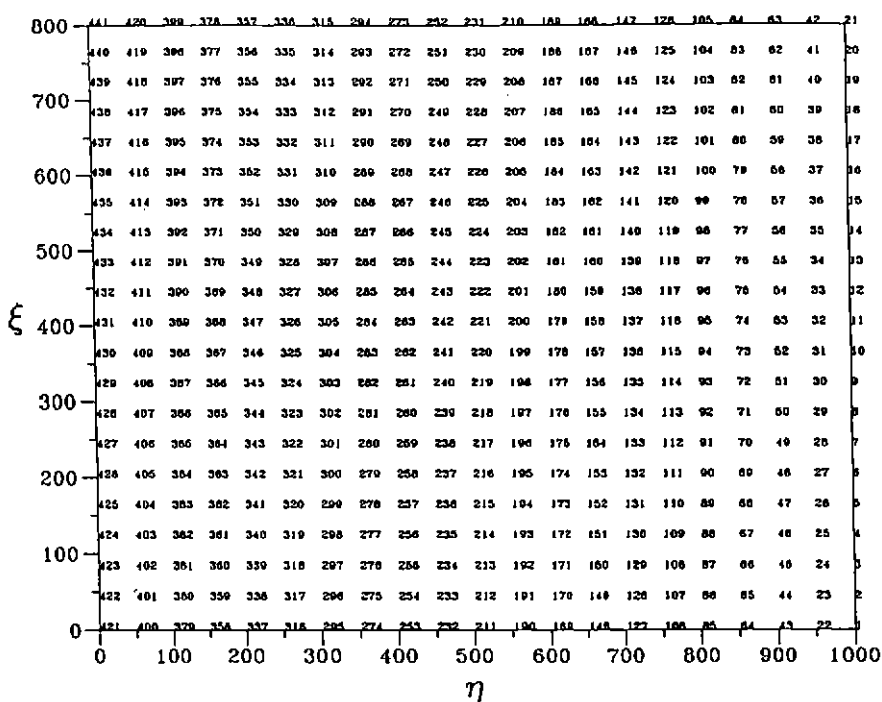


圖6-2-2b 近岸區域在 (ξ, η) 平面之網格分割示意圖

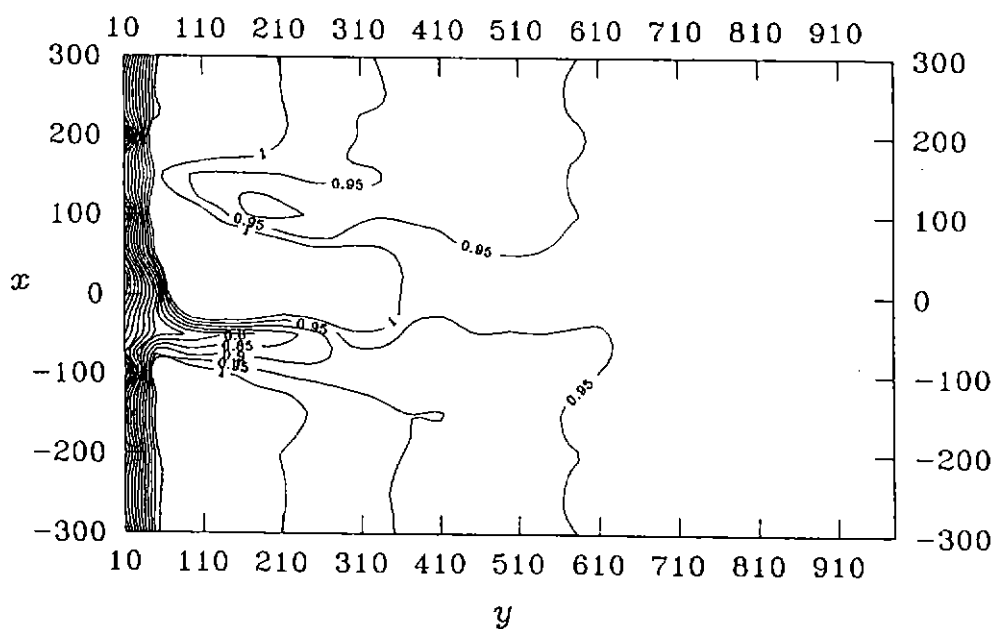


圖6-2-3 近岸區域等波高(米)分佈曲線圖

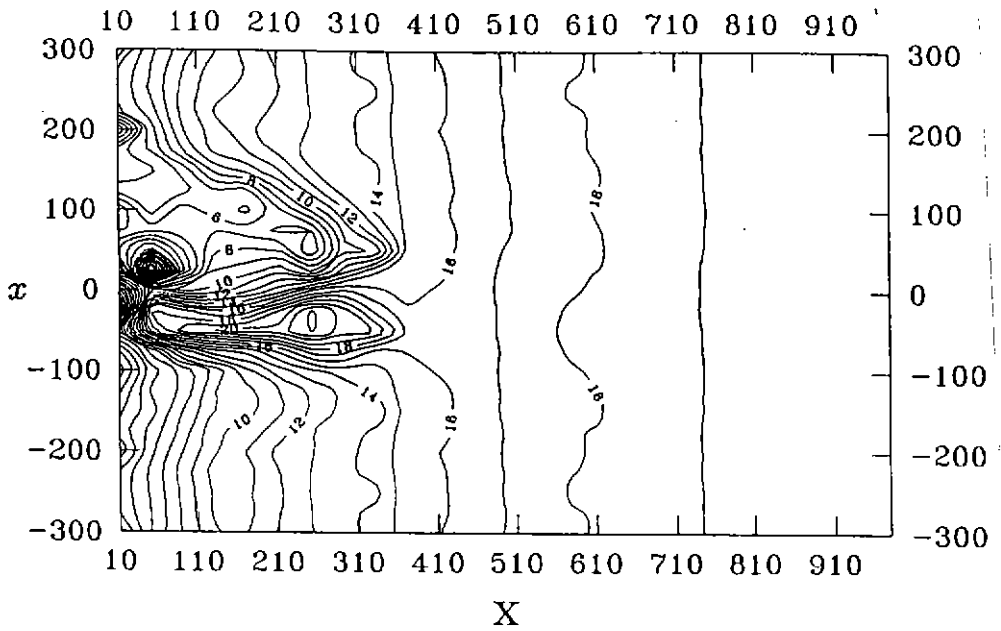


圖6-2-4 近岸區域等波向角(度)分佈曲線圖

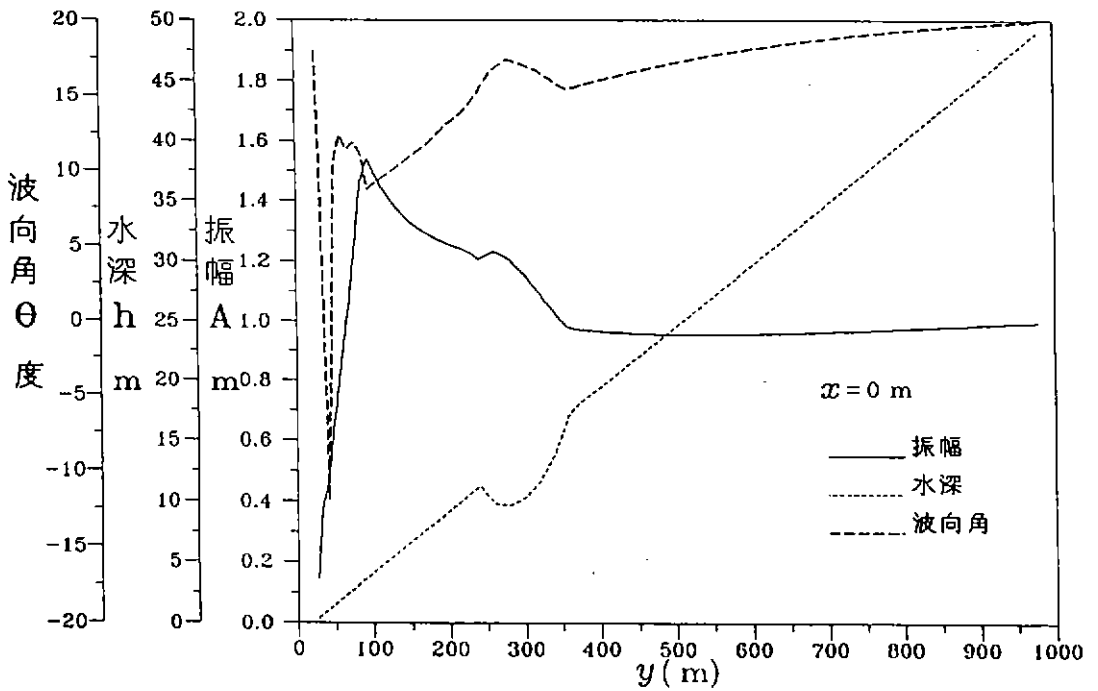


圖6-2-5 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面(x=0)分佈曲線圖

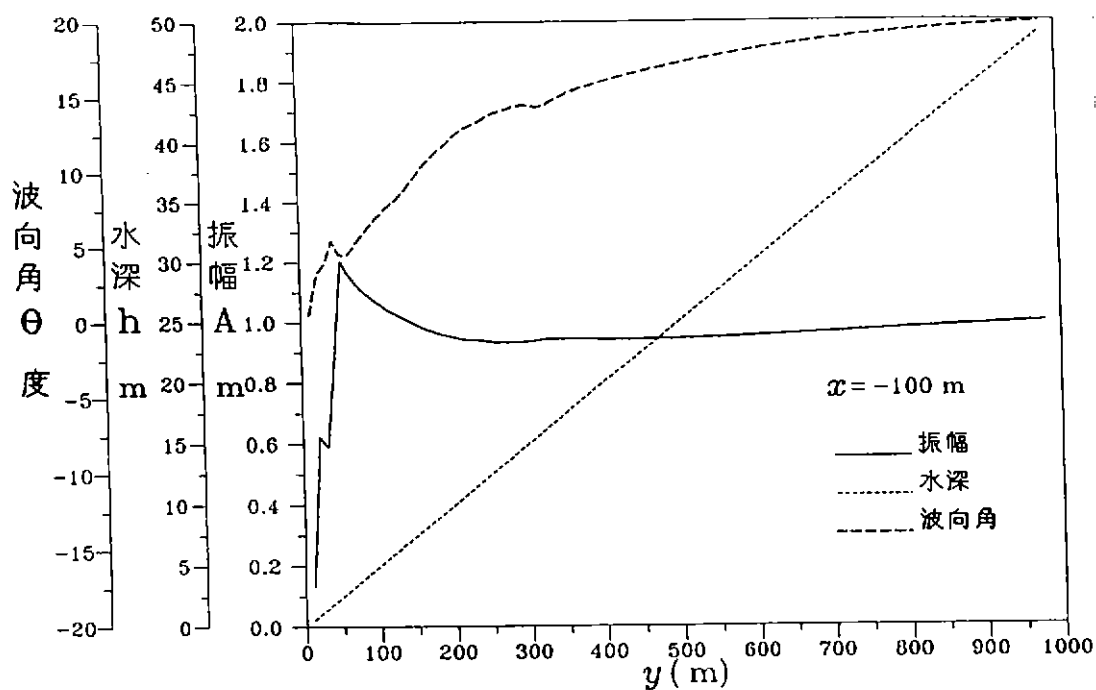


圖 6-2-6 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=-100$)分佈曲線圖

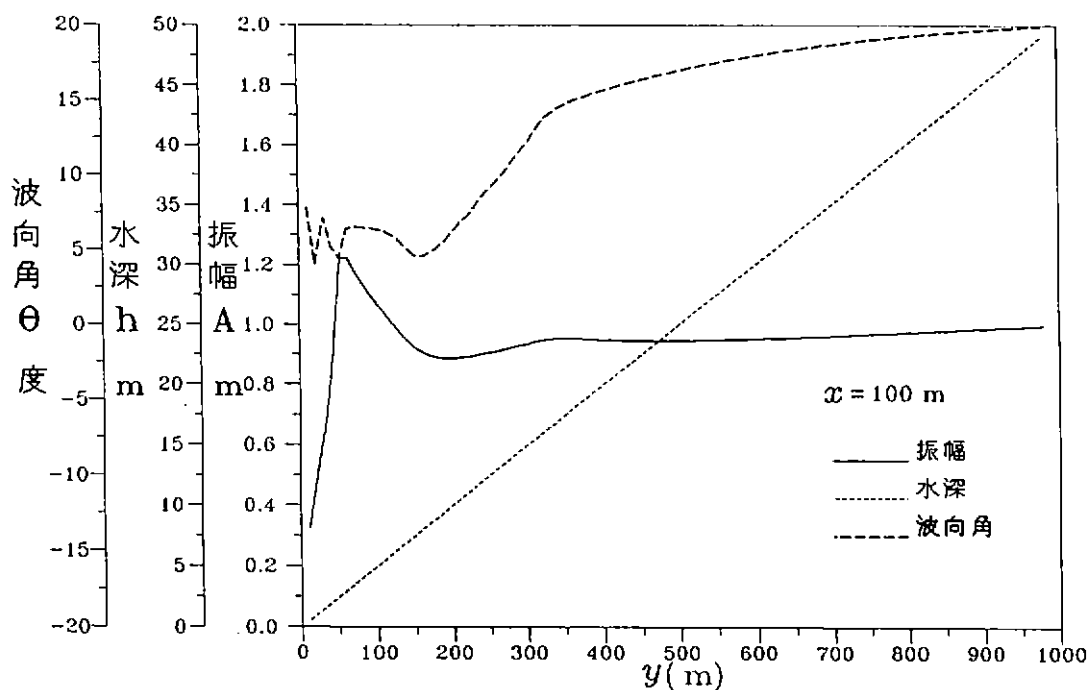


圖 6-2-7 波高水深及入射角沿著離岸方向剖面($x=100$)分佈曲線圖

三、Model CT31：實例說明

潮流模式，取一長方形港池如圖 6-3-1 所示，(長 30 公里，寬 2.5 公里，深度 8 米)對數值模式做初步印證。並假設開口有一振幅 1 米，週期 12.5 小時之潮波，作用於港池，如圖 6-3-1 所示。此計算例為模擬一個三面封閉僅一面其中一部份開口之矩形港池在開口處受日潮作用港池內之水位及流場變化。計算此例主要目的在測試二維單層模式計算平面流速之正確性。

數值計算中所用之有限元素格網如圖 6-3-2 所示，水深方向則取單層。數值積分所用之時間間距取 100 秒。數值模式計算結果在部份時間港池內等水位分佈分別如圖 6-3-3 所示，由於港邊壁為全反射直立壁因此可預期受到反射波影響於漲潮時港內水位較開口處水位為高，退潮時港內水位則較開口處水位為低。數值模計算結果在時間之港內速度流場分佈則分別表在圖 6-3-4，港池開口處由高潮位退潮至零水位時港池流場為往開口處流動而港池開口處由低潮位漲潮至零水位時港池流場則為由開口處往港內流動。

[註]：有關本模式之使用請參考蘇等(1995)Model CT31 使用手冊。

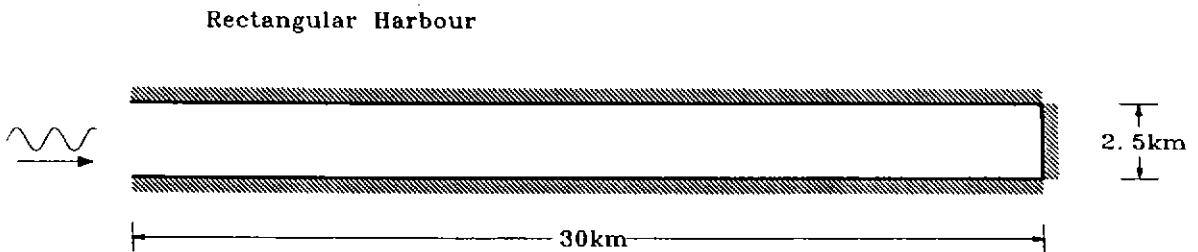


圖 6-3-1 長方形港池圖 (長 30 公里，寬 2.5 公里，深度 8 米)



圖 6-3-2 有限元素格網分割圖

Example-1 : Rectangular Harbor with a open CAFE1A11.DAT
Water level (cm)

410 t= 1.14hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

510 t= 1.42hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

610 t= 1.69hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

710 t= 1.97hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

810 t= 2.25hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

910 t= 2.53hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1010 t= 2.81hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1110 t= 3.08hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

圖 6-3-3 水位分佈圖

Example-1 : Rectangular Harbor with a open CAFE1A11.DAT
current velocity $\longrightarrow$ 100.0 (cm/sec)

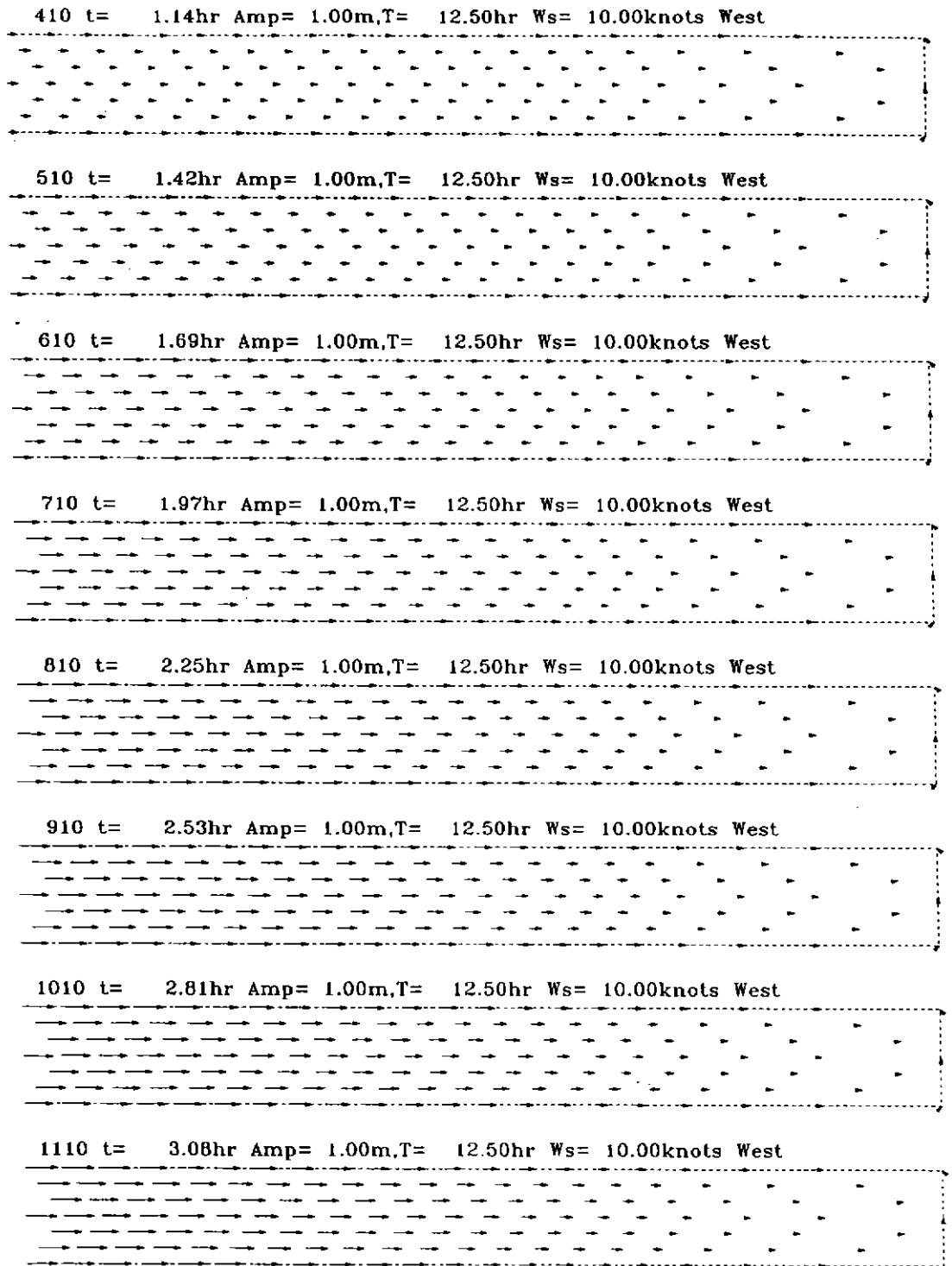


圖6-3-4速度分佈圖

四、Model CL21：實例說明

沿岸流模式之驗證,我們將取 Watanabe and Maruyama (1986) 之數值計算結果做比較。考慮存在一離岸堤之近岸海域,如示意圖 6-4-1,其地形分佈則如附圖 6-4-2,圖 6-4-3 為 (Watanabe and Maruyama, 1986) 數值計算之波高分佈,圖 6-4-4 為數值計算之流況結果。為方便與 Watanabe and Maruyama (1986) 之結果比較,此處波高之資料取用其數值計算之結果,在相同之地形及波高條件下,圖 6-4-5 為本文沿岸流模式計算之結果。比較圖 6-4-4 與圖 6-4-5 之流況分佈,雖然型態不完全一致,但大體而言,甚為相似。

[註]:有關本模式之使用請參考蘇等(1995)Model CL21 使用手冊。

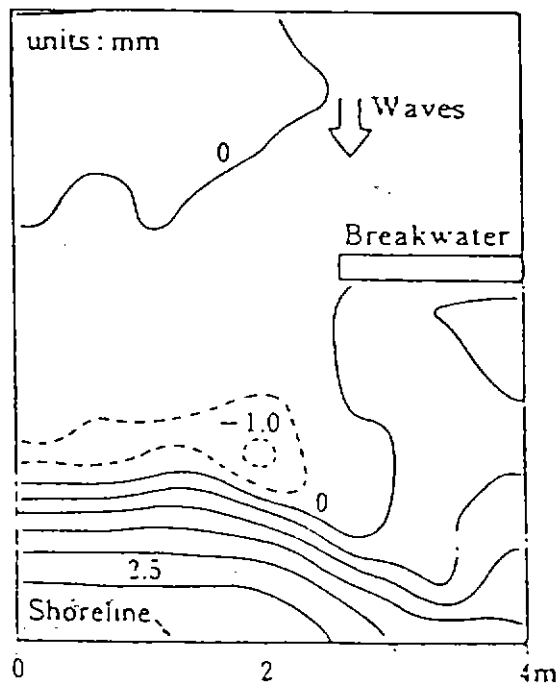


圖 6-4-1 近岸流模式計算海域區域示意圖

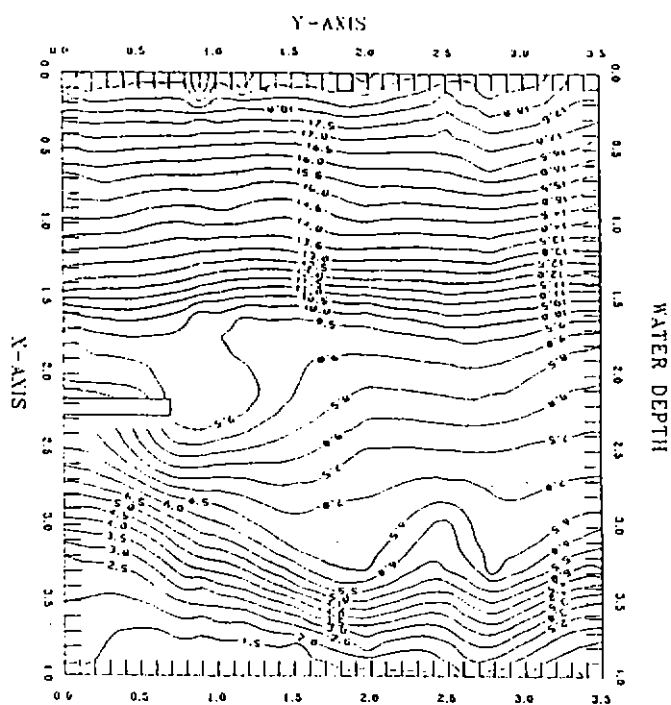


圖 6-4-2 近岸流模式計算海域區域水深圖

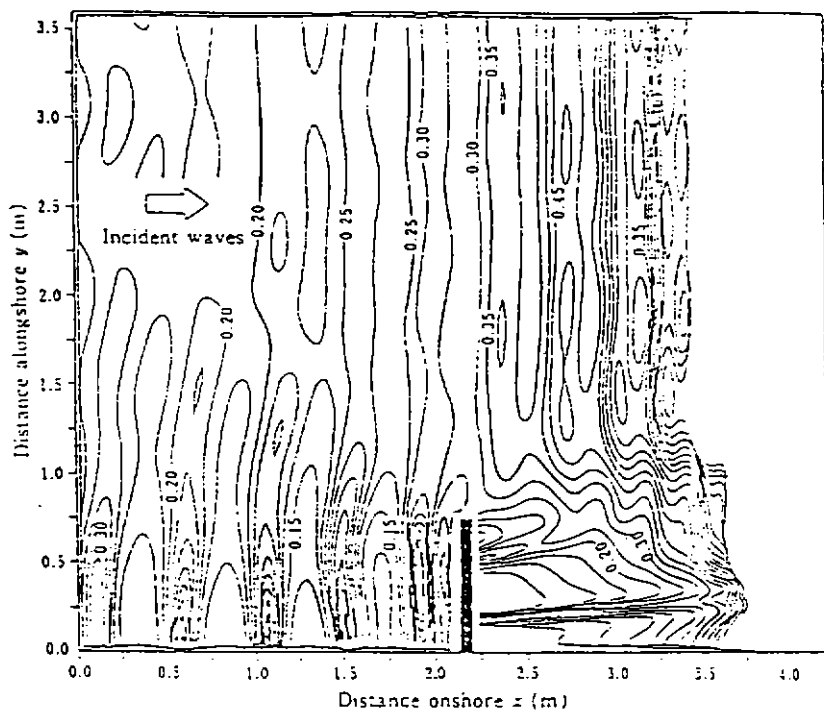


圖 6-4-3 近岸流模式計算海域區域波高分佈圖

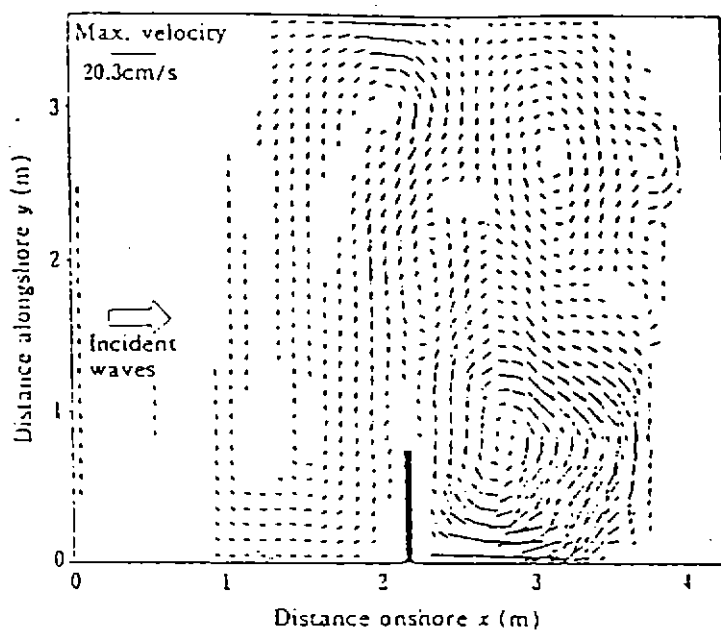


圖 6-4-4 Watanabe and Maruyama (1986) 之數值計算流場分佈圖

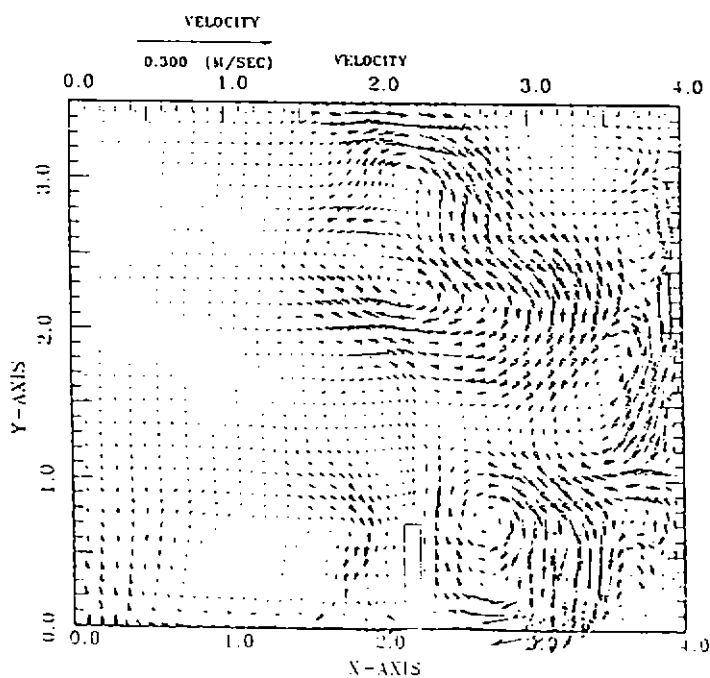


圖 6-4-5 近岸流模式數值計算海流分佈圖

柒、討論及結論

- 1、推算波浪從外海傳遞至近岸海域之波場分佈,如果海岸線為平緩沙灘,反射波不明顯之情形,引用拋物線型態緩坡方程式建立之有限差分法模式甚為適用。在應用貼壁座標轉換,其可取較大之網格點,將節省甚多之記憶體,遠較有限元素法模式為佳。
- 2、推算等水深不規則形狀港池之波場分佈或港池共振曲線變化,可引用較簡易之邊界元素法模式。若港池水深為緩變,則應引用有限元素法模式。在推算港池波場,則不宜使用有限差分法模式(拋物線型態方程式)。邊界元素法模式及有限元素法模式,需要港口外之區域為等水深及海岸線平直無限延伸之理想條件。若無法滿足此二個理想條件,計算之結果將存在部分之誤差。
- 3、本文建立之波場推算模式,乃結合有限差分法模式及有限元素法模式二者之優點。整個計算區可為不等水深,外海區以有限差分法模式由外海深水區推算至適當港口處,由港口處至港池之區域再引用有限元素法模式計算波場分佈。此方法將可改進有限元素法模式,在港口外為等水深及海岸線皆需為平直之不實際假設條件。
- 4、本文引用有限元素法建立一套近岸地區海流推算數值模式。因為潮汐與波浪之時間尺度差異及時間函數處理不同,分成沿岸流及潮流二個部分獨立處理。潮流模式包括潮汐、風、科氏力、流體剪應力、海岸側面邊界及底床摩擦等效應。沿岸流模式之主要外力則為輻射應力、流體剪應力及底床摩擦等效應。
- 5、為符合實際應用之需要,潮流模式又分為二維模式及三維模式。三維模式需要較多的電腦記憶體及計算時間,適用於垂直方面物理量變化較為劇烈之海域。二維模式則僅需數少的記憶體,一般的個人電腦即符合要求,其適用在流場垂直方向變化不甚顯著之區域。
- 6、沿岸流模式,最主要的外力為波力,波場之推算則引用上年度本計畫建立之波場推算模式求得,在線性波之假設條件下沿岸流模式為一與時間無關之穩定解模式。

7. 對於二維潮流模式,利用深度積分觀念配合 Galerkin 加權殘差法,在使用線性三角形元素建立二維有限元素法模式。三維潮流模式則引用多層深度積分觀念,並配合流體層次界面間動量之傳遞現象。
8. 有限元素法模實際應用時之前置作業如邊界及地形之輸入,或元素之網格分割及結點編號,皆為甚重要及複重工作。元素分割形態好壞將影響計算之精確度,結點之編號更將影響計算時所需之計憶容量。基於實用需要我們也建立一套甚為實用之前置處理方法。
9. 波場與流場模式基本架構已完成,模式計算例之數值解析結果,與其他學者計算結果比較頗為一致,證實發展之數值模式之正確性。為轉移相關單位使用,也分別撰寫模式之使用手冊。
10. 後續工作將採用海岸防災計畫,其他相關子計畫之現場實測資料或試驗結果,探討彌陀海域之波流場特性。

參考文獻

1. Baker, B. B. and E. T. Copson, "The Mathematical Theory of Huygen's Principle", Oxford University Press, London (1950).
2. Berkhoff, J. C. W., "Computation of Combined Refraction Diffraction", Proc. 13th Coastal Engineering Conference, Vol. 1 (1972).
3. Booij, N., "Gravit Waves on Water with Non-Uniform Depth and Current", thesis present to the Technical University of Delft, The Netherlands, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (1981).
4. Chen, H. S. and C. C. Mei, "Oscillations and Wave Forces in an Offshore Harbor", Ralph M. Parsons Laboratory, Report No. 190, MIT, August(1974).
5. Chen, H. S., "Effects of Bottom Friction and Boundary Absorption on Water Wave Scattering", Appl. Ocean Research, Vol. 8, pp.99 ~ 104(1986).
6. Chu, W-S and Yeh. W.W-G., "Calibration of a Two Dimensional Hydrodynamics Model", Coastal Engineering, Vol.9, pp. 293-307, Elsevier Science Publishers, (1985).
7. Chu, W-S and Gardner, S., "A Two-Dimensional partial Tracking Estuarine Transport Model", Water Resources Bulletin, Vol.22, No.2, pp. 183-198, (1986).
8. Chu, W-S., Barker, B.L. and Akbar, A.M. "Modeling Tidal Transport in The Arabian Gulf", ASCE, J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol.114, No.4, pp.37-53, (1988).
9. Chu, W-S., Liu, J-Y. and Flenniken, K.O, "Numerical Modelling of Tide and Current in Central Puget Sound: Comparison of a Three-Dimensional and a Depth-Averaged Model", Water Resources Research, Vol.25, No.4, pp.721-734, (1989).

10. Chwang, A. T., S. H. Ou and C. H. Su , "Wave Oscillations inside Porous-Wall Harbors", Proc. of 5th Conf. on Hydr. Eng. , Taiwan, R.O.C. pp.853 ~ 868 (1990).
11. Dronker, J.J., "Tidal Computations of Rivers, Coastal Areas and Seas", J. of Hydraulics Div., ASCE, Vol 95, No. HY1, Jan. 1969, pp.29-77.
12. Ebersole, B.A. and R. A. Dalrymple, "Numerical Modeling of Nearshore Circulation", Proc. 17th Conf. on Coast Eng., pp.2710-2725, (1980).
13. Goda, Yo and N. Watanabe, "A Longshore Current Formula for Random Breaking Waves", Coastal Eng. in Japan, Vol. 34, pp.159-175, (1991).
14. Hansen, W., "Hydrodynamics method Applied to oceanographic Problems", Proceedings of the Symposium on Mathematical Hydrodynamical Methods of Physical oceanography, institute fur Meereskunde der Universitat Hamburg, Hamburg, West Germany, pp.25-34 ,(1962).
15. Ho, R. T. and H. Bomze , "Basin Oscillations in an Offshore Harbor," Paper No. OTC 2331, Proceedings of the Offshore Technology Conference, Vol., 11, Houston, Texas , pp.853 ~ 969 (1975).
16. Horikawa K. and T. Sasaki, "Consideration on Longshore Current Velocity", Proc. 15th Conf. on Coastal Eng. in Japan, pp.126-135, (1968).
17. Horikawa K. and T. Sasaki, "Field Observations of Near- shore Current System", Proc 13th Conf. on Coastal Eng., pp.635-652, (1972).
18. Hwang , L.S. and E.O. Tuck , " On the Oscillation of Harbors of Arbitrary Shape ", J. Fluid. Mech. Vol. 42 , No. 3, pp. 447 ~ 464 (1970).
19. Kawahara, M., Mirano, H. and Tsubota, K. , " Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow," Int. J. Num, Meth. in Fluids, Vol.2, 89-112, (1982)..
20. Kawahara, M., Kobayashi, M. and Nakata, K. , "A Three-Dimensional Multiple level finite Element Method Considering Variable water Density," in

- Finite Elements in Fluids, Chap. 7, Vol.4, ed. by Gallagher, et al., John Wiley & Sons Ltd (1982).
21. Lee, J.J., "Wave-Induced Oscillations in Harbours of Arbitrary Shape ", Report KH-R-20, W. M. Keck laboratory of Hydraulics and Water Resources, California, Institute of Technology, Berkeley, Calif. (1969).
 22. Lee, J. J., "Wave-induced Oscillations in Harbours of Arbitrary Geometry", J. Fluid Mec. , Vol. 45, pp. 375 ~ 394 (1971).
 23. Lee, J. J. and F. Raichlen " Oscillations in Harbors with Connected Basins ", Report KH-R-26, W. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology (1971).
 24. Lee, J. J. and F. Raichlen , "Oscillations in Harbors with Connected Basins," J. Waterw. , Har. and Coastal Eng. Div. , Vol. 98, No. WW3, pp.311 ~ 332 (1972).
 25. Leenderste, J.J., " Aspects of a Computational Model for Long Period Water Wave Propagation", RM 5294-PR, 'The Rand Corporation', Santa Monica, Calif., May, (1967).
 26. Leendertse, J.J., R.C. Alexander, and S.K. Liu, "A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol.I, Principles of Computation", R- 1417-0 WWR, Rand Corporation, Santa Monica, CA, pp.1-21(1973).
 27. Leendertse, J.J. and Liu, S-K. , " A Three-Dimensional Model for OWRT," Rand, Santa Monica, CA., USA ,(1977).
 28. Leendertse, J.J. and S.K. Liu, " A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol. II, Aspects of Computation", R-1764-OWRT. Rand Corporation, Santa Monica, CA, pp.1-29 (1965).
 29. Liu, P.L.-F. , "Parabolic Wave Equation in Surface Water Waves", Miscellaneous Report CERC 86. U.S. Army, Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, MS (1986).

30. Liu, P.L.-F. , "Wave Transformation " ,in B. LeMehaute and D.M. Hanes (eds.), The Sea Vol. 9: Ocean Engineering Science, Wiley, New York (1989).
31. Liu, P.L.-F. and T., -K. Tsay, "Numerical Prediction of Wave Transformation", J. Waterway Port Coastal Ocean Eng. ASCE, Vol. 114, pp.237 ~ 247 (1988).
32. Liu, L.F. and G. P. Lennon, "Finite Element Modeling of Nearshore Currents", J. of the Waterway Port Coast and Ocean Division, pp.175-189,(1978).
33. Longuet-higgins, M. S. and R. W. Stewart, "Radiation Stress in Water Wave-A Physical Discussion with Applications," Deep Sea Res., Vol. 11, No. 4, pp. 529-562, (1964).
34. Longuet-Higgins, M.S., "Longshore Current Generated by Obliquely Incident Sea Wave," J. Geophys. Res., Vol.75, No.33, pp.6778-6801, (1970).
35. Lozano C. and T. K. Tsay , "Refraction-Diffraction Model for Linear Surface water Waves", J. Fluid Mech. Vol. 101 , pp.705 ~ 720 (1980).
36. Nishimura, H., "Numerical Simulation Nearshore Circulation," Proc. 29th, Japanese Conf. on Coastal Eng., JECE, pp.13-127, (1982).
37. Noda, E. K., "Wave-induced Nearshore Circulation," J. Geophys. Res., Vol. 79, No. 27, pp.4079-4106, (1974)
38. Radder, A. C. , "On the Parabolic Equation Method for Water-Wave Propagation ", J. Fluid Mech. Vol. 95 , pp.159 ~ 176 (1979).
39. Sasaki. T., "Field Investigation of Nearshore Current on a Gently Sloping Beach", Doct. Thesis, University of Tokyo, (1974).
40. Sasaki T., "Simulation on Shoreline and Nearshore Current", Proc. Specialty Conf. on Civil Engs, pp.179- 196,(1975).
41. Sasaki, T. and K. Horiawa, "Observation of Nearshore Current and Edge Waves", Proc. 16th Conf. on Coastal Eng. pp.792-809, (1978).

42. Segerlind L. J. , Applied Finite Element Analysis, Pentech Press London (1974).
43. Stive, M.J.F. and J. A. Battjes, "Random Wave Breaking and Induced Current", Delft Hydraulics Communicaiton No.360, (1986).
44. Thornton, E. N., "Variation of Longshore Current Across the surf Zone" Proc. 12th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 291-308, (1970).
45. Tsai, C.T., Kuo, C.T. and Su, L.T. "A Study on Typhoon-Flood Simulation in Tidal River", Proc. of ROC-Japan Joint Seminar on Water Resources Eng., Taipei, pp.149-104 (1987).
46. Tsay, T. K. and P. L- F. Liu , "Numerical Solution of Water Wave Refraction and Diffraction Problems in the Parabolic Approximation " , J. geophys. Res. , Vol. 87 pp. 7932 ~ 7940(1982).
47. Tsay, T. K. and P. L- F. Liu , "A Finite Element Model for Wave Refraction and Diffraction " , Appl. Ocean Research , Vol. 5, pp.30 ~ 37 (1983).
48. Tsay, T., K. , W. Zhu and P. L-F. Liu , "A Finite Element Model for Wave Refraction , Diffraction , Reflection and Dissipation", Applied Ocean Research , Vol. 11, No1. pp.33 ~ 38 (1989).
49. Tsay, T., B. A. Ebersole and P. L-F. Liu , "Numerical Modelling of Wave Propagation Using Parabolic Approximation with a Boundary-Fitted Coordinate System ", Inter. J. for Num. Methods in Eng. , Vol. 27, pp.37 ~ 55 (1989).
50. Wang, J.D. and Connor, J.J., " Mathematical Modelling of near Coastal Circulation, Report No.200, Ralph M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, MIT, USA ,(1975).
51. Yin, F., and Chen, S.H. "Tidal Computation on Taiwan Strait", ASCE, J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean, Vol. 108, No. WW4, pp.539-553, 1982.

52. 林銘崇、謝宗誠，「波浪折射-繞射之有限-邊界元素解析」，中華造船工程學刊，第四期，第131～137頁(1985)。
53. 林銘崇、許永誠，「波浪折射-繞射與海流共同效應之有限-邊界元素解析」，國立台灣大學造船工程學研究所，Rept. No. 227 (1985)。
54. 周宗仁、林炤圭，「應用邊界元素法解析任意地形及水深之港池水面波動問題」，第八屆海洋工程研討會，第111～129頁(1986)。
55. 周宗仁、林炤圭，「任意反射率防波堤或岸壁的港池水面振動數值分析」，第十一屆海洋工程研討會，第365～381頁(1989)。
56. 周宗仁、韓文育、張景程，「任意形狀、水深及反射率港池的水面振動實例」，第十四屆海洋工程研討會，第423～443頁(1992a)。
57. 周宗仁、韓文育、朱忠一，「消波式碼頭對港內水面振動之影響」，第六屆水利工程研討會，第668～679頁(1992b)。
58. 陳柏旭、蔡丁貴「局部輻射邊界條件在水波數值模式上應用」，中華民國第十二屆海洋工程研討會論文集，第1～18頁(1990)。
59. 歐善惠、林西川、林火旺、蘇青和，「不等水深多孔岸壁港池之共振模式」，中華民國第十二屆海洋工程研討會論文集，台中，第74～94頁(1990)。
60. 蘇青和，多孔消波體波能消散解析及其應用於港池之研究，博士論文，成功大學水利及海洋工程研究所，台南(1993)。
61. 蘇青和、歐善惠、章梓雄，「多孔岸壁港池之波能消散現象」，港灣技術，第七期，第1～24頁(1992)。
62. 蘇青和、蔡丁貴、歐善惠，「數值方法及輻射邊界在港池共振應用之探討」，中華民國第十三屆海洋工程研討會論文集，第23～37頁(1991)。
63. 蘇青和、蔡丁貴，「港池波場推算模式—Model WE21使用手冊」，港灣技術研究所研究出版，(1995)。
64. 蘇青和、蔡丁貴，「近岸波場推算模式—Model WP21使用手冊」，港灣

技術研究所研究出版, (1995).

65. 蘇育和、蔡丁貴, 「近岸潮流模式—Model CT31使用手冊」, 港灣技術研究所研究出版, (1995).
66. 蘇育和、蔡丁貴、莊文傑, 「沿岸流模式—Model CL21使用手冊」, 港灣技術研究所研究出版, (1995).
67. 李兆芳, '台灣鄰近海域潮流預報數值模式', 第二屆海洋數值模式研習會論文集, 台灣省交通處港灣技術研究所, 民國78年。
68. 李賢文, '台灣鄰近海域潮流預報數值模式', 第二屆海洋數值模式研習會論文集, 台灣省交通處港灣技術研究所, 民國78年。
69. 劉肖孔, "中國海域三度空間數值模式", 行政院科技顧問組, 民國77年。
70. 磨年生, "離岸堤背後流場之研究", 碩士論文, 國立成功大學水利及海洋工程研究所, 台南, (1987).
71. 孫君偉, 許泰文, 歐善惠, 張憲國, "離岸堤背後地形變化之研究", 中華民國第十三屆海洋工程研討會論文集, pp.519-536, (1991).
72. 蔡長泰、宋長虹, "河海模式之初步研究", 第3屆水利工程研討會論文集, 台南, 第1010-1022頁, (1990)。
73. 蕭政宗、蔡長泰, "感潮河川颱風洪暴潮模式及其於淡水河系之應用", 中國土木水利工程學刊, 第三卷, 第三期, (1991)。
74. 高瑞棋、李忠潘和李兆芳等, 深澳漁港擴建與發電廠出水口佈置影響之海域流況現場調查及溫排水擴散研究, 台南水工試驗所研究報告第110號, (1989)。
75. 林銘崇和蔡禮滔, "防波堤附近近岸流之數值模擬", 國立台大學土木工程學研究所研究報告, (1982)。

誌 謝

本計畫承國家科學委員會補助,計畫編號: NSC84-2621-P-124-002-B,謹此誌謝,承數學模式組同仁陳毓清小姐之論文繕打,併於此致謝。