

長波非線性效應研究

執行單位：海岸工程組

計畫主持人：徐進華 研究員

參與人員：吳基 助理研究員

長波非線性效應研究

徐 進 華

摘 要

引發港池共振現象的能量來源,除由地震所產生的 Tsunamis 外,一般相信皆來自於短波群在近岸所產生的自由行進超長重力波(infragravity waves),在本研究中我們應用 WKB 方法,導出由短波群經由非線性效應產生長波的控制方程,此組方程式可適用在較以往理論廣泛的情況下,目前我們先應用它估計在各種水深情況下,伴隨短波群前進之強制性長波的量,隨後即簡單計算由短波群在類似台灣東岸大陸棚的階梯狀地形,以及在起始碎波區所產生的兩種自由行進長波,其結果顯示後者較前者大很多,但若入射的短波群本身即由波長相當長的湧浪組成,則由階梯地形亦可產生振幅很大的自由長波,況且此時在淺水區(水深 20 米以下)具有很大的強制性長波,因而在港的入口處可產生顯著的自由長波,進而引發港池的共振。

An investigation of the nonlinear mechanisms for generation of infragravity waves

Jinn-Hwa Shyu

ABSTRACT

The infragravity waves other than the earthquake induced tsunamis, which excite harbour oscillations, are generated in the nearshore region through nonlinear transfer of energy from groups of short waves. Its governing equations are developed using a WKB method and have wider application than the previous theories. By using these equations, we first estimate the orders of magnitude in different water depths of forced long waves tied to groups of short waves, and then the free long waves radiating away from the region over a step bottom simulating the continental shelf off the east coast of Taiwan, and from the initial breaking zone, are both calculated. The results indicate that the latter is superior to the former, however if the incident wave groups are composed of low-frequency swell, the free long waves owing to a step bottom can also be remarkable, and in this case bound infragravity waves can very effectively be induced in shallow waters, which may generate a significant amount of free long-wave energy at the entrance to a harbour and therefore resonate the natural modes of the harbour basin.

誌 謝

本研究在港研所八十四年度研(七)計劃經費支持下完成,故對台灣省政府及省交通處特致謝忱。港研所楊怡芸小姐和陳毓清小姐協助打字亦一併致謝。

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
一．前言	1
二．強制性長波的控制方程	3
三．各種水深下的強制性長波	10
四．由地形不連續所產生的自由長波	14
五．由短波群破碎所引發的自由長波	20
六．討論	30
附錄	31
參考文獻	33

一．前言

台灣東部的花蓮港和蘇澳港受颱風風浪或湧浪侵襲時，港內海水皆產生極大的振盪，使船隻發生斷纜、流錨、或撞毀護舷的現象，此種劇烈的振盪最近已由港研所在花蓮港測出具有約 160 秒的主要周期(曾, 1995)，而在一個數值計算中蘇(1995)也證實花蓮港確具有一個約 160 秒的自然周期，因此目前我們可初步判斷花蓮港內的劇烈振盪為一種共振現象。

接下來要探討的是颱風風浪和湧浪究竟以何種方式引發共振運動，它是否有可能直接由這些周期僅十幾秒或最多幾十秒的波在進入港內後，經由非線性效應產生約 160 秒的共振運動？此一可能性若考慮兩種運動的周期相差甚大，且前者大部分的能量被防波堤阻擋在港外，而進入港內的能量又遭遇消波作用，再加上重力波的波波交互作用乃為一種非常弱的作用(參考 Phillips (1977), §2.8)，故是否有可能經由重覆此一過程將能量逐步由周期為十幾秒的波傳遞給約 160 秒的波殆有疑問(若此一過程在港內可產生 160 秒的波，則它在港外或深海應也可如此)，況且目前也沒有數學理論顯示經由此種過程可引發港池的共振，因此我們可以大致論斷引發花蓮港共振現象的長波應來自於港外或由短波群在港的入口處繞射而產生的自由長波(Mei & Agnon 1989; Wu & Liu 1990)。

周期約 160 秒的長波已屬於一般所謂的超長重力波(infragravity waves)，後者的頻率範圍大約定義為 $0.004 < f < 0.04\text{Hz}$ ，此種長波由於對很多海岸過程有重大影響，且對地殼性質的研究有幫助，以往曾進行很多這方面的觀測，Webb *et al.* (1991) 最近即應用裝設在深海海底(約 5000 公尺深)的儀器陣列觀測此種波的方向波譜，並且研究此超長重力波的能量與近岸海域內的指示波高平方平均值間的相關性，因而發現即使在深海海域有暴風區存在，超長重力波僅能在近岸海域由較短的波產生。另一方面，Guza & Thornton (1985) 和 Elgar *et al.* (1992) 在近岸觀測超長重力波的能量與當地周期較短波的能量間的相關性，也發現前者應由後者在當地產生，因若超長重力波本身也是和短波一樣由外海暴風區傳來，由於其群速度遠大於短波，它應較後者早到達觀測點，但此種現象在資料中未曾被發現，因此我們可以推測引發花蓮港和蘇澳港共振運動的長波，皆是由外海入射的短波群在當地經由特殊的過程產生。

根據 Longuet-Higgins & Stewart (1962) 的理論，當波的振幅緩慢變化時，由於非線性效應，平均水面的高度亦將隨之起伏，故若此變化具有周期性(亦

即具有波群的形式),則一種強制性長波將伴隨原來的短波群前進,此種強制性長波本身無法引發港池共振(其理由與短波無法有效引起港池共振相同),但它在任何地形不連續處皆可引發振幅或大或小的自由行進長波,此地形不連續可發生在類似台灣東岸很陡的陸坡處,亦可發生在前面所提到的港口入口處。另一種由短波群引發自由長波的機制是,因短波的振幅作緩慢及周期性變化,故它在近岸的碎波點位置亦將發生周期性振盪,由於波在前進時帶有質量傳送,故碎波點位置的振盪可如同一個造波機般產生自由行進的長波。

上述兩種引發自由行進超長重力波的機制,以往均採用淺水近似的理論(前者如Molin (1982), Mei & Benmoussa (1984)和Liu (1989);後者如Symonds *et al.* (1982)及Schäffer (1993, 1994)),此種近似由於超長重力波波長極長,故一般皆適用,但為清楚瞭解波群由深海進入淺海,特別是在遭遇如台灣東岸很陡的陸坡地形所發生的變化,以及為建立一個適用範圍更廣範的理論,我們在第二節導出適用於各種水深由短波群引發長波的控制方程,此組方程式除可被用來估計在各種水深情況下強制性長波的量級(第三節)外,未來尚可被用在較複雜地形以及較高階近似的討論,但目前我們僅應用第三節所獲得的結果及以往的理論,針對台灣東部海底地形,概略估計由水深不連續(第四節)及由碎波點位置振盪(第五節)所產生自由長波的量,並在最後一節比較和討論其結果。

二．強制性長波的控制方程

由短波群經由非線性效應產生強制性長波(forced long waves)的控制方程式最早由 Longuet-Higgins & Stewart (1962) 導出, 此組方程式中的 field equation 爲 Laplace equation, 故所產生的長波(相對於波群中的短波而言)與水深相比可爲中間水深波, 甚或深水波, 此時短波群的效應是改變其邊界條件, 但 Longuet-Higgins & Stewart 是採用類似於 Stokes 攝動展開的方式導出此一邊界條件, 故它僅能適用在等水深的情況(亦即短波群中每一成分波的波長與振幅皆不隨時間和空間改變)。

Longuet-Higgins & Stewart(1962) 另外也經由考慮質量和動量沿水深積分後守恒性質, 導出在變化水深中的強制性長波的控制方程, 此組方程式中含輻射應力(radiation stress), 僅能適用在波群的長度與水深相比極長(亦即強制性長波爲淺水波)的情況。Schäffer(1993) 利用類似的方法亦導出相同的結果。

由於目前的波浪場爲由短波引發長波的過程, 故其內包含兩種尺度的運動, 因此採用 WKB 型式的展開較適當, Chu & Mei (1970) 應用此種方法研究緩慢變化的非線性波時, 即同時獲得強制性長波的控制方程, 此組方程式(與 Longuet-Higgins & Stewart (1962) 者實際相同) 日後爲 Mei & Benmoussa (1984) 以及 Liu (1989) 等人所採用, 但它仍僅適用在長波爲淺水波的情況。以下我們將針對強制性長波, 直接應用 WKB 近似的觀念導出其邊界值問題, 此組方程式可適用在各種水深條件下, 故有利於我們計算和估計在各種情況下強制性長波(及由其所引發的自由長波)的大小。當水深變淺時, 此組方程式即回歸到 Longuet-Higgins & Stewart (1962) 以及 Chu & Mei (1970) 的公式。

以下我們僅考慮 WKB 展開式中長波的第一階近似, 故僅需保留所有緩慢變化參數(如波數、振幅等)的一階導函數項, 其更高階微分以及任何兩個一階導函數項的乘積則予以忽略; 故而當我們知道某一項未來將進行微分或與一較小的項相乘時, 我們此時將忽略其表式中任何含緩變參數一階導函數的項, 並將表式中的等號改用“ $\approx$ ”的符號以資註明。採用這種處理方式我們甚至將 WKB 展開式中的第二階項亦包含在內(雖後者的變化率無法知道), 故能確保第一階近似解的完整性, 而在計算其變化率時, 亦不慮與第二階近似混淆。

首先由波浪運動的非旋性質知,長短波的運動(可分別視為平均流和擾動部份)應分別滿足 Laplace equation,故我們僅需求各自的邊界條件,若將全部流的運動和動力邊界條件在平均水面高度(定為 $z = 0$)做泰勒級數展開,可表為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \dots \\ g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (z = 0) \quad (2.1a, b)$$

其中 ζ 表水面位移, ϕ 表流速勢, g 為重力加速度, x 代表水平方向的座標, t 為時間。上式中 ζ 和 ϕ 包含各種尺度的運動,但若其主要部份為一自由行進、弱非線性、且波長與振幅做緩慢變化(不論是因地形或離散關係造成)的正弦函數波,則其第一階近似可表為

$$\zeta_s = \frac{1}{2} \left\{ a(x, t) e^{i\chi(x, t)} + * \right\} \quad (2.2)$$

$$\phi_s = \frac{1}{2} \left\{ \left[A(x, t) e^{\int_0^z l_1(x, z, t) dz} + B(x, t) e^{-\int_0^z l_2(x, z, t) dz} \right] e^{i\chi(x, t)} + * \right\} \quad (2.3)$$

其中星號代表它前面一項的共軛複數, $a(x, t)$ 表當地的振幅, $\chi(x, t)$ 表相位函數, 由後者可決定當地的波數和頻率分別為

$$k(x, t) = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \omega(x, t) = -\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.4)$$

在(2.3)內由 $A(x, t)$ 和 $B(x, t)$ 所代表的兩項分別為 Laplace equation 兩個獨立的解,此種表示法描述 ϕ 在 z 方向的變化具有一般性。

由於(2.3)亦需滿足在底部 $z = -h$ 的邊界條件,因此我們可以決定式中 A 和 B 之間的關係式,此一邊界條件目前可表為

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial z} = -\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{at} \quad z = -h$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[A l_{1b} e^{\int_0^{-h} l_1 dz} - B l_{2b} e^{-\int_0^{-h} l_2 dz} \right] e^{i\chi} + * \right\} \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \Big|_{z=-h} &\approx \frac{1}{2} \left\{ i k \left[A e^{\int_0^{-h} l_1 dz} + B e^{-\int_0^{-h} l_2 dz} \right] e^{i\chi} + * \right\} \end{aligned}$$

且 l_{1b} 和 l_{2b} 分別為 l_1 和 l_2 在底部的值, 故代入後可得

$$B = A \frac{l_{1b} + ik\partial h/\partial x}{l_{2b} - ik\partial h/\partial x} e^{\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz} \quad (2.5)$$

因此(2.3)式可改寫為

$$\phi_s = \frac{1}{2} \left\{ A \left[e^{\int_0^z l_1 dz} + \frac{l_{1b} + ik\partial h/\partial x}{l_{2b} - ik\partial h/\partial x} e^{\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz} e^{-\int_0^z l_2 dz} \right] e^{i\chi} + * \right\} \quad (2.6)$$

上式中 $e^{\int_0^z l_1 dz}$ 表振幅往水底方向指數衰減, 故此部份的解在水面位置應滿足

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial x} = i \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \quad \text{at} \quad z = 0$$

(參考 Shyu & Phillips, 1990)。同理, 含 $e^{-\int_0^z l_2 dz}$ 的解應滿足

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \quad \text{at} \quad z = 0$$

代入後可分別獲得

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= k - i \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \\ l_2 &= k - i \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz \right] \end{aligned} \right\} \quad (z = 0) \quad (2.7)$$

上式中最後一項是較小的項, 故可化簡為

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz \right] = -2 \frac{\partial}{\partial x} (kh) \quad (2.8)$$

若我們更令(2.6)式中兩獨立的解皆滿足 Laplace equation, 並將(2.7)代入可得

$$\frac{\partial l_1}{\partial z} = -i \frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial z} = i \frac{\partial k}{\partial x} \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (2.9)$$

由(2.7)和(2.9)我們即可計算任一深度的

$$l_1(x, z, t) = l_1(x, 0, t) + z \frac{\partial l_1}{\partial z}(x, 0, t), \quad l_2(x, z, t) = l_2(x, 0, t) + z \frac{\partial l_2}{\partial z}(x, 0, t) \quad (2.10)$$

上式當然無法適用在水很深的情況, 但此一限制不會影響其應用; 因當 $|z|$ 很大時, (2.6) 式的振幅將趨近於零, 故 (2.10) 式中的誤差將不會產生任何的影響。由 (2.10) 亦可証實 (2.8) 式, 且在忽略更高階項情況下, 可証明

$$\frac{l_{1b} + ik\partial h/\partial x}{l_{2b} - ik\partial h/\partial x} = 1$$

因此 (2.6) 可改寫為

$$\phi_s = \frac{1}{2} \left\{ A \left[e^{\int_0^z l_1 dz} + e^{\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz} e^{-\int_0^z l_2 dz} \right] e^{i\chi} + * \right\} \quad (2.11)$$

接下來將 (2.2) 和 (2.11) 代入 (2.1a), 並消去非線性項, 可得

$$-i\omega a + \frac{\partial a}{\partial t} = A \left[l_1 - l_2 e^{\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz} \right]$$

將 (2.7) 代入並參考 (2.8) 可獲得

$$-i\omega a + \frac{\partial a}{\partial t} = A \left[k - k e^{\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz} - i \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} e^{-2kh} - 2ie^{-2kh} \frac{\partial}{\partial x}(kh) \right] \quad (2.12)$$

由上式以及因 $l_1 \approx l_2 \approx k$, 我們知

$$A \approx -i \frac{\omega a}{k} \frac{1}{1 - e^{-2kh}}$$

對其微分後產生

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} - 2 \frac{e^{-2kh}}{1 - e^{-2kh}} \frac{\partial}{\partial x}(kh)$$

代入 (2.12) 最後獲得

$$A = \frac{-i\omega a}{k \left(1 - e^{\int_0^{-h} (l_1 + l_2) dz} \right)} \left[1 + \frac{i}{\omega} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{i}{k} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) \right] \quad (2.13)$$

將以上結果代入自由表面的動力邊界條件(2.1b),可得主要項

$$g - \frac{\omega^2}{k \tanh kh} = 0 \quad (2.14)$$

及次要項

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right] + \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial x}(kh) \left[\frac{kh}{\sinh^2 2kh} - 2kh \frac{\cosh 2kh}{\sinh^2 2kh} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{1}{\sinh 2kh} \right] - \frac{\omega^2}{k^3} \frac{\partial k}{\partial x} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{kh}{\sinh 2kh} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

前者代表離散關係式,後者與 action conservation equation 完全吻合。在導(2.15)時,我們且應用由(2.14)所獲得的

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{\sinh 2kh} \frac{\partial}{\partial x}(kh) \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{\sinh 2kh} \frac{\partial}{\partial t}(kh) \quad (2.17)$$

以及由(2.4)所獲得的運動守恒方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

另外,我們也強調將(2.14)和(2.15)劃分為兩個方程式是因它們分別為原式的實部和虛部,故(2.14)顯示 ω 和 k 僅有在更高階(第三階)具有修正項,此點與 Chu & Mei (1970)的理論符合。

以上完成一緩慢變化線性波之求解過程,將此解代入(2.1a,b)的非線性項,特別是二次乘積項,即可計算大小和 $(ak)^2$ 成比例的修正項,這些項包含兩部份:一部份是波數為 $2k$ 的 superharmonics;另一部份則是波數為零(故可視為是平均值),僅振幅做緩慢變化的分量,若此一變化本身具有周期性,則此部份的解即代表目前所考慮的強制性長波。將此部份的解用下註標 L 表示,其邊界條件即可表為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial z} &= -\overline{\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial \zeta_s}{\partial x}} + \overline{\zeta_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2}} \\ g\zeta_L + \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= -\overline{\zeta_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z \partial t}} - \frac{1}{2} \left[\overline{\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial z} \right)^2} \right] \end{aligned} \right\} (z=0) \quad (2.19a, b)$$

其中橫線代表上面所說的平均值。由於

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} + \zeta_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} - \zeta_s \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2}$$

故(2.19a)又可改寫為

$$\frac{\partial \zeta_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \overline{\zeta_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x}}$$

因此將前面所獲得的 ζ_s 和 ϕ_s 代入,可得到強制性長波在自由表面的邊界條件為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega a a^*}{2 \tanh kh} \right) \\ g\zeta_L + \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= -\frac{\omega^2 a a^*}{4 \sinh^2 kh} \end{aligned} \right\} (z=0) \quad (2.20a, b)$$

在(2.20a)中,等號右邊的項為對一緩慢變化變數加以微分,故為一較小的量,因此在求此一較小的量時,原來在 ζ_s 和 $\partial \phi_s / \partial x$ 中較小的項可以事先忽略。但在決定(2.20b)等號右邊的項,則必須考慮這些較小的項(如 $\partial a / \partial x$, $\partial k / \partial x$, ...),但這些項實際互相抵消,因此(2.20a)和(2.20b)等號右邊的項,雖量級不同,但準確到相同的程度。

在(2.20a,b)等號右邊的項可分別視為因短波的存在與變化,使平均水面產生一有效平均質量通量以及有效平均壓力(參考Hasselmann 1971; Shyu & Phillips 1990),此一有效平均壓力的定義和Longuet-Higgins & Stewart (1962)所定義的‘virtual pressure’稍有不同。

接下來我們將證明,當 $k_L h \ll 1$ 時(k_L 表強制性長波的 wave-number),利用淺水近似,我們可將(2.20a,b)改寫成Longuet-Higgins & Stewart (1962)以及Chu & Mei (1970)的形式,因此和Mei & Benmoussa (1984), Liu (1989)以及Schäffer (1993, 1994)所使用的方程式相同。首先,當波為淺水波時,由Laplace equation及水底邊界條件

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \phi_L}{\partial z} \right|_{z=0} &= \int_{-h}^0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial z^2} dz + \left. \frac{\partial \phi_L}{\partial z} \right|_{z=-h} = - \int_{-h}^0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial x^2} dz - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \\
&= -h \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

其中 $\partial \phi_L / \partial x$ 和 $\partial^2 \phi_L / \partial x^2$ 在各深度皆相等, 因此 (2.20a) 可改寫為

$$\frac{\partial \zeta_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega a a^*}{2 \tanh kh} \right) = 0$$

或利用 (2.14) 式表為

$$\frac{\partial \zeta_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \phi_L}{\partial x} + \frac{k}{\omega} \frac{g a a^*}{2} \right) = 0 \quad (2.21)$$

上式與 Mei & Benmoussa (1984) 的 (2.7) 式在二度空間流時完全相同。另一方面, 將 (2.20b) 對 x 微分可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + g \frac{\partial \zeta_L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega^2 a a^*}{4 \sinh^2 kh} \right) = 0 \quad (2.22)$$

此式與 Mei & Benmoussa (1984) 之 (2.8) 式的差異是後者將其最後一項中的 $\omega^2/2g$ 拿到微分符號外, 由於 Mei & Benmoussa (1984) 將 ω 取為定值, 故此兩項結果實際相同, (在其 (2.9) 式中, Mei & Benmoussa 又將 $\omega^2/2g$ 放回微分符號內。) 另外在附錄中我們也證明 (2.21) 和 (2.22) 分別與 Longuet-Higgins & Stewart (1962) 的 (3.33) 和 (3.35) 式完全相同。此兩式雖原先是針對等水深的情況獲得, 但 Longuet-Higgins & Stewart 又在其第五節中, 用嚴密的理論證明它們實際可適用在變化水深的情况。

三．各種水深下的強制性長波

在上節中我們雖針對中間水深的情況，導出緩慢變化線性波的解及其強制性長波的邊界條件(2.20a,b)式，但如第六頁內的解釋，所有這些結果可延伸至各種水深情況。下面我們仍從一般情況開始討論滿足(2.20a,b)的解，故其 field equation 仍為 Laplace equation。

為簡化討論，我們目前考慮等水深的情況，且令短波群的水面位移

$$\zeta_s = a_0 \cos\left(\frac{k_L}{2}x - \frac{\omega_L}{2}t\right) \cos(kx - \omega t) \quad (3.1)$$

其中 a_0, k_L, ω_L, k 和 ω 皆為定值，此一波群在水深不變時可由兩個振幅相同，且頻率極接近的規則波重疊而成。故 ω 和 k 滿足(2.14)式，且

$$\frac{\omega_L}{k_L} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{d\omega}{dk} = c_g \quad (3.2)$$

因此， $a_0 \cos\left(\frac{k_L}{2}x - \frac{\omega_L}{2}t\right)$ 代表緩慢變化（因 $k_L \ll k, \omega_L \ll \omega$ ）的振幅，且它可滿足(2.15)式。而(2.20a,b)中的 aa^* 此時為

$$aa^* = \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{2} \cos(k_L x - \omega_L t) \quad (3.3)$$

其中，第一項將不影響強制性長波，它可由選擇不同的原點位置加以抵消（此一處理可見於一般的 Stokes waves 的理論），故以下我們僅需考慮第二項。

由於(2.20a,b)的 forcing terms 含 $\cos(k_L x - \omega_L t)$ ，我們令

$$\left. \begin{aligned} \zeta_L &= a_L \cos(k_L x - \omega_L t) \\ \phi_L &= (A_L e^{k_L z} + B_L e^{-k_L z}) \sin(k_L x - \omega_L t) \end{aligned} \right\} \quad (3.4a, b)$$

其中 ϕ_L 已滿足 Laplace equation。再代入底部的邊界條件：

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = -h$$

可得

$$B_L = A_L e^{-2k_L h}$$

故

$$\phi_L = A_L (e^{k_L z} + e^{-2k_L h} e^{-k_L z}) \sin(k_L x - \omega_L t) \quad (3.5)$$

將(3.3), (3.4a)和(3.5)代入(2.20a),可得

$$A_L = \left(\frac{\omega_L}{k_L} a_L - \frac{1}{4 \tanh k_L h} \omega a_0^2 \right) (1 - e^{-2k_L h})^{-1} \quad (3.6)$$

再代入(2.20b)可決定

$$a_L = -a_0^2 \left(\frac{\omega^2}{8 \sinh^2 k_L h} + \frac{g k \omega_L}{4 \omega \tanh k_L h} \right) \left(g - \frac{\omega_L^2}{k_L \tanh k_L h} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

以上結果可適用在各種水深,在不同的水深,它們可簡化成以下不同的形式:

(1). $kh \gg 1$, $k_L h \sim 1$ 或更大。此時因

$$\omega^2 = gk, \quad \omega_L/k_L = C_g = \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\sqrt{g/k}$$

故(3.7)可簡化為

$$a_L = -\frac{1}{2g} \frac{\omega^2}{4\theta kh - 1} a_0^2 \quad (3.8)$$

其中

$$\theta = \frac{\tanh k_L h}{k_L h} \quad (3.9)$$

上式和Longuet-Higgins & Stewart (1962)的(3.19)式完全吻合(後者的 $2a_1 a_2$ 相當於如今的 $a_0^2/2$)。將 a_L 代入(3.6)可得

$$A_L = -a_0^2 \sqrt{gk} \frac{\theta kh}{4\theta kh - 1} (1 - e^{-2k_L h})^{-1} \quad (3.10)$$

邊界條件(2.20a,b)此時亦可先化簡為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \omega a a^* \right) \\ g \zeta_L + \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (z=0) \quad (3.11)$$

且因

$$\left| \frac{\partial \zeta_L / \partial t}{\partial \phi_L / \partial z} \right|_{z=0} \propto \frac{\omega_L}{\omega} \frac{1}{\tanh k_L h} \ll 1 \quad (3.12)$$

故可進一步簡化為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_L}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \omega a a^* \right) \\ g \zeta_L + \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (z=0) \quad (3.13a, b)$$

(2). $kh \gg 1$ 且 $k_L h \ll 1$ 。此時 $\tanh k_L h \approx k_L h$, $\theta \approx 1$, 故(3.8)可進一步簡化為

$$a_L = -\frac{1}{8h} a_0^2 \quad (3.14)$$

且

$$\phi_L = -\frac{1}{4} \omega a_0^2 \frac{\cosh k_L(h+z)}{\sinh k_L h} \sin(k_L x - \omega_L t) \quad (3.15)$$

上式實際也可適用在 $k_L h \sim 1$ 或更大的情況(i.e. 狀況(1)); 因在此種情況下, 雖 $\theta \sim 1/k_L h$, 故有可能甚小, 但 $\theta kh \sim k/k_L$, 將始終很大。(3.15)式在目前的情況下甚至還可以進一步化簡, 但因其導函數才具有意義, 故此項化簡可針對後者。另外(3.12)式在 $k_L h \ll 1$ 時可改寫為

$$\left| \frac{\partial \zeta_L / \partial t}{\partial \phi_L / \partial z} \right|_{z=0} \propto \frac{\omega_L}{\omega} \frac{1}{k_L h}$$

由於為同時滿足 $kh \gg 1$ 及 $k_L h \ll 1$, 需 ω_L 小於 ω 不只一個量級, 故上式目前仍遠小於1, 因此(3.13)式在目前情況仍適用。另一方面, 由於在所有狀況

$$\left| \frac{\partial \phi_L / \partial z}{\partial \phi_L / \partial t} \right|_{z=0} \propto \frac{k_L}{\omega_L} \tanh k_L h \quad (3.16)$$

故 $k_L h$ 愈小, $|\partial \phi_L / \partial z|$ 和 $|\partial \phi_L / \partial t|$ 的比值即愈小, 此乃因在淺水區(對長波而言), 長波在自由表面的流速垂直分量與水平分量的比值受底部限制需較小, 故由同樣的短波群(即 $\partial(\omega a a^*/2)/\partial x$ 相同), 水深愈小將產生較大的 $\partial \phi_L / \partial t$, 因此較大的 ζ_L (參考(3.13b)), 但此時因需同時滿足 $kh \gg 1$ 及 $k_L h \ll 1$, 波群的長度需小於

其內短波的波長不止一個量級,表 $\partial(\omega a a^*/2)/\partial x$ 的值此時比一般情況更小,因此,總結來說,當 $kh \gg 1$ 時,強制性長波的振幅皆較小。

(3). $kh \sim 1$ 或更小。此時需 $k_L h \ll 1$, 因此由(3.7),

$$a_L = -a_0^2 \frac{g}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{kh}{\sinh 2kh} \right) (gh - C_g^2)^{-1} \quad (3.17)$$

且由(3.5)和(3.6)

$$\phi_L = \left(C_g a_L - \frac{1}{4} \frac{\omega}{\tanh kh} a_0^2 \right) \frac{\cosh k_L(h+z)}{\sinh k_L h} \sin(k_L x - \omega_L t) \quad (3.18)$$

此兩式皆和 Longuet-Higgins & Stewart (1962) 的(3.17)式吻合。由(3.17)和(3.18)的導出過程及結果我們可以清楚看出,在(2.20a,b)中的每一項皆需予以保留,表在同一方程式中各項具有相同的量級。另一方面,由(3.16)式知 $\partial\phi_L/\partial t|_{z=0}$ (因此 ζ_L)和 $\partial\phi_L/\partial z|_{z=0}$ 的比值此時很大,且(2.20a)等號右邊的forcing term亦不必很小(因 k_L 此時僅需小於 k 一個量級),這些共同導致 ζ_L 在目前的情況比(1)和(2)的情況大一個量級(若其他條件相同),因此 Mei & Benmoussa (1984), Liu (1989) 和 Schäffer (1993, 1994) 等皆僅考慮 $k_L h \ll 1$ 的情況,而採用淺水近似,但即使 $k_L h \ll 1$,有時也不能採用淺水近似(特別是當水深有變化時),此時唯有採用目前的理論。

以上的解僅能適用在水深為等深情況,當水深有變化時,至少需一部份採用數值的方法求解,此在第五節內可獲得一些理解,但真正針對實際海岸地形從事數值計算將留待下一階段進行,但利用上述的結果我們目前仍可計算由強制性長波在一個簡單階梯狀地形所引發的自由行進長波。

四．由地形不連續所產生的自由長波

台灣東部的近岸海底地形可粗略地用圖一代表，故在一百米至二百米深度附近有一個很明顯的大陸棚(continental shelf)，其外緣近似於一個地形的不連續，因此在這裏所產生的強制性長波亦應近似不連續，故而將引發頻率相同的自由長波向外海及海岸方向行進，此種自由行進長波即使短波群在近岸破碎，仍可繼續前進，最後引發港內海水的共振運動。

爲大略估計此一自由長波的量，且爲避免使用數值的方法，我們將地形簡化爲如圖二所示的垂直階梯形，在此種地形下，可採用 Miles (1967) 計算自由波遭階梯地形散射同樣的方法來決定目前由強制性長波所引發的自由長波。在 Miles 的理論中共導出平面波(Plane-Wave)近似和 variational approximation 兩種解，當後者對各種長度的入射波皆可適用時，前者如預期僅能適用在水深較淺(與波長相比)的情況(實際上如 Newman (1965) 所指出，此一近似僅需階梯地形之一邊滿足淺水條件，另一邊甚至可爲無窮水深)，由於花蓮港(或蘇澳港)的共振周期很長(約 160 秒)，故採用平面波近似可充份滿足目前的需要，以下我們即完全依照 Miles (1967) 的步驟導出由強制性長波在階梯處引發自由長波的解。

由於 Miles (1967) 的理論不限於淺水波，故 field equation 仍爲 Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.1)$$

由(2.20a,b)，在自由表面的邊界條件爲

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega a a^*}{2 \tanh kh} \right) = M \\ g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{\omega^2 a a^*}{4 \sinh^2 kh} = P \end{aligned} \right\} \quad (z = 0)$$

或組合成單一方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + K\phi = M + i \frac{\omega_L}{g} P \quad (K = \omega_L^2/g, \quad y = 0) \quad (4.2)$$

其中 y 軸的方向和 z 軸的方向相反(參看圖二)。在上式中等號右邊的 forcing terms 將由我們在上一節所獲得的強制性長波的解完全平衡，故目前僅需求

(4.2) 式之 homogeneous solutions, 此即所謂的自由長波, 它們除滿足 (4.1) 和 (4.2) 式外, 尚需滿足底部的邊界條件:

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial y} = 0 \quad (y = h_m), \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, \quad h_1 < y < h_2) \quad (4.3a, b)$$

其中 $m = 1(2)$ 代表在 $x < (>) 0$ 區域內的解。

在每一固定深度區域內, 滿足 (4.1), (4.2) 和 (4.3a) 之 homogeneous solution 可表為 (隨時間變化的部份因固定為 $e^{-i\omega_L t}$, 故不予明白地列出)

$$\phi(x, y; \kappa) = e^{\kappa x} \psi(y; \kappa) \quad (4.4)$$

$$\psi(y; \kappa) = 2^{\frac{1}{2}} (h - K^{-1} \sin^2 \kappa h)^{-\frac{1}{2}} \cos[\kappa(h - y)] \quad (4.5)$$

和

$$\kappa \tan \kappa h + K = 0 \quad (4.6)$$

滿足 (4.6) 式的特徵值 (eigenvalues) $\pm \kappa_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 有無窮多, 但其中僅有一對解為純虛數 (表 surface-wave modes), 令其為 $\pm \kappa_0 = \pm i k_F$ ($k_F > 0$), 由這些 κ_n 所對應的 $\psi(y; \kappa_n)$ 在 $y = (0, h)$ 範圍內形成滿足上述邊界條件的一組 complete 和 orthonormal 函數集合。當水深為 h_1 或 h_2 時, 我們將該區域內的解分別用下註標 $m = 1, 2$ 表示, 故這時的 κ 是將 (4.6) 中的 h 用 h_m 代入後所獲得的結果。

以下我們也將 surface-wave modes 的 $\psi_m(y; \kappa)$ 改用其他符號表示以資區別

$$\chi_m(y) = \psi_m(y; \kappa_0) = 2^{\frac{1}{2}} (h_m + K^{-1} \sinh^2 k_{F,m} h_m)^{-\frac{1}{2}} \cosh[k_{F,m}(h_m - y)] \quad (4.7)$$

$$k_{F,m} \tanh k_{F,m} h_m = K \quad (4.8)$$

故在單一區域內之一般解, 連同強制性長波, 可表為

$$\begin{aligned} \phi_m = \text{sgn } x \left[\left(A_m e^{-i k_{F,m} |x|} + B_m e^{i k_{F,m} |x|} \right) \chi_m(y) + \sum_{n=1}^{\infty} C_m(\kappa_n) e^{-\kappa_n |x|} \psi_m(y; \kappa_n) \right] \\ + \phi_L \delta_{m1}, \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 δ_{m1} 表 Kronecker delta。上式中我們忽略 h_2 區域內的 ϕ_L ; 因由上一節的討論知, 當 $h_2 \gg h_1$ 時, ϕ_L 在此區域內的值較在 h_1 區域內小一個量級以上, 此亦為

(4.3b) 可做為邊界條件的原因。上式中的未定係數 A_m , B_m 及 $C_m(\kappa_n)$ 需由以下的 matching conditions 決定：

$$\partial\phi_1/\partial x = \partial\phi_2/\partial x, \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (x = 0, \quad 0 < y < h_1) \quad (4.10a, b)$$

若將在 $x = 0$ 位置上的 $\partial\phi_1/\partial x$ 和 $\partial\phi_2/\partial x$ 表為 $U(y)$, 則由於 (4.3b) 以及考慮 $\psi(y; \kappa_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 的正交性質, 我們由 (4.9) 可獲得

$$-ik_{F,m}(A_m - B_m) + \delta_{m1} \int_0^{h_m} \frac{\partial\phi_L}{\partial x}(0, \eta) \chi_m(\eta) d\eta = \int_0^{h_1} U(\eta) \chi_m(\eta) d\eta \quad (4.11)$$

$$-\kappa_n C_m(\kappa_n) + \delta_{m1} \int_0^{h_m} \frac{\partial\phi_L}{\partial x}(0, \eta) \psi_m(\eta; \kappa_n) d\eta = \int_0^{h_1} U(\eta) \psi_m(\eta; \kappa_n) d\eta \quad (4.12)$$

將 (4.12) 代入 (4.9), 並應用 (4.10b), 我們另可獲得積分方程式

$$\begin{aligned} (A_1 + B_1)\chi_1(y) + (A_2 + B_2)\chi_2(y) &= \int_0^{h_1} G(y, \eta) U(\eta) d\eta + \phi_L(0, y) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_1(y; \kappa_n)}{\kappa_n} \int_0^{h_1} \frac{\partial\phi_L}{\partial x}(0, \eta) \psi_1(\eta; \kappa_n) d\eta \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中

$$G(y, \eta) = \sum_{m=1,2} \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^{-1} \psi_m(y; \kappa_n) \psi_m(\eta; \kappa_n) \quad (4.14)$$

由 (4.11) 所代表的兩個方程式, 再加上 (4.13). 理論上我們可由給定由兩方入射之自由長波的量 A_1 和 A_2 決定 U 和 B_1 及 B_2 。此一計算實際涉及解一組數目無窮多的線性代數式, 故要獲得足夠準確的近似解, 需解一組數目相當大的聯立方程式, 但 Miles (1967) 建議在某些情況, 我們可將所有 κ_n 為實數的 $\psi_m(y; \kappa_n)$ 忽略, 僅保留 $\chi_m(y)$, 此即所謂的 plane-wave approximation, 此一近似和 Lamb (1932, §176) 的 long-wave approximations (亦參考 Mei 1983, §4.2) 稍有不同, 但仍僅在 $k_{F,1}h_1$ 較小時方能獲得理想的結果, 由於目前我們所考慮的 $k_{F,1}h_1$ 亦甚小, 故我們將先導出 plane-wave approximation, 再進一步求出更簡單的 long-wave approximation。

當忽略所有的 $\psi_m(y; \kappa_n)$, $n = 1, 2, \dots$ 時, 首先我們得到 $G = 0$, 此外它也暗示

$$U(y) - \frac{\partial \phi_L}{\partial x}(0, y) = \alpha \chi_1(y) \quad (4.15)$$

故(4.11)此時可表為

$$\begin{aligned} -ik_{F,1}(A_1 - B_1) &= \alpha \\ -ik_{F,2}(A_2 - B_2) &= \alpha \int_0^{h_1} \chi_1(\eta) \chi_2(\eta) d\eta + \int_0^{h_1} \frac{\partial \phi_L}{\partial x}(0, \eta) \chi_2(\eta) d\eta \end{aligned}$$

或合併為

$$-ik_{F,2}(A_2 - B_2) = -ik_{F,1}\lambda N(A_1 - B_1) + \int_0^{h_1} \frac{\partial \phi_L}{\partial x}(0, \eta) \chi_2(\eta) d\eta \quad (4.16)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda N &= \int_0^{h_1} \chi_1(\eta) \chi_2(\eta) d\eta \\ &= 2Kk_{F,2} (k_{F,1}^2 - k_{F,2}^2)^{-1} (Kh_1 + \sinh^2 k_{F,1}h_1)^{-\frac{1}{2}} (Kh_2 + \sinh^2 k_{F,2}h_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \sinh[k_{F,2}(h_2 - h_1)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

另一方面, (4.13)亦可化簡為

$$(A_1 + B_1)\chi_1(y) + (A_2 + B_2)\chi_2(y) = \phi_L(0, y)$$

將上式乘以 $\chi_1(y)$, 並在 $y = (0, h_1)$ 範圍內積分, 可得

$$(A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) \int_0^{h_1} \chi_1(y) \chi_2(y) dy = \int_0^{h_1} \phi_L(0, y) \chi_1(y) dy \quad (4.18)$$

由於自由長波目前僅在地形不連續處產生後向外傳送, 故 radiation condition 應為 $A_1 = A_2 = 0$, 因此由(4.16)和(4.18)我們可決定此兩個向外傳送的自由長波的振幅分別為

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{1 + (\lambda N)^2 \frac{k_{F,1}}{k_{F,2}}} \left(I_1 + i \frac{\lambda N}{k_{F,2}} I_2 \right) \\ B_2 &= \frac{1}{1 + (\lambda N)^2 \frac{k_{F,1}}{k_{F,2}}} \left(\lambda N \frac{k_{F,1}}{k_{F,2}} I_1 - i \frac{1}{k_{F,2}} I_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^{h_1} \phi_L(0, y) \chi_1(y) dy \\ I_2 &= \int_0^{h_1} \frac{\partial \phi_L}{\partial x}(0, y) \chi_2(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

上式仍相當複雜, 但若我們將強制性長波及兩個自由長波皆視為淺水波 (即使實際 $k_{F,2}h_2 \sim 1$ 或更大, 只要其他兩個長波滿足淺水波條件, 根據 Newman(1965) 的建議, 以下近似仍適用), 則可証明

$$\begin{aligned} \lambda N &\approx \frac{K k_{F,2}^2 (h_2 - h_1)}{(k_{F,1}^2 - k_{F,2}^2)(k_{F,1}h_1)(k_{F,2}h_2)} \\ I_1 &\approx D h_1^{\frac{1}{2}} \\ I_2 &\approx -i k_L D h_1 h_2^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

其中由 (3.17) 並考慮 $k_L h_1 \rightarrow 0$

$$D = \left(C_g a_L - \frac{1}{4} \frac{\omega}{\tanh k h_1} a_0^2 \right) \frac{1}{k_L h_1}$$

需注意強制性長波目前是朝負 x 軸方向行進, 故 $\partial \phi_L / \partial x = -i k_L \phi_L$ 。在獲得以上近似時, 我們且應用 $K \approx k_{F,1}^2 h_1 \approx k_{F,2}^2 h_2$ 的事實。將上面 I_1 , I_2 及 λN 的表式代入 (4.19), 最後得到

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{h_1^{\frac{1}{2}} (k_{F,2} h_2 + k_L h_1)}{k_{F,2} h_2 + k_{F,1} h_1} D \\ B_2 &= \frac{h_2^{\frac{1}{2}} (k_{F,1} h_1 - k_L h_1)}{k_{F,2} h_2 + k_{F,1} h_1} D \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

算出自由長波的流速勢後, 可利用自由表面邊界條件 $g\zeta_F + \partial \phi_F / \partial t = 0$ 決定其水面位移的振幅 a_F , 表一即為一些模擬計算所獲得的結果, 在這些模擬中我們定長波的周期為 184sec, 此一周期與港研所設在花蓮港內波高計所觀測到的共振周期接近 (參考曾, 1995)。在表一中, T 表波群中短波的周期, l 表此一短波在水深為 h_1 區域內的波長, L_L 和 L_F 分別代表強制性長波和自由長波在此區域內的波長。

表一. 在階梯地形處引發自由長波的量(m.k.s. units)

h_1	h_2	T	l	L_L	L_F	a_L/a_0^2	a_F/a_0^2
100	2000	11	200	1664	5776	0.0018	0.0022
100	2000	19	500	3405	5776	0.0034	0.0033
100	2000	34	1000	4842	5776	0.01	0.01
20	100	15	200	2162	2582	0.053	0.051

表一的結果顯示,短波的波長愈大,由於 ω_L 固定, L_L 亦增大(參考(3.2)),但 L_L/l 的比值仍減小,因此極有利於增加強制性長波的量(參考上一節,特別是有關(3.16)式的討論),故亦增加在地形不連續處所產生的自由長波。在表一中的第四列,我們也計算 $h_1 = 20\text{ m}$ 時的狀況,此時由於長波與水深相比更長,故強制性長波和自由長波的振幅顯著增大,但圖一顯示,台灣東部的海底地形在此一深度已和階梯狀地形相差極大,故實際在台灣東部近岸,由地形不連續所產生的自由長波究竟有多大,仍有待以後用數值方法準確加以估計,但表一中 $a_L/a^2 = 0.053$ 的結果仍可正確代表在當地水深下強制性長波的實際大小。

五．由短波群破碎所引發的自由長波

短波群由深海進入淺海,除可能因地形不連續引發自由行進長波外,尚可能因其破碎產生一種類似造波機的效果,引發自由行進的長波。Symonds, Huntley & Bowen (1982)即首先考慮碎波點位置來回振盪所產生的效應, Schäffer (1993,1994)進一步將其延伸包含短波在起始破碎後,部份能量仍以波群的形式進入碎波帶的效應,他並且在所有區域皆考慮波群的forcing effects。由於波浪破碎後的變化至今尚未有一個清楚的理論,故為簡化討論,在本節中我們仍假設短波群在隨時間變化的位置上破碎後,剩餘的能量進入碎波帶後即不再具有波群的形式,但我們亦如Schaffer (1993)般考慮碎波帶以外海面上的forcing effects。另外,在海底地形方面, Schäffer (1993)是考慮一個二度空間的平面斜坡直接外接一個水深不變的區域,此一地形與台灣東部沿岸的碎波帶外往往有一個很陡的陸坡地形迥然不同,故我們將Schäffer (1993)的圖三改為目前圖三的形式,亦即平面斜坡外緣為一階梯狀地形。

在本節中我們完全採用淺水近似,故由(A.1)和(A.2)可組合成一個單獨的方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

上式與Schäffer (1993)的(4.1)式完全相同,其 $\bar{\zeta}$ 包括 ζ_L 和 ζ_F 兩者,但Schäffer (1993)所考慮的短波群為兩個頻率極接近,但振幅相差很大的波列疊加而成,故

$$\zeta_s = \frac{1}{2} a' \exp \left[i \left(\int k^{(1)} dx + \omega^{(1)} t \right) \right] + \frac{1}{2} \delta a' \exp \left[i \left(\int k^{(2)} dx + \omega^{(2)} t \right) \right] + * \quad (5.2)$$

其中

$$\omega^{(1)} = \omega_s(1 + \epsilon), \quad \omega^{(2)} = \omega_s(1 - \epsilon)$$

而所對應的波數分別為

$$k^{(1)} \approx k_s + \epsilon \frac{\omega_s}{C_g} = k_s \left(1 + \epsilon \frac{C}{C_g} \right)$$

$$k^{(2)} \approx k_s - \epsilon \frac{\omega_s}{C_g} = k_s \left(1 - \epsilon \frac{C}{C_g} \right)$$

上式中的 a' , k_s , C , C_g 皆隨水深變化,故

$$k_L = k^{(1)} - k^{(2)}$$

也將在圖三中的I和II區內變化。 k_s , C 和 C_g 的變化可由離散關係式(2.14)和運動守恆方程式(2.18)決定,而 a' 的變化則需滿足能量守恆方程式,亦即

$$a'^2 = \frac{C_{g,ref}}{C_g} a_{ref}^2 \quad (5.3)$$

(5.2)式亦可改寫為

$$\zeta_s = \frac{1}{2} a \exp \left[i \left(\int k_s dx + \omega_s t \right) \right] + * \quad (5.4)$$

其中

$$a = a' e^{i\theta} + \delta a' e^{-i\theta} \quad (5.5)$$

$$\theta = \int \frac{k_L}{2} dx + \frac{\omega_L}{2} t, \quad \omega_L = 2\omega_s = \omega^{(1)} - \omega^{(2)} \quad (5.6a, b)$$

當 $\delta = 1$ 時,上式即為一個純粹的波群(與(3.1)式相同),若 $\delta = 0$,則波群現象將完全消失,目前我們和Schäffer (1993,1994)一樣假設 $\delta \ll 1$,因此 a 的周期性變化將相對較小,此點暗示碎波點位置的變化也較小,故在計算時可做一些簡化。

首先由(A.4)

$$S_x = \frac{\rho g}{2} a a^* \left(\frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} \right)$$

且由(5.5)

$$\begin{aligned} a a^* &= a'^2 (1 + \delta^2 + 2\delta \cos 2\theta) \\ &\approx a'^2 [(1 + 2\delta \cos 2\theta) + O(\delta^2)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

若將 $\bar{\zeta}$ 和 S_x 對時間做富氏級數展開為

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (\xi_n(x) e^{in\omega_s t} + *) \\ S_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (S_n(x) e^{in\omega_s t} + *) \end{aligned}$$

則(5.1)式可轉換為一組常微方

$$\frac{d}{dx} \left(gh \frac{d\xi_n}{dx} \right) + (n\omega_L)^2 \xi_n = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2 S_n}{dx^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.8)$$

其中 $n = 0$ 的解僅代表不隨時間變化的 set-down 或 set-up (Longuet-Higgins & Stewart, 1962), 故與長波無關。而由 (A.4) 和 (5.7), 若不考慮碎波點位置隨時間變化的現象, 在 $x > x_b$ 區域

$$S_x^{(II)} = S_0^{(II)}(x) + \frac{1}{2} \left(S_1^{(II)}(x) e^{i\omega_L t} + * \right) \quad (5.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} S_0^{(II)}(x) &= \frac{\rho g}{2} \left(\frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) a'^2 \\ S_1^{(II)}(x) &= S_0^{(II)}(x) 2\delta \exp \left(i \int k_L dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.10a, b)$$

而在 $x < x_b$ 區域, 僅

$$S_x^{(I)} = S_0^{(I)}(x) \quad (5.11)$$

其中 $S_0^{(I)}(x)$ 的分佈可假設碎波帶內的振幅和當地的水深概略地維持一個固定的比值來決定, 因此

$$aa^* = \gamma_0^2 h^2 \quad (5.12)$$

γ_0 一般取為 0.4, 故由 (A.4)

$$S_0^{(I)}(x) = \frac{\rho g}{2} \left(\frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \gamma_0^2 h_0^2 \quad (5.13)$$

但如碎波點位置隨時間變化, 則在圖三的 B 區內, S_x 的富氏級數將即非 (5.9), 亦非 (5.11), 而應經由以下公式計算:

$$\begin{aligned} S_0^{(B)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x d(\omega t) \\ S_n^{(B)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x e^{-in\omega t} d(\omega t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中 $S_0^{(B)}$ 將不影響目前的長波, 故我們僅需計算 (5.14) 式。

由(5.7)和(5.12)我們可決定碎波發生位置為

$$x_b(t) \approx \frac{\overline{a'_b}}{\gamma_0 h_x} (1 + \mu \delta \cos \omega t) \quad (5.15)$$

其中 h_x 表海底的坡度(目前為定值),

$$\mu \equiv \frac{1}{1 + \nu}, \quad \nu \equiv - \left[\frac{x}{a'} \frac{da'}{dx} \right]_{x=\overline{x_b}}$$

且由(5.3), ν 又可改寫為

$$\nu = \left[\frac{1}{2} \frac{h}{C_g} \frac{dC_g}{dh} \right]_{h=\overline{h_b}}$$

而 $\overline{a'_b}$, $\overline{x_b}$, $\overline{h_b}$ 分別表 a'_b , x_b , h_b 的平均值。導(5.15)的詳細過程請參考 Schäffer (1993)。在導(5.15)時, 曾因 δ 很小而採用了一些近似, 而(5.15)亦顯示, 當 δ 很小時, B 區的範圍確很小, 因此若(5.6a)中的積分下限定為 $\overline{x_b}$, 則在此區域內 $2\theta \approx \omega_L t + O(\delta)$, 此近似在代入到(5.7)時所產生的誤差僅 $O(\delta^2)$, 故可以被接受, 其結果使 S_x 變為一個時間的偶函數, 因此(5.14)可改寫為

$$S_n^{(B)} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\tau S_x^{(I)} \cos(n\omega t) d(\omega t) + \int_\tau^\pi S_x^{(II)} \cos(n\omega t) d(\omega t) \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.16)$$

而 $\tau = \tau(x)$ 可由(5.15)決定為

$$\tau(x) = \cos^{-1} \left(\frac{x_b/\overline{x_b} - 1}{\mu \delta} \right) \quad (x_a \leq x \leq x_c) \quad (5.17)$$

對(5.16)微分產生

$$\frac{dS_n^{(B)}}{dx} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\tau \frac{\partial S_x^{(I)}}{\partial x} \cos(n\omega t) d(\omega t) + \int_\tau^\pi \frac{\partial S_x^{(II)}}{\partial x} \cos(n\omega t) d(\omega t) \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

上式中因 $S_x^{(I)}$ 和 $S_x^{(II)}$ 在瞬間碎波點位置上的值相等, 故由 $\tau(x)$ 的變化對 $dS_n^{(B)}/dx$ 所產生的影響互相抵消。將(5.9)–(5.11)代入上式, 並採用 $2\theta \approx \omega_L t$ 的近似, 可得

$$\frac{dS_n^{(B)}}{dx} = \frac{2}{n\pi} \left(\frac{dS_0^{(I)}}{dx} - \frac{dS_0^{(II)}}{dx} \right) \sin(n\tau) - \frac{4}{\pi} \frac{dS_0^{(II)}}{dx} \delta g_n(\tau) - \frac{4}{\pi} S_0^{(II)} \delta \frac{\omega}{C_g} b_n(\tau) + O(\delta^2) \quad (5.18)$$

其中

$$g_n(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau - \frac{1}{2}\pi & (n=1) \\ \frac{\sin((n-1)\tau)}{2(n-1)} + \frac{\sin((n+1)\tau)}{2(n+1)} & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (5.19)$$

$$b_n(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cos 2\tau - \frac{1}{4} & (n=1) \\ \frac{(-1)^n}{1-n^2} + \frac{\cos((1-n)\tau)}{2(1-n)} + \frac{\cos((1+n)\tau)}{2(1+n)} & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (5.20)$$

Schäffer (1993) 曾忽略 (5.18) 中含 $b_n(\tau)$ 的項, 此一忽略並不會影響最後的結果, 但保留它可使導公式的過程更完整。

獲得了每一點上的 $S_n, n=0, 1, 2, \dots$ 後, 即可計算 (5.8) 式的解, 後者因目前定 $h = h_x x$, 故可由定義一個新的獨立變數

$$x' = 2\omega_L \left(\frac{x}{gh_x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

將原式轉換為

$$\frac{d^2\xi_n}{dx'^2} + \frac{1}{x'} \frac{d\xi_n}{dx'} + n^2\xi_n = -\frac{1}{\rho\omega_L^2} \frac{d^2S_n}{dx^2}$$

上式的解可用 Bessel functions 表示, 故在 B 區內的特解可表為

$$\xi_n^{(B)} = \frac{\pi}{\rho gh_x} J_0(nx') \int_{x_a}^x Y_0(nx') \frac{d^2S_n^{(B)}}{dx^2} dx - \frac{\pi}{\rho gh_x} Y_0(nx') \int_{x_a}^x J_0(nx') \frac{d^2S_n^{(B)}}{dx^2} dx \quad (5.21)$$

其中 J_0 和 Y_0 分別為第一和第二類型之零階 Bessel function。由於

$$\frac{d}{dz} [J_0(z)] = -J_1(z), \quad \frac{d}{dz} [Y_0(z)] = -Y_1(z)$$

上式經由 integration by parts 產生

$$\begin{aligned} \xi_n^{(B)} = & \frac{\pi}{\rho gh_x} J_0(nx') \left(\left[Y_0(nx') \frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right]_{x_a}^x + \int_{x_a}^x Y_1(nx') \frac{d(nx')}{dx} \frac{dS_n^{(B)}}{dx} dx \right) \\ & - \frac{\pi}{\rho gh_x} Y_0(nx') \left(\left[J_0(nx') \frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right]_{x_a}^x + \int_{x_a}^x J_1(nx') \frac{d(nx')}{dx} \frac{dS_n^{(B)}}{dx} dx \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

其中來自於上限的項可互相抵消, 另一方面, 由 (5.17) 和 (5.15)

$$\tau(x_a) = \pi, \quad \tau(x_c) = 0 \quad (5.23)$$

故由(5.18)–(5.20),

$$\left. \frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right|_{x=x_a} = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ 0 & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\left. \frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right|_{x=x_c} = \begin{cases} 2\delta \frac{dS_0^{(II)}}{dx} & (n=1) \\ -\frac{4}{\pi} S_0^{(II)} \delta \frac{\omega}{C_g} \left[\frac{(-1)^n}{1-n^2} + \frac{1}{1-n^2} \right] & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (5.25)$$

因此(5.22)可化簡為

$$\xi_n^{(B)} = \frac{\pi}{\rho g h_x} J_0(nx') \int_{x_a}^x Y_1(nx') \frac{d(nx')}{dx} \frac{dS_n^{(B)}}{dx} dx - \frac{\pi}{\rho g h_x} Y_0(nx') \int_{x_a}^x J_1(nx') \frac{d(nx')}{dx} \frac{dS_n^{(B)}}{dx} dx$$

在上式裏我們可以將被積分函數中 $O(\delta)$ 的項忽略掉,因這些項最後僅能影響 $\xi_n^{(B)}$ 至 $O(\delta^2)$ 。另外,上式中僅 $\sin(n\tau)$ 為非緩慢變化的函數,因此其他變數皆可用它們在 $\bar{x}_b$ 位置上的值做為近似,因而導致

$$\xi_n^{(B)} = - \left[\frac{1}{\rho g h_x x} \left(\frac{dS_0^{(I)}}{dx} - \frac{dS_0^{(II)}}{dx} \right) \right]_{x=\bar{x}_b} \int_{x_a}^x \frac{2}{n\pi} \sin(n\tau) dx + O(\delta^2) \quad (5.26)$$

其中由(5.17)

$$\begin{aligned} \int_{x_a}^x \frac{2}{n\pi} \sin(n\tau) dx &= -\bar{x}_b \mu \delta \int_{\pi}^{\tau} \frac{2}{n\pi} \sin(n\tau) \sin \tau d\tau \\ &= \begin{cases} -\bar{x}_b \mu \delta \frac{2}{\pi} \left(\frac{\tau - \pi}{2} - \frac{\sin 2\tau}{4} \right) & (n=1) \\ -\bar{x}_b \mu \delta \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\sin[(n-1)\tau]}{2(n-1)} - \frac{\sin[(n+1)\tau]}{2(n+1)} \right) & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.27)$$

在上式中我們且曾使用原式之 Wronskian

$$W_n \{J_0(nx'(x)), Y_0(nx'(x))\} = \frac{2}{\pi nx'} \frac{d(nx')}{dx} = \frac{1}{\pi x} \quad (5.28)$$

(5.26)式代表在B區內滿足(5.8)式之一個特解,由於B區範圍很小,故它的詳細變化實際並不重要,重要的是它對其他區域內的解之影響,由於當 $x = x_c$ 時, $\tau(x_c) = 0$,故由(5.27)

$$\int_{x_a}^{x_c} \frac{2}{n\pi} \sin(n\tau) dx = \begin{cases} \overline{x_b} \mu \delta & (n=1) \\ 0 & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

因此我們可以將B區視為在空間上不存在, 僅設定水面位移在I和II區間有一個躍升為

$$\left. \begin{aligned} [\xi_1]_{-}^{+} &= \frac{\mu \delta}{\rho g h_x} \left[\frac{dS_0}{dx} \right]_{-}^{+} \\ [\xi_n]_{-}^{+} &= 0 \quad (n=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} (x = \overline{x_b}) \quad (5.29a, b)$$

以上結果顯示碎波點位置的振盪仍僅能對頻率為 ω_L 的長波(亦即 ξ_1)有作用, 對高階的harmonics則沒有影響。

由於(5.8)式為一個二階微方, 因此在任何兩區域的交界皆需兩個matching conditions 方能決定兩個獨立homogeneous solutions前的係數, 以下我們將導出在I和II區間, 代表B區效應之另一個matching condition。將(5.21)微分並integration by parts產生

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n^{(B)}}{dx} = & -\frac{\pi}{\rho g h_x} \frac{d(nx')}{dx} J_1(nx') \left(\left[Y_0(nx') \frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right]_{x_a}^x + \int_{x_a}^x Y_1(nx') \frac{d(nx')}{dx} \frac{dS_n^{(B)}}{dx} dx \right) \\ & + \frac{\pi}{\rho g h_x} \frac{d(nx')}{dx} Y_1(nx') \left(\left[J_0(nx') \frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right]_{x_a}^x + \int_{x_a}^x J_1(nx') \frac{d(nx')}{dx} \frac{dS_n^{(B)}}{dx} dx \right) \end{aligned}$$

上式中的積分, 若忽略 $O(\delta^2)$ 的項, 將互相抵消。且由於 $dS_n^{(B)}/dx$ 在 $x = x_a, x_c$ 處最多僅為 $O(\delta)$, 故上式可近似表為

$$\frac{d\xi_n^{(B)}}{dx} = -\frac{\pi}{\rho g h_x} \frac{d(nx')}{dx} [J_1(nx')Y_0(nx') - J_0(nx')Y_1(nx')] \left[\frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right]_{x_a}^x$$

再應用(5.28)

$$\frac{d\xi_n^{(B)}}{dx} = -\frac{1}{\rho g h_x x} \left[\frac{dS_n^{(B)}}{dx} \right]_{x_a}^x \quad (5.30)$$

由上式可決定B區兩端水面坡度的差值, 但除此坡度差外, B區和I區與II區和B區之交界亦存有坡度差, 此坡度差由(5.1)應為

$$\left[\frac{d\bar{\zeta}}{dx} \right]_-^+ = -\frac{1}{\rho gh} \left[\frac{dS_x}{dx} \right]_-^+ \quad (x = x_a \text{ OR } x = x_c) \quad (5.31)$$

故若將B區視為不存在, 僅將其效應改用 matching conditions 表示, 則由I區至II區水面坡度的躍升值應為

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d\xi_1}{dx} \right]_-^+ &= -\frac{1}{\rho gh_x \bar{x}_b} \left[\frac{dS_1}{dx} \right]_-^+ \\ \left[\frac{d\xi_n}{dx} \right]_-^+ &= -\frac{1}{\rho gh_x \bar{x}_b} \left[\frac{dS_n}{dx} \right]_-^+ = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (x = \bar{x}_b) \quad (5.32a, b)$$

其中 $S_n, n = 1, 2, 3, \dots$ 為(5.9)或(5.11)中的項, 因此實際上

$$\begin{aligned} \left[\frac{dS_1}{dx} \right]_-^+ &= \frac{dS_1^{(II)}}{dx}(\bar{x}_b) \\ \left[\frac{dS_n}{dx} \right]_-^+ &= 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

表(5.32)和(5.31)形式相同, 但這是因(5.30)成立的緣故, 否則(5.32)可具有不同的形式。

以上結果顯示, 由短波群不論是經由輻射應力的作用或因其碎波點位置的振盪, 皆只能產生與其振幅變化周期相同周期的長波, 此長波在I區為自由長波(因(5.11)式), 在II區則包括強制性長波和自由長波兩者, 故它們的一般解若表為複數形式, 為

$$\xi_1^{(I)} = -\alpha^{(I)} \frac{i\pi}{2\rho gh_x} H_0^{(1)}(x') - \beta^{(I)} \frac{i\pi}{2\rho gh_x} H_0^{(2)}(x') \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \xi_1^{(II)} &= \frac{i\pi}{2\rho gh_x} H_0^{(1)}(x') \left(-\alpha^{(II)} + \int_{x_0}^x H_0^{(2)}(x') \frac{d^2 S_1^{(II)}}{dx^2} dx \right) \\ &\quad - \frac{i\pi}{2\rho gh_x} H_0^{(2)}(x') \left(\beta^{(II)} + \int_{x_0}^x H_0^{(1)}(x') \frac{d^2 S_1^{(II)}}{dx^2} dx \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)}(x') &= J_0(x') + iY_0(x') \\ H_0^{(2)}(x') &= J_0(x') - iY_0(x') \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

分別代表第一和第二類型零階 Hankel function。由(5.33)為避免 $\xi_1^{(I)}$ 在海岸線位置變為無窮大,必須

$$\alpha^{(I)} = \beta^{(I)} \quad (5.36)$$

此一係數與 $\alpha^{(II)}$ 和 $\beta^{(II)}$ 中的一個可由(5.29a)和(5.32a)兩 matching conditions 決定,剩下的一個則需另由II區和III區間的 matching conditions 決定,此兩區交界處的地形接近於第四節所考慮的階梯地形,且由於我們目前所使用的長波方程式為線性,因此當由強制性長波在地形不連續處所引發的自由長波可由第四節的結果獲得時,目前我們僅需計算當自由長波在碎波帶產生後,入射到圖三中的II和III區的交界處所產生的反射波,此反射波雖非發生在一個直角的階梯地形上,但我們仍可使用 Mei (1983)的 §4.2.1 和 §4.2.2 中的方法求其反射係數,其結果為

$$\beta^{(II)} = -\frac{H_0^{(1)}(x'_0)}{H_0^{(2)}(x'_0)}\alpha^{(II)} \quad (5.37)$$

其中 $x'_0 = x'(x_0)$ 。上式代表一個無窮階梯的長波近似,此一近似如我們前面所說,僅需 $h_0/L_F \ll 1$ 即相當準確。當 $\omega_L \rightarrow 0$ 時,因 $x'_0 \rightarrow 0$,故 $H_0^{(1)}(x'_0)/H_0^{(2)}(x'_0) \rightarrow -1$,因此(5.37)可化簡為 $\beta^{(II)} = \alpha^{(II)}$,表一個全反射現象,此點與一個直角階梯地形的情況相同。

由(5.36)和(5.37)我們可以將(5.33)和(5.34)改寫為

$$\begin{aligned} \xi_1^{(I)} &= -\alpha^{(I)} \frac{i\pi}{\rho g h_x} J_0(x') \\ \xi_1^{(II)} &= \frac{i\pi}{2\rho g h_x} H_0^{(1)}(x') \left(-\alpha^{(II)} - H_0^{(2)}(x'_0) \frac{dS_1^{(II)}}{dx}(x_0) + \int_{x_0}^x H_1^{(2)}(x') \frac{x'}{2x} \frac{dS_1^{(II)}}{dx} dx \right) \\ &\quad + \frac{i\pi}{2\rho g h_x} H_0^{(2)}(x') \left(\frac{H_0^{(1)}(x'_0)}{H_0^{(2)}(x'_0)} \alpha^{(II)} + H_0^{(1)}(x'_0) \frac{dS_1^{(II)}}{dx}(x_0) - \int_{x_0}^x H_1^{(1)}(x') \frac{x'}{2x} \frac{dS_1^{(II)}}{dx} dx \right) \end{aligned}$$

再利用(5.29a)和(5.32a)即可決定 $\alpha^{(I)}$ 和 $\alpha^{(II)}$,因此解出I和II區的水面位移。但在實際計算時需使用數值方法來估計上式中的積分,圖四即代表一個實際計算的結果,此圖與schäffer (1993)的圖五、六的表示法大致相同,僅橫座標目前直接用與海岸線距離的公里數表示。圖上的實曲線表長波水面位移(無因次)的包絡線,即 $\pm|\xi_1/\delta a'_0|$ 的分佈,其中 $a'_0 = a'(x_0)$,此外,圖上亦顯示 $Re(\xi_1/\delta a'_0)$

和 $Im(\xi_1/\delta a'_0)$ 的分佈, 表長波在 $\omega_L t = 0$ 和 $\omega_L t = -\pi/4$ 時的水面位移, 此一結果顯示, 在碎波帶以內, 長波如預期形成一個駐波, 而在碎波帶以外, 由於強制性長波的存在以及為非全反射, 故水面位移僅近似一個駐波(目前的解較 schäffer (1993) 的解更接近於一個駐波), 此種駐波的性質與 Guza & Thornton (1985) 的觀測符合。

六．討論

以上我們概略地估計了由兩種不同機制所產生的自由行進超長重力波的量,要比較它們的大小,由(3.3)和(5.7)知,我們須將圖四中的解除以 $4a'_0 \approx 20$, 其結果略小於表一中第四列的 a_F/a_0^2 , 但遠大於第一、二列中的 a_F/a_0^2 及 a_L/a_0^2 , 後者顯示,除非水深很淺,由碎波點位置振盪所產生的自由長波,較隨短波群前進的強制性長波振幅大很多,此點與 Elgar *et al.* (1992) 的觀測相符合。由於我們在前面提到表一中第四列的 a_F/a_0^2 值,依實際台灣東岸海底地形,應有高估的現象,而圖四的結果卻沒有明顯高估的現象,甚至因波浪破碎後的實際狀況可能較目前所假設的變化更劇烈,因而有低估的可能,故我們推測碎波點位置振盪在大部份時候是引發台灣東部近岸之自由行進超長重力波的主因。

由於在表一第四列中的 a_L/a_0^2 值仍可代表實際發生在淺海中強制性長波的量,故若短波到此尚未破碎,且港的出口位在此處,則自由長波尚可因短波群在港口繞射而大量產生,進而引發港內海水的共振運動(有關這方面的討論請參考 Mei & Agnon (1989) 及 Wu & Liu (1990)), 故實際進入花蓮港或蘇澳港的自由長波可分為在港外形成以及在港口形成的兩種,究竟何者可引起較大的共振需日後用數值計算或現場觀測準確地加以估計。

花蓮港有報導,‘當颱風中心約在花蓮港東南方800公里以上,氣象局未發佈海上颱風警報,但花蓮港卻受湧浪侵襲,船隻無法碇靠港內碼頭,甚至發生斷纜現象’(張和曾, 1993), 台大梁乃匡教授最近在一次研討會上建議此湧浪實際仍具有短波群的性質,故而在近岸引發包括花蓮港自然周期在內各種周期的超長重力波,且由表一的計算(以及第三節的討論)顯示,當波群中的短波波長增加時(如第三列的情況),即使沒有碎波的現象,仍可因地形變化產生相當大的 a_L/a_0^2 和 a_F/a_0^2 , 前者當水深更淺時將更大(大於第四列中的值),而 a_0 也將增大,況且當波群斜向入射至淺海,可能產生 edge waves (參考 Schäffer, 1994), 使超長重力波的振幅更加大,且由此方向來的長波較易進入花蓮港,因此目前我們初步的結論是,當颱風來襲時,由短波群在近岸引發超長重力波,確可能造成花蓮港和蘇澳港共振,但其詳細過程在不同的階段或有不同。在下一年裏我們將利用數值方法準確分析發生在當地每一種過程的強度,包括 edge waves 的量,以找出其解決之道。

附錄：証明(2.21)和(2.22)分別與Longuet-Higgins & Stewart (1962)的(3.33)和(3.35)相同

Longuet-Higgins & Stewart (1962)的(3.33)和(3.35)式用目前的符號可表為

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\zeta_L) + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial}{\partial x}(\rho\zeta_L) = -\frac{\partial S_x}{\partial x} \quad (A.2)$$

其中

$$M = k \frac{E}{\omega} + \rho h \frac{\partial \phi_L}{\partial x} = \frac{k}{\omega} \frac{\rho g}{2} aa^* + \rho h \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \quad (A.3)$$

$$S_x = E \left(\frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\rho g}{2} aa^* \left(\frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \quad (A.4)$$

S_x 表輻射應力, ρ 表水密度, E 表短波的能量密度, C_g 和 C 分別為短波的群速度和相位速度,故由(2.14)式可得

$$\frac{C_g}{C} = \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh 2kh} \quad (A.5)$$

將(A.3)代入(A.1)並消去共同係數 ρ ,即可直接獲得(2.21)式。

接下來,將(A.3)和(A.4)代入(A.2)可得

$$k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) + \frac{E}{\omega} \frac{\partial k}{\partial t} + \rho h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + \rho gh \frac{\partial \zeta_L}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[E \left(\frac{2C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (A.6)$$

由action conservation equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(C_g \frac{E}{\omega} \right)$$

由(2.18)和(2.16)

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{1}{\sinh 2kh} \frac{\partial}{\partial x}(kh)$$

故代入後(A.6)可改寫為

$$C_g \frac{E}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x} - E \left[\frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{\sinh 2kh} \frac{\partial}{\partial x} (kh) \right] + \rho h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + \rho g h \frac{\partial \zeta_L}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[E \left(\frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

利用(A.5), 上式又可化簡爲

$$-E \frac{k}{\sinh 2kh} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + \rho g h \frac{\partial \zeta_L}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[E \frac{kh}{\sinh 2kh} \right]$$

故

$$\rho h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + \rho g h \frac{\partial \zeta_L}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} \left[E \frac{k}{\sinh 2kh} \right] = 0$$

代入 $E = \rho g a a^* / 2$, 並消去共同係數, 最後得到

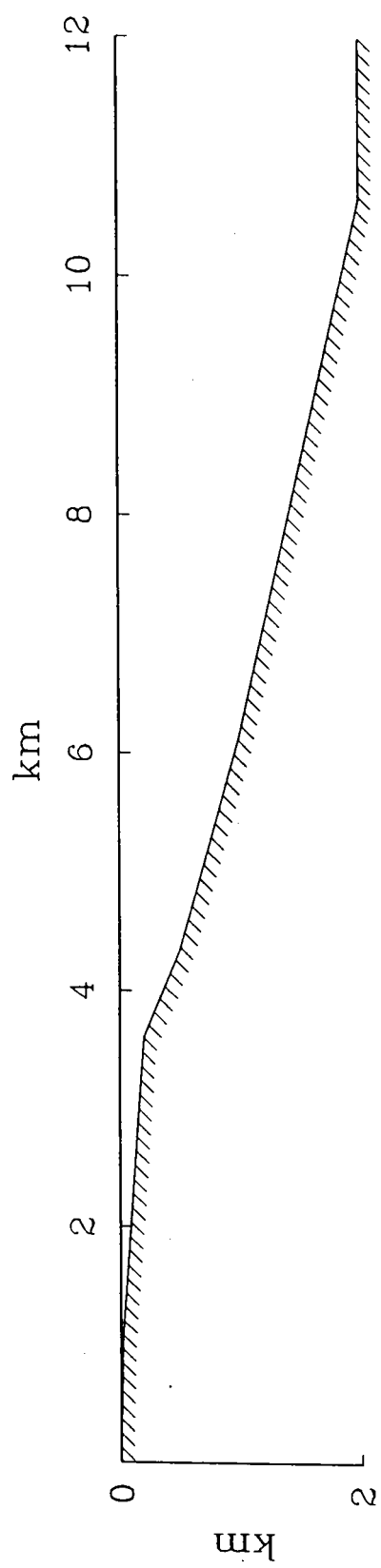
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right) + g \frac{\partial \zeta_L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{g k a a^*}{2 \sinh 2kh} \right] = 0$$

若考慮離散關係式(2.14), 則上式與(2.22)式完全相同. 故得証。

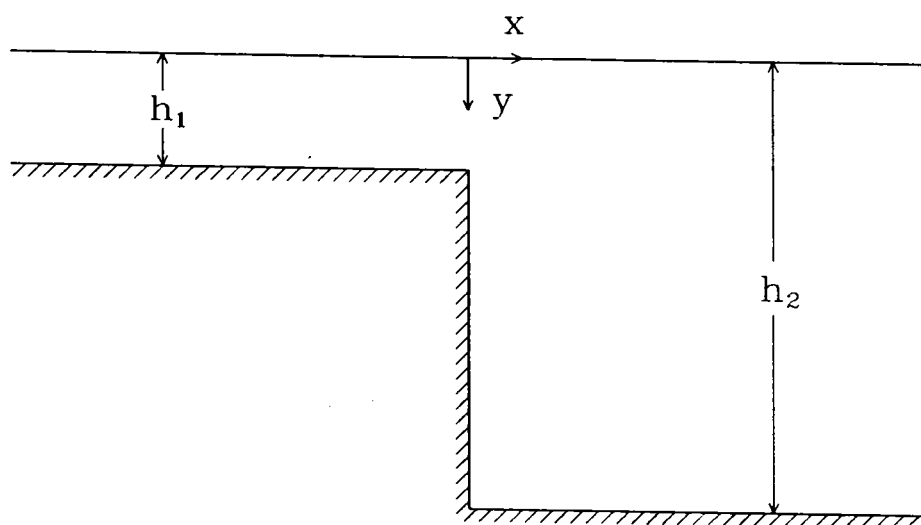
參考文獻

- Chu, V. H., Mei, C. C. 1970 On slowly-varying Stokes waves. *J. Fluid Mech.* **41**, 873–887.
- Elgar, S., Herbers, T. H. C., Okihiro, M., Oltman-Shay, J. & Guza, R. T. 1992 Observations of infragravity waves. *J. Geophys. Res.* **97**, 15573–15577.
- Guza, R. T. & Thornton, E. B. 1985 Observations of surf beat. *J. Geophys. Res.* **90**, 3161–3172.
- Hasselmann, K. 1971 On the mass and momentum transfer between short gravity waves and larger-scale motions. *J. Fluid Mech.* **50**, 189–205.
- Lamb, H. 1932 *Hydrodynamics*, 6th edn. Cambridge University Press.
- Liu, P. L.-F. 1989 A note on long waves induced by short-wave groups over a shelf. *J. Fluid Mech.* **205**, 163–170.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1962 Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to ‘surf beats’. *J. Fluid Mech.* **13**, 481–504.
- Mei, C. C. 1983 *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Interscience.
- Mei, C. C. & Agnon, Y. 1989 Long-period oscillations in a harbour induced by incident short waves. *J. Fluid Mech.* **208**, 595–608.
- Mei, C. C. & Benmoussa, C. 1984 Long waves induced by short-wave groups over an uneven bottom. *J. Fluid Mech.* **139**, 219–235.
- Miles, J. W. 1967 Surface-wave scattering matrix for a Shelf. *J. Fluid Mech.* **28**, 755–767.
- Molin, B. 1982 On the generation of long-period second order free waves due to changes in the bottom profile. *Ship. Res. Inst. Papers*, vol. **68**. Tokyo.
- Newman, J. N. 1965 Propagation of water waves over an infinite step. *J. Fluid Mech.* **23**, 399–415.
- Phillips, O. M. 1977 *The Dynamics of the Upper Ocean*. 2nd edn. Cambridge University Press.
- Schäffer, H. A. 1993 Infragravity waves induced by short-wave groups. *J. Fluid Mech.* **247**, 551–588.
- Schäffer, H. A. 1994 Edge waves forced by short-wave groups. *J. Fluid Mech.* **259**, 125–148.

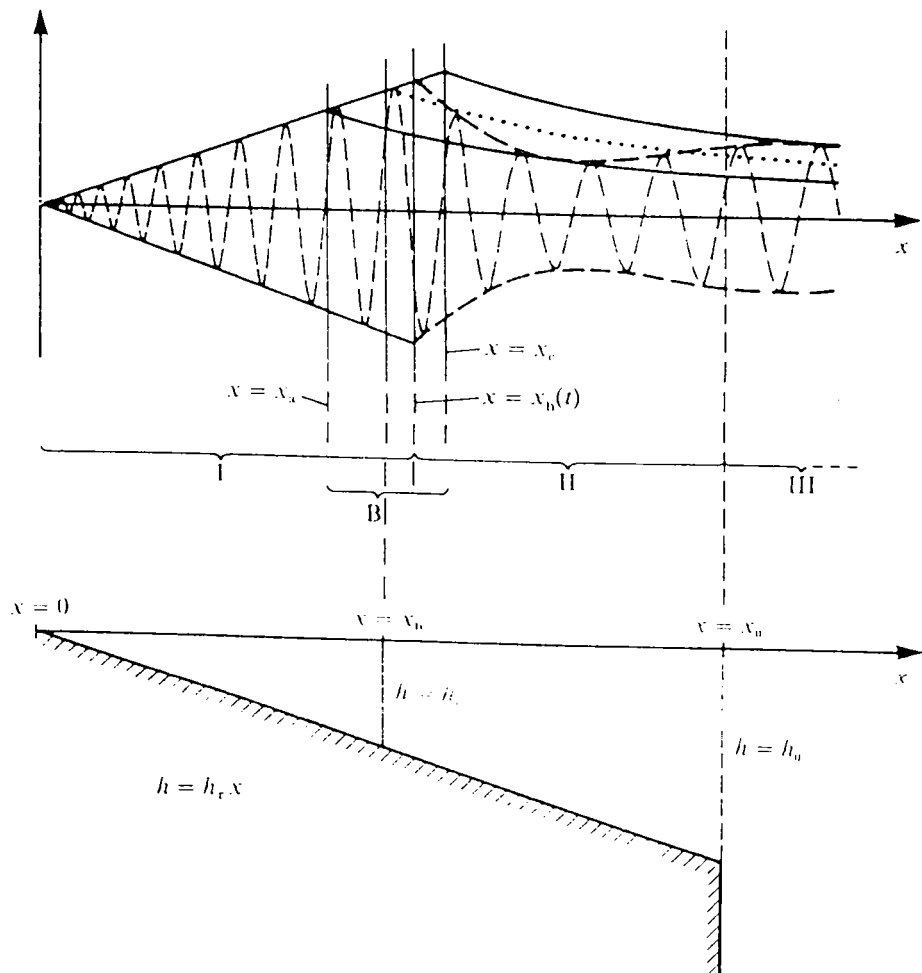
- Shyu, Jinn-Hwa & Phillips, O. M. 1990 The blockage of gravity and capillary waves by longer waves and currents. *J. Fluid Mech.* **217**, 115-141.
- Symonds, G., Huntley, G. A. & Bowen, A. J. 1982 Two dimensional surf beats: long wave generation by a time-varying break point. *J. Geophys. Res.* **87**, 492-498.
- Webb, S. C., Zhang, X. & Crawford, W. 1991 Infragravity waves in the deep ocean. *J. Geophys. Res.* **96**, 2723-2736.
- Wu, J.-K. & Liu, P. L.-F. 1990 Harbour excitations by incident wave groups. *J. Fluid Mech.* **217**, 595-613.
- 張金機, 曾相茂 1993 花蓮港現存問題之探討。花蓮港現存問題及未來發展之探討研討會論文集, 港灣技術研究所。
- 曾相茂 1995 花蓮港港灣設施改善計畫之研究期中報告—現場海氣象調查。港灣技術研究所。
- 蘇青和 1995 花蓮港港灣設施改善計畫之研究期中報告—數值模擬。港灣技術研究所。



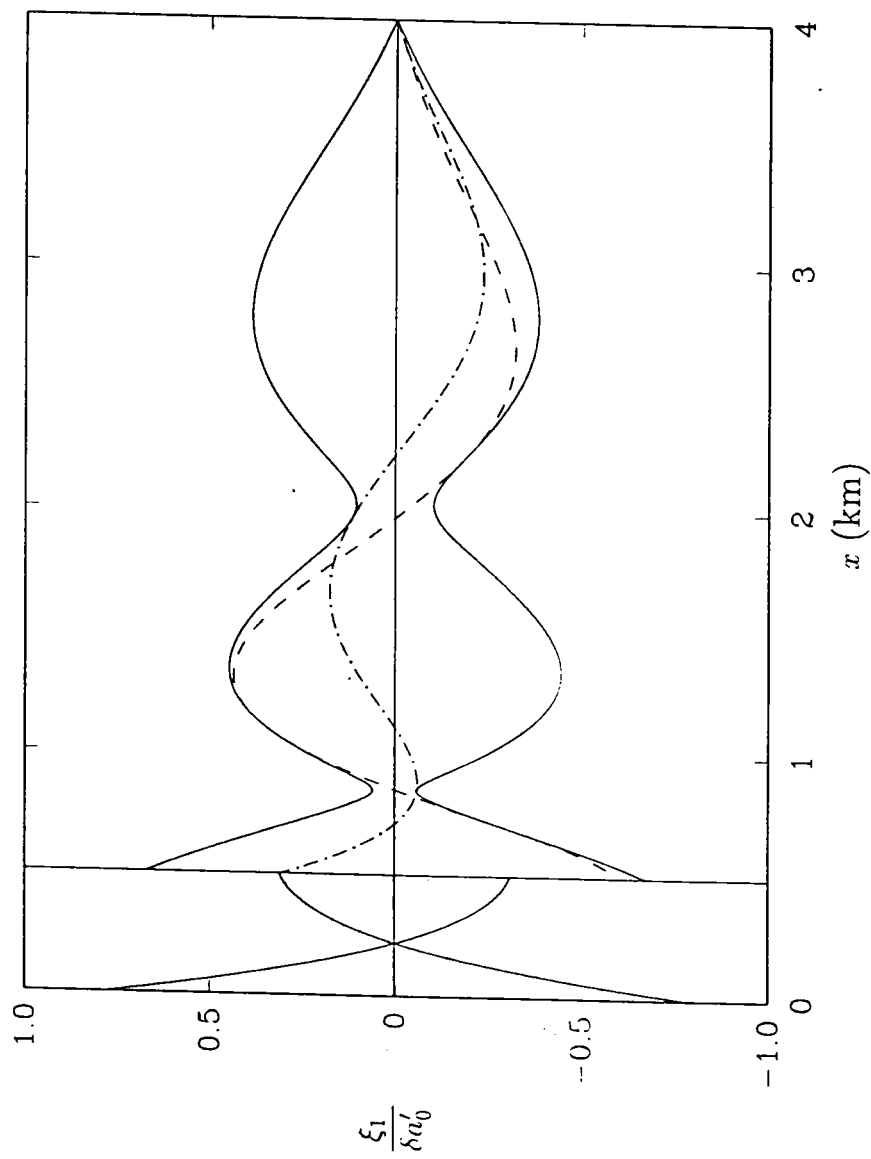
圖一．台灣東岸海底地形概略圖。



圖二．示意圖。



圖三．海底地形及碎波模式解說圖。本圖是由Schäffer (1993)的圖三稍加改變而成。



圖四. 在圖三情況下超長重力波的解。實線表 $\pm \xi_1 / \delta a'_0$, 折線表 $Re(\xi_1 / \delta a'_0)$, 折點線表 $Im(\xi_1 / \delta a'_0)$ 。計算中的 $\delta = 0.1$, $\omega = 0.442$, $\omega_L = 0.04$, $x_0 = 4 \text{ km}$, $h_z = 0.025$ 。

長波非線性效應研究

作 者：徐 進 華

發行人：張 金 機

發行所：台灣省交通處港灣技術研究所

台中縣梧棲鎮臨海路83號

TEL:(04)6564216

中華民國84年出版，印製100本，非賣品