

近岸海域波浪和近岸流數值推算及可視化研究(二)

— 近岸海域流場數值推算 —

- 主持人 : 蘇青和
港灣技術研究所數學模式組
研究員兼組長
- 協同主持人: 蔡丁貴
國立台灣大學土木工程研究所
教授
- 研究助理 : 莊文傑
港灣技術研究所數學模式組
副研究員
- : 郭思吟
國立台灣大學土木工程研究所
碩士班研究生

**Computations and Visualizations of Wave and
Nearshore Current in the Coast Zone (II)**

— Current Computations in the Coast Zone —

Ching-Ho Su

Head

**Mathematical Modelling Division
Institute of Harbor & Marine Technology
Wuchi, Taichung District, Taiwan**

Ting-Kwi Tsay

Professor

**Department of Civil Engineering
National Taiwan University
Taipei, Taiwan**

摘 要

以潮汐及波浪為主要外力,在引用有限元素法,本計畫建立一套近岸地區潮流及近岸流數值模式。因考慮波浪與潮汐二者時間尺度之差異甚大,及時間變數處理不同,將潮汐與波浪造成之流場分別獨力處理。潮流模式在配合實際之地形及海象特性,為考量包括潮汐、風、科氏力、流體剪應力及底床摩擦力等外力之時間相關問題,而為實際應用方便,此部分又分二維模式及三維模式。沿岸流模式主要外力為包括輻射應力、底床摩擦力等,為與時間無關之模式。近岸流之波場為已知,可由上年度建立之波場推算模式求得。其次建立一套有效的模式前處理方法,如網格自動分割,結點最佳編號等數值技巧也是本計畫之重要成果。

ABSTRACT

The purpose of these project is to develop a finite element model to simulate tidal current and nearshore current , which reduced by wind and wave respectively. Because of the time scale is much diffenent between wave and tide , a tidal current model and a nearshore current model is developoed respectively. Tidal current are computed on the basis of tide ,wind ,coriolis force , shear stress and bottom friction , these is a time dependent model. Nearshore current is a time independent model , which are computed on the basis of radiation stress and bottom friction . The wave field data , as input data in nearshore model ,is computed from wave model developed in last year. Not only the numerical model will be studied, but also the pre-processor of the model, such as the auto-mesh, optimal grid numbering is stablished.

近岸海域波浪和近岸流數值推算及可視化研究(二)

— 近岸海域流場數值推算 —

目 錄

摘要	i
英文摘要	ii
目錄	iii
壹、前言	1
貳、理論解析	4
一、單層二維潮流模式	4
二、多層三維潮流模式	9
三、沿岸流模式	12
參、二維潮流數值模式	16
一、有限元素法模式	16
二、數值模式	23
肆、多層三維潮流數值模式	26
伍、近岸流數值模式	37
一、有限元素法模式	37
二、數值驗證	40
陸、討論及結論	43
參考文獻	44
誌謝	48

壹、前 言

影響近岸域之流場,主要外力有潮汐作用、波力、風力、流體剪應力、科氏力、地形邊界效應、底床摩擦力等項目,而流體密度變化、濃差效應,除某些特定地區造成較大影響,一般實際情形影響不大。潮汐可視為一種淺水長波,其引致之流場稱為潮流,潮流一般較為規則化,而颱風產生之暴潮及流況則較複雜。風剪力所引起之流場稱為風吹流,其影響之深度有限。另將波浪視為一外力,其引致之流場,稱為沿岸流,波場本身即為一複雜之現象,因此沿岸流之計算較為複雜。

海域潮汐水流計算方面文獻中, Hansen(1962), 首先應用顯式有限差分法模擬二維暴潮水流現象。 Leenderste(1967) 依據 Hansen 理論, 利用隱式、顯式交替方向差分法建立二維模式模擬河口及海岸附近之水流流況。另外, Dronker(1969) 忽略非線性項之影響, 以 Leenderste 方法模擬演算潮汐水流。之後, Leenderste 等(1973,1971), 以空間交錯格網(space-staggered grid) 建立多層水深平均之三維模式模擬潮汐水流, 此方法亦廣為其他研究所採用。國內亦有系列之研究採用 Leendertse 及 Liu 之差分法建立二維或三維模式模擬海域流況, 如 Tsai et al. (1987), 蔡、宋(1990), 蕭、蔡(1991) 等學者。

Yih and Chen(1982), 劉肖孔(1988) 以及李賢文(1989) 等人的論著, 則探討有關台灣海峽的潮汐數值計算, 這些文獻研究的主要重點在於整個台灣海峽大區域潮汐海流之水理分析, 其結果與局部海域水理特性分析不同。

使用層化積分模式計算流在文獻中為數已然不少。 Wang and Connor(1975) 使用有限元素法發展出單層及雙層深度積分模式用來計算海岸地區流況。高等(1989) 利用美國 ALDEN 公司發展出之單層深度積分模式模擬深澳灣海域流況。而相關之參考文獻可參考 Kawaharu、Hirano and Tsubota(1982)。使用單層水深積分模式模擬流場可得到滿意之結果, 但是流場在水深方向之變化則無法獲得。

如以數值方法模擬大範圍三維流場, 首先遭遇之問題在於所考慮區域之平面尺度遠大於水深, 以致於數值計算格網足以代表欲模擬區域時, 格網節點數往往過多, 而數值計算所需電腦容量甚大, 且電腦計算時間過久。解決此問題之方法之一即為採用層化積分模式, 李、郭(1989) 建立三維多層模式, 層化

積分模式可區分為單層水深積分模式及多層深度積分模式,此種模式之基本精神為利用深度積分平均量表現模擬之流場特性,進而配合層次上下交界面之界條件化簡原有三維之數值計算為二維之計算但仍保有三維問題之特性。

至於使用多層深度積分模式模擬流場,其使用之數值方法有有限差分法及有限元素法。使用有限差分法的可以 Leendertse、Alexander and Liu(1973)為代表。Leendertse and Liu(1977)加考慮紊流能量於模式中使數值模擬結果更能代表實際之流況。使用有限元素法的較早可以 Kawahara、Kobayashi and Nakata(1982)為代表。其層化積分模式均採用壓力為靜水壓力之假設配合層次積分觀念使三維數值計算簡化為各層次之二維流場計算。李、郭(1989)利用有限元素法為基礎,建立一個以模擬三維流場之多層深度積分模式,利用層次深度積分觀念推導多層深度積分方程式;利用有限元素法推導各層次積分有限元素方程式;對時間之數值積分方法,則用已知解析之計算例,以驗證所發展出來模式之正確性。

Chu and Yeh(1984)建立港灣水理模式(Harbour Hydrodynamic Model,簡稱HHM)也是依照 Leendertse (1973)之空間離散方法以顯性之正規蛙躍法(leap frog)所建立之多維水理數值模式。HHM模式曾應用於美國的漢堡灣(Humboldt Bag)Chu et al.(1986),中東的阿拉伯灣(Arabian Gulf)Chu et al.(1988),及美國的普及灣(Puget Sound)Chu et al.(1989),對於複雜幾何條件之適用性及水理現象之模擬均獲致不錯的結果。

海流模式可用來計海域、港灣、河口及湖泊之三維(三度空間變化)或二維(深度平均)的水理變化。所謂流況變化即指水體內之水流速度和水位變化。至於三維或二維的選擇,三維模式適用於深水或深度變化較大的港灣與海域。但三維模式之應用需要龐大的計算容量和較長的計算時間,而且需要較多的邊界條件、參數值和水位、水流速的觀測值資料。

關於近岸流場(nearshore current)方面,Longuet-Higgins and Stewart(1964)提出輻射應力(radiation stress)之觀念,應用於解析波浪波一流和波一波交互作用,進而合理的說明波浪溯升(set up),下降(set down),沿岸流(longshore current),裂流(rip current)及近岸流系統等現象。

近岸流場因地形變化複雜及海岸結構物配置不規則,理論計算不易,除較

規則地形變化或配置簡單之結構物,可求得較簡易之流場經驗公式外,一般常引用有限差分法或有限元素法等數值方法推算流場。

Longuet-Higgins(1970), Tronton(1970)計算因波浪斜向所產生之沿岸流流速剖面, Horikawa and Sasaki (1968,1972), Sasaki (1974,1975) Sakaki and Horikawa (1978),也配合實驗之驗證及現場觀測求得沿岸流及裂流流速剖面分佈之經驗公式。Stive and Battjes(1986), Goda and Watanabe(1991),則探討不規則波產生之沿岸流特性。

Nada(1974), Ebersole and Dalrymple(1980), Nishimura(1982), 磨(1987)及孫(1991)等引用幅射應力之觀念,使用有限差分法解析近岸流之流場,其底部摩擦項(摩擦係數)則引用不同之經驗公式表示。Liu and Lennou(1978),林、蔡(1982)等學者則引用有限元素法解析近岸流場。

解析近岸流場前必需先推算波浪場,再利用推算之波浪場結果,才能進一步計算流場,因此波場與流場之數值計算結果間建立橋樑為一個重要的原則。流場部分,我們擬引用有限元素法做為處理本研究之數值方法。

在執行模擬海洋現場之有限元素法數值模式運作時,大區域之網格自動分割及結點最佳編號,為一個甚為重要的過程,元素分割不佳,結點編號未做合理的考慮,將造成前置作業時間延長,電腦記憶體浪費,甚至無法執行,並且影響計算結果之精確性。市面上之有限元素法套裝軟體雖然具有元素分割及結點編號之功能,但因價格昂貴,且並不完全適合我們的需求,本計畫擬參照分割原理,自行開發是一個較實務的途徑。

貳、理論解析

一、單層二維潮流模式

考慮近岸海域區域(如示意圖2-1), x, y 軸分別代表離向岸方向(離岸方向為正), 及沿岸方向, z 軸表垂直方向(上向為正), 水深分佈為 $h(x, y)$, 水位變化為 $\zeta(x, y, t)$ 。

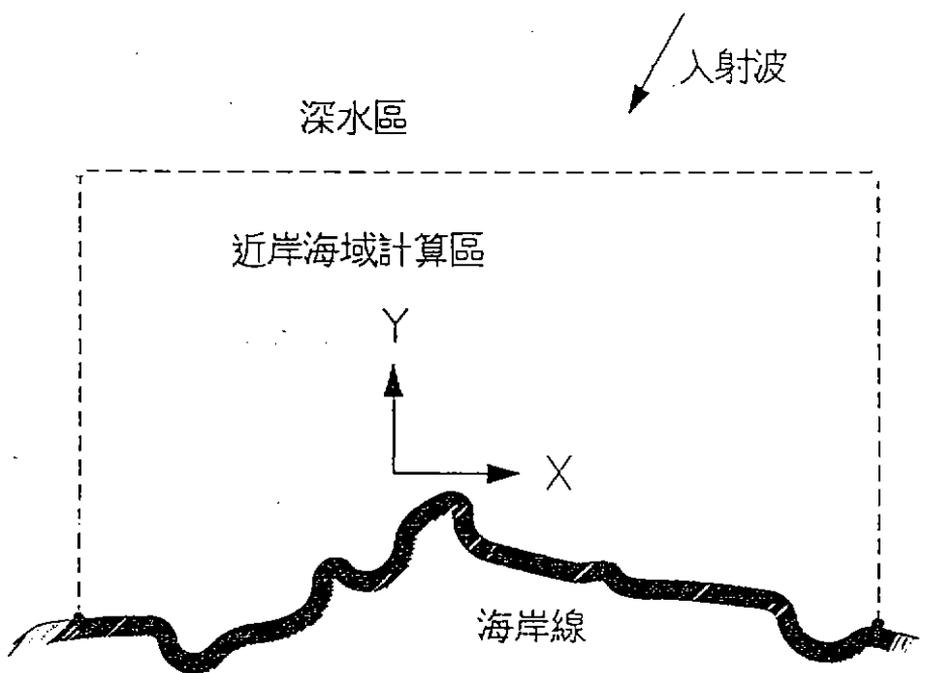


圖2-1 近岸海域區域示意圖

根據質量守恒原理(the conservation of mass), 不可壓縮流體可表示為下列連續方程式(continuity equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1.1)$$

式中 $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ 分別為 x, y 及 z 方向之流速, 假如垂直方向之流向變化不甚劇烈, 而在如潮汐之長波作用條件下, 我們將引用垂直積分原理, 化簡方程(2.1.1)為二維問題, 即使用積分運算 $\int_{-h}^{\zeta} () dz$ 於式(2.1.1)可得

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \quad (2.1.2)$$

$$= \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + w(x, y, \zeta) - w(x, y, -h) = 0$$

引用萊不尼茲積分法 (The Leibniz rule of integration) 於 (2.1.2) 式右邊各項可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u dz - u(x, y, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v dz - v(x, y, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - v(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial y} \\ & + w(x, y, \zeta) - w(x, y, -h) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

假如定義

$$U = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u dz \quad (2.1.4a)$$

$$V = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} v dz \quad (2.1.4b)$$

式中 U, V 分別為 x 方向及 y 方向之平均流速。

並使用三維自由表面運動邊界條件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u(x, y, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v(x, y, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w(x, y, \zeta) = 0, \quad z = \zeta(x, y, t) \quad (2.1.5)$$

及不透水邊界條件

$$u(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x, y, -h) \frac{\partial h}{\partial y} + w(x, y, -h) = 0, \quad z = -h(x, y) \quad (2.1.6)$$

則式 (2.1.3) 可化為

$$\frac{\partial}{\partial x} (UD) + \frac{\partial}{\partial y} (VD) + \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (2.1.7)$$

式中 $D = h + \zeta$, 而 UD, VD 分別代表 x 方向及 y 方向之流量。

根據動量守恒原理 (conservation of momentum) 不可壓縮流可表示為下列運動方程式 (momentum equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (2.1.8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (2.1.8b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -2\omega_x v + 2\omega_y u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (2.1.8c)$$

式中 f 為柯氏力參數 (Coriolis parameter phase velocity), $f = 2\omega_e \sin \phi$, ω 為地球自轉相位速度, ω_x, ω_y 分別為地球自轉之 x 分量及 y 分量, ϕ 為緯度 (latitude)。 $\tau_{ij}, i, j = x, y, z$, 表示分子粘滯力 (molecular velocity) 及亂流動量傳遞 (turbulent momentum transfer) 之合成剪應力。 p 為壓力, ρ 為水密度。

一般典型近岸區垂直方向之流速 (w), 遠較水平速度 (u, v) 為小, 垂直之深度 (幾拾米), 遠較水平之尺度 (幾公里) 為小, 因此在較長波之條件下垂直方向之動量方程式, 主要力量為壓力及重力, 其他力量予以忽略, 式 (2.1.8c) 化簡為

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (2.1.9a)$$

$$\text{or } p = \rho g(\zeta - z) \quad (2.1.9b)$$

因此

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2.1.10a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (2.1.10b)$$

將(2.1.10)代入(2.1.8a)及(2.1.8b),並利用垂直積分 $\int_{-h}^{\zeta}(\)dz$ 運算、萊不尼茲原理、自由表面運動邊界條件(2.1.5)及不透水邊界條件(2.1.6),可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}[U(h+\zeta)] + \frac{\partial}{\partial x}[\beta_{xx}U^2(h+\zeta)] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta_{xy}UV(h+\zeta)] \\ & = (h+\zeta)fV - g(h+\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{h+\zeta}{\zeta}\left(\frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}(F_{xs} - F_{xb}) \end{aligned} \quad (2.1.11a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}[V(h+\zeta)] + \frac{\partial}{\partial x}[\beta_{yx}UV(h+\zeta)] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta_{yy}V^2(h+\zeta)] \\ & = -(h+\zeta)fU - g(h+\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{h+\zeta}{\zeta}\left(\frac{\partial F_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}(F_{ys} - F_{yb}) \end{aligned} \quad (2.1.11b)$$

式中 $\beta_{xx}, \beta_{yy}, \beta_{xy}, \beta_{yx}$ 稱動量修正因子(momentum correction factor),分別定義為

$$\beta_{xx} = \frac{1}{(h+\zeta)U^2} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz \quad (2.1.12a)$$

$$\beta_{yy} = \frac{1}{(h+\zeta)V^2} \int_{-h}^{\eta} v^2 dz \quad (2.1.12b)$$

$$\beta_{xy} = \beta_{yx} = \frac{1}{(h+\zeta)UV} \int_{-h}^{\eta} uv dz \quad (2.1.12c)$$

剪應力 $F_{xx}, F_{xy}, F_{yx}, F_{yy}$ 分別定義為

$$F_{xx} = \frac{1}{h+\zeta} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{xx} dz \quad (2.1.13a)$$

$$F_{xy} = \frac{1}{h+\zeta} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{xy} dz \quad (2.1.13b)$$

$$F_{yx} = \frac{1}{h+\zeta} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{yx} dz \quad (2.1.13c)$$

$$F_{yy} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{yy} dz \quad (2.1.13d)$$

F_{xs} , F_{ys} 及 F_{xb} , F_{yb} 分別代表自由表面之剪力(風剪力)及海底之剪力(摩擦力)

一般實際應用時動量修正因子可假設為 1 (Dean and Dalrymple, 1984), 即 $\beta_{xx} = \beta_{xy} = \beta_{yx} = B_{yy} = 1$, 則式(2.1.11a)及(2.1.11b)可化爲

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = fV - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{1}{D\rho} (F_{xs} - F_{xb}) \quad (2.1.14a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -fU - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{1}{D\rho} (F_{ys} - F_{yb}) \quad (2.1.14b)$$

剪應力 F_{xx} , F_{yy} , F_{xy} , F_{yx} 一般可表示爲

$$F_{xx} = \rho E_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.1.15a)$$

$$F_{yy} = \rho E_{yy} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.1.15b)$$

$$F_{xy} = F_{yx} = \frac{\rho}{2} E_{xy} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2.1.15c)$$

E_{xx} , E_{xy} , E_{yx} , E_{yy} 稱爲剪應力黏滯性係數(eddy viscosity coefficient), 一般取 $E_v = E_{xx} = E_{yy} = E_{xy} = E_{yx}$, 而海面一般主要爲風剪力, 其分量 F_{xs} , F_{ys} 依 Dean(1984) 可表示爲

$$F_{xs} = \rho E_w W_d^2 \cos(\theta_w) \quad (2.1.16a)$$

$$F_{ys} = \rho E_w W_d^2 \sin(\theta_w) \quad (2.1.16b)$$

式中 W_d 爲距海平面 10 米處風速。 E_w 爲風剪力係數。 θ_w 爲風與 x 軸之夾角。

而海底摩擦力在x及y方向之分量 F_{xb} 及 F_{yb} 依Smith and Cheng(1987)可表示為

$$F_{xb} = \rho E_b U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (2.1.17a)$$

$$F_{yb} = \rho E_b V \sqrt{U^2 + V^2} \quad (2.1.17b)$$

式中 E_b 為海底摩擦係數。

一般在垂直流由方向變化不大,受潮汐、風影響之近岸流況可引用式(2.1.7), (2.1.14a)及(2.1.14b)三個方程式,求解平均流速 U, V 及水位變化 D 等三個變數之流場。

二、多層三維潮流模式

假設垂直之水平速度方向變化甚明顯,則單層之二維模式無法完整的描述流場分佈,甚至垂直方向若有反向的流速分佈,其計算之結果更有失真之現象發生。因此將引用多層積分原理以求解多層流場變化。將垂直方向分為 n_0 層,以 $z_1, z_2, z_3 \dots z_{n_0}$ 表示其高層,其中 $z_0 = \zeta, z_{n_0} = -h$,每層之厚度以 $h^{(\ell)}, \ell = 1, 2, \dots, n_0$ 表示, $h^{(\ell)} = z^{(\ell-1)} - z^{(\ell)}$,並假設第2, 3, .. n_0 等層厚度不改變,僅水面第一層 $h^{(1)} = \zeta - z^{(1)}$ 之變動量小於該層厚度,即第一層不會消失(如示意圖2-2)。

此處將引用類似上節之垂直積分原理,以積分運算 $\int_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} (\) dz$ 作用於連續方程式(2.1.1)及運動方程式(2.1.8a)(2.1.8b),而得

$$\frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial y} + w \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} = 0, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial t} + U^{(\ell)} \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x} + V^{(\ell)} \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial y} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} u \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}} \\ & = fV^{(\ell)} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xx}^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}^{(\ell)}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho h^{(\ell)}} \tau_{xz} \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}}, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

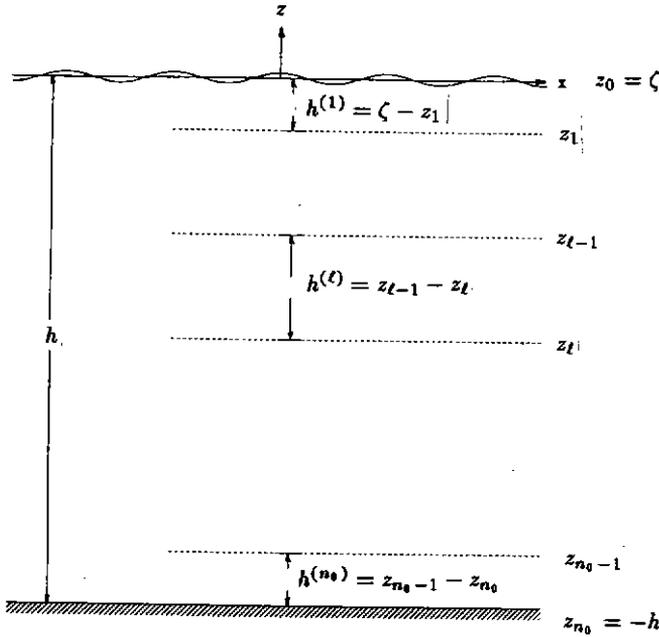


圖 2-2 近岸海域區域多層分割示意圖

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial t} + U^{(\ell)} \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x} + V^{(\ell)} \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} v \Big|_{z_l}^{z_{l-1}} \\ & = -fU^{(\ell)} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{yx}^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}^{(\ell)}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho h^{(\ell)}} \tau_{yz} \Big|_{z_l}^{z_{l-1}}, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

式中 $U^{(\ell)}, V^{(\ell)}, F_{xx}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{xy}^{(\ell)}$ 等皆為第 k 層之平均量, 可以通式定義為

$$X^{(\ell)} = \frac{1}{h^{(\ell)}} \int_{z_l}^{z_{l-1}} x \, dz \quad (2.2.4)$$

其中右上標 (ℓ) 代表第 ℓ 層, 小寫 x 代表 $u, v, w, \tau_{xy}^{(\ell)}, \tau_{yy}^{(\ell)}, \tau_{yx}^{(\ell)}$ 等變數, 大寫 X 代表 $U, V, W, F_{xy}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{yx}^{(\ell)}$ 等變數,

而且式中 $x \Big|_{z_l}^{z_{l-1}}$ 定義為

$$x \Big|_{z_l}^{z_{l-1}} = x \Big|_{z_{l-1}} - x \Big|_{z_l} \quad (2.2.5)$$

層次界面之變量 u, v 以其上下兩層之平均值 U, V 表示為

$$u \Big|_{z_\ell} = \frac{1}{2}(U^{(\ell)} + U^{(\ell+1)}) \quad (2.2.6a)$$

$$v \Big|_{z_\ell} = \frac{1}{2}(V^{(\ell)} + V^{(\ell+1)}) \quad (2.2.6b)$$

層次界面之變量 w 由(2.2.1)式可得

$$w \Big|_{z_{\ell-1}} = - \sum_{m=\ell}^{n_0} h^{(m)} \left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(m)}}{\partial y} \right) \quad \ell = 1, 2, \dots, n_0 \quad (2.2.7a)$$

當 $\ell = 1$ 時又可化爲

$$w \Big|_{z_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \sum_{m=1}^{n_0} h^{(m)} \left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(m)}}{\partial y} \right) \quad (2.2.7b)$$

每層之平均值 $W^{(\ell)}$ 由下式求得

$$W^{(\ell)} = \frac{1}{2} \left(w \Big|_{z_{\ell-1}} + w \Big|_{z_\ell} \right) \quad (2.2.7c)$$

綜合式(2.2.2), (2.2.3), (2.2.7)及(2.2.8)即層化積分表示式。

同樣各層內之流體剪應力 $F_{xx}^{(\ell)}, F_{yy}^{(\ell)}, F_{xy}^{(\ell)}, F_{yx}^{(\ell)}$ 表示爲

$$F_{xx}^{(\ell)} = \rho E_v \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial x} \quad (2.2.8a)$$

$$F_{xy}^{(\ell)} = F_{yx}^{(\ell)} = \rho \frac{E_v}{2} \left(\frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial x} + \frac{\partial U^{(\ell)}}{\partial y} \right) \quad (2.2.8b)$$

$$F_{yy}^{(\ell)} = \rho E_v \frac{\partial V^{(\ell)}}{\partial y} \quad (2.2.8c)$$

式中 E_v 爲水平剪應力黏滯性係數。

層次界面剪應力以二次方法計算表示爲表示

$$\tau_{xz} \Big|_{z_t} = \left(\rho E_h \frac{\partial u}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \right) \Big|_{z_t} \quad (2.2.9a)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z_t} = \left(\rho E_h \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \right) \Big|_{z_t} \quad (2.2.9b)$$

式中 E_h 為垂直剪應力黏滯性係數, 其因次為長度平方。而表面風剪力為

$$\tau_{xz} \Big|_{z_0} = F_{xs} \quad (2.2.10a)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z_0} = F_{ys} \quad (2.2.10b)$$

海底摩擦剪應力表示為

$$\tau_{xz} \Big|_{z_{n_0}} = F_{xb} \quad (2.2.11a)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z_{n_0}} = F_{yb} \quad (2.2.11b)$$

式中 $F_{xs}, F_{ys}, F_{xb}, F_{yb}$ 分別定義如式 (2.1.16a), (2.1.16b), (2.1.17a) 及 (2.1.17b)。

三、沿岸流模式

假設波浪與海流之交互作用甚為明顯, 即波力應視為獨立外力, 因此將水平速度區分為一平均速度及因波力造成出之速度變化表示為

$$u = u^* + u' \quad (2.3.1a)$$

$$v = v^* + v' \quad (2.3.1b)$$

式中 u^*, v^* 為一平均流速, u', v' 為波力造成之速度分量。

而水位變化 ζ 包括因流速影響產生之 ζ_a , 因波浪與海流交互作用產生之平均水位變化 ζ_v , 如水位抬昇 (set up) 或水位降低 (set down), 表示為 $\zeta = \zeta_a + \zeta_v$ 。

類似 2-1 節中之垂直積分原理, 以 $\int_{-h}^{\zeta} (\) dz$ 做積分運算於連續方程式 (2.1.1) 及運動方程式 (2.1.8a) 及 (2.1.8b) 則可得下列方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}[U(h+\zeta)] + \frac{\partial}{\partial y}[V(h+\zeta)] + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = fV - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{\rho(h+\zeta)} (F_{xs} - F_{xb}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -fU - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{\rho(h+\zeta)} (F_{ys} - F_{yb}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

式中 U, V 定義如式 (2.1.4a) 及 (2.1.4b)。 $F_{xx}, F_{xy}, F_{yx}, F_{yy}$ 定義如式 (2.1.15), 式中 E_v 依 Longuet-higgins (1970) 之建議可表示為

$$E_v = N_c \ell_c \sqrt{g(h+\zeta)} \quad (2.3.5)$$

式中 N_c 為常數, 其值小於 0.016, ℓ_c 為特性長度, 定義為

$$\ell_c = (h+\zeta) / \tan \beta \quad (2.3.6)$$

式中 $\tan \beta$ 為平均底床坡度。

風剪力 F_{xs} 及 F_{ys} 定義如式 (2.1.16), 若假設無風剪力作用, 則 $F_{xs} = F_{ys} = 0$ 。
海底剪力 F_{xb} 及 F_{yb} 則定義如式 (2.1.17)。

輻射應力 (radiation stress) $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_{yx}$ 定義為

$$S_{xx} = \frac{1}{h+\zeta} \int_{-h}^{\zeta} \left(u'u' + \frac{p}{\rho} \right) dz - \frac{1}{2} g(h+\zeta) - U'U' \quad (2.3.7a)$$

$$S_{yy} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} (v'v' + \frac{p}{\rho}) dz - \frac{1}{2}g(h + \zeta) - V'V' \quad (2.3.7b)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u'v' dz - U'V' \quad (2.3.7c)$$

式中 U', V' 分別定義為

$$U' = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u' dz \quad (2.3.8a)$$

$$V' = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} v' dz \quad (2.3.8a)$$

假如波場及波力引起之流場週期皆為 T ，針對 (2.3.2)，(2.3.3) 及 (2.3.4) 等式取週期平均 $\frac{1}{T} \int_0^T () dt$ ，並定義 $D = h + \zeta$ ，則可化簡為

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{UD}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{UD}) = 0 \quad (2.3.9a)$$

$$\overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = f\overline{V} - g \frac{\partial(\overline{D} - h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{F_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_{xy}}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho \overline{D}} \overline{F_{xb}} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{S_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S_{xy}}}{\partial y} \right) \quad (2.3.9b)$$

$$\overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = -f\overline{U} - g \frac{\partial(\overline{D} - h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{F_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_{yy}}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho \overline{D}} \overline{F_{yb}} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{S_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S_{yy}}}{\partial y} \right) \quad (2.3.9c)$$

式中各物理量變數上之短線一代表週期平均量。且 $\overline{D} = \overline{h + \zeta} = h + \overline{\zeta}$ ，其中 $\overline{\zeta} = \overline{\zeta_a} + \overline{\zeta_v}$ 。

假設入射波 (波高 H ，波數 k ，頻率 σ) 為小振幅線性波，其波向與 x 軸夾 θ_0 角，表示為

$$\zeta_0(x, y, t) = \frac{H}{2} \cos(k \cos \theta_0 x + k \sin \theta_0 y - \sigma t) \quad (2.3.10)$$

則根據(Dean and Dalrymple, 1984)

$$\overline{S_{xx}} = E_o[n_c(\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2}] \quad (2.3.11a)$$

$$\overline{S_{yy}} = E_o[n_c(\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2}] \quad (2.3.11b)$$

$$\overline{S_{xy}} = \frac{E_o}{2} n_c \sin 2\theta_o \quad (2.3.11c)$$

式中

$$n_c = \frac{kh}{\sin h(2kh)} + \frac{1}{2} \quad (2.3.12)$$

n_c 稱為波浪之群速(group velocity)與相位速度(phase velocity)比值, E_o 為每單位長度之能量。

$$E_o = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (2.3.13)$$

水位變化中之因波浪引起之平均水位變化量 $\bar{\zeta}_v$, 本文將分別引用 Horikawa 碎波前淺化區及碎波後之經驗公式求得。碎波前之水位為下降(set down)表示為

$$\bar{\zeta}_v = -\frac{H^2}{8} \frac{k}{\sin h(2kh)} \quad (2.3.14a)$$

碎波後之水位提昇(set up)表示為

$$\bar{\zeta}_v = 0.167(h_b - h) - \frac{H_b^2}{8} \frac{k}{\sin h(2kh_b)} \quad (2.3.14b)$$

式中 h_b 為碎波處水深, H_b 為碎波處波高, 碎波條件則引用淺水波臨界尖銳度為指標, 即

$$(H/L)_{max} = 0.142 \tan h\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (2.3.14c)$$

式中 L 為波長

沿岸流之控制方程式為(2.3.9a), (2.3.9b)及(2.3.9c)等三式, 以求解 \bar{U} , \bar{V} 及 \bar{D} 三個未知量。

參、二維潮流數值模式

一、有限元素法模式

二維單層模式主要引用控制方程式,包括式(2.1.7), (2.1.14a)及(2.1.14b)之時間函數問題(time dependent problem),三個方程求之三個變數為水平流速 U, V 及水位 ζ 。本節將引用有限元素法將上述積分表示式改為有限元素方程式。

將上述微分方程式以區域積分轉換為 weak form 如下

$$\int \int_R \psi \left(\frac{\partial(UD)}{\partial x} + \frac{\partial(VD)}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dR = 0 \quad (3.1)$$

$$\int \int_R \psi \left[\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial(D-h)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yx}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho D} (F_{xs} - F_{xb}) \right] dR = 0 \quad (3.2)$$

$$\int \int_R \psi \left[\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial(D-h)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho D} (F_{ys} - F_{yb}) \right] dR = 0 \quad (3.3)$$

式中 R 為計算區域, ψ 為權重函數(weighting function)。

本文利用 Galerkin 有限元素之近似觀念(Galerkin approximation),即權重函數取用元素之形狀函數,將計算區域 R 分割為有限個元素(以 $R^{(e)}$ 表示),此處取用線性三角形元素,計有 N 個元素,對流場每個元素上之變量 U, V, D 及 h ,皆可表示為

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \psi_i \quad (3.4a)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i \psi_i \quad (3.4b)$$

$$D = \sum_{i=1}^3 D_i \psi_i \quad (3.4c)$$

$$h = \sum_{i=1}^3 h_i \psi_i \quad (3.4d)$$

式中 U_i, V_i, D_i 及 h_i 為元素 $R^{(e)}$ 上結點 i 之 U, V, D, h 值, $i=1,2,3$, 一般以逆時鐘方向排列, 其座標分別為 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 及 (x_3, y_3) 。 ψ_i 為線性三角形元素之形狀函數定義為

$$\psi_1(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (3.5a)$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (3.5b)$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (3.5c)$$

式中 $A^{(e)}$ 為元素 $R^{(e)}$ 之面積。

為簡化符號, 本文此後將引用張量符號 (Tensor notation) 之定義, 即方程式等號同一側重複之下標具有累加之意。例如 (3.4) 可改為

$$U = U_i \psi_i \quad (3.6a)$$

$$V = V_i \psi_i \quad (3.6b)$$

$$D = D_i \psi_i \quad (3.6c)$$

$$h = h_i \psi_i \quad (3.6d)$$

各變數 U, V, D, h, ψ_i 對 x 之微分分別以 $U_{,x}, V_{,x}, D_{,x}, h_{,x}, \psi_{i,x}$ 等符號表示為

$$U_{,x} = U_i \psi_{i,x} \quad (3.7a)$$

$$V_{,x} = V_i \psi_{i,x} \quad (3.7b)$$

$$D_{,x} = D_i \psi_{i,x} \quad (3.7c)$$

$$h_{,x} = h_i \psi_{i,x} \quad (3.7d)$$

同理各變數對y之微分量可表示為

$$U_{,y} = U_i \psi_{i,y} \quad (3.8a)$$

$$V_{,y} = V_i \psi_{i,y} \quad (3.8b)$$

$$D_{,y} = D_i \psi_{i,y} \quad (3.8c)$$

$$h_{,y} = h_i \psi_{i,y} \quad (3.8d)$$

將表示(3.6)、(3.7)及(3.8)分別代入 Weak form 及引用下列由部分積分公式及 divergence 定理推導之關係式

$$\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \frac{\partial X}{\partial y} dR = \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i X n_y d\Gamma - \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} X dR \quad (3.9a)$$

$$\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \frac{\partial X}{\partial x} dR = \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i X n_x d\Gamma - \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} X dR \quad (3.9b)$$

式中X代表除了U,V,W,D及h等以外之任何其他物理,如 $F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}, F_{yx}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y}$ 等, n_x, n_y 為垂直邊界向外單位向量在x方向及y方向分量。 $R^{(e)}$ 表示第e個元素之區域, $\Gamma^{(e)}$ 表示元素e之外圍邊界。

經整理式(3.1)、(3.2)及(3.3)可分別化為下列之表示式

$$\begin{aligned} & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left(\frac{\partial(UD)}{\partial x} + \frac{\partial(VD)}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dR \\ &= \int \int_{R^{(e)}} \left(\psi_i U \frac{\partial D}{\partial x} + \psi_i D \frac{\partial U}{\partial x} + \psi_i V \frac{\partial D}{\partial y} + \psi_i D \frac{\partial V}{\partial y} + \psi_i D_t \right) dR \\ &= \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR U_j D_k + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR U_j D_k \\ &+ \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR V_j D_k + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR V_j D_k \\ &+ \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR D_{j,t} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial D}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} \right. \\
 & - E_v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - E_w \frac{W_d^2}{D} \cos \theta_w + E_b \frac{U}{D} \sqrt{U^2 + V^2} \left. \right) dR \\
 & = \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRU_{j,t} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dRU_j U_k + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dRV_j U_k \\
 & - f \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRV_j + g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,x} dRD_j - g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,x} dRh_j \\
 & - E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(U, x)_j + E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,x} dRU_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(U, y)_j + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dRU_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(V, y)_j + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dRV_j \\
 & - A^{(e)} E_w \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \left(\frac{W_d^2 \cos \theta_w}{D} \right)_j \\
 & + A^{(e)} E_b \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \left(\frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial D}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} \right. \\
 & - E_v \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - E_w \frac{W_d^2}{D} \sin \theta_w + E_b \frac{V}{D} \sqrt{U^2 + V^2} \left. \right) dR \\
 & = \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRV_{j,t} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dRU_j V_k + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dRV_j V_k \\
 & + f \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dRU_j + g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,y} dRD_j - g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,y} dRh_j \\
 & - E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(V, x)_j + E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,x} dRV_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(V, y)_j + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dRV_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(U, y)_j + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,y} dRU_j \\
 & - A^{(e)} E_w \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \left(\frac{W_d^2 \sin \theta_w}{D} \right)_j \\
 & + A^{(e)} E_b \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \left(\frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

式中 $R^{(e)}$ 表示第 e 個元素之區域, $\Gamma^{(e)}$ 表示元素外圍邊界, $A^{(e)}$ 為元素之區域面積。

經化簡(3.10), (3.11)及(3.12)可表示

$$M_{ij}D_{j,t} = a_i \quad (3.13a)$$

$$M_{ij}U_{j,t} = b_i \quad (3.13b)$$

$$M_{ij}V_{j,t} = c_i \quad (3.13c)$$

式中

$$M_{ij} = \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \quad (3.14a)$$

$$a_i = -M_{kij}^x U_j D_k - M_{jik}^x U_j D_k - M_{kij}^y V_j D_k - M_{jik}^y V_j D_k \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned} b_i = & -M_{kij}^x U_j U_k - M_{kij}^y V_j U_k + f M_{ij} V_j - g M_{ji}^x D_j + g M_{ji}^y h_j \\ & + E_v N_{ij}^x(U,x)_j - E_v M_{ij}^x(U,x)_j + E_v N_{ij}^y(U,y)_j - E_v N_{ij}^y(U,y)_j \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x(V,y)_j - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x(V,y)_j \\ & + A^{(e)} E_w M_{ij} \left(\frac{W_d^2 \cos \theta_w}{D} \right)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \end{aligned} \quad (3.14c)$$

$$\begin{aligned} c_i = & -M_{kij}^x U_j V_k - M_{kij}^y V_j V_k - f M_{ij} U_j - g M_{ji}^y D_j + g M_{ji}^x h_j \\ & + E_v N_{ij}^x(V,x)_j - E_v M_{ij}^x(V,x)_j + E_v N_{ij}^y(V,y)_j - E_v N_{ij}^y(V,y)_j \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x(U,y)_j - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x(U,y)_j \\ & + A^{(e)} E_w M_{ij} \left(\frac{W_d^2 \sin \theta_w}{D} \right)_i + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \end{aligned} \quad (3.14d)$$

$$M_{ij}^x = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_j dR \quad (3.15a)$$

$$M_{ij}^y = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_j dR \quad (3.15b)$$

$$M_{ijk}^x = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_j \psi_k dR \quad (3.15c)$$

$$M_{ij}^y = \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_j \psi_k dR \quad (3.15d)$$

$$N_{ij}^x = \int \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma \quad (3.15e)$$

$$N_{ij}^y = \int \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma \quad (3.15f)$$

方程式(3.13a), (3.13b)及(3.13c)為對時間一階率微分法,本文引用二步驟顯示法(Kawahara, Takench and Yoskida, 1978)對時間做數值積分表示如下

$$M_{ij} D_j^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij} D_j^n + \frac{\Delta t}{2} c_i^n \quad (3.16a)$$

$$M_{ij} U_j^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij} U_j^n + \frac{\Delta t}{2} a_i^n \quad (3.16b)$$

$$M_{ij} V_j^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij} V_j^n + \frac{\Delta t}{2} b_i^n \quad (3.16c)$$

式中 Δt 為時間間距,右上標 n 表時間間距個數,即 $t = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots$,當 $n = 0$ 代表啓始時間之值。第二步驟計算式為

$$M_{ij} D_j^{n+1} = M_{ij} D_j^n + \Delta t c_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17a)$$

$$M_{ij} U_j^{n+1} = M_{ij} U_j^n + \Delta t a_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17b)$$

$$M_{ij} V_j^{n+1} = M_{ij} V_j^n + \Delta t b_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.17c)$$

二步驟顯示法為積分一個時間間距時先計算半個時距之值再據以完成整個時距之計算,此方法具有二階精確度。此方法滿足條件穩定,時間間距之大小一般受限於Courant-Friendrichs-lewy條件

$$\Delta t \leq (1 - 2) \frac{\Delta d}{\sqrt{2gh}} \quad (3.18)$$

式中 Δd 為元素之最小邊長。

邊界條件,在海面一般主要外力為風力,海底則引用經驗式描述摩擦力之作用。在二維模式側面邊界有固定邊界及開放邊界。固定邊界一般假設為不透水直立壁,垂直於岸壁之速度為零,同時假定非滑動(non-slip),即平行於岸壁之速度不為零,在開口邊界則需給定實測之潮位或流速。本文之二維模式為時間變化問題,因此在啓始時間($t = 0$)時,即啓始條件需給定整個區域之水位 D 及流速 U 、 V 。

二、數值驗證

二維潮流模式，取一長方形港池(長30公里,寬2.5公里,深度8米)對數值模式做初步印證。並假設開口有一振幅1米,週期12.5小時之潮波,作用於港池,如圖3-1所示。此計算例為模擬一個三面封閉僅一面開口之矩形港池在開口處受日潮作用港池內之水位及流場變化。計算此例主要目的在測試二維單層模式計算平面流速及水位變化之正確性。

數值計算中所用之有限元素格網如圖3-2所示,水深方向則取單層。數值積分所用之時間間距取100秒。數值模式計算結果在部份時間港池內等水位分佈如圖3-3所示,由於港池岸壁為全反射直立壁因此可預期受到反射波影響,漲潮時港內水位較開口處水位為高,退潮時港內水位則較開口處水位為低。數值模計算結果在時間之港內速度流場分佈如圖3-4,港池開口處由高潮位退潮至零水位時,港池流場為往開口處流動,而港池開口處由低潮位漲潮至零水位時,港池流場則為由開口處往港內流動。

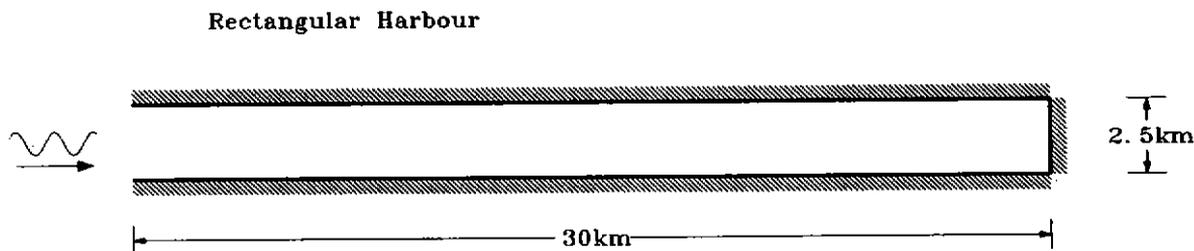


圖 3-1 長方形港池圖(長30公里,寬2.5公里,深度8米)



圖 3-2 有限元素格網分割圖

Example-1 : Rectangular Harbor with an open CAFE1A11.DAT
Water level (cm)

410 t= 1.14hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

817	818	814	813	812	811	810	809	808	807	806	805	804	804	803	803	802	801	800	
818	810	815	814	815	812	811	810	809	806	807	806	805	804	804	803	802	802	801	800
817	816	814	813	812	811	810	809	808	807	806	805	804	804	803	803	802	801	800	
817	816	816	814	812	811	810	809	808	807	806	805	805	804	803	803	802	801	801	

510 t= 1.42hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

825	823	822	820	819	817	816	815	814	813	812	811	810	809	808	808	807	806	805
827	825	823	821	820	818	817	816	815	814	812	811	810	809	808	808	807	806	805
825	824	822	820	819	817	816	815	814	813	812	811	810	809	808	808	807	806	805
825	824	823	821	820	818	817	816	814	813	812	811	810	809	808	808	807	806	805

610 t= 1.69hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

835	833	831	829	827	825	824	822	821	820	819	818	817	816	816	815	815	814	813
837	834	832	830	828	826	825	823	822	821	820	819	818	817	816	816	815	814	813
835	833	831	829	827	826	824	823	821	820	819	818	817	816	816	815	815	814	813
835	834	832	830	828	826	825	823	822	821	819	818	817	816	816	815	814	814	813

710 t= 1.97hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

848	844	841	839	837	835	834	832	831	829	828	827	826	825	825	824	823	823	823
848	846	843	841	839	836	835	833	832	830	829	828	827	826	825	824	824	823	823
847	844	842	839	837	836	834	832	831	830	828	827	827	826	825	824	824	823	823
848	845	843	840	838	836	834	833	831	830	828	827	826	825	825	824	824	823	823

810 t= 2.25hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

859	856	853	851	849	847	846	844	842	841	840	839	838	837	836	835	835	834	834
861	856	853	851	848	847	846	843	842	840	839	838	837	837	836	835	835	834	834
859	856	854	851	849	847	846	844	842	841	840	839	838	837	836	835	835	834	834
859	857	856	852	850	848	846	844	843	841	840	839	838	837	837	836	835	834	834

910 t= 2.53hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

872	869	866	864	862	860	858	856	855	853	852	851	850	849	848	847	847	846	846
874	871	868	866	863	861	859	857	856	854	853	852	851	850	849	848	847	847	846
872	870	867	864	862	860	858	856	855	853	852	851	850	849	848	848	847	847	846
873	871	868	865	863	861	859	857	855	854	853	852	851	850	849	848	847	847	846

1010 t= 2.81hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

888	883	880	878	876	873	871	869	868	867	865	864	863	862	862	861	861	860	860
890	885	882	880	877	875	873	871	869	868	866	865	864	863	862	862	861	860	860
888	883	881	878	876	873	872	870	868	867	865	864	863	863	862	861	861	860	860
887	885	882	879	877	874	872	870	869	867	866	865	864	863	863	862	861	860	860

1110 t= 3.08hr Amp= 1.00m,T= 12.50hr Ws= 10.00knots West

900	897	894	892	890	887	885	884	882	881	879	878	877	877	876	875	874	874	874
903	890	886	884	881	880	887	885	883	882	880	879	878	877	876	876	875	874	874
901	898	895	892	890	888	885	884	882	881	880	878	877	877	876	875	874	874	874
902	899	896	893	891	888	886	885	883	881	880	879	878	877	876	876	875	874	874

圖 3-3 水位分佈圖

Example-1 : Rectangular Harbor with a open CAFE1A11.DAT
current velocity \longrightarrow 100.0 (cm/sec)

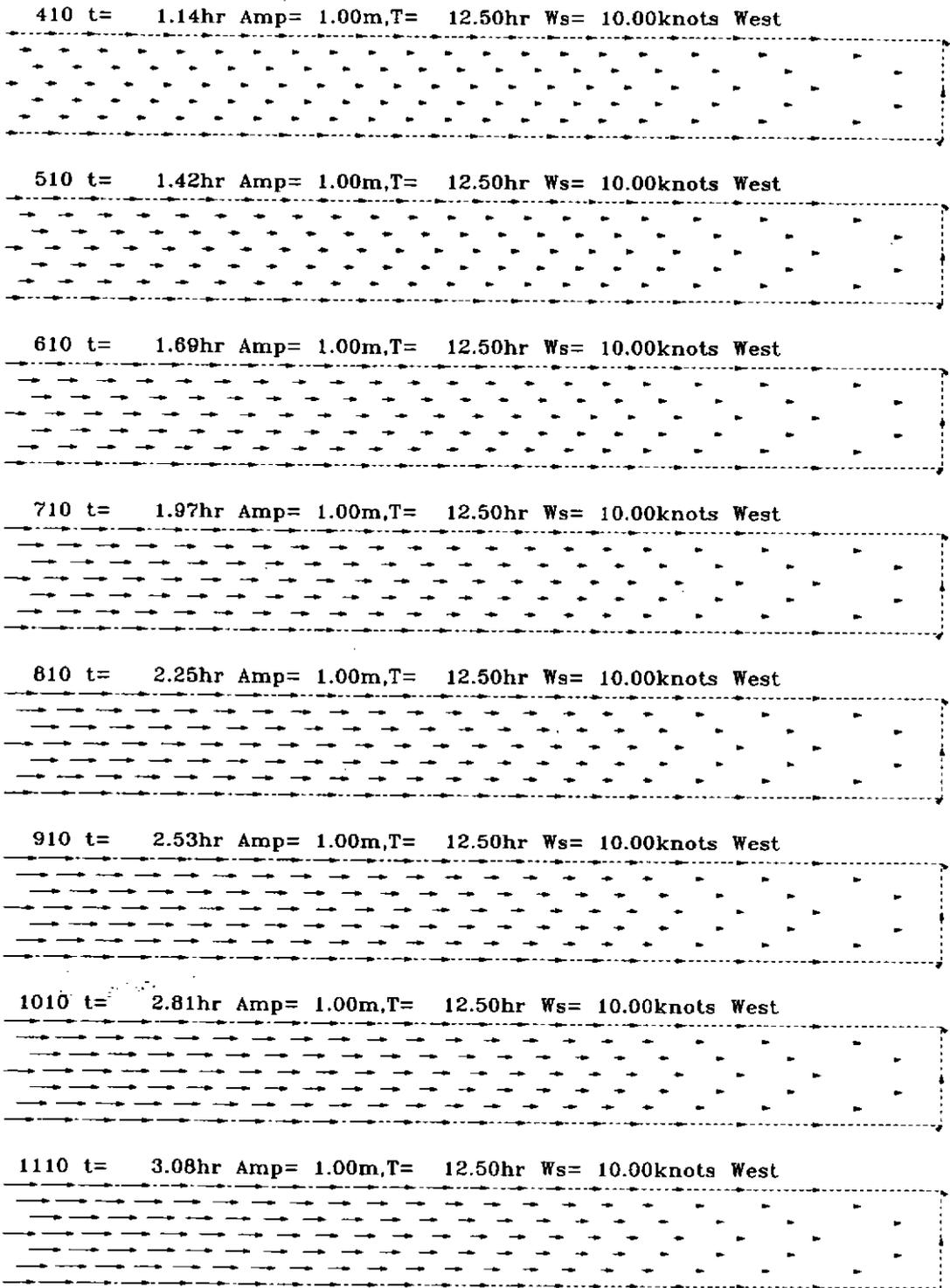


圖 3-4 速度分佈圖

肆、多層三維潮流數值模式

一、有限元素法模式

多層模式引用控制方程式為(2.2.2), (2.2.3), (2.2.7b)及(2.2.7c)之時間值問題, 求解之變數包括水位變化 ζ 及每層 $\ell = 1, 2, \dots, n_0$ 之平均流速 $U^{(\ell)}, V^{(\ell)}$, 垂直方向之流速 $W^{(\ell)}$, 同上一章將引用有限元素法將上述積分表示式化為有限元素方程式之Weak form如下:

$$\int \int_R \psi_i [U_{,t}^{(\ell)} + U^{(\ell)}U_{,x}^{(\ell)} + V^{(\ell)}U_{,y}^{(\ell)} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}}(u \Big|_{z_{t-1}} - u \Big|_{z_t}) - fV^{(\ell)} + g\zeta_{,x} - \frac{1}{\rho}(F_{xx,x} + F_{xy,x}) - \frac{1}{\rho h^{(\ell)}}(\tau_{xz} \Big|_{z_{t-1}} - \tau_{xz} \Big|_{z_t})] dR = 0 \quad (4.1)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0$$

$$\int \int_R \psi_i [U_{,t}^{(\ell)} + UV_{,x}^{(\ell)} + V^{(\ell)}V_{,x}^{(\ell)} + \frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}}(v \Big|_{z_{t-1}} - v \Big|_{z_t}) + fU^{(\ell)} + g\zeta_{,y} - \frac{1}{\rho}(F_{yx,x} + F_{yy,x}) - \frac{1}{\rho h^{(\ell)}}(\tau_{yz} \Big|_{z_{t-1}} - \tau_{yz} \Big|_{z_t})] dR = 0 \quad (4.2)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0$$

$$\int \int_{R^e} \psi_i [\zeta_{,t} + \sum_{m=1}^{n_0} h^{(m)}(U_{,x}^{(m)} + V_{,y}^{(m)})] dR = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

$$\int \int_R \psi_i W^{(\ell)} dR = \frac{1}{2} \left(\int \int_R \psi_i w \Big|_{z_{t-1}} dR + \int \int_R \psi_i w \Big|_{z_t} dR \right)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.4)$$

同樣將每層計算區域分割為 N 個線性三角形元素, 以 $R^{(e)}$ 表示, 其形狀函數, $\psi_i, i = 1, 2, 3$ 如(3.5)式。水位及各層變數物理量以形狀函數展開式如下

$$U^{(\ell)} = U_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.5a)$$

$$V^{(\ell)} = V_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.5b)$$

$$\zeta = \zeta_i \psi_i \quad (4.5c)$$

$$h^{(\ell)} = h_i^{(\ell)} \psi_i \quad (4.5d)$$

其對 x 微分量表示為

$$U_{,x}^{(\ell)} = U_i^{(\ell)} \psi_{i,x} \quad (4.6a)$$

$$V_{,x}^{(\ell)} = V_i^{(\ell)} \psi_{i,x} \quad (4.6b)$$

$$\zeta_{,x} = \zeta_i \psi_{i,x} \quad (4.6c)$$

$$h_{,x}^{(\ell)} = h_i^{(\ell)} \psi_{i,x} \quad (4.6d)$$

其對 y 微分量表示為

$$U_{,y}^{(\ell)} = U_i^{(\ell)} \psi_{i,y} \quad (4.6e)$$

$$V_{,y}^{(\ell)} = V_i^{(\ell)} \psi_{i,y} \quad (4.6f)$$

$$\zeta_{,y} = \zeta_i \psi_{i,y} \quad (4.6i)$$

$$h_{,y}^{(\ell)} = h_i^{(\ell)} \psi_{i,y} \quad (4.6j)$$

各層次之物理量以該層之平均量代表,如(2.2.5)式。而層次與層次間之界面上之物理量以上下兩層之平均值表示,如(2.2.6)式。將(4.4),(4.5)及(4.6)代入 Weak form (4.1),(4.2)及(4.3),其中各層流體剪應力引用(2.2.8)式,層次界面(包括水表面及海底面)之剪應力引用(2.2.9)式;則可化為下列方程式

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR U_{j,t}^{(\ell)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR U_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} \\
 & + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR V_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{2} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(U_k^{(\ell-1)} - U_k^{(\ell+1)} \right) \\
 & - f \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR V_j^{(\ell)} - g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,x} dR \zeta_j \\
 & + E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(U, x)_j^{(\ell)} - E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,x} dR U_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(U, y)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dR U_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(V, x)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,x} dR V_j^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{\rho} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(\tau_{xz} \Big|_{z_t}^{z_{t-1}} \right)_k = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR V_{j,t}^{(\ell)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR U_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \\
 & + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR V_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{2} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(V_k^{(\ell-1)} - V_k^{(\ell+1)} \right) \\
 & + f \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR U_j^{(\ell)} - g \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_{j,y} dR \zeta_j \\
 & + E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_y d\Gamma(V, y)_j^{(\ell)} - E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,y} \psi_{j,y} dR V_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(V, x)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,x} dR V_j^{(\ell)} \\
 & - \frac{1}{2} E_v \int_{\Gamma^{(e)}} \psi_i \psi_j n_x d\Gamma(U, y)_j^{(\ell)} + \frac{1}{2} E_v \int \int_{R^{(e)}} \psi_{i,x} \psi_{j,y} dR U_j^{(\ell)} \\
 & + \frac{1}{\rho} \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_k dR \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j \left(\tau_{yz} \Big|_{z_t}^{z_{t-1}} \right)_k = 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR \zeta_{j,t} + \sum_{b=1}^{n_0} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR h_j^{(m)} U_k^{(m)} \right. \\
 & \left. + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR h_j^{(m)} V_k^{(m)} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j dR W_j^{(\ell)} &= \frac{1}{2} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i w \Big|_{z_{(\ell-1)}} dR + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i w \Big|_{z_\ell} dR \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \sum_{m=\ell}^{n_0} h^{(m)} (U_{,x}^{(m)} + V_{,y}^{(m)}) dR \right. \\
 &\quad \left. + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \sum_{m=\ell+1}^{n_0} h^{(m)} (U_{,x}^{(m)} + V_{,y}^{(m)}) dR \right] \\
 &= -\sum_{m=\ell+1}^{n_0} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR h_j^{(m)} U_k^{(m)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR h_j^{(m)} V_k^{(m)} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,x} dR h_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} + \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \psi_j \psi_{k,y} dR h_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

式中

$$\begin{aligned}
 (\tau_{xy} \Big|_{z_{\ell-1}})_i &= \left[\left(\rho E_h \frac{\partial U}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \right) \Big|_{z_{\ell-1}} \right]_i \\
 &= \left[4\rho E_h \frac{U^{(\ell)} - U^{(\ell+1)}}{(h^{(\ell)} + h^{(\ell+1)})^2} \sqrt{(U^{(\ell)} - U^{(\ell+1)})^2 + (V^{(\ell)} - V^{(\ell+1)})^2} \right]_i \\
 &\quad i = 1, 2, 3, \quad \ell = 2, 3, \dots, n_0
 \end{aligned} \tag{4.11a}$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{yz} \Big|_{z_{\ell-1}})_i &= \left[\left(\rho E_h \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \right) \Big|_{z_{\ell-1}} \right]_i \\
 &= \left[4\rho E_h \frac{V^{(\ell)} - V^{(\ell+1)}}{(h^{(\ell)} + h^{(\ell+1)})^2} \sqrt{[(U^{(\ell)} - U^{(\ell+1)})^2 + (V^{(\ell)} - V^{(\ell+1)})^2]} \right]_i \\
 &\quad i = 1, 2, 3, \quad \ell = 2, 3, \dots, n_0
 \end{aligned} \tag{4.11b}$$

$$(\tau_{xz} \Big|_{z_0})_i = (\tau_{zx})_i = \left[\rho E_w W_d^2 \cos(\theta_w) \right]_i \tag{4.11c}$$

$$(\tau_{yz} \Big|_{z_0})_i = (\tau_{zy})_i = \left[\rho E_w W_d^2 \sin(\theta_w) \right]_i \tag{4.11d}$$

$$(\tau_{xy} \Big|_{z_{n_0}})_i = [\tau_{bx}]_i = [\rho E_b U^{(n_0)} \sqrt{(U^{(n_0)})^2 + (V^{(n_0)})^2}]_i \quad (4.11e)$$

$$(\tau_{yz} \Big|_{z_{n_0}})_i = [\tau_{by}]_i = [\rho E_b V^{(n_0)} \sqrt{(U^{(n_0)})^2 + (V^{(n_0)})^2}]_i \quad (4.11f)$$

式(4.7), (4.8), (4.9), (4.10)又可分別化爲

$$M_{ij} U_{j,t}^{(\ell)} = a_i^{(\ell)} \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.12a)$$

$$M_{ij} V_{j,t}^{(\ell)} = b_i^{(\ell)} \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.12b)$$

$$M_{ij} \zeta_{j,t} = c_i \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.12c)$$

$$M_{ij} W_j^{(\ell)} = d_i^{(\ell)} \quad \ell = 1, 2, 3 \dots n_0 \quad (4.12d)$$

式中 M_{ij} 定義如(3.14a)。 $a_i^{(\ell)}$, $b_i^{(\ell)}$, c_i 及 $d_i^{(\ell)}$ 分別定義如下：

$$\begin{aligned} a_i^{(\ell)} = & -M_{kij}^x U_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} - M_{kij}^y V_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} \\ & - \frac{1}{2} M_{ijk} \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j (U_k^{(\ell-1)} - U_k^{(\ell+1)}) + f M_{ij} V_j^{(\ell)} \\ & + g M_{ji}^x \zeta_j - E_v N_{ij}^x (U, x)_j^{(\ell)} + E_v M_{ij}^{xx} U_j^{(\ell)} \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^y (U, y)_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{yy} U_j^{(\ell)} \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^y (V, x)_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{yx} V_j^{(\ell)} \\ & - \frac{1}{\rho} M_{ijk} \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j (\tau_{xz} \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}})_k \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} b_i^{(\ell)} = & -M_{kij}^x U_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} - M_{kij}^y V_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \\ & - \frac{1}{2} M_{ijk} \left(\frac{W^{(\ell)}}{h^{(\ell)}} \right)_j (V_k^{(\ell-1)} - V_k^{(\ell+1)}) - f M_{ij} U_j^{(\ell)} \\ & + g M_{ji}^y \zeta_j - E_v N_{ij}^y (V, y)_j^{(\ell)} + E_v M_{ij}^{yy} V_j^{(\ell)} \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (V, x)_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{xx} V_j^{(\ell)} \\ & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (U, y)_j^{(\ell)} - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^{xy} U_j^{(\ell)} \\ & - \frac{1}{\rho} M_{ijk} \left(\frac{1}{h^{(\ell)}} \right)_j (\tau_{yz} \Big|_{z_\ell}^{z_{\ell-1}})_k \end{aligned} \quad (4.13b)$$

$$c_i = - \sum_{m=1}^{n_0} [M_{kij}^x h_j^{(m)} U_k^{(m)} + M_{kij}^y h_j^{(m)} V_k^{(m)}] \quad (4.13c)$$

$$d_i^{(\ell)} = - \sum_{m=\ell+1}^{n_0} (M_{kij}^x h_j^{(m)} U_k^{(m)} + M_{kij}^y h_j^{(m)} V_k^{(m)}) \\ - \frac{1}{2} M_{kij}^x h_j^{(\ell)} U_k^{(\ell)} + M_{kij}^y h_j^{(\ell)} V_k^{(\ell)} \quad (4.13d)$$

式中 $M_{ij}^x, M_{ij}^y, M_{ijk}^x, M_{ijk}^y, N_{ij}^x, N_{ij}^y$, 定義如式(3.15), 其他係數定義如下:

$$M_{ijk} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_i \phi_j \phi_k dR \quad (4.14a)$$

$$M_{ij}^{xx} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,x} \phi_{j,x} dR \quad (4.14b)$$

$$M_{ij}^{yy} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,y} \phi_{j,y} dR \quad (4.14c)$$

$$M_{ij}^{xy} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,x} \phi_{j,y} dR \quad (4.14d)$$

$$M_{ij}^{yx} = \int \int_{R^{(e)}} \phi_{i,y} \phi_{j,x} dR \quad (4.14e)$$

同上章對時間使用二步驟顯示法對其積分可得下列差分式第一步驟:

$$M_{ij} \{U_j^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij} \{U_j^{(\ell)}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{a_i^{(\ell)}\}^n \quad (4.15a)$$

$$M_{ij} \{V_j^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij} \{V_j^{(\ell)}\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{b_i^{(\ell)}\}^n \quad (4.15b)$$

$$M_{ij} \{\zeta_j\}^{n+\frac{1}{2}} = M_{ij} \{\zeta_j\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{c_i\}^n \quad (4.15c)$$

$$M_{ij} \{W_j^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} = \{d_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.15d)$$

第二步驟

$$M_{ij} \{U_j^{(\ell)}\}^{n+1} = M_{ij} \{U_j^{(\ell)}\}^n + \Delta t \{a_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.16a)$$

$$M_{ij} \{V_j^{(\ell)}\}^{n+1} = M_{ij} \{V_j^{(\ell)}\}^n + \Delta t \{b_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.16b)$$

$$M_{ij} \{\zeta_j\}^{n+1} = M_{ij} \{\zeta_j\}^n + \Delta t \{c_i\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.16c)$$

$$M_{ij}\{W_j^{(\ell)}\}^{n+1} = \{d_i^{(\ell)}\}^{n+1} \quad (4.16d)$$

邊界條件，在海面一般主要外力為風力，海底則引用經驗式描述摩擦力之作用。模式側面邊界有固定邊界及開放邊界。固定邊界一般假設為不透水直立壁，垂直於岸壁之速度為零，同時假定非滑動(non-slip)，即平行於岸壁之速度不為零，在開口邊界則需給定實測之潮位或每層流速。計算過程為已知時間 $t = n\Delta t$ 時水位 $\{\zeta_i\}^n$ 及所有每層 ℓ 之流場， $\{U_i^{(\ell)}\}^n$ ， $\{V_i^{(\ell)}\}^n$ ， $\{W_i^{(\ell)}\}^n$ ，並由(4.11)式計算 $t = n\Delta t$ 時剪應力，其次由第一步驟差分式(4.15)計算 $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ 時之 $\{U_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}}$ ， $\{V_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}}$ ， $\{W_i^{(\ell)}\}^{n+\frac{1}{2}}$ ，及 $\{\zeta_i\}^{n+\frac{1}{2}}$ ，最後再由(4.16)求解 $t = (n+1)\Delta t$ 時間之水位 $\{\zeta_i\}^{n+1}$ 及每層 $\{V_i^{(\ell)}\}^{n+1}$ ， $\{V_i^{(\ell)}\}^{n+1}$ 及 $\{W_i^{(\ell)}\}^{n+1}$ 及(4.11)式計算 $t = (n+1)\Delta t$ 時之剪應力，如此完成一個時間間距之計算。

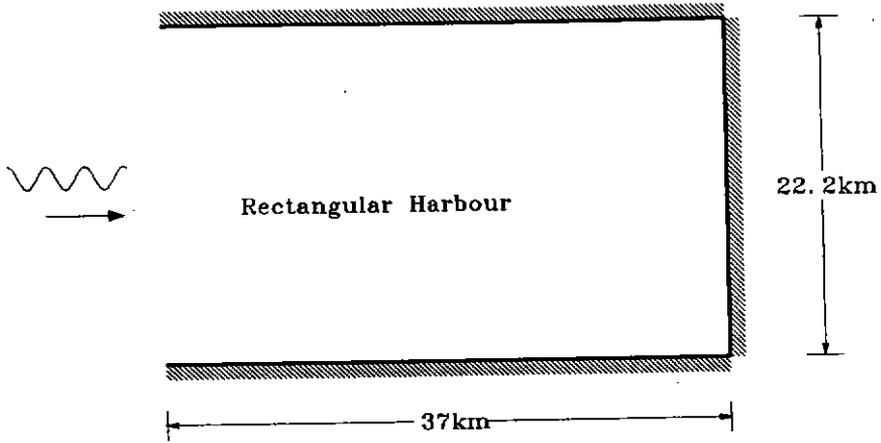


圖 4-1 長方形港池圖 (長 30 公里, 寬 2.5 公里, 深度 8 米)

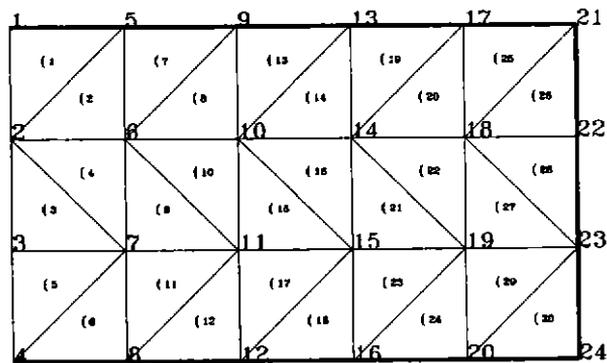


圖 4-2 有限元素格網分割圖

Water level(m)

Time: .28 hours

1	1	0	0	-0	0
1	1	0	0	0	-0
1	1	0	0	-0	0
1	1	0	0	0	-0

Time: .56 hours

5	4	3	2	1	1
5	4	2	2	1	1
5	4	3	2	1	1
5	4	2	2	1	1

Time: .83 hours

12	10	8	7	6	6
12	10	8	7	6	6
12	10	8	7	6	6
12	10	8	7	6	6

Time: 1.11 hours

20	19	17	16	15	15
20	19	17	16	15	15
20	19	17	16	15	15
20	19	17	16	15	15

Time: 1.39 hours

31	30	30	29	29	29
31	30	30	29	29	29
31	30	30	29	29	29
31	30	30	29	29	29

Time: 1.67 hours

44	44	44	44	44	44
44	44	44	44	44	44
44	44	44	44	44	44
44	44	44	44	44	44

Time: 1.94 hours

52	52	52	52	52	52
52	52	52	52	52	52
52	52	52	52	52	52
52	52	52	52	52	52

Time: 2.22 hours

75	74	74	73	73	73
75	74	74	74	73	73
75	74	74	73	73	73
75	74	74	74	73	73

Time: 2.50 hours

92	91	90	89	89	89
92	91	90	90	89	89
92	91	90	89	89	89
92	91	90	90	89	89

Time: 2.78 hours

110	109	108	108	107	107
110	109	108	108	107	107
110	109	108	108	107	107
110	109	108	108	107	107

Time: 3.06 hours

128	128	128	128	128	128
128	128	128	128	128	128
128	128	128	128	128	128
128	128	128	128	128	128

Time: 3.33 hours

147	147	148	148	148	148
147	147	148	148	148	149
147	147	148	148	148	148
147	147	148	148	148	149

Time: 3.61 hours

165	165	166	167	167	167
165	166	166	167	167	167
165	165	166	167	167	167
165	165	166	167	167	167

Time: 3.89 hours

182	183	183	184	184	184
182	183	183	184	184	184
182	183	183	184	184	184
182	183	183	184	184	184

圖 4-3 水位分佈圖

current velocity

→ 40.0 (cm/sec) at Layer : 1

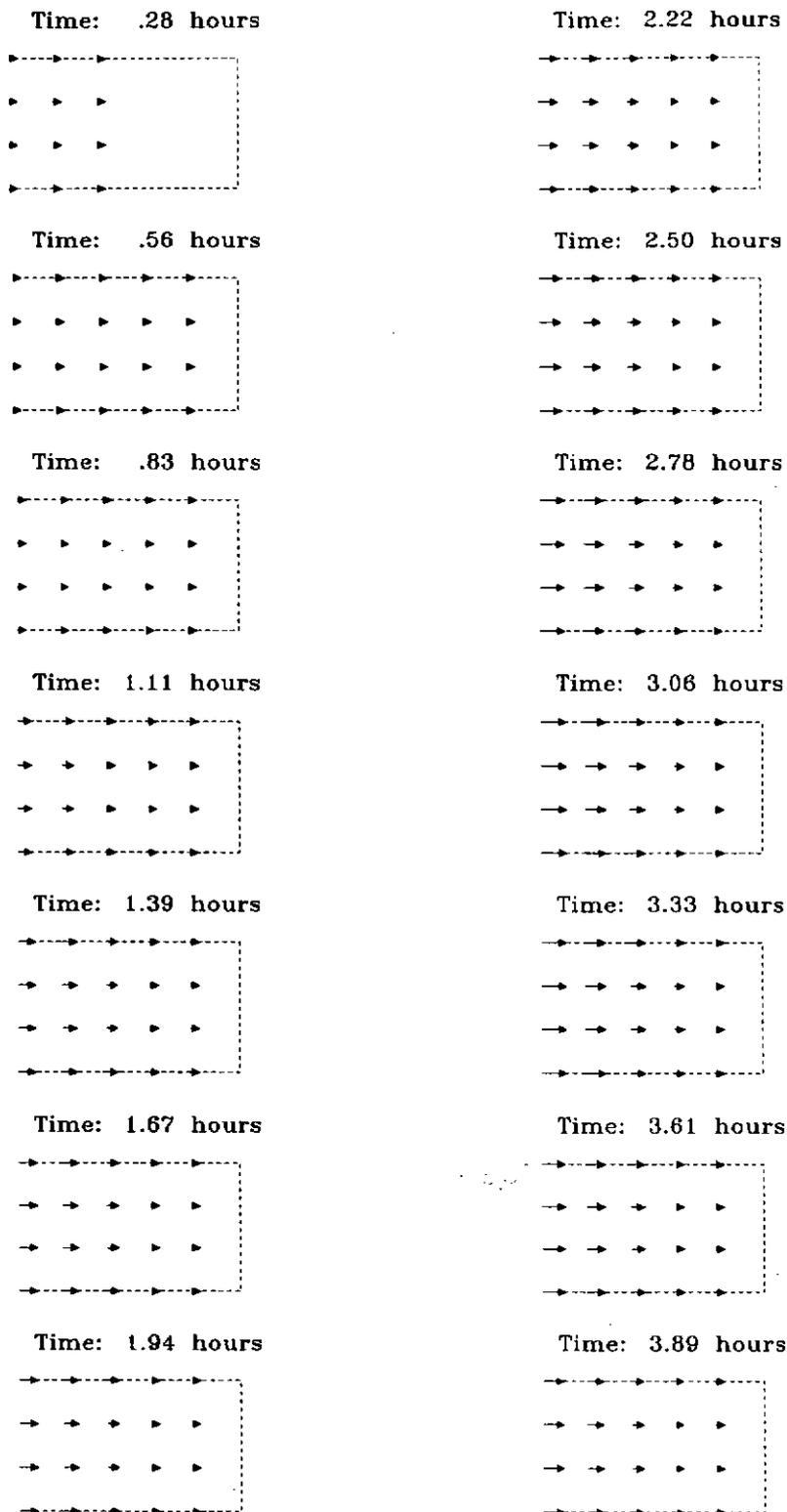


圖 4-4 第一層水平速度分佈圖

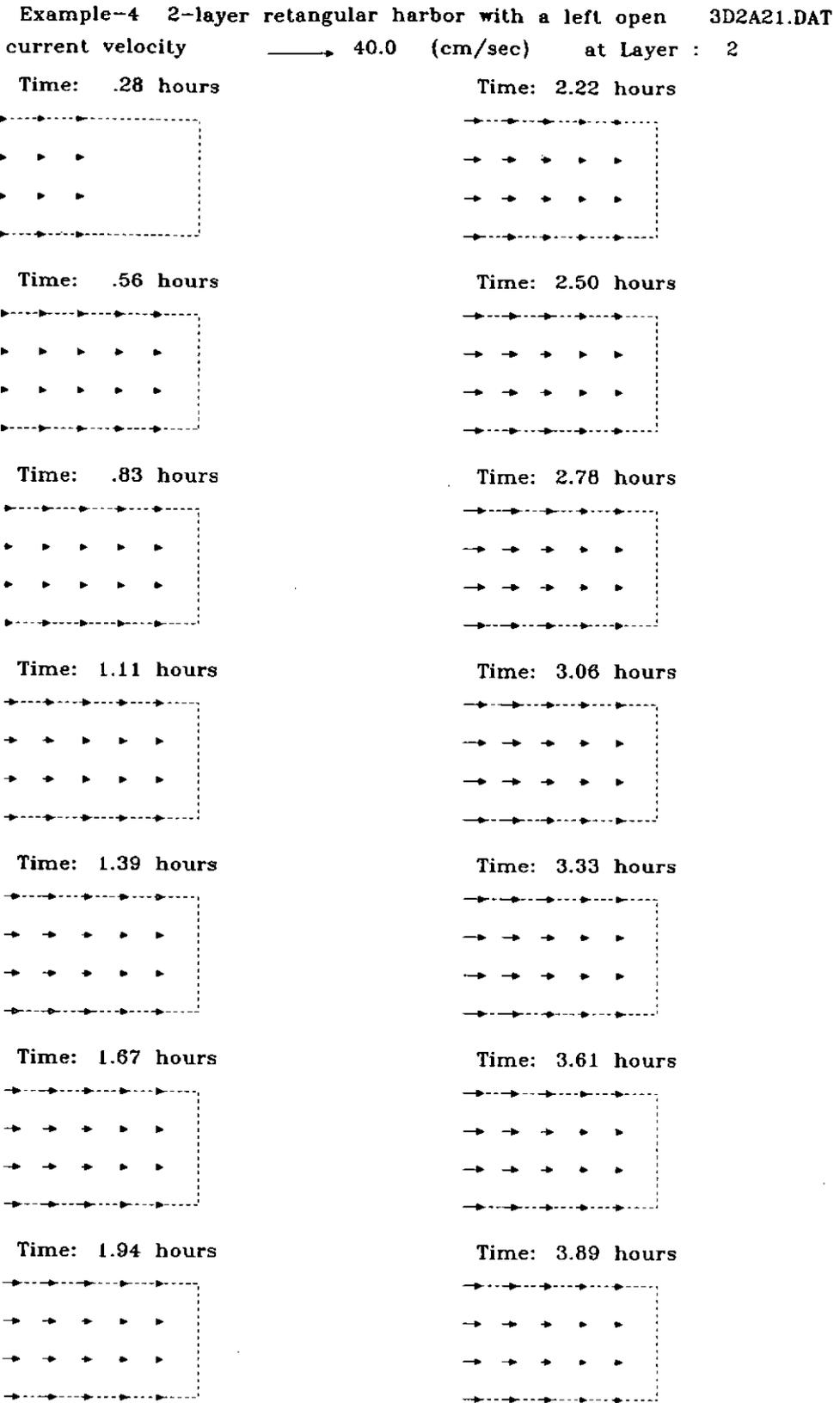


圖 4-5 第二層水平速度分佈圖

伍、近岸流數值模式

一、有限元素法模式

近岸流數值模式引用控制方程式為(2.3.9a)、(2.3.9b)及(2.3.9c)與時間無關之問題，同上一章將引用有限元素法將上述積分表示式化為有限元素方程式之 Weak form 如下：

$$\int \int_R \psi_i \left[\frac{\partial}{\partial x}(\overline{UD}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{UD}) \right] dR = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \int \int_R \psi_i \left[\overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - f \overline{V} + g \frac{\partial(\overline{D} - h)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{F_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_{xy}}}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho \overline{D}} \overline{F_{xb}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{S_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S_{xy}}}{\partial y} \right) \right] dR = 0 \\ i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \int \int_R \psi_i \left[\overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + f \overline{U} + g \frac{\partial(\overline{D} - h)}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{F_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_{yy}}}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho \overline{D}} \overline{F_{yb}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{S_{yz}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S_{yy}}}{\partial y} \right) \right] dR = 0 \\ i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.3)$$

式中 R 為計算區域， ψ_i 為元素之形狀函數， $i=1,2,3$ 。同樣將計算區域 R 分割為 N 個線性三角形元素，以 $R^{(e)}$ 表示，此處在不混淆之條件下，將省略各符號之上橫線段，如 \overline{U} 以 U 表示，對流場每個元素上之變量 U, V, D, H, h, n_c 及 ζ 皆可表示為

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \psi_i \quad (5.4a)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i \psi_i \quad (5.4b)$$

$$D = \sum_{i=1}^3 D_i \psi_i \quad (5.4c)$$

$$H = \sum_{i=1}^3 H_i \psi_i \quad (5.4d)$$

$$h = \sum_{i=1}^3 h_i \psi_i \quad (5.4e)$$

$$n_c = \sum_{i=1}^3 n_{ci} \psi_i \quad (5.4f)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \psi_i \quad (5.4g)$$

經整理式(5.1)、(5.2)及(5.1)可分別化爲下列之表示式

$$\begin{aligned} & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left(\frac{\partial(UD)}{\partial x} + \frac{\partial(VD)}{\partial y} \right) dR \\ &= \int \int_{R^{(e)}} \left(\psi_i U \frac{\partial D}{\partial x} + \psi_i D \frac{\partial U}{\partial x} + \psi_i V \frac{\partial D}{\partial y} + \psi_i D \frac{\partial V}{\partial y} \right) dR \\ &= -M_{jik}^x U_k D_j - M_{jik}^x U_j D_k - M_{jik}^y V_k D_j - M_{jik}^y V_j D_k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left\{ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial D}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} \right. \\ & - E_v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + E_b \frac{U}{D} \sqrt{U^2 + V^2} \\ & \left. + \frac{1}{8} \rho g \frac{\partial}{\partial x} [H^2 n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2] + \frac{1}{16} \rho g \frac{\partial}{\partial y} (H^2 n_c \sin 2\theta_o) \right\} dR \\ &= M_{jik}^x U_k U_j + M_{jik}^y V_k U_j - f M_{ij} V_j + g M_{ji}^x D_j - g M_{ji}^y h_j \\ & - E_v N_{ij}^x (U, x)_j + E_v M_{ij}^x (U, x)_j - E_v N_{ij}^y (U, y)_j + E_v N_{ij}^y (U, y)_j \\ & - \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (V, y)_j + \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (V, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\ & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^x [H^2 n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^y (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{R^{(e)}} \psi_i \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial D}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} \right. \\
 & - E_v \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + E_b \frac{V}{D} \sqrt{U^2 + V^2} \\
 & + \frac{1}{8} \rho g \frac{\partial}{\partial y} \left[H^2 n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2 \right] + \frac{1}{16} \rho g \frac{\partial}{\partial x} (H^2 n_c \sin 2\theta_o) \left. \right\} dR \\
 & = M_{jik}^x U_k V_j + M_{jik}^y V_k V_j + f M_{ij} U_j + g M_{ji}^y D_j - g M_{ji}^y h_j \\
 & - E_v N_{ij}^x (V, x)_j + E_v M_{ij}^x (V, x)_j - E_v N_{ij}^y (V, y)_j + E_v N_{ij}^y (V, y)_j \\
 & - \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (U, y)_j + \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (U, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\
 & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^y \left[H^2 n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2 \right]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^x (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

經化簡(5.5), (5.6)及(5.7)可表示

$$A_{ij} D_j = a_i \tag{5.8a}$$

$$A_{ij} U_j = b_i \tag{5.8b}$$

$$A_{ij} V_j = c_i \tag{5.8c}$$

式中

$$A_{ij} = M_{jik}^x U_k + M_{jik}^y V_j \tag{5.9a}$$

$$a_i = -M_{jik}^x U_j D_k - M_{jik}^y U_j D_k \tag{5.9b}$$

$$\begin{aligned}
 b_i & = f M_{ij} V_j - g M_{ji}^x D_j + g M_{ji}^y h_j \\
 & + E_v N_{ij}^x (U, x)_j - E_v M_{ij}^x (U, x)_j + E_v N_{ij}^y (U, y)_j - E_v N_{ij}^y (U, y)_j \\
 & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (V, y)_j - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (V, y)_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\
 & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^x \left[H^2 n_c (\cos^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2 \right]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^y (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j
 \end{aligned} \tag{5.9c}$$

$$\begin{aligned}
 c_i = & -fM_{ij}U_j - gM_{ji}^y D_j + gM_{ji}^y h_j \\
 & + E_v N_{ij}^x (V_{,x})_j - E_v M_{ij}^x (V_{,x})_j + E_v N_{ij}^y (V_{,y})_j - E_v M_{ij}^y (V_{,y})_j \\
 & + \frac{1}{2} E_v N_{ij}^x (U_{,y})_j - \frac{1}{2} E_v M_{ij}^x (U_{,y})_j + A^{(e)} E_b M_{ij} \left(\frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{D} \right)_j \\
 & + \frac{1}{8} \rho g M_{ji}^y \left[H^2 n_c (\sin^2 \theta_o + 1) - \frac{1}{2} H^2 \right]_j + \frac{1}{16} \rho g M_{ji}^x (H^2 n_c \sin 2\theta_o)_j
 \end{aligned} \tag{5.9d}$$

二、數值驗證

沿岸流模式之驗證，我們將取 Watanabe and Maruyama (1986) 之數值計算結果做比較。考慮存在一離岸堤之近岸海域，如示意圖 5-1，其地形分佈則如附圖 5-2，圖 5-3 為 (Watanabe and Maruyama, 1986) 數值計算之波高分佈，圖 5-4 為數值計算之流況結果。為方便與 Watanabe and Maruyama (1986) 之結果比較，此處波高之資料取用其數值計算之結果，在相同之地形及波高條件下，圖 5-5 為本文沿岸流模式計算之結果。比較圖 5-4 與圖 5-5 之流況分佈，雖然型態不完全一致，但大體而言，甚為相似。

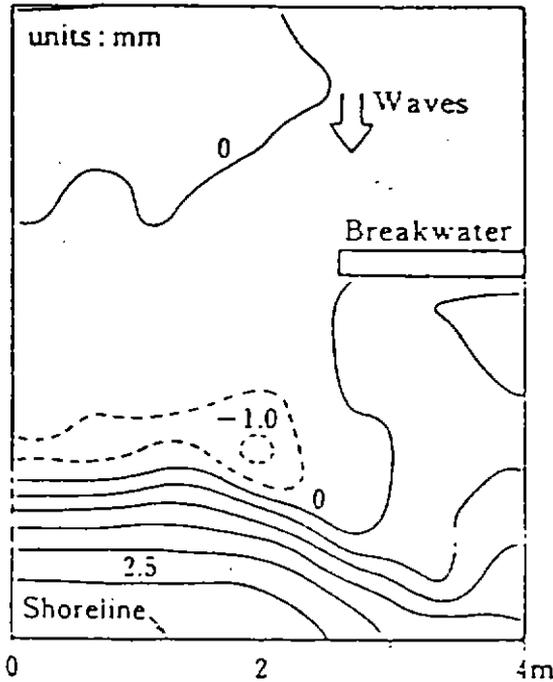


圖 5-1 近岸流模式計算海域區域示意圖

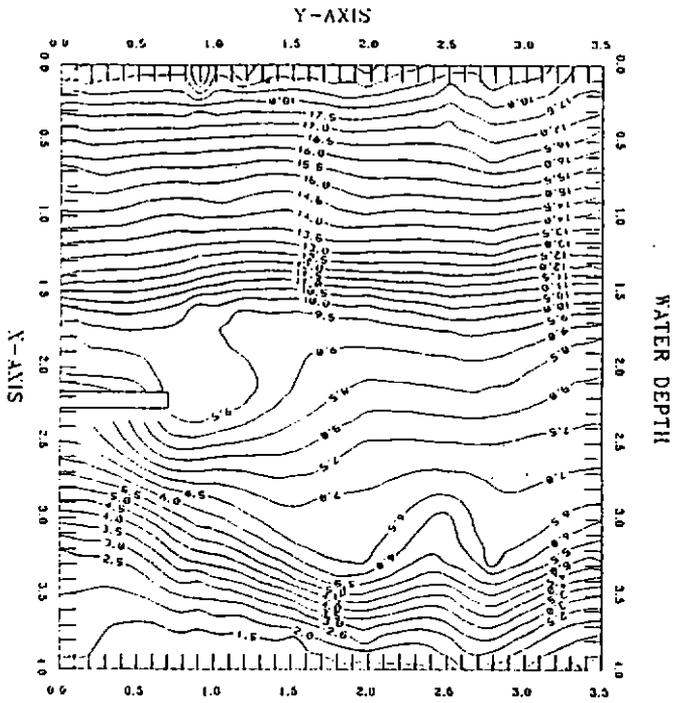


圖 5-2 近岸流模式計算海域區域水深圖

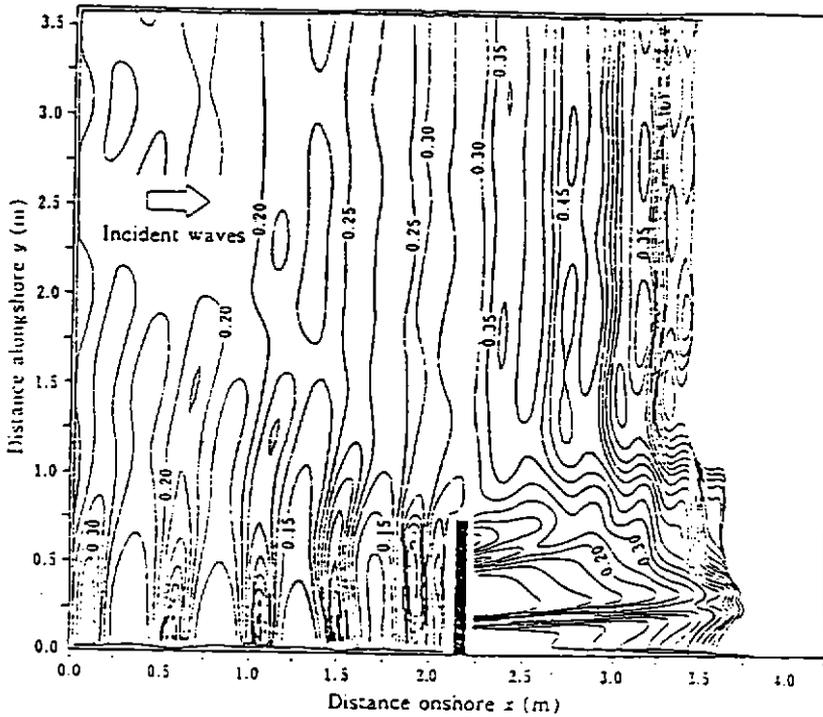


圖 5-3 近岸流模式計算海域區域波高分佈圖

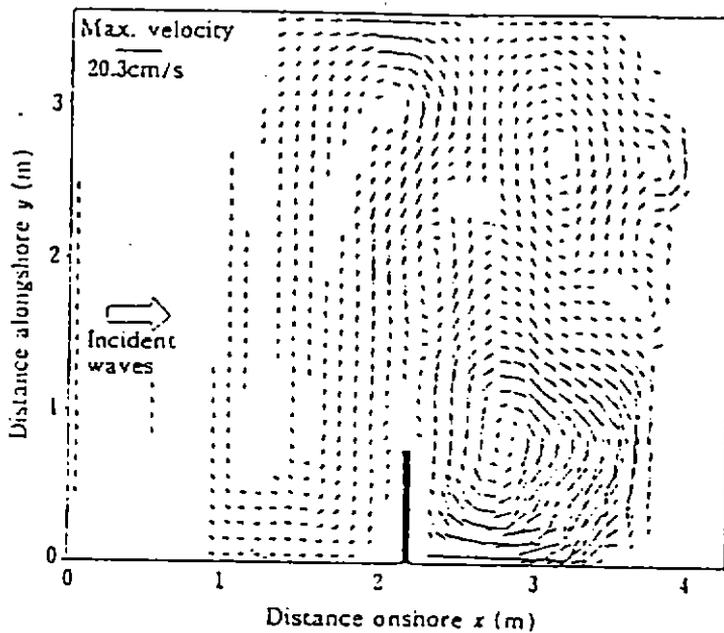


圖 5-4 Watanabe and Maruyama (1986) 之數值計算流場分佈圖

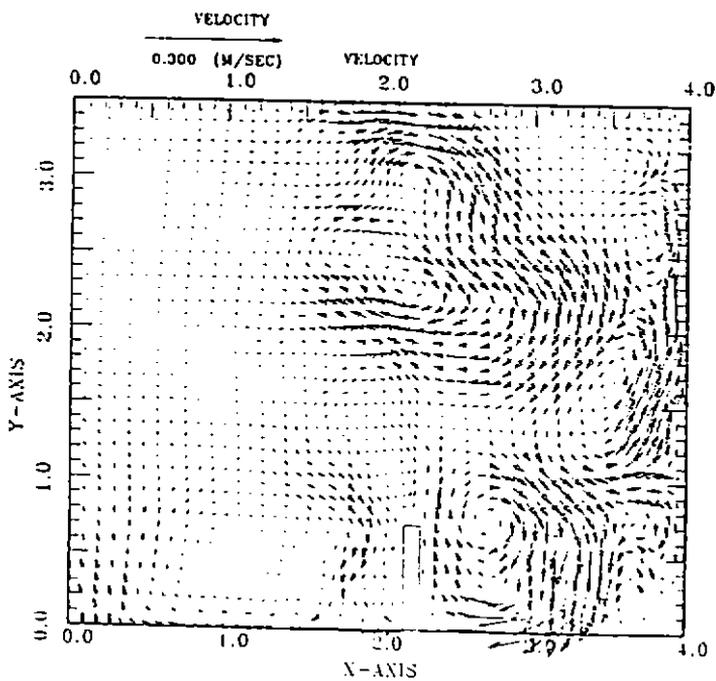


圖 5-5 近岸流模式數值計算海流分佈圖

陸、討論及結論

1. 本文引用有限元素法建立一套近岸地區海流推算數值模式。因為潮汐與波浪之時間尺度差異及時間函數處理不同,分成沿岸流及潮流二個部分獨立處理。潮流模式包括潮汐、風、科氏力、流體剪應力、海岸側面邊界及底床摩擦等效應。沿岸流模式之主要外力則為輻射應力、流體剪應力及底床摩擦等效應。
2. 為符合實際應用之需要,潮流模式又分為二維模式及三維模式。三維模式需要較多的電腦計憶體及計算時間,適用於垂直方面物理量變化較為劇烈之海域。二維模式則僅需數少的計憶體,一般的個人電腦即符合要求,其適用在流場垂直方向變化不甚顯著之區域。
3. 沿岸流模式,最主要的外力為波力,波場之推算則引用上年度本計畫建立之波場推算模式求得,在線性波之假設條件下沿岸流模式為一與時間無關之穩定解模式。
4. 對於二維潮流模式,利用深度積分觀念配合 Galerkin 加權殘差法,在使用線性三角形元素建立二維有限元素法模式。三維潮流模式則引用多層深度積分觀念,並配合流體層次界面間動量之傳遞現象。
5. 模式計算例之數值解析結果,與其他學者計算結果比較頗為一致,證實發展之數值模式之正確性。
6. 有限元素法模實際應用時之前置作業如邊界及地形之輸入,或元素之網格分割及結點編號,皆為甚重要及複重工作。元素分割形態好壞將影響計算之精確度,結點之編號更將影響計算時所需之計憶容量。基於實用需要我們也建立一套甚為實用之前置處理方法。
7. 波場與流場模式基本架構已完成,下年度模式將採用海岸防災計畫,其他相關計畫之現場實測資料或試驗結果,探討彌陀海域之波流場特性。

參考文獻

1. Chu, W-S and Yeh. W.W-G., "Calibration of a Two Dimensional Hydrodynamics Model", Coastal Engineering, Vol.9, pp. 293-307, Elsevier Science Publishers (1985).
2. Chu, W-S and Gardner, S., "A Two-Dimensional partial Tracking Estuarine Transport Model", Water Resources Bulletin, Vol.22, No.2, pp. 183-198 (1986).
3. Chu, W-S., Barker, B.L. and Akbar, A.M. "Modeling Tidal Transport in The Arabian Gulf", ASCE, J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol.114, No.4, pp.37-53 (1988).
4. Chu, W-S., Liu, J-Y. and Flenniken, K.O, "Numerical Modelling of Tide and Current in Central Puget Sound: Comparison of a Three-Dimensional and a Depth-Averaged Model", Water Resources Research, Vol.25, No.4, pp.721-734 (1989).
5. Dronker, J.J., "Tidal Computations of Rivers, Coastal Areas and Seas", J. of Hydraulics Div., ASCE, Vol 95, No. HY1, Jan. 1969, pp.29-77.
6. Ebersole, B.A. and R. A. Dalrymple, "Numerical Modeling of Nearshore Circulation", Proc. 17th Conf. on Coast Eng., pp.2710-2725 (1980).
7. Goda, Yo and N. Watanabe, "A Longshore Current Formula for Random Breaking Waves", Coastal Eng. in Japan, Vol. 34, pp.159-175 (1991).
8. Hansen, W., "Hydrodynamics method Applied to oceanographic Problems", Proceedings of the Symposium on Mathematical Hydrodynamical Methods of Physical oceanography, institute fur Meereskunde der Universitat Hamberg, Hamberg, West Germany, pp.25-34 (1962).
9. Horikawa K. and T. Sasaki, "Consideration on Longshore Current Velocity", Proc. 15th Conf. on Coastal Eng. in Japan, pp.126-135 (1968).

10. Horikawa K. and T. Sasaki, "Field Observations of Near-shore Current System", Proc 13th Conf. on Coastal Eng., pp.635-652 (1972).
11. Kawahara, M., Mirano, H. and Tsubota, K. , " Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow," Int. J. Num, Meth. in Fluids, Vol.2, 89-112 (1982).
12. Kawahara, M., Kobayashi, M. and Nakata, K. , "A Three-Dimensional Multiple level finite Element Method Considering Variable water Density," in Finite Elements in Fluids, Chap. 7, Vol.4, ed. by Gallagher, et al., John Wiley & Sons Ltd (1982).
13. Leenderste, J.J., "Aspects of a Computational Model for Long Period Water Wave Propagation", RM 5294-PR, 'The Rand Corporation', Santa Monica, Calif., May (1967).
14. Leendertse, J.J., R.C. Alexander, and S.K. Liu, "A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol.I, Principles of Computation", R- 1417-0 WWR, Rand Corporation, Santa Monica, CA, pp.1-21 (1973).
15. Leendertse, J.J. and Liu, S-K. , " A Three-Dimensional Model for OWRT," Rand, Santa Monica, CA., USA (1977).
16. Leendertse, J.J. and S.K. Liu, " A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol. II, Aspects of Computation", R-1764-OWRT, Rand Corporation, Santa Monica, CA, pp.1-29 (1965).
17. Liu, L.F. and G. P. Lennon, "Finite Element Modeling of Nearshore Currents", J. of the Waterway Port Coast and Ocean Division, pp.175-189 (1978).
18. Longuet-higgins, M. S. and R. W. Stewart, "Radiation Stress in Water Wave-A Physical Discussion with Applications," Deep Sea Res., Vol. 11, No. 4, pp. 529-562 (1964).
19. Longuet-Higgins, M.S., "Longshore Current Generated by Obliquely Incident Sea Wave," J. Geophys. Res., Vol.75, No.33, pp.6778-6801 (1970).

20. Nishimura, H., "Numerical Simulation Nearshore Circulation," Proc. 29th, Japanese Conf. on Coastal Eng., JECE, pp.13-127 (1982).
21. Noda, E. K., "Wave-induced Nearshore Circulation," J. Geophys. Res., Vol. 79, No. 27, pp.4079-4106 (1974)
22. Sasaki. T., "Field Investigation of Nearshore Current on a Gently Sloping Beach", Doct. Thesis, University of Tokyo (1974).
23. Sasaki T., "Simulation on Shoreline and Nearshore Current", Proc. Specialty Conf. on Civil Engs, pp.179- 196 (1975).
24. Sasaki, T. and K. Horihawa, "Observation of Nearshore Current and Edge Waves", Proc. 16th Conf. on Coastal Eng. pp.792-809 (1978).
25. Stive, M.J.F. and J. A. Battjes, "Random Wave Breaking and Induced Current", Delft Hydraulics Communicaiton No.360 (1986).
26. Thornton, E. N., "Variation of Longshore Current Across the surf Zone" Proc. 12th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 291-308 (1970).
27. Tsai, C.T., Kuo, C.T. and Su, L.T. "A Study on Typhoon-Flood Simulation in Tidal River", Proc. of ROC-Japan Joint Seminar on Water Resources Eng., Taipei, pp.149-104 (1987).
28. Wang, J.D. and Connor, J.J., "Mathematical Modelling of near Coastal Circulation, Report No.200, Ralph M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, MIT, USA (1975).
29. Yin, F., and Chen, S.H. "Tidal Computation on Taiwan Strait", ASCE, J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean, Vol. 108, No. WW4, pp.539-553, 1982.
30. 李兆芳、郭仲仁 "三維流場有限元素多層深度積分模式", 中華民國第十一屆海洋工程研討會論文集, pp.383-400 (1989).
31. 李賢文, "台灣鄰近海域潮流預報數值模式", 第二屆海洋數值模式研習會論文集, 台灣省交通處港灣技術研究所(1989)。

32. 劉肖孔, "中國海域三度空間數值模式", 行政院科技顧問組, 民國77年。
33. 磨年生, "離岸堤背後流場之研究", 碩士論文, 國立成功大學水利及海洋工程研究所, 台南(1987).
34. 孫君偉、許泰文、歐善惠、張憲國, "離岸堤背後地形變化之研究", 中華民國第十三屆海洋工程研討會論文集, pp.519-536 (1991).
35. 蔡長泰、宋長虹, "河海模式之初步研究", 第3屆水利工程研討會論文集, 台南, 第1010-1022頁(1990)。
36. 蕭政宗、蔡長泰, "感潮河川颱風洪暴潮模式及其於淡水河系之應用", 中國土木水利工程學刊, 第三卷, 第三期(1991)。
37. 高瑞棋、李忠潘和李兆芳等, 深澳漁港擴建與發電廠出水口佈置影響之海域流況現場調查及溫排水擴散研究, 台南水工試驗所研究報告第110號(1989)。
38. 林銘崇、蔡禮滔, "防波堤附近近岸流之數值模擬", 國立台大學土木工程學研究所研究報告(1982)。

誌 謝

本計畫承國家科學委員會補助，計畫編號：NSC83-0441-P-124-001-B，謹此誌謝，承數學模式組同仁陳毓清小姐之論文繕打，併於此致謝。