

84-研(二)-5

台灣海域波譜預測模式之研究

台灣省政府交通處
港灣技術研究所

台中 梧棲

中華民國八十四年六月卅日

台灣海域波譜預測模式之研究

執行單位：海岸工程組

計畫主持人：何良勝 研究員

計畫顧問：陳陽益 教授

歐善惠 教授

參與人員：張富東 助理研究員

江金德 "

楊怡芸 技 工

蔡瑞成 "

何炳紹

陳進冰

李江澤

摘 要

本計畫係研究探討能量傳輸方程式中非線性交互作用的能量傳遞現象，利用攝動法理論解析入射波譜已知的情況下，波浪前進於任一均勻等深時，其非線性效應能量傳遞的二階波譜變化情況，研究中比較不同入射波譜於各種水深波長比 D/L_0 時其能量傳遞變化情形，同時亦探討包括各種入射波譜頻率的成份波，其非線性效應變化的機制。

由理論解析結果顯示，由於波浪的非線性效應，於二階波譜中，能量有往高、低頻率傳遞的現象，當水深波長比愈小時傳遞現象愈顯著，傳遞往高頻處之能量，其尖峰主頻大都發生於二倍主頻的位置。另外，若以部份頻率的成份波解析時，其範圍於 $0.1 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.9$ 時即大致能涵蓋能量傳遞變化的情況。

台灣海域波譜預測模式之研究

目 錄

中文摘要.....	I
目錄.....	II
圖目錄.....	III
符號說明.....	VI
壹、前言.....	1
貳、理論解析與探討.....	2
一、能量傳輸方程式.....	2
二、控制方程式及邊界條件.....	2
三、高階非線性效應解析.....	4
參、理論解析結果與校核.....	15
一、解析結果之校核.....	15
二、解析結果之討論.....	16
肆、結論與建議.....	20
參考文獻.....	21

圖目錄

- 圖2-1 σ 與 $\lambda - \sigma$ 座標系統示意圖
- 圖3-1 標準化之JONSWAP波譜($r=2.08$)
- 圖3-2 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.10$ 之二階波譜
- 圖3-3 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.13$ 之二階波譜
- 圖3-4 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.15$ 之二階波譜
- 圖3-5 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.20$ 之二階波譜
- 圖3-6 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.25$ 之二階波譜
- 圖3-7 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.30$ 之二階波譜
- 圖3-8 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.40$ 之二階波譜
- 圖3-9 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.50$ 之二階波譜
- 圖3-10 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.05$, $D/L_0=0.15$ 之二階波譜
- 圖3-11 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.05$, $D/L_0=0.20$ 之二階波譜
- 圖3-12 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.05$, $D/L_0=0.25$ 之二階波譜
- 圖3-13 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.05$, $D/L_0=0.30$ 之二階波譜
- 圖3-14 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.05$, $D/L_0=0.40$ 之二階波譜
- 圖3-15 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.05$, $D/L_0=0.50$ 之二階波譜
- 圖3-16 標準化之Pierson—Moskowitz波譜
- 圖3-17 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.10$ 之二階波譜
- 圖3-18 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.13$ 之二階波譜
- 圖3-19 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.15$ 之二階波譜
- 圖3-20 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.20$ 之二階波譜
- 圖3-21 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.25$ 之二階波譜
- 圖3-22 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.30$ 之二階波譜
- 圖3-23 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.40$ 之二階波譜
- 圖3-24 P-M波譜為入射波譜, $D/L_0=0.50$ 之二階波譜
- 圖3-25 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.15$
 $0.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.0$ 成份波之二階波譜
- 圖3-26 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.15$
 $1.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq \infty$ 成份波之二階波譜
- 圖3-27 JONSWAP波譜為入射波譜, $H/L_0=0.02$, $D/L_0=0.15$
 $0.9 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.1$ 成份波之二階波譜

- 圖3-28 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.7 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.3$ 成份波之二階波譜
- 圖3-29 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.5 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.5$ 成份波之二階波譜
- 圖3-30 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.3 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.7$ 成份波之二階波譜
- 圖3-31 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.1 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.9$ 成份波之二階波譜
- 圖3-32 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.0$ 成份波之二階波譜
- 圖3-33 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $1.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq \infty$ 成份波之二階波譜
- 圖3-34 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.9 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.1$ 成份波之二階波譜
- 圖3-35 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.7 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.3$ 成份波之二階波譜
- 圖3-36 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.5 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.5$ 成份波之二階波譜
- 圖3-37 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.3 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.7$ 成份波之二階波譜
- 圖3-38 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.1 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.9$ 成份波之二階波譜
- 圖3-39 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.0$ 成份波之二階波譜
- 圖3-40 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $1.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq \infty$ 成份波之二階波譜
- 圖3-41 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.9 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.1$ 成份波之二階波譜
- 圖3-42 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.7 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.3$ 成份波之二階波譜
- 圖3-43 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.5 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.5$ 成份波之二階波譜

圖3-44 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$

$0.3 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.7$ 成份波之二階波譜

圖3-45 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$

$0.1 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.9$ 成份波之二階波譜

符號說明

ϕ : 流速勢函數

η : 波動表面水位

k : 波數

λ : 週波率

$R(z)$: 連貫函數

$S(\sigma)$: 波譜密度函數

$K(\sigma, \lambda)$: 傳達函數

C_g : 群波速

s_{in} : 風能項

s_{dis} : 能量消散項

s_{η^t} : 交互作用項

壹、前言

除了自然的天體引力所生的潮波之外，出現於廣大水域上起伏脈動的重力波浪通常是因風之吹刮所引起，然而這些包括所有可能的成份波組合而成的紛紜波浪，由於微動而發展至完全成熟的波浪時，其即具有統計的特性，而波譜分佈型態的研究，無疑地是瞭解此種統計特性較有力的方法之一，悉如，由波譜型態可以求得一些重要的物理參數量，或是能推算出各種相關的統計量，而由上述的各種物理量或統計量除能瞭解海面波浪的狀況外，並且是港灣工程規劃設計者或試驗室試驗重要參考的依據，因此，世界各地無不次研究探討適用於當地的波譜型態或者波譜預測模式為重要課題之一。

自從Rice(1944)與Tukey(1949)對紛紜波動進行統計的考量與波譜的探討以來，有關學者即對波譜的分佈型態及其相關的應用方式展開廣泛地研究與分析。有關波譜型態的研究，屬於深海情況方面，早期有Phillips(1958)以因次分析方法推導出高頻部份的波譜型態以後，接著，Pierson & Moskowitz(1964)求得適用於完全飽和海域的Pierson-Moskowitz波譜；Hasselmann et al(1973)利用北海海域實測資料求得著名的JONSWAP波譜；歐善惠(1977)以台灣海峽實測資料修正JONSWAP波譜獲得適用台灣西部海域的波譜；Huang et al(1981)以stokes二階波浪理論配合試驗資料獲得WALLOPS波譜。有關淺海波譜型態方面，則有Ijima et al(1970)，Kitaigorodskii et al(1975)Huang et al(1983)，郭一羽(1982, 1983, 1985, 1990)等人分別研究探討高頻波譜斜率-1~-5的波譜型態。

除了可能受碎波影響外，淺水波譜高頻部份斜率較深海波譜來得平緩，其主要係受波浪的非線性效應影響，此方面的研究，有Tick(1959)的理論解析；接著有著名的Hasselmann(1962, 1963)的非線性交互作用解析；Guza(1980, 1985)連續次現場實測資料分析非線性的成因；郭一羽(1981)以雙階波譜方式加以深討。

然而，波譜的非線性效應除了成份波本身的高階調和(harmonic)影響外，成份波與成份波之間的交互作用亦有非線性效應產生，因此，當波浪有非線性效應時，其傳遞情況如何，又受何種成份波浪所主宰控制，至今尚少學者專家研。本研究計畫第一年中即嘗試研究探討波浪的非線性效應所造致的能量傳遞變化機制，並深入瞭解其傳遞變化的控制主因，進而期望未來能完成最適用的波譜預測模式。

本報告中，第貳章將評述論解析過程與結果，接著，第參章利用解析結果實例計算其能量傳遞變化情況並加以研究探討，最後，第肆章作一總結。

貳、理論解析與探討

一、能量傳輸方程式

於廣大水域中，由於風吹水面給予的能量，造致水面波動的成長、成熟，當波浪前進傳遞時，成份波本身或成份波間正進行著能量傳遞的作用，其間則有受水底或水面摩擦及其他的能量損失，最後波浪達於碎波的狀態，基於能量守恒的原則，上述的情況吾人可以能量傳輸方程式表示如下

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + Cg \cdot \nabla F = S_{in} + S_{dis} + S_{ni} \quad (2.1-1)$$

上式中F表示為總能量， S_{in} 則為外在風給予的能量， S_{dis} 則表示為包含摩擦及碎波等的能量損失，而 S_{ni} 則是波浪的交互作用項。應用上述之能量傳輸方程式，吾人可以推測波浪前進的能量變化情況，進而求取吾人所需的波浪條件。上述 S_{in} ， S_{dis} 與 S_{ni} 三項包含因素繁雜，影響情況也頗多，其中最引起吾人興趣與重視的，則為波浪交互作用的 S_{ni} 項，往昔眾多學者計算 S_{ni} 項時，最常引用Hasselmann(1962, 1963)所推導的理論解析，然Hasselmann的理論繁雜不易深入瞭解其中能量傳遞的變化情形，因此，本研究計畫嘗試另外解析以求得較易明瞭的方式，瞭解波浪非線性效應的能量傳遞情況，進而有助於決解有限水深情況時波譜變化的情況。下節即是本研究的理論解析過程與解析結果。

二、控制方程式及邊界條件

於二度空間之任一均勻等深d之水域中，假設流體為非黏性與不可壓縮性的 (inviscid and incompressible)，且其運動為非旋性的 (irrotational)，因而吾人可定義一流速勢函數 (velocity potential)，使得所考慮的波動流場內之水粒子的速度與其分量關係為

$$\vec{V} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_z) = (u, w) \quad (2.2-1)$$

此處流速勢函數 $\phi = \phi(x, z)$ 需滿足Laplace's equation，而為波動流場的基本控制方程式，為

$$\nabla^2\phi = \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (2.2-2)$$

至於波動流場所必需滿足的邊界條件有：

1. 在底部 $z = -d$ 處

$$w = \phi_z = 0, \quad z = -d \quad (2.2-3)$$

2. 在波動表面處，有

(1) 運動邊界條件

$$\phi_z = \frac{d\eta}{dt} = \eta_t + \phi_x \eta_x, \quad z = \eta \quad (2.2-4)$$

(2) 動力邊界條件

$$\phi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) = 0, \quad z = \eta \quad (2.2-5)$$

上式中 $\eta = \eta(x, t)$ 為波動表面水位， g 為重力加速度。為便於將來逐階展開解析起見，於此先將非線性的自由表面運動與動力邊界條件 (2.2-4) 與 (2.2-5) 式做適當地處理，即是 (2.2-5) 式被 d/dt 總微分後減去 g 倍的 (2.2-4) 式，可得綜合表面邊界條件如下：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{V}^2) + \bar{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \bar{V}^2 \right) = 0, \quad z = \eta \quad (2.2-6)$$

接著，利用 Taylor 級數展開在 $z=0$ 處以取代在未知的波動表面 $z=\eta$ 處，則非線性表面邊界條件 (2.2-6) 與 (2.2-5) 兩式可由下列二式取代之，為

$$\left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \dots \right] \\ + \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{V}^2) + \eta \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} (\bar{V}^2) + \dots \right] + \left[\bar{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \bar{V}^2 \right) + \dots \right] = 0, \quad z = 0 \quad (2.2-7)$$

與

$$g\eta + \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\partial^3\phi}{\partial z^2\partial t} + \dots \right] + \left[\frac{1}{2}\bar{v}^2 + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2}\bar{v}^2 \right) + \dots \right] = 0, \quad z = 0 \quad (2.2-8)$$

由以上的處理可知，這正與攝動法應用到一般波動問題之解析過程相同，如今對整個問題的求解，則已被轉換至於滿足以 $z=0$ 處之展開下的各對應條件而進行逐階次解析者，有關波譜較高階之非線性效應析過程，其詳情如下節所述。

三 · 高階非線性效應解析

3-1 波動流場之解析

依攝動展開法的原則下，所考慮的波動系統流場解 ϕ 與 η 等物理量之型式可被表示為

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \quad (2.3-1.1)$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots \quad (2.3-1.2)$$

由上節 (2.2-2) ~ (2.2-8) 等式中，吾人可依次取得第一階解析之控制方程式與邊界條件為

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \quad (2.3-2.1)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = -d \quad (2.3-2.2)$$

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (2.3-2.3)$$

$$g\eta_1 + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = 0, \quad z = 0 \quad (2.3-2.4)$$

上列 (2.3-2) 等式可解得波動流場的第一階解為

$$\eta_1(x, t) = \int e^{i\alpha_1} dZ \quad (2.3-3)$$

$$\phi_1(x, z, t) = -i \int \frac{g \cosh|f|(d+z)}{\sigma \cosh|f|d} e^{i\alpha_1} dZ \quad (2.3-4)$$

式中 $\alpha_1 = \frac{\sigma|\sigma|}{g} \coth(|f|d) \cdot x - \sigma t$, 位相角(phase angle).

$f = f(\sigma) = k$ k :波數(wave number), σ :週波率(wave frequency)
接著, 可利用上列之第一階解代入所對應的第二階控制條件中求解第二階解,
首先, 吾人任一對應之第二階流速勢函數 ϕ_2 為

$$\phi_2(x, z, t) = -i \int \int \frac{\cosh|f_2|(d+z)}{\cosh|f_2|d} \cdot e^{i\alpha_2} dZ_2 \quad (2.3-5)$$

同時取(2.2-7)式之邊界條件至第二階為

$$-\left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) = \eta_1 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z \partial t^2} + g \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + 2 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial e} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial t} \right] \quad (2.3-6)$$

將 η_1 與 ϕ_1 之第一階解代入(2.3-6)式之右式可得

$$(2.3-6) \text{式之右式} = i \int_{\sigma} \int_{\sigma'} B_{21} \cdot e^{i(\alpha + \alpha')} dZ dZ' \quad (2.3-7)$$

式中

$$B_{21} = 2|\sigma|(\sigma'|\sigma| - \sigma|\sigma'| \coth|f|d \coth|f'|d) + \sigma|\sigma|^2(1 - \coth^2|f|d)$$

將(2.3-5)式中之 ϕ_2 代入(2.3-6)式之左式可得

$$(2.3-6) \text{式之左式} = i \int \int B_{22} \cdot e^{i\alpha_2} dZ_2 \quad (2.3-8)$$

式中

$$B_{22} = g|f_2| \frac{\sinh|f_2|d}{\cosh|f_2|d} - (\sigma + \sigma')^2$$

比較(2.3-6)式之左右兩邊之解析, 可求解得 ϕ_2 為

$$\phi_2(x, z, t) = -i \int_{\sigma} \int_{\sigma'} B_2 \cdot \frac{\cosh|f_2|(d+z)}{\cosh|f_2|d} e^{i\alpha_2} dZdZ' \quad (2.3-9)$$

其中

$$\alpha_2 = \alpha + \alpha' = \left[\frac{\sigma + |\sigma|}{g} \coth(|f|d) + \frac{\sigma' |\sigma'|}{g} \coth(|f'|d) \right] \cdot x - [\sigma + \sigma'] \cdot t \quad (2.3-9.1)$$

$$f_2 = f + f' \quad (2.3-9.2)$$

$$B_2 = B_{21} / B_{22} \quad (2.3-9.3)$$

接著，取(2.2-8)式之邊界條件至第二階，同時代入(2.3-3)、(2.3-4)與(2.3-9)等式之 η_1, ϕ_1, ϕ_2 求解第二階段之 η_2 如下

$$\begin{aligned} \eta_2 &= -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \int_{\sigma} \int_{\sigma'} C_2 \cdot e^{i\alpha_2} dZdZ' \end{aligned} \quad (2.3-11)$$

式中

$$\begin{aligned} C_2 = C_2(\sigma, \sigma') &= B_2 \cdot \frac{(\sigma + \sigma')}{g} + |f| \frac{\sinh|f|d}{\cosh|f|d} - \frac{1}{2} \frac{(\sigma + \sigma')}{g} \coth|f|d \\ &\quad \cdot \coth|f'|d + \frac{1}{2} \frac{g|f||f'|}{\sigma\sigma'} \frac{\sinh|f|d}{\cosh|f|d} \frac{\sinh|f'|d}{\cosh|f'|d} \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

至此，有關波動流場物理量 ϕ 與 η 至第二階之非線性解析過程已清楚呈現，利用上述解析結果，求解波譜較高階之非線性效應過程，將如下節所詳述。

3-2 波譜非線性效應之解析

在紛紜的海面上，波浪能譜與水位變化之連貫函數(autocorrelation function)可以互相傅利葉轉換(Fourier transform)，假定紛紜水面為一定常過程(stationary process)的時間序列時，則連貫函數 $R(\tau)$ 與水位變化 $\eta(t)$ 的關係為

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= E[\eta(x,t) \cdot \eta(x,t+\tau)] \\
&= E[(\eta_1(x,t) + \eta_2(x,t)) \cdot (\eta_1(x,t+\tau) + \eta_2(x,t+\tau))] \\
&= E[\eta_1(x,t) \cdot \eta_1(x,t+\tau)] + E[\eta_2(x,t) \cdot \eta_2(x,t+\tau)] \\
&= R_1(\tau) + R_2(\tau)
\end{aligned} \tag{2.3-13}$$

式中 $E[\cdot]$ 表示為期望值， $R_1(\tau)$ 與 $R_2(\tau)$ 分別為第一階與第二階之連貫函數，連貫函數 $R(\tau)$ 與波譜密度函數 $S(\sigma)$ 的關係為

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= R_1(\tau) + R_2(\tau) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma) e^{i\sigma\tau} d\sigma
\end{aligned} \tag{2.3-14}$$

式中

$S_1(\sigma)$: 第一階波譜密度函數

$S_2(\sigma)$: 第二階波譜密度函數

利用上節(2.3-11)式之 η_2 代入連貫函數 $R_2(\tau)$ 的關係中，且同時假設時與位置固定時（即是 $x=0$ ， $t=0$ ），可得

$$\begin{aligned}
R_2 &= \iiint_{-\infty}^{\infty} C_2(\sigma, \sigma') \cdot C_2(\sigma'', \sigma''') e^{-i(\sigma'' + \sigma''')\tau} \\
&\quad \times E[dZ(\sigma)dZ(\sigma')dZ(\sigma'')dZ(\sigma''')]
\end{aligned} \tag{2.3-15}$$

其中 $C_2(\sigma, \sigma')$ 如(2.3-12)式所表示， σ'' ， σ''' 則表示為不同的成份量。

依據 Isserlis(1918) 之論著，將上式中的 $E[dZ(\sigma)dZ(\sigma')dZ(\sigma'')dZ(\sigma''')]$ 項的四次動差(fourth moment)轉換為二次動差(second moment)的結果如下：

$$\begin{aligned}
&E[dZ(\sigma)dZ(\sigma')dZ(\sigma'')dZ(\sigma''')] \\
&= E[dZ(\sigma)dZ(\sigma')] \cdot E[dZ(\sigma'')dZ(\sigma''')] \\
&\quad + E[dZ(\sigma)dZ(\sigma'')] \cdot E[dZ(\sigma')dZ(\sigma''')] \\
&\quad + E[dZ(\sigma)dZ(\sigma''')] \cdot E[dZ(\sigma')dZ(\sigma'')]
\end{aligned} \tag{2.3-16}$$

另外

另外

$$\begin{aligned} E[dZ(\sigma)dZ(-\sigma)] &= E[dZ(\sigma)\overline{dZ(\sigma)}] \\ &= S(\sigma)d\sigma \end{aligned} \quad (2.3-17)$$

式中“-”表示共軛複數，將(2.3-16)與(2.3-17)兩式的結果代入(2.3-15)式中，則可獲得連貫函數 $R_2[\sigma]$ 與波譜密度函數 $S(\sigma)$ 的關係為

$$\begin{aligned} R_2(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\sigma+\sigma')\tau} [C_2(\sigma, \sigma') \cdot C_2(-\sigma, -\sigma') \\ &\quad + C_2(\sigma, \sigma') \cdot C_2(-\sigma', -\sigma)] S_1(\sigma) S_1(\sigma') d\sigma d\sigma' \end{aligned} \quad (2.3-18)$$

若令 $\lambda = \sigma + \sigma'$ ，並利用連貫函數與波譜密度函數的傅利葉轉換關係，則可求得第二階的波譜密度函數 $S_2(\lambda)$ 為

$$S_2(\lambda) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma, \lambda) S_1(\sigma) S_1(\lambda - \sigma) d\sigma \quad (2.3-19)$$

式中

$$K(\sigma, \lambda) = C_2^2(\sigma, \lambda - \sigma) + C_2(\sigma, \lambda - \sigma) \cdot C_2(\lambda - \sigma, \sigma) \quad (2.3-20)$$

$$\begin{aligned} C_2(\sigma, \lambda - \sigma) &= \frac{\lambda}{g} B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + |f| \frac{\sinh|f|d}{\cosh|f|d} - \frac{1}{2} \frac{|\sigma||\lambda - \sigma|}{g} \\ &\quad \cdot \coth|f|d \coth|f'|d + \frac{1}{2} \frac{g|f||f'|}{\sigma(\lambda - \sigma)} \frac{\sinh|f|d \sinh|f'|d}{\cosh|f|d \cosh|f'|d} \end{aligned} \quad (2.3-21.1)$$

$$\begin{aligned} B_2(\sigma, \lambda - \sigma) &= \frac{2|\sigma| [|(\lambda - \sigma)|\sigma| - \sigma|\lambda - \sigma| \coth|f|d \coth|f'|d] + \sigma|\sigma|^2 (1 - \coth^2|f|d)}{g|f_2| \frac{\sinh|f_2|d}{\cosh|f_2|d} - \lambda^2} \end{aligned} \quad (2.3-21.2)$$

$$\begin{aligned}
 C_2(\lambda - \sigma, \sigma) &= \frac{\lambda}{g} B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + |f'| \frac{\sinh|f'd|}{\cosh|f'd|} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{|\sigma||\lambda - \sigma|}{g} \coth|f'd| \coth|f'd| \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{g|f||f'|}{\sigma(\lambda - \sigma)} \frac{\sinh|f'd| \sinh|f'd|}{\cosh|f'd| \cosh|f'd|}
 \end{aligned} \tag{2.3-21.3}$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2|\lambda - \sigma| [\sigma|\lambda - \sigma| - (\lambda - \sigma)|\sigma| \coth|f'd| \coth|f'd|] + (\lambda - \sigma)|\lambda - \sigma|^2 (1 - \coth^2|f'd|)}{g|f_2| \frac{\sinh|f_2'd|}{\cosh|f_2'd|} - \lambda^2}$$

(2.3-21.4)

$$f = f(\sigma), \quad f' = f(\lambda - \sigma), \quad f_2 = f + f'$$

第二階的波譜密度函數 $S_2(\sigma)$ 已如上列完整地解析而得，其中 $K(\sigma - \lambda)$ 吾人可稱之為傳達函數 (transfer function)。 (2.3-19) 式所表示的意義為：當一已知波譜 $S_1(\sigma)$ 的波列傳遞至一已知地點時，此波列經由傳達函數的轉換，其較高階的非線性效應的波譜 $S_2[\sigma]$ ，可經由如 (2.3-19) 式的計算所獲得。

由 (2.3-19) 式中可知，求解 $S_2(\sigma)$ 的關鍵在於傳達函數 $K(\sigma, \lambda)$ 的獲得，但由於 $K(\sigma, \lambda)$ 中的計算因子，如 (2.3-20) 與 (2.3-21) 等式中仍存在有含絕對值的成份，因此，為更清楚實用起見，吾人取一座標系統如圖 2-1 所示，圖中橫座標為波浪的週波率 σ ，縱座標為另一關係週波率 $\lambda - \sigma$ ，座標系統內劃分六個相關象限。

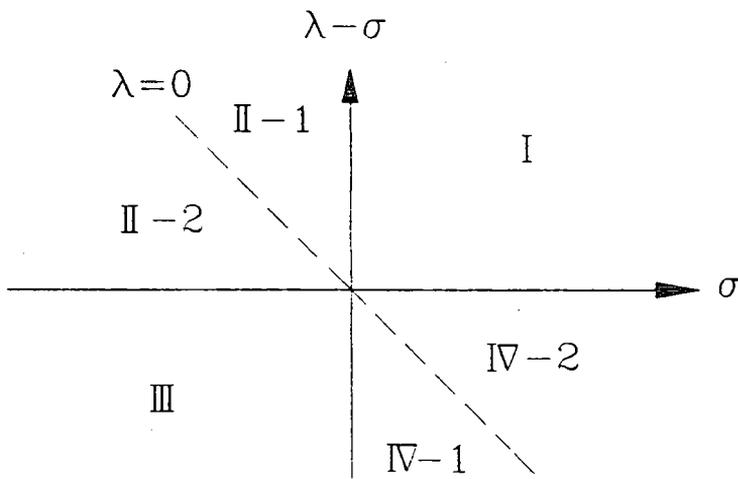


圖 2-1 σ 與 $\lambda - \sigma$ 座標系統示意圖

依據此座標系統，有關傳達函數 $K(\sigma, \lambda)$ 中之計算因子 C_2 及 B_2 表示如下

(1) 第 I 象限： $\sigma > 0, \lambda - \sigma > 0$

依據圖 2-1 中，第一象限，即是 $\sigma > 0, \lambda - \sigma > 0$ 的關係，有關 (2.3-20) 與 (2.3-21) 等式可改寫為

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + \sigma^2 + A^-] \quad (2.3-22.1)$$

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{2\sigma^2(\lambda - \sigma)[1 - \coth|f|d \coth|f'|d] + \sigma^3[1 - \coth^2|f|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-22.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + (\lambda - \sigma)^2 + A^-] \quad (2.3-22.3)$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2\sigma(\lambda - \sigma)^2[1 - \coth|f|d \coth|f'|d] + (\lambda - \sigma)^3[1 - \coth^2|f'|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-22.4)$$

式中

$$A^- = \frac{1}{2} \sigma \cdot (\lambda - \sigma) \cdot [1 - \coth|f|d \coth|f'|d] \quad (2.3-22.5)$$

$$f = f(\sigma), \quad f' = f(\lambda - \sigma), \quad f_2 = f + f'$$

有關 \coth 與 \tanh 函數內仍需保持正值，因此上列各式中仍以絕對值表示之。

(2) 第 II-1 象限： $\sigma < 0, \lambda - \sigma > 0; |\sigma| < |\lambda - \sigma|$

於圖 2-1 第 II 象限的區域中，以 $\lambda = 0$ 之斜線區分為二個區域，右上半區域部份相當於 $|\sigma| < |\lambda - \sigma|$ ，其傳達函數中之 B_2 與 C_2 可改寫為：

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + \sigma^2 + A^+] \quad (2.3-23-1)$$

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{2\sigma^2(\lambda - \sigma)[1 + \coth|f|d \coth|f'|d] - \sigma^3[1 - \coth^2|f|d]}{[-\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-23.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + (\lambda - \sigma)^2 + A^+] \quad (2.3-23.3)$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2\sigma(\lambda - \sigma)^2[1 + \coth|f|d \coth|f'|d] + (\lambda - \sigma)^3[1 - \coth^2|f'|d]}{[-\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-23.4)$$

式中

$$A^+ = \frac{1}{2}\sigma \cdot (\lambda - \sigma) \cdot [1 + \coth|f|d \coth|f'|d] \quad (2.3-23.5)$$

(3) 第II-2象限： $\sigma < 0$ ， $\lambda - \sigma > 0$ ； $|\sigma| > |\lambda - \sigma|$

於第II象限的左下半區域中，相當於 $|\sigma| > |\lambda - \sigma|$ ，其傳達函數中之 B_2 與 C_2 為

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + \sigma^2 + A^+] \quad (2.3-24.1)$$

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{2\sigma^2(\lambda - \sigma)[1 + \coth|f|d \coth|f'|d] - \sigma^3[1 - \coth^2|f|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d - (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-24.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + (\lambda - \sigma)^2 + A^+] \quad (2.3-24.3)$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2\sigma(\lambda - \sigma)^2[1 + \coth|f|d \coth|f'|d] + (\lambda - \sigma)^3[1 - \coth^2|f'|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d - (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-24.4)$$

式中 A^+ 如(2.3-23.5)式

(4) 第III象限： $\sigma < 0$ ， $\lambda - \sigma > 0$

圖2-1中第III象限，即是 $\sigma < 0$ ， $\lambda - \sigma < 0$ 時，則其傳達函數中之 B_2 與 C_2 改寫為

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + \sigma^2 + A^-] \quad (2.3-25.1)$$

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{2\sigma^2(\lambda - \sigma)[1 - \coth|f|d \coth|f'|d] - \sigma^3[1 - \coth^2|f|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-25.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + (\lambda - \sigma)^2 + A^-] \quad (2.3-25.3)$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2\sigma(\lambda - \sigma)^2[1 - \coth|f|d \coth|f'|d] - (\lambda - \sigma)^3[1 - \coth^2|f'|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-25.4)$$

式中 A^- 如(2.3-22.5)式

(5) 第IV-1象限： $\sigma > 0$ ， $\lambda - \sigma < 0$ ； $|\sigma| < |\lambda - \sigma|$

同理第二象限，於圖中第IV象限區域，以 $\lambda = 0$ 斜線為界劃分二個區域，左半區域相當於 $|\sigma| < |\lambda - \sigma|$ 時， B_2 與 C_2 可表示為

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} [\lambda \cdot B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + \sigma^2 + A^+] \quad (2.3-26.1)$$

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{2\sigma^2(\lambda - \sigma)[1 + \coth|f|d \coth|f'|d] + \sigma^3[1 - \coth^2|f|d]}{[-\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-26.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} \left[\lambda \cdot B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + (\lambda - \sigma)^2 + A^+ \right] \quad (2.3-26.3)$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2\sigma(\lambda - \sigma)^2 [1 + \coth|f|d \coth|f'|d] - (\lambda - \sigma)^3 [1 - \coth^2|f'|d]}{[-\sigma^2 \coth|f|d + (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2}$$

(2.3-26.4)

式中 A^+ 如(2.3-23.5)式

(6) 第IV-2象限： $\sigma > 0$, $\lambda - \sigma < 0$; $|\sigma| > |\lambda - \sigma|$

於第IV象限右半區域中，即是 $|\sigma| > |\lambda - \sigma|$ 時， B_2 與 C_2 則為

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} \left[\lambda \cdot B_2(\sigma, \lambda - \sigma) + \sigma^2 + A^+ \right] \quad (2.3-27.1)$$

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{2\sigma^2(\lambda - \sigma) [1 + \coth|f|d \coth|f'|d] + \sigma^3 [1 + \coth^2|f|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d - (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-27.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} \left[\lambda \cdot B_2(\lambda - \sigma, \sigma) + (\lambda - \sigma)^2 + A^+ \right] \quad (2.3-27.3)$$

$$B_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{2\sigma(\lambda - \sigma)^2 [1 + \coth|f|d \coth|f'|d] - (\lambda - \sigma)^3 [1 - \coth^2|f|d]}{[\sigma^2 \coth|f|d - (\lambda - \sigma)^2 \coth|f'|d] \cdot \tanh|f_2|d - \lambda^2} \quad (2.3-27.4)$$

式中 A^+ 如(2.3-23.5)式

至此，傳達函數 $k(\sigma, \lambda)$ 中之計算因子 B_2 、 C_2 已於如圖2-1之座標系統中清晰明確的表達，綜觀(2.3-21)-(2.3-27)等式各象限之值，若以 $\lambda = 0$ 之斜線劃分左右半部區域，吾人可發現，象限 I 與 III；象限 II-1 與 IV-1；象限 II-2 與 IV-2 等區域中，當 $|\sigma|$ 與 $|\lambda - \sigma|$ 之值分別相等時，則其對應之 B_2 與 C_2 值亦相等。另外，當 $\lambda = 0$ ，亦即 $\sigma = -(\lambda - \sigma)$ 時， $C_2(\sigma, \lambda - \sigma)$ 有奇異值(singularity)出現，此於求解波譜時屬於不合理的解析，因此，吾人僅需求解圖2-1中 $\lambda > 0$ 之右半區域之 B_2 與 C_2 值即可，亦即是利用(2.3-22)、(2.3-23)與(2.3-27)等式之 B_2 與 C_2 值，再代入(2.3-20)與(2.3-19)兩式即可求解相對應的第二階非線性效應之波譜密度函數 $S_2(\sigma)$ 值。

參、理論解析結果與校核

依一般波浪理論之控制方程式與邊界條件及利用攝動方法，理論解析第二階波譜非線性效應的過程與結果已上節中詳細地描述，本節中將依其解析結果先行與Tick(1959)之深海結果作一比較，然後再分析各種已知入射波譜於各種不同水深比(d/L)時，其波譜非線性效應的結果，同時解析發生於波譜高、低頻率之非線性效應傳遞的影響因素。

一、解析結果之校核

本研究上節之解析結果適用於波浪由深海前進至碎波前任一有限水深地區，而往昔學者Tick(1959)曾以類似解析過程解析深海情況時第二階波譜非線性效應的結果，本研究亦將上述結果轉化為深海的情況，與Tick的結果作一校核。

由於前節所述對稱的結果，以下將只處理上圖2-1中第I、第II-1與第IV-2等象限的深海情況的解析結果。

1. 第I象限

由(2.3-22)等式，當深海情況 $|f|d \rightarrow \infty$ 時

$$B_2(\sigma, \lambda - \sigma) = B(\lambda - \sigma, \sigma) = 0 \quad (3.1-1.1)$$

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g}\sigma^2 \quad (3.1-1.2)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g}(\lambda - \sigma)^2 \quad (3.1-1.3)$$

因此可得傳達函數 $K(\sigma, \lambda)$ 為

$$K(\sigma, \lambda) = \frac{1}{g^2}[\sigma^2(\lambda^2 - 2\lambda\sigma + 2\sigma^2)] \quad (3.1-2)$$

2. 第II-1象限

由(2.3-23)等式，當 $|f|d \rightarrow \infty$ 時

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g}[\sigma(2\sigma - \lambda)] \quad (3.1-3.1)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g}[(\lambda - \sigma) \cdot (2\sigma - \lambda)] \quad (3.1-3.2)$$

$$K_2(\sigma, \lambda) = \frac{1}{g^2} [(\lambda - \sigma)^2 \lambda \sigma] \quad (3.1-3.4)$$

3. 第IV-2象限

由(2.3-27)等式，當 $|f|d \rightarrow \infty$ 時

$$C_2(\sigma, \lambda - \sigma) = \frac{1}{g} [\sigma(\lambda - 2\sigma)] \quad (3.1-5.1)$$

$$C_2(\lambda - \sigma, \sigma) = \frac{1}{g} [(\lambda - \sigma) \cdot (\lambda - 2\sigma)] \quad (3.1-5.2)$$

$$K_2(\sigma, \lambda) = \frac{1}{g^2} [(\lambda - 2\sigma)^2 \lambda \sigma] \quad (3.1-6)$$

上列(3.1-22)、(3.1-4)及(3.1-6)等式與Tick(1959)之深海結果是完全一致，此意即表示本研究理論解析有限水深較高階波譜的非線性效應過程，轉化為深海情況有其確切的依據。

二、解析結果之討論

依據上節(2.3-22)、(2.3-23)與(2.3-27)等式之解析結果，本研究將分別以JONSWAP與Pierson-Moskowitz(P-M)波譜當作入射波譜，探討各種不同水深時二階波譜非線性效應的變化情況，另外，亦將探討上述非線性效應之高、低頻率能量傳遞的變化情況。

1. 以JONSWAP波譜為入射波譜的情況

本研究中的第一種入射波譜係應用歐善惠(Ou, 1977)根據台灣海峽的實測紀錄分析修正JONSWAP波譜所得者，其型式為

$$S(f) = \frac{3.28}{C_1^2 C_2^4} \left(\frac{H_s}{T_s^2} \right)^2 f^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} (c_2 f T_s)^{-4} \right] \quad (3.2-1)$$

式中 $C_1=3.80$ ， $C_2=1.13$ ， $\gamma=2.08$

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma_a = 0.07, f \leq f_p \\ \sigma_b = 0.09, f > f_p \end{cases}$$

其標準化波譜型態如圖3-1所示，圖中橫座標週頻率 σ 與尖峰頻率 σ_p 之無因次比值，縱座標中 m_{10} 為波譜函數之第0次動差。

圖3-2~圖3-9為波浪尖銳度(wave steepness) $H/L_0=0.02$ 時，水深波長比 $D/L_0=0.10\sim 0.50$ 之間，各種二階波譜非線性效應的變化情況，其中有關 H 與 L_0 係分別為入射波浪之示性波高 $H_{1/3}=0.02$ 與入射波譜尖峰頻率計算之波長。

當一群紛紜波列前進傳遞時，由於成份波本身的非線性效應與成分波之間的相互作用關係，其波浪能量有往較低頻率(較長週期)與較高頻率(較短週期)傳遞的非線性效應產生，由圖3-2~圖3-9中即明白的顯示，波的非線性效應產生於較低頻與 $\omega/\omega_0=2$ 之較高頻處。由於入射波譜JONSWAP波譜係屬於窄帶(narrow-band)波譜，因此其非線性效應亦較集中；且由於本研究中僅推導至第二階之非線性項，因此其高頻部份之非線性效應亦集中於 $\omega/\omega_0=2$ 處。當水深波長比 D/L_0 不同時，其非線性作用亦產生顯著差異，水深比較小時，係屬於淺水性波浪，此時波浪的非線性能量傳遞即明顯強烈，如圖3-2中所顯示，尤其較低頻處變化較為強；反之，若水深比較大時，則為深海性波浪，其非線性作用已不明顯，尤其在低頻處幾乎無非線性效應之能量傳遞現象，而僅於較高頻處有不明顯作用產生。如圖3-8或圖3-9所示。

同樣以上述之JONSWAP波譜為入射波譜，但改以較大之波浪尖銳度的非線性效益結果如圖3-10~圖3-15所示。由各圖中之結果顯示，波浪能量亦是往低頻與 $\omega/\omega_0=2.0$ 高頻處傳遞，由於尖銳度增大的影響，其非線性效應亦明顯的強烈，與前述的 $H/L_0=0.02$ 時的情況比較，當水深比 D/L_0 相同時，此處的非線性效應即顯著的增加，若以上述兩種入射波浪的能量變化作一比較如下表所示

表3.2-1各種能量比較表

	入射波譜	$D/L_0=0.15$	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
$\frac{m_1}{m_2}$	6.25	39.07	39.06	39.06	39.07	39.00	39.02

註： m_1 為 $H/L_0=0.05$ 之波能， m_2 為 $H/L_0=0.02$ 之波能

由上表之結果得知，當水深比相同時，波浪尖銳度 $H/L_0=0.05$ 與 $H/L_0=0.02$ 之入射波浪的非線性效應能量比值可以波 H 的四次方視之。

2. 以Pierson-Moskowitz(P-M)波譜為入射波譜的情況

本研究中第二種入波譜則為P-M波譜，其標準化波譜型式如圖3-16所示，圖中符號意義與上節者相同。水深波長比 $D/L_0=0.10\sim 0.50$ 之間各種二階波譜非線性效應的變化情況如圖3-17~圖3-24所示。亦如前節所述，由於波浪的非線性作用導至能量往低頻與 $W/W_{10}=2.0$ 高頻處附近傳遞的現象亦明顯呈現各圖中，然而，因P-M波譜係屬於寬帶波譜型式，其產生於 $W/W_{10}=2.0$ 處附近的二階波譜型態亦較寬廣平滑，且其尖峰位置隨 D/L_0 之增加而往 $W/W_{10}>2.0$ 之較高頻位移。

一整體波群因非線性效應影響而導至波往高、低頻傳遞的現象已詳細地呈列於上述的各圖中，然而波群中各成份波的影響情況如何則是以下詳加探討。

3. 波能傳遞的探討

本節中將利用分割入射波譜頻率的方式，研究探討各種涵蓋局部頻率的入射波譜時，其非線性效應能量傳遞的變化情況。圖3-25~圖3-31係入射波譜為JONSWAP波譜， $D/L_0=0.15$ ， $H/L_0=0.02$ 時各種波能傳遞的情形，圖3-25為入射波譜中小於或等於尖峰頻率的所有成份波作用的二階波譜，相當於圖中符號 $0\leq |w/w_{10}|\leq 1.0$ ；而圖3-26則係入射波譜中大於或等於尖峰頻率($1.0\leq |w/w_{10}|\leq \infty$)的所有成份波作用的結果。由此兩圖中可得知，波浪非線性效應產生之波能往高、低頻率傳遞的現象，主要係由大於或等於尖峰頻率的成份波所控制，而小於或等於尖峰頻率部份波除了能量傳遞現產生於二倍主頻($w/w_{10}=2.0$)附近外，於低頻附近反而產生負值的能量，即是言，其牽制能量的傳遞。另外，以入射波譜主頻為中心各向左右切割不同比例頻率的成份波，觀察其能量傳遞的變化情況，圖3-27~圖3-31即係分別以包含0.1、0.3、0.5、0.7與0.9倍帶寬比例頻率的成份波所展現的波能傳遞情況，由各圖中的結果顯示，當入射波譜以主頻附近成份波逐漸涵蓋向左右高低頻率成份波時，其非線性效應的能量傳遞亦以極低頻與二倍主頻處附近逐步擴展，發展至完整地能量傳遞架構。

圖3-32~圖3-38亦為入射波譜是JONSWAP波譜，但 $D/L_0=0.15$ ， $H/L_0=0.05$ 時，其不同頻率範圍成份波的波能傳遞變化情況，其各圖中展現的結果與上列各圖的情況類似，因其波浪尖銳度比 H/L_0 較大，故其變化情況劇烈。

圖3-39~圖3-45則為入射波譜是P-M波譜， $D/L_0=0.15$ 時其不同頻率範圍成份波的波能傳遞變化情況，由各圖中的結果顯示，其能量傳遞的變化情況較為緩和，變化的趨勢則與上述兩種情況相類似。

肆、結論與建議

本研究第一年的主要目標係於研究探討波譜預測模式中能量傳輸方程式的交互作用項，應用波浪理論的控制方程式與邊界條件，以攝動法方式理論解析過程與結果，擷錄數點結論如下：

一、本研究推導所得之第二階波譜非線性效應結果，可應至用未碎波前之任一水深區域，其轉化為深海情況時與Tick(1959)的結果相同。

二、利用JONSWAP與Pierson-Moskowitz兩種不同型式的波譜為入射波譜，於標準化波譜的比較下，已明顯的呈現各種不同水深波長比 D/L_0 的非線性效應的能量傳遞變化情況，當 D/L_0 較小時，有顯著的能量往較低頻率與二倍主頻率附近傳遞的現象；當 D/L_0 較大時，能量傳遞現象則較不明顯，於較低頻率處甚或無此現象。

三、以JONSWAP波譜為入射波譜的非線性效應二階波譜中，其往高頻處的能量傳遞的尖峰頻率皆出現於二倍主頻處，且其二階波譜的總能量與入射波高的四次方成正比。若以P-M波譜為入射波譜的二階波譜中，其往高頻處傳遞的尖峰頻率則隨 D/L_0 的增加，往大於二倍主頻方向遞增。

四、本研究中亦以包含各種不同入射波譜頻率成份波的方式，探討其影響能量傳遞的變化情況，由結果顯示，於包含大於或等於入射波譜頻率的成份波時，可以大部份呈現非線性效應的能量傳遞現象。另外，非線性效應的能量傳遞現象亦隨以入射波譜主頻附近帶寬比例的增加而明顯擴大，即至帶寬比例為 $0.1 \leq |w/w_{10}| \leq 1.9$ 時，已大致呈現所有成份波整體傳遞的架構。

綜合以上結論，本研究已對能量傳輸方程式中較難理解的波浪非線性交互作用的能量傳遞現象作一較清晰的研究探討，然而，於理論解析過程中，本研究僅推導至第二階的結果，對於整體的非線性變化影響，理應推導擴展至更高階以上，或許更能幫助瞭解能量傳遞的變化情況，此亦是吾人今後研究探討的課題之一。

參考文獻

1. Rice, S.O., 1944, Mathematical analysis of random noise, in Noise and Stochastic Process., New York.
2. Phillips, O.M., 1958, The equilibrium range in the spectrum of wind generated waves, J.F.M., 4, PP 426-434.
3. Tick, L.T., 1959, A nonlinear random model of gravity, wave I, J.Math. and Mech.8(5), PP 643-652.
4. Hasselmann, K., 1962, " On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum " .Part 1, J.Fluid Mech.12, PP481-500
5. Hasselmann, K., 1963a, " On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum " .Part 2, J.Fluid Mech.15, PP273-281
6. Hasselmann, K., 1963b, " On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum " .Part 3, J.Fluid Mech.15, PP385-398
7. Pierson, W.J. & Moskowitz, L. 1964, " A proposed spectrum form for fully developed wind sea based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii " .J.Geophys.Res.69, PP5181-5190.
8. Hasselmann, K. 1973, " Measurements of wind wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project(JONSWAP)" . Herausgegeben von Deutsch, Hydrograph. Inst., Reihe A, No.12.
9. Mitsuyasu, H. Tani, F. Suhara, T. Mizuno, S. Ohkusu, M. Honda, T. & Rikiishi, K. 1980, " Observation of the power spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy " .J.Phys.Oceanog. 10, PP286-296.
10. Huang, N.E. Sterner, R.L. Tung, C.C. Yeh, Y. & Bliven, L.F., 1981, "A unified two-parameter wave spectrum model for a general sea state" .J.Fluid Mech. 112, PP203-224.
11. Ou, S.H. 1977, "Parametric determination of wave statistics and wave spectrum of gravity waves" .Report of Tainan Hydraulics Lab.
12. Huang, N.E. Hwang, P.A. Wang, H. Lorg, S.R. & Bliven, L.F. 1983, " A study on the spectral models for waves infinite water depth " .J.Geophys.res.88, PP9579-9587.
13. Guza, R.T. & Thornton, E.B., 1980, Local and Shoaled comparisons of sea surface elevations, pressures and Velocities, .Geo.Res. 85, PP1524-4530.

14. Guza, R.T., 1985, Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory, and a nonlinear model, J.F.M. Vol158, PP47-70.
15. The WAMDI Group, 1988, The WAM Model-a Third generation ocean wave prediction model, J.phg.Ocean., PP1775-1810
16. 郭一羽, 陳合源, 1982, "淺海波浪頻譜之研究(一)~非線形成分波與波譜之關連" 第六屆海洋工研討會, PP11-1~11-21
17. 郭一羽, 陳合源, 1983, "淺海波浪頻譜之研究(二)~成分波波速之線形理論適用界限的問題" 第七屆海洋工程研討會, PP24-1~24-13.
18. 郭一羽, 陳合源, 1985, "淺海波浪頻譜之研究(三)~有關波譜形狀在實驗上的研究" 第八屆海洋工程研討會, PP557-574.
19. 郭一羽, 1990, "海洋風浪之波譜模式", 第三屆基礎港灣數值模式研習, PP113-124.

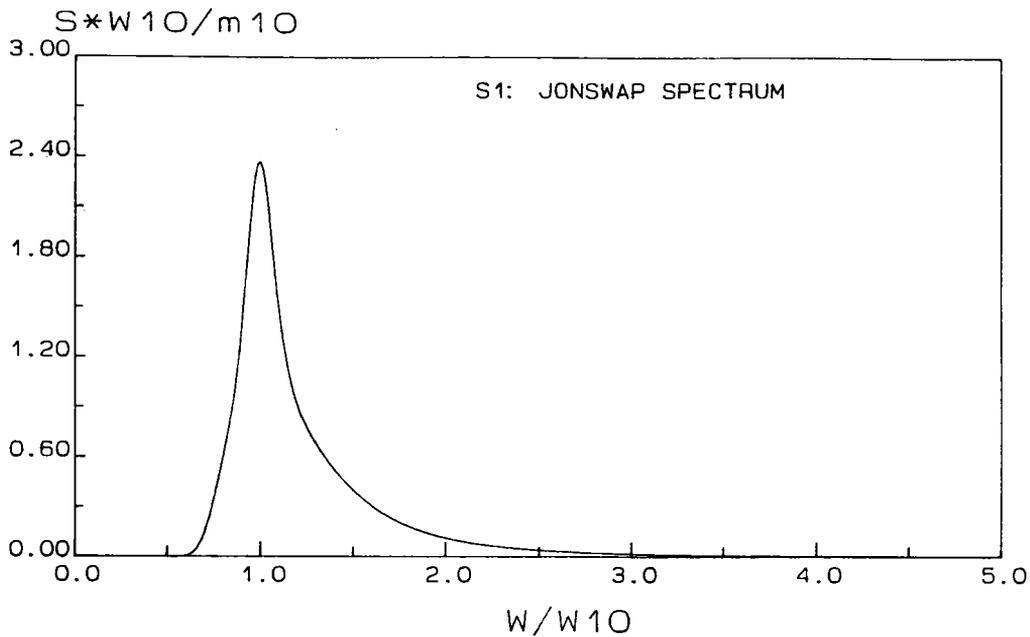


圖3-1 標準化之JONSWAP波譜($r=2.08$)

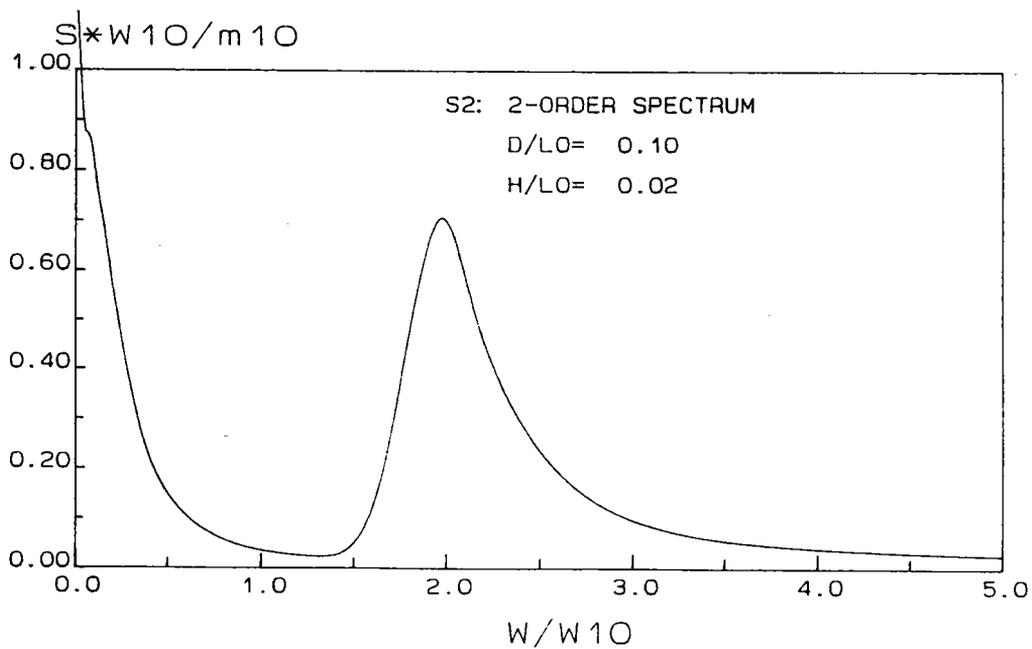


圖3-2 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.10$ 之二階波譜

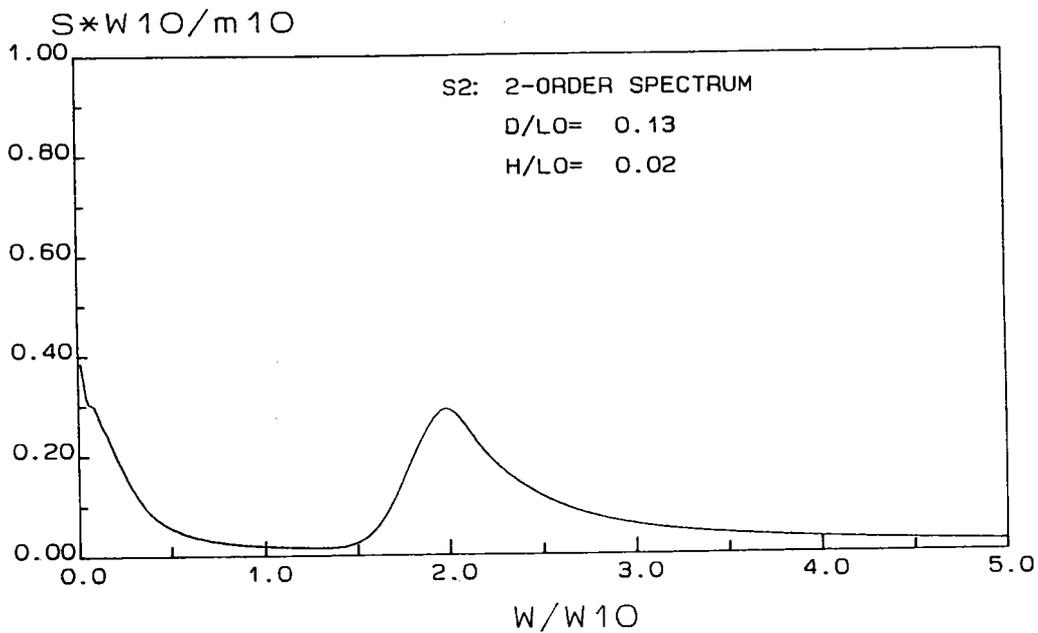


圖3-3 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.13$ 之二階波譜

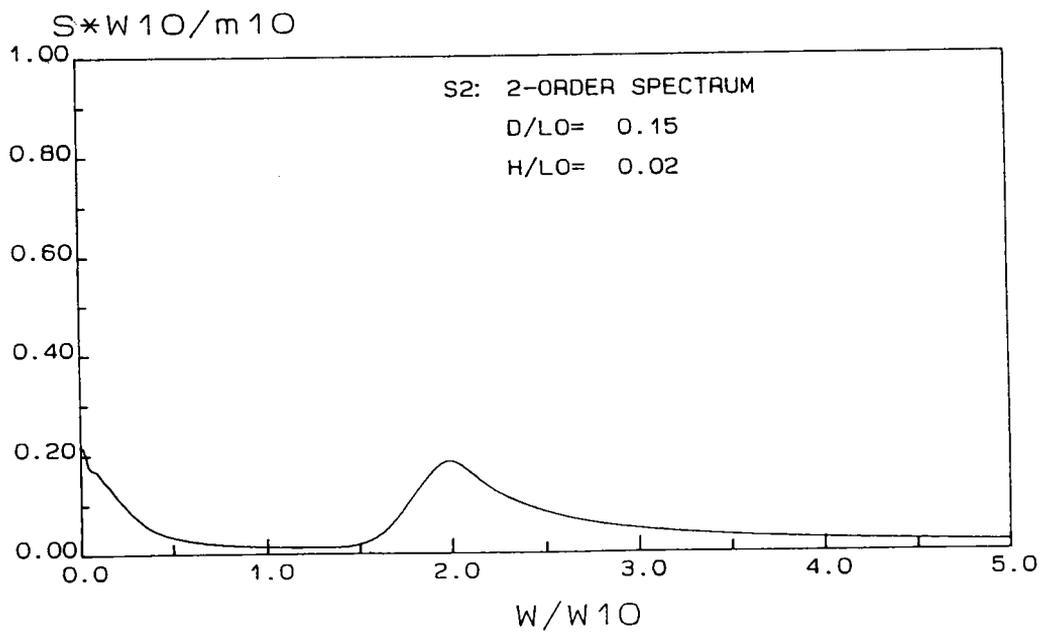


圖3-4 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$ 之二階波譜

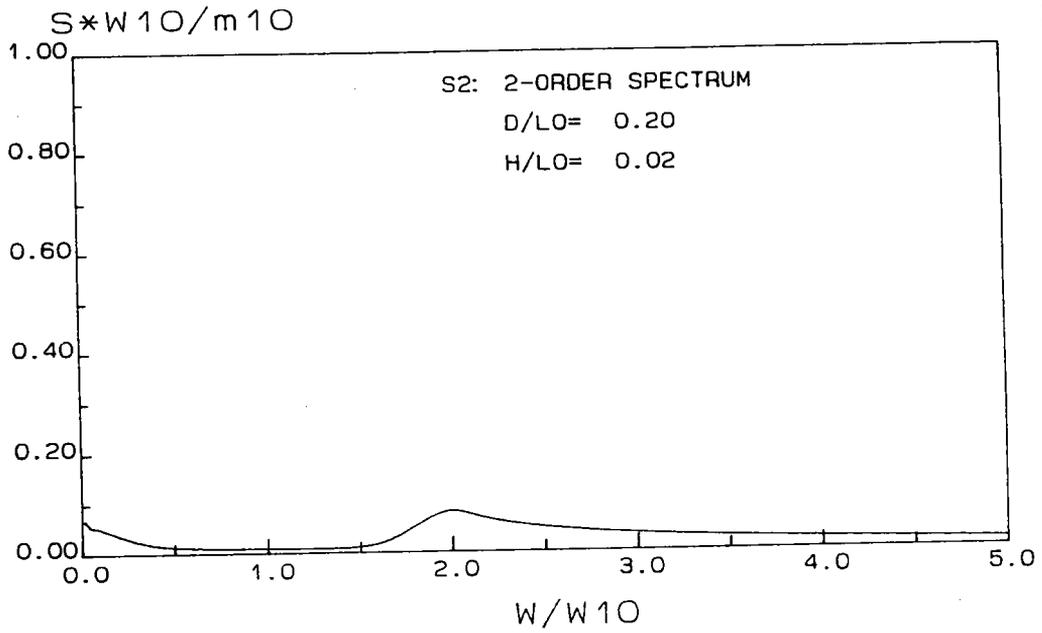


圖3-5 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.20$ 之二階波譜

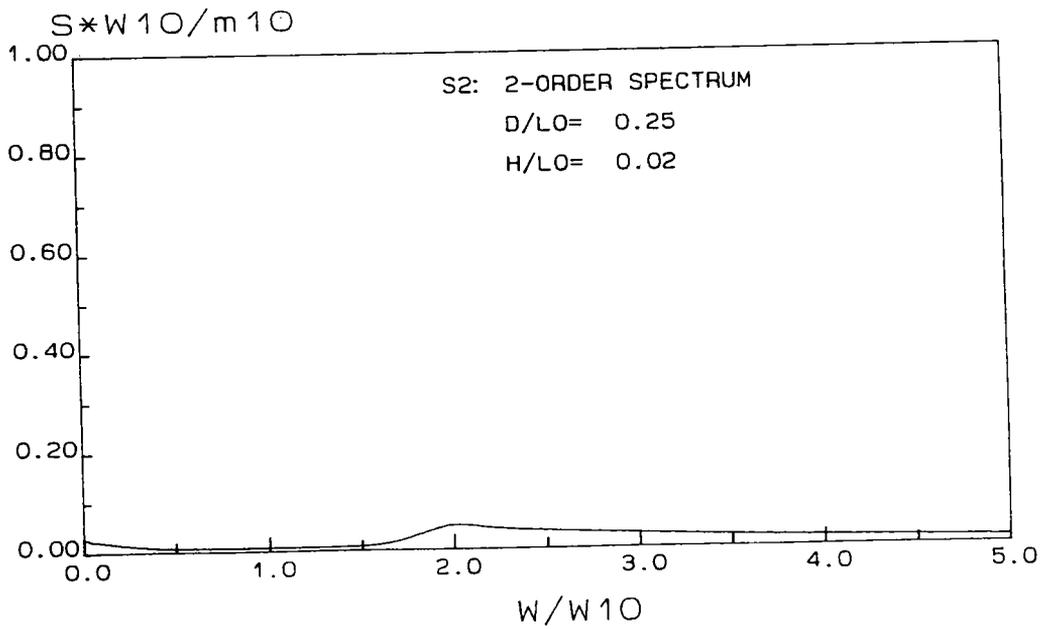


圖3-6 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.25$ 之二階波譜

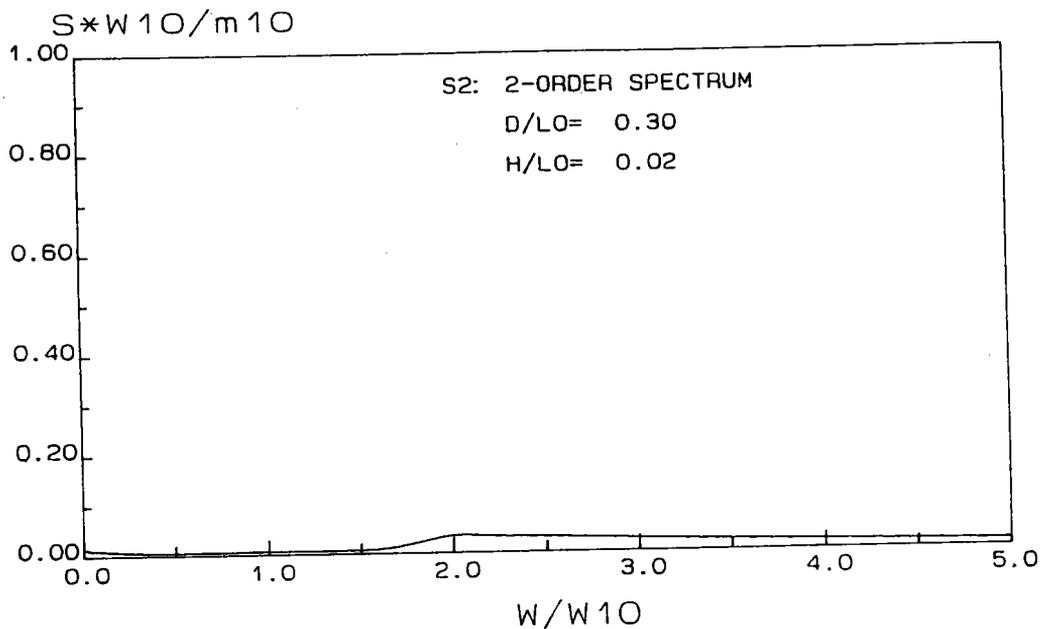


圖3-7 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.30$ 之二階波譜

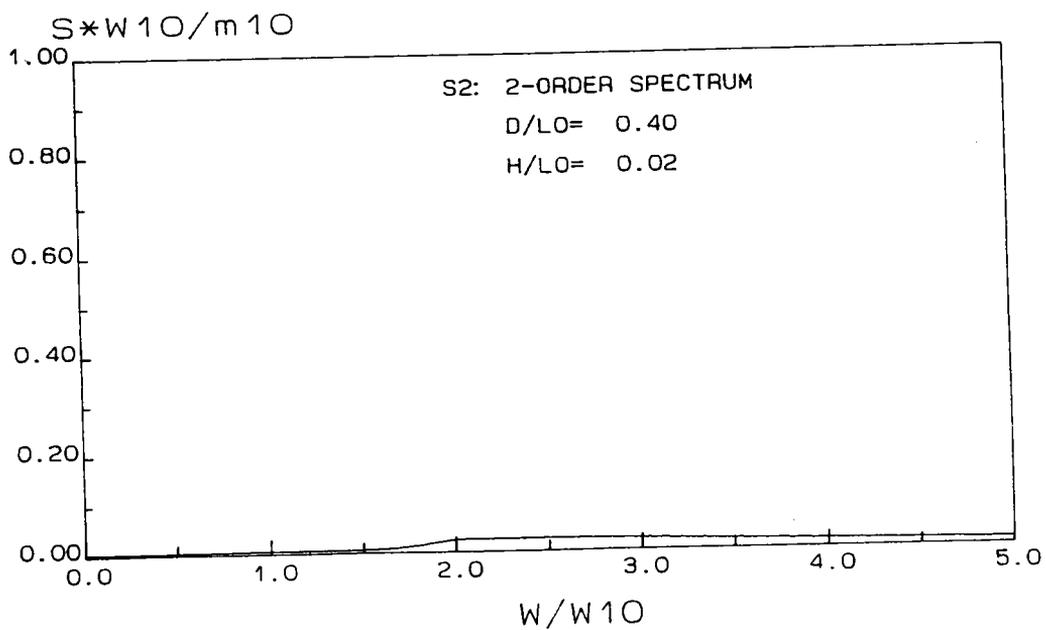


圖3-8 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.40$ 之二階波譜

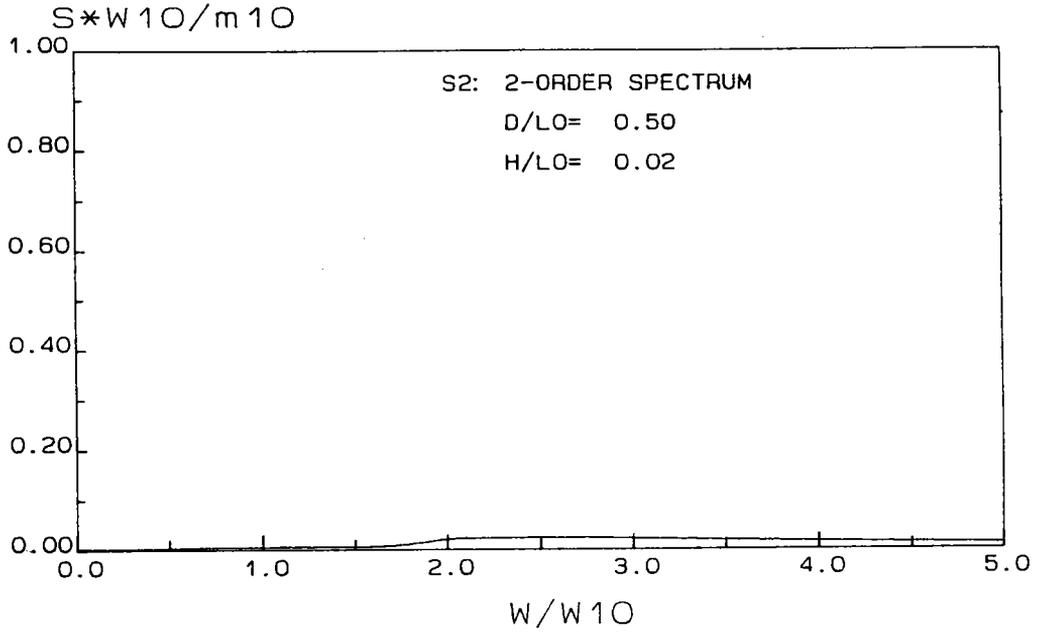


圖3-9 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.50$ 之二階波譜

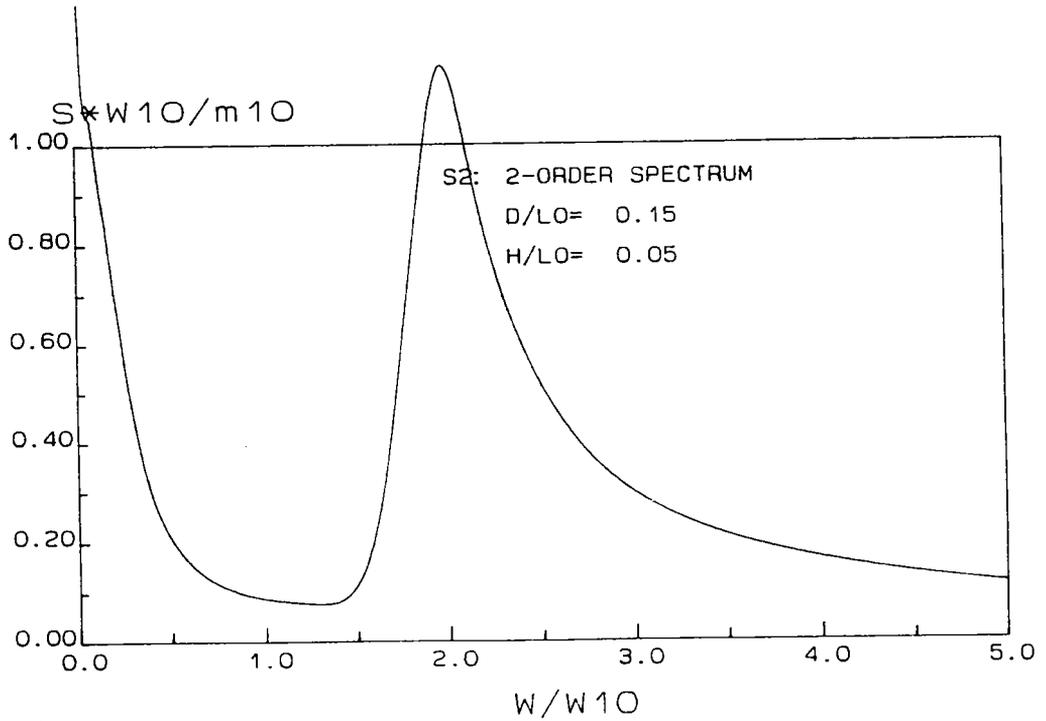


圖3-10 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$ 之二階波譜

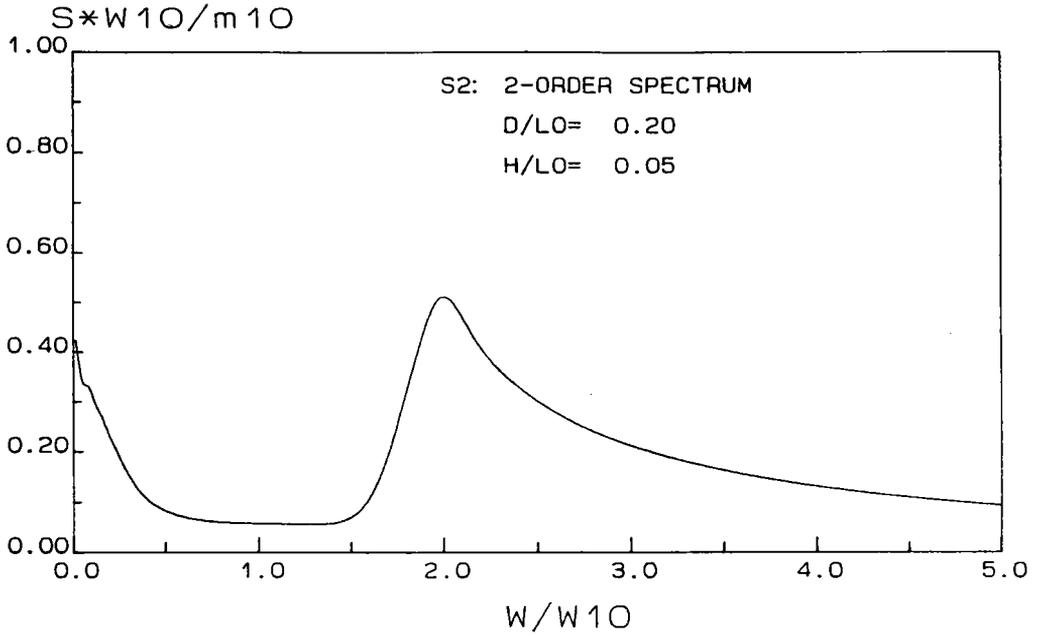


圖3-11 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.20$ 之二階波譜

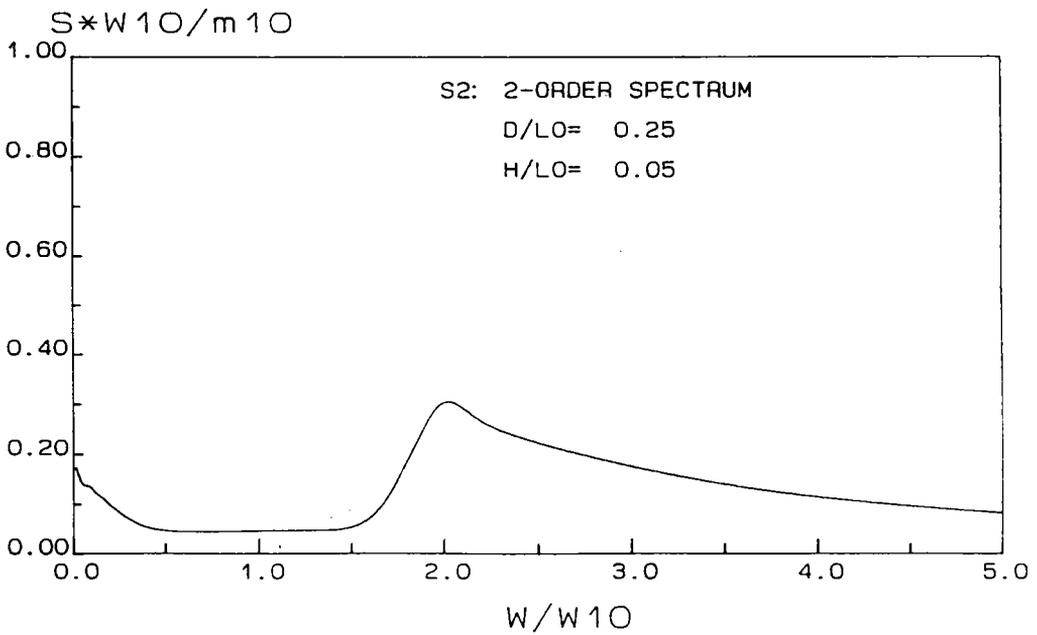


圖3-12 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.25$ 之二階波譜

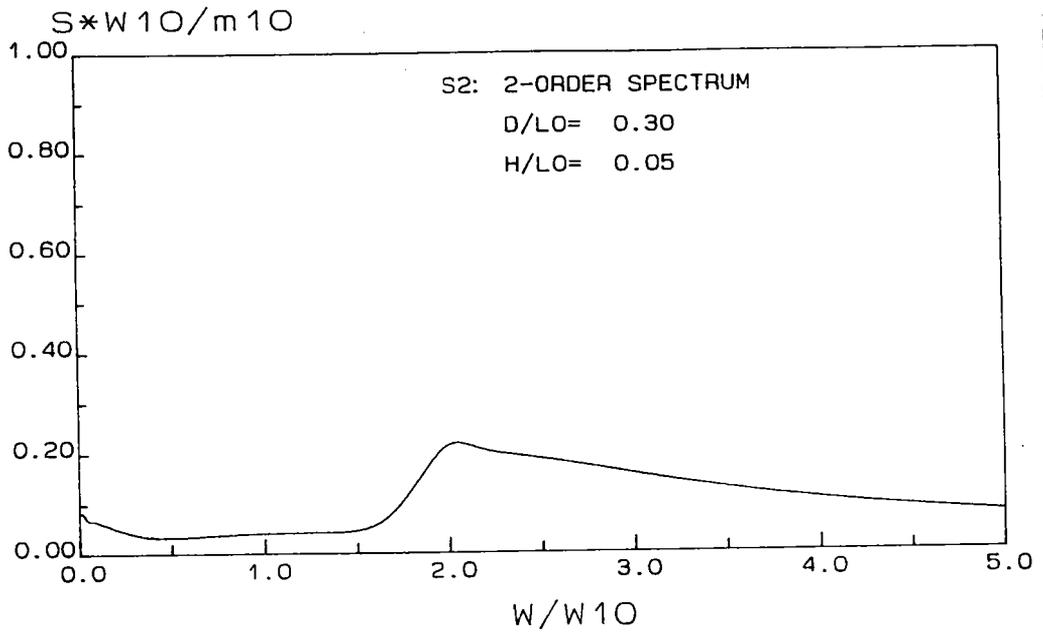


圖3-13 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.30$ 之二階波譜

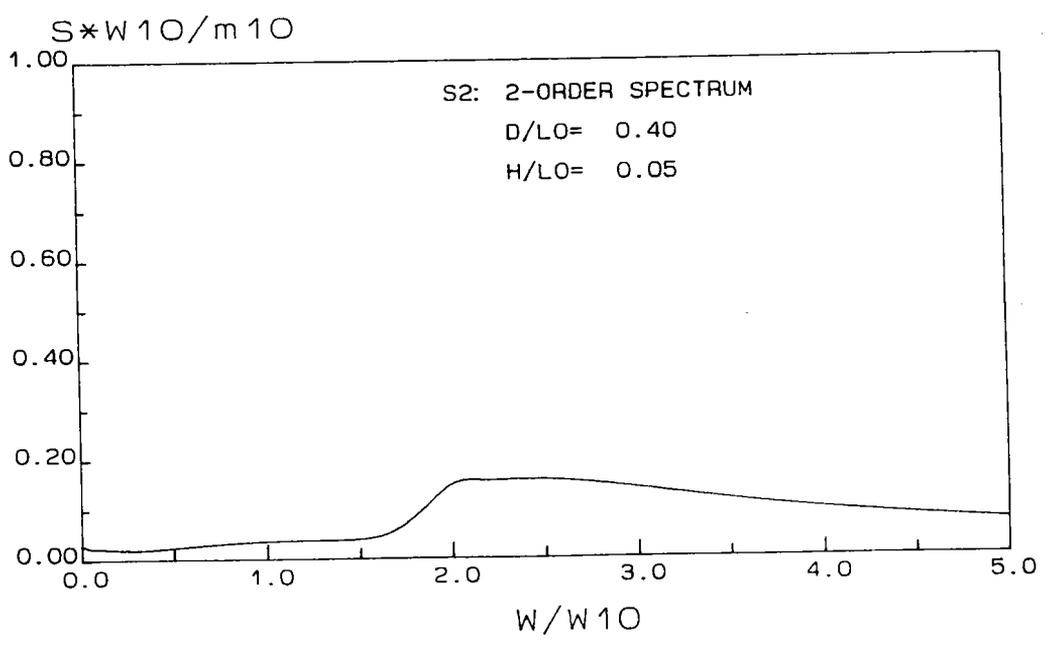


圖3-14 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.40$ 之二階波譜

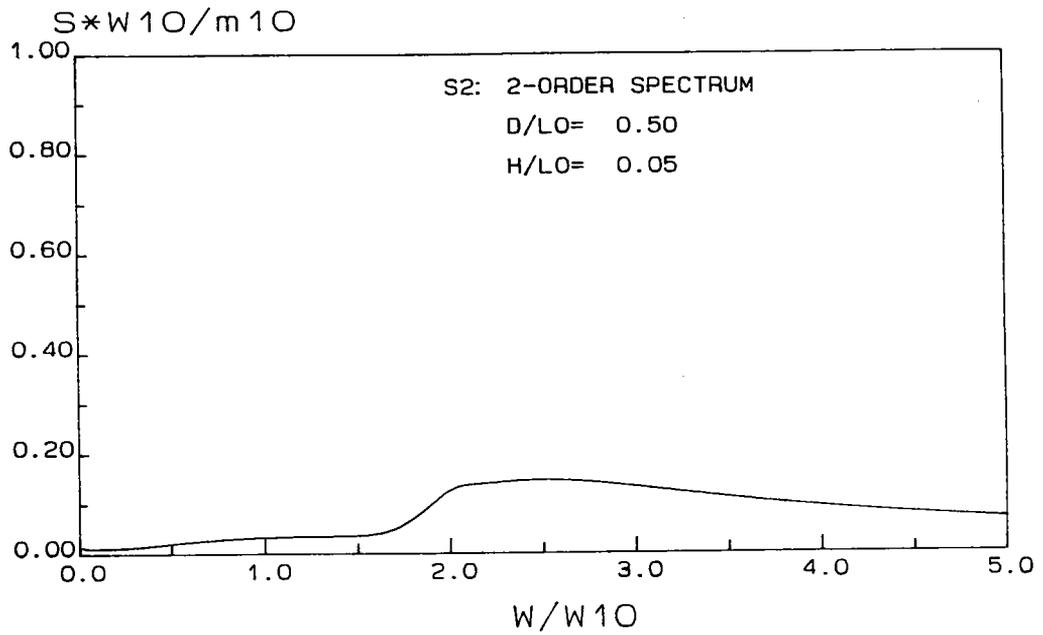


圖3-15 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.50$ 之二階波譜

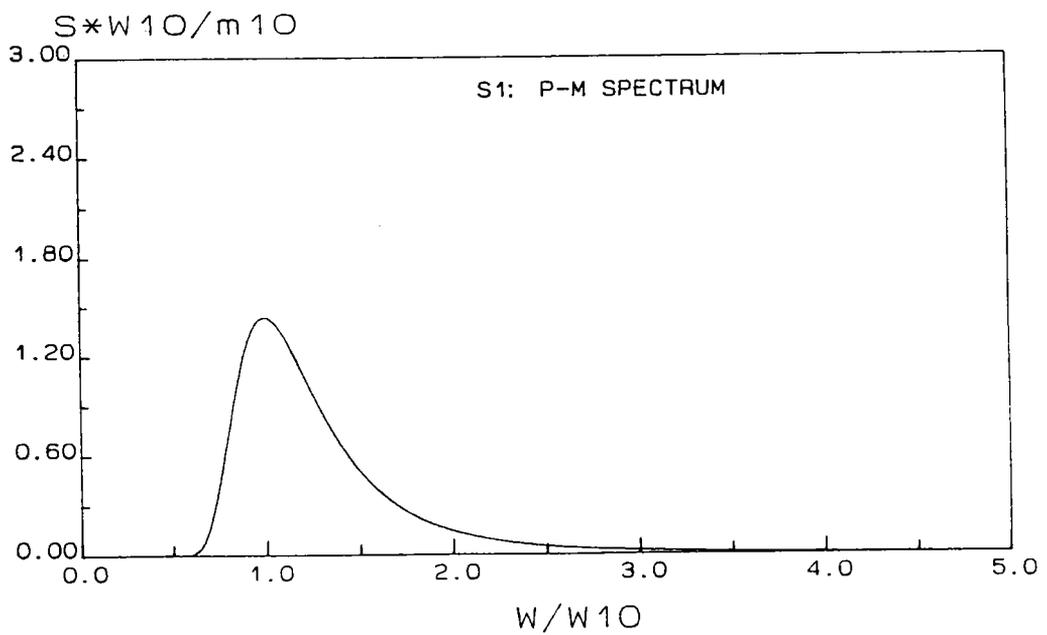


圖3-16 標準化之Pierson—Moskowitz波譜

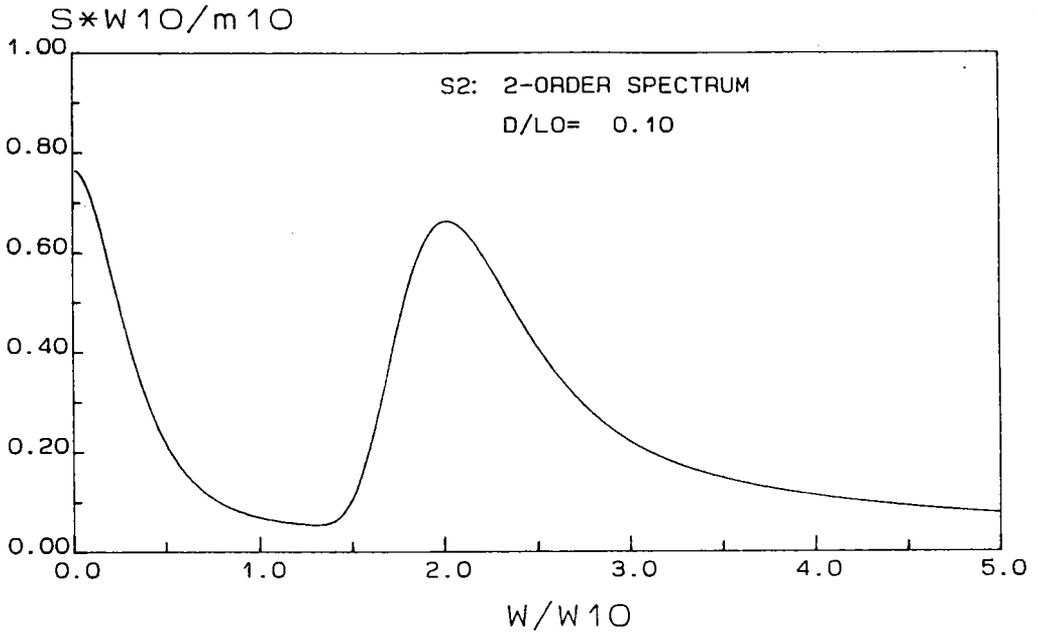


圖3-17 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.10$ 之二階波譜：

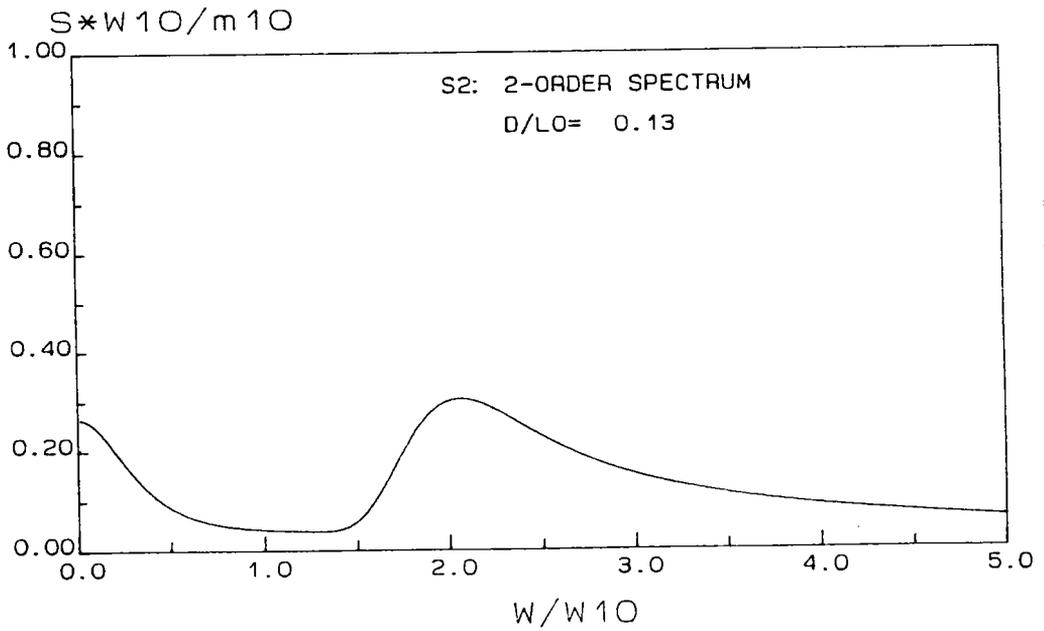


圖3-18 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.13$ 之二階波譜

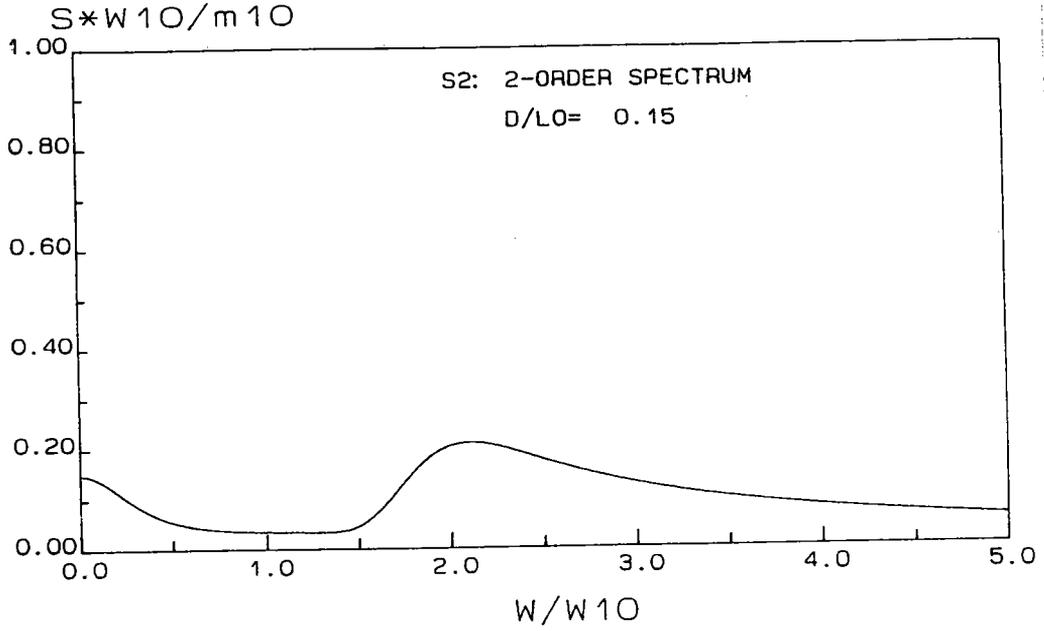


圖3-19 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$ 之二階波譜

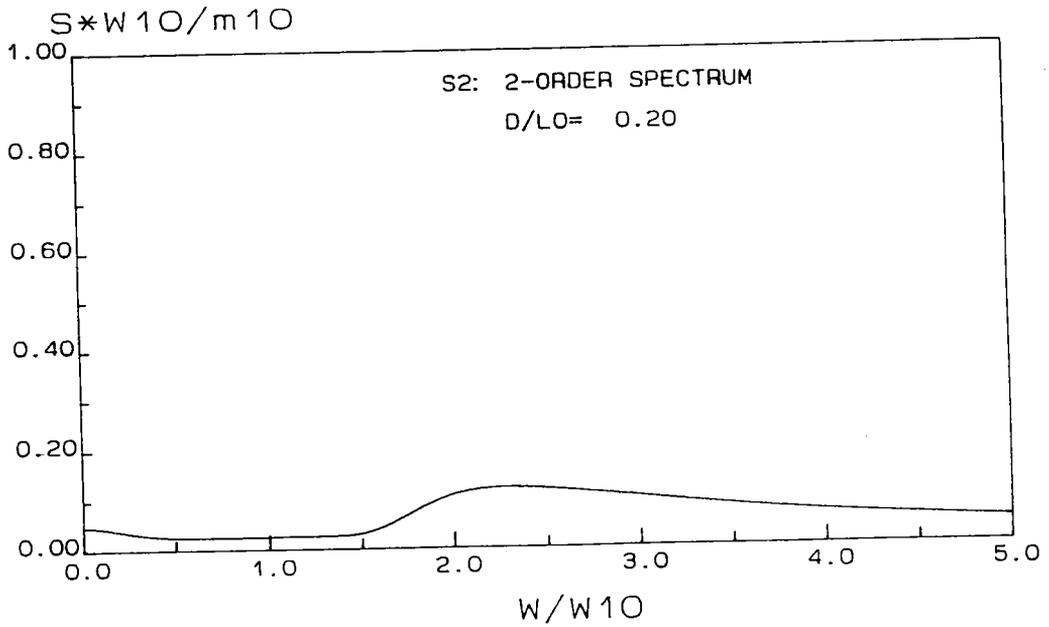


圖3-20 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.20$ 之二階波譜

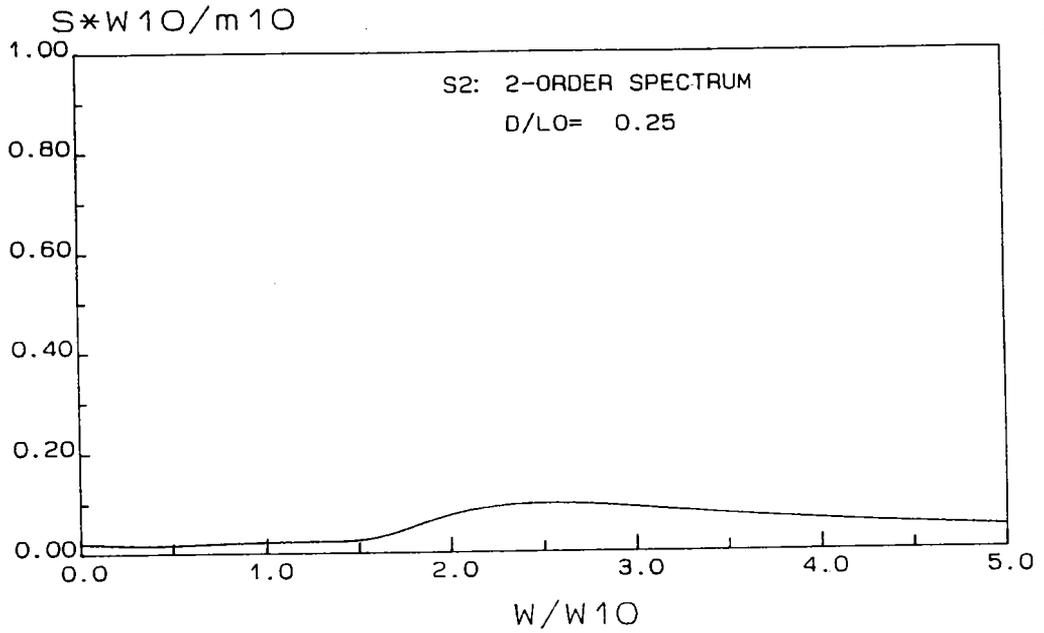


圖3-21 P-M波譜為入射波譜， $D / L_0 = 0.25$ 之二階波譜

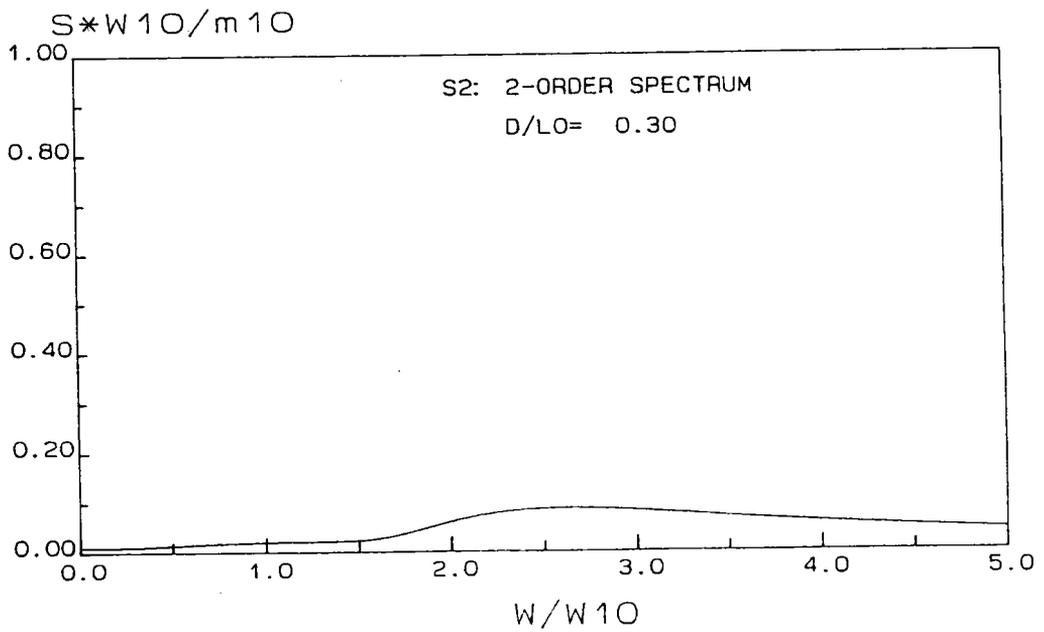


圖3-22 P-M波譜為入射波譜， $D / L_0 = 0.30$ 之二階波譜

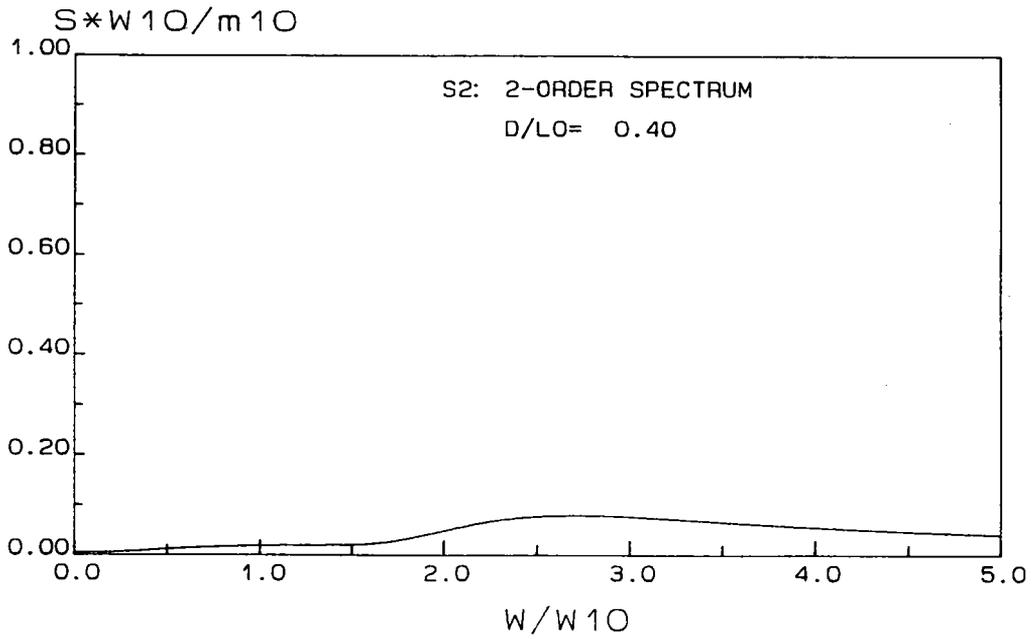


圖3-23 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.40$ 之二階波譜

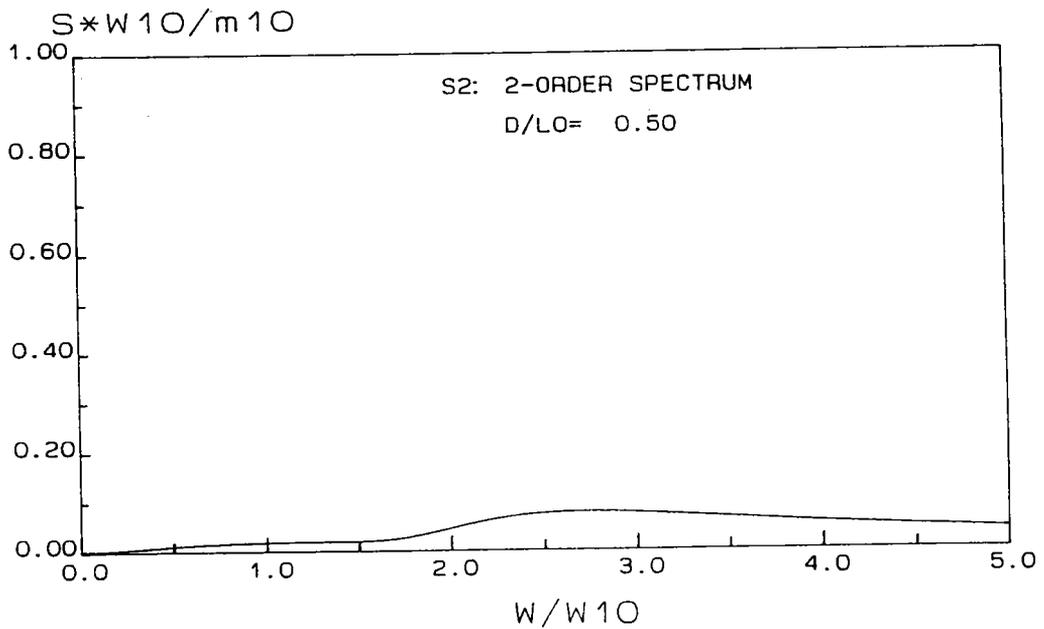


圖3-24 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.50$ 之二階波譜

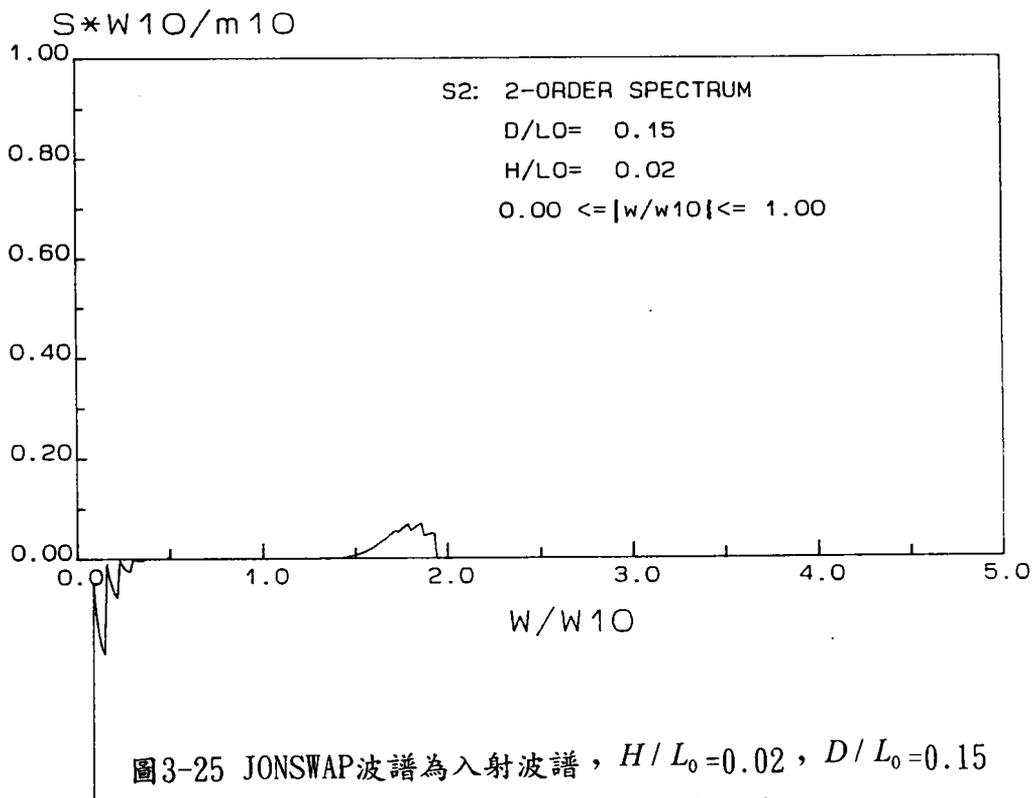


圖3-25 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.0 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.0$ 成份波之二階波譜

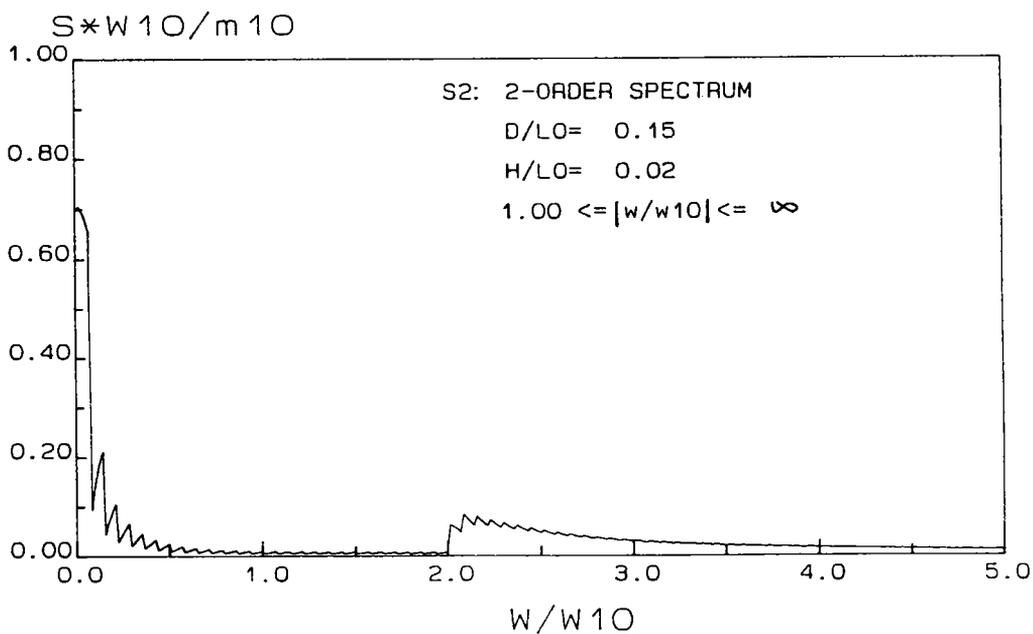


圖3-26 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $1.0 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq \infty$ 成份波之二階波譜

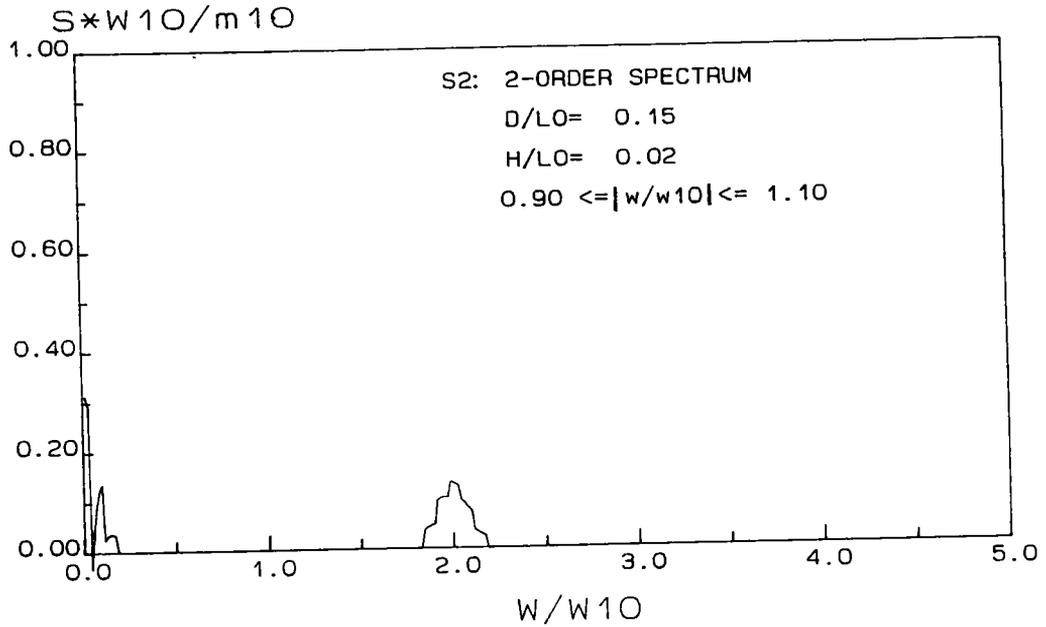


圖3-27 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.9 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.1$ 成份波之二階波譜

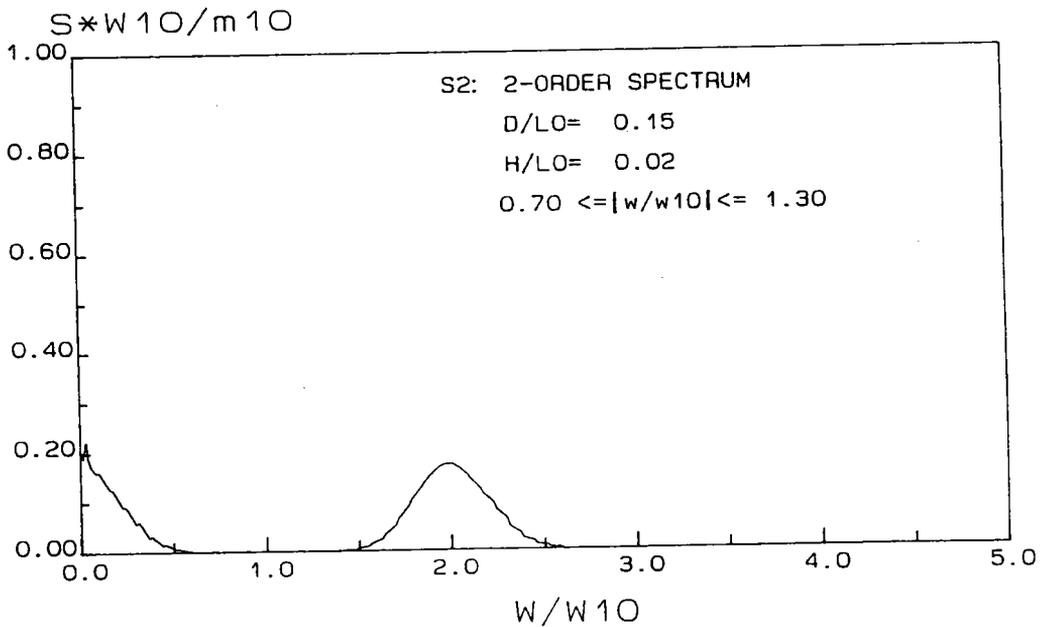


圖3-28 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.7 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.3$ 成份波之二階波譜

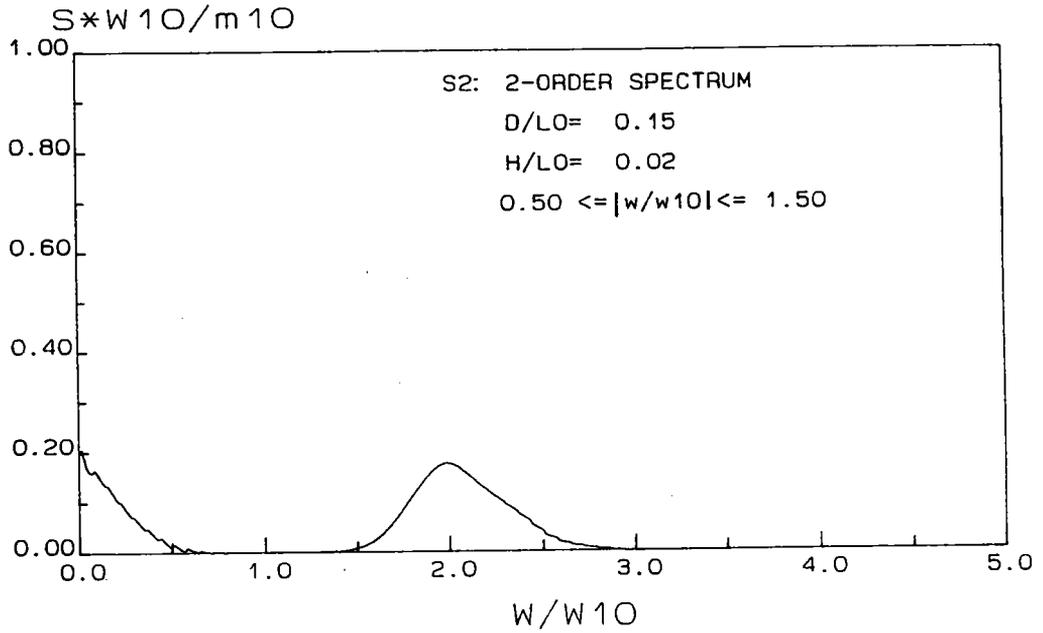


圖3-29 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.5 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.5$ 成份波之二階波譜

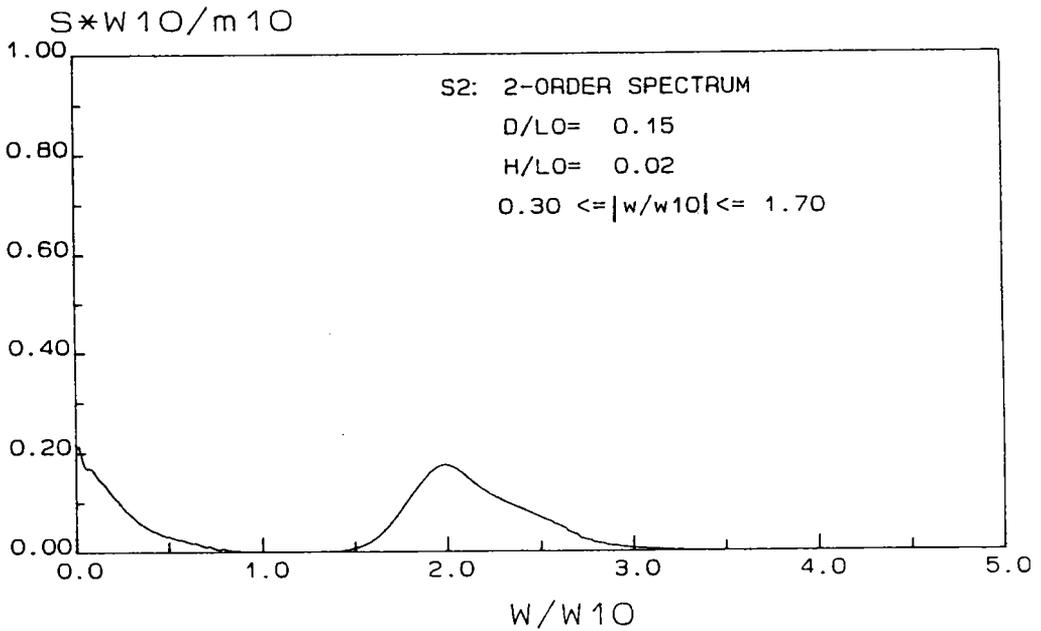


圖3-30 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.3 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.7$ 成份波之二階波譜

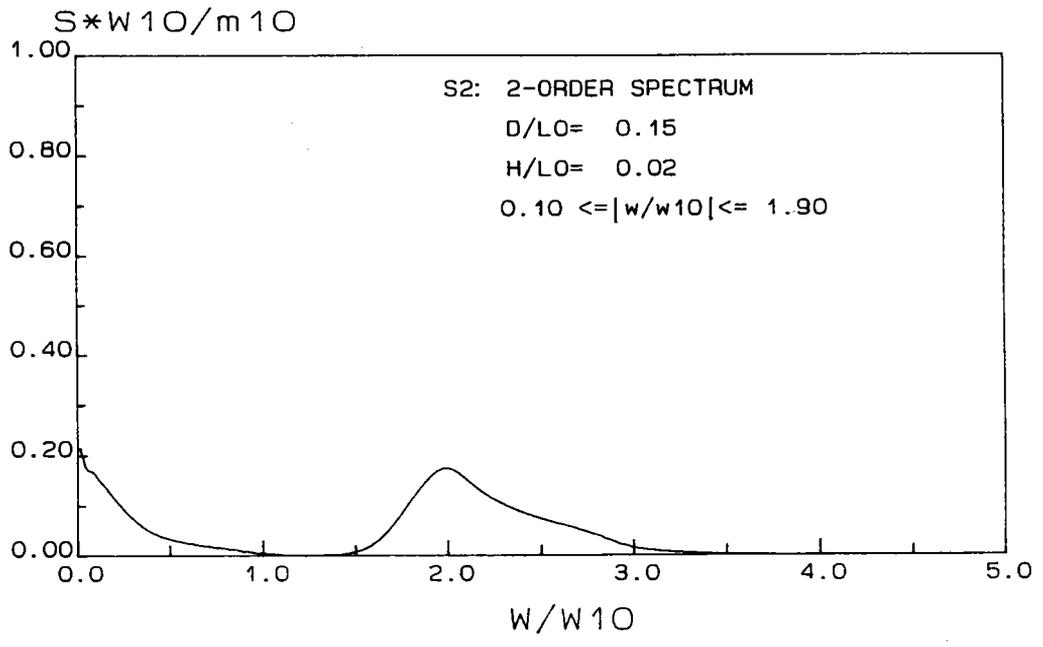


圖3-31 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.02$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.1 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.9$ 成份波之二階波譜

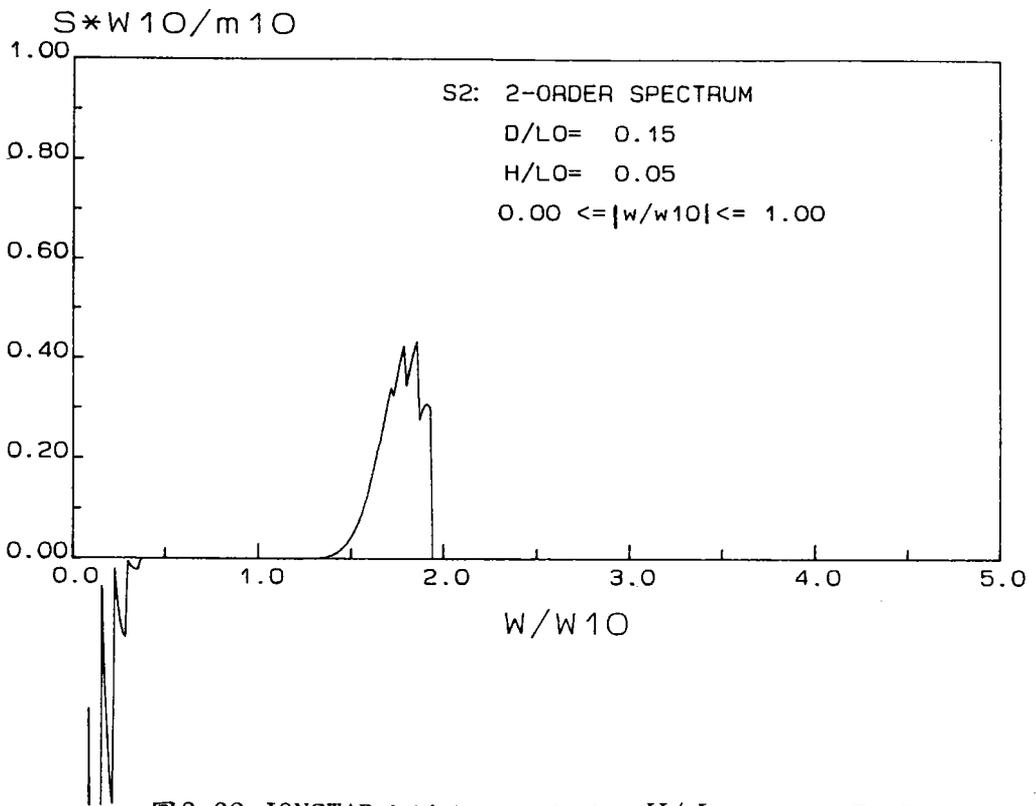


圖3-32 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.0$ 成份波之二階波譜

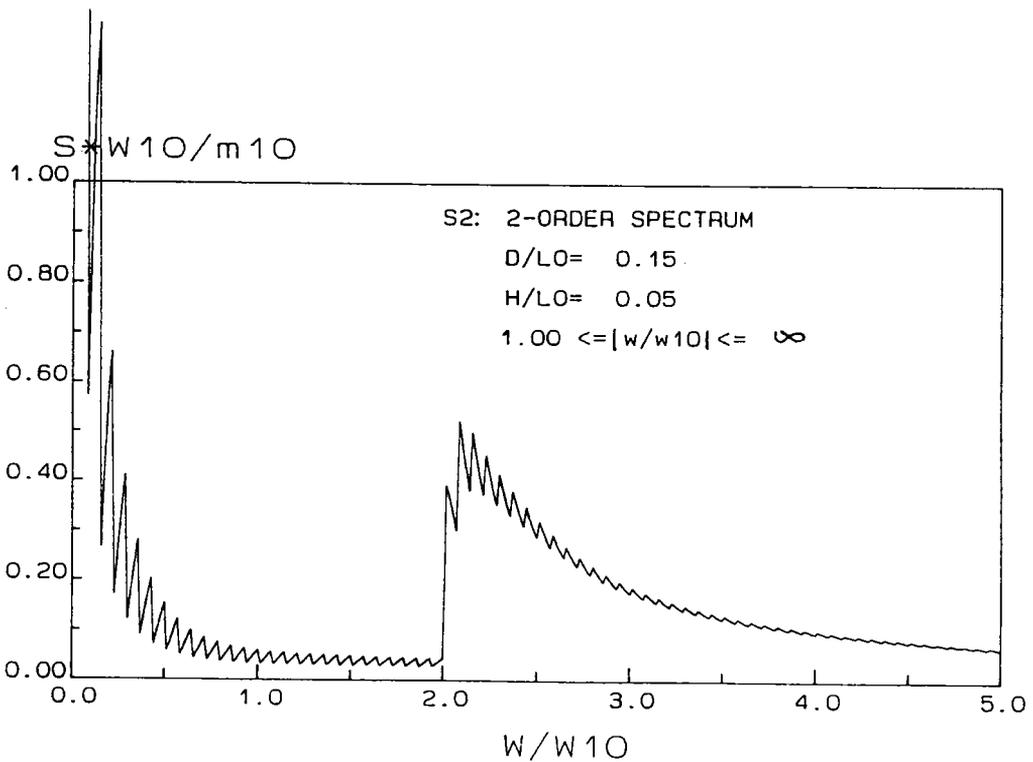


圖3-33 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $1.0 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq \infty$ 成份波之二階波譜

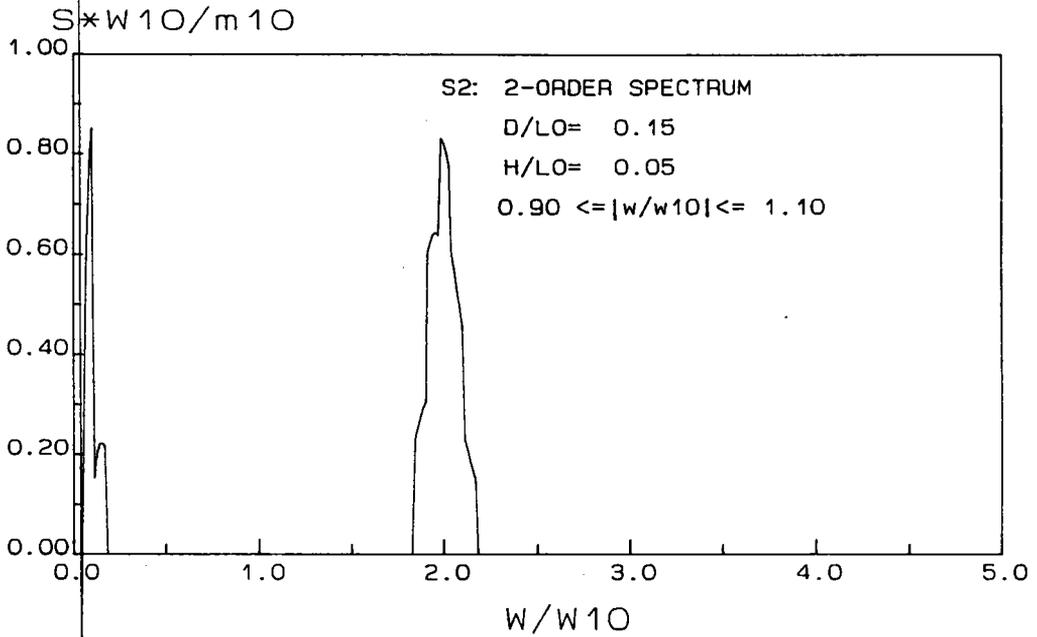


圖3-34 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.9 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.1$ 成份波之二階波譜

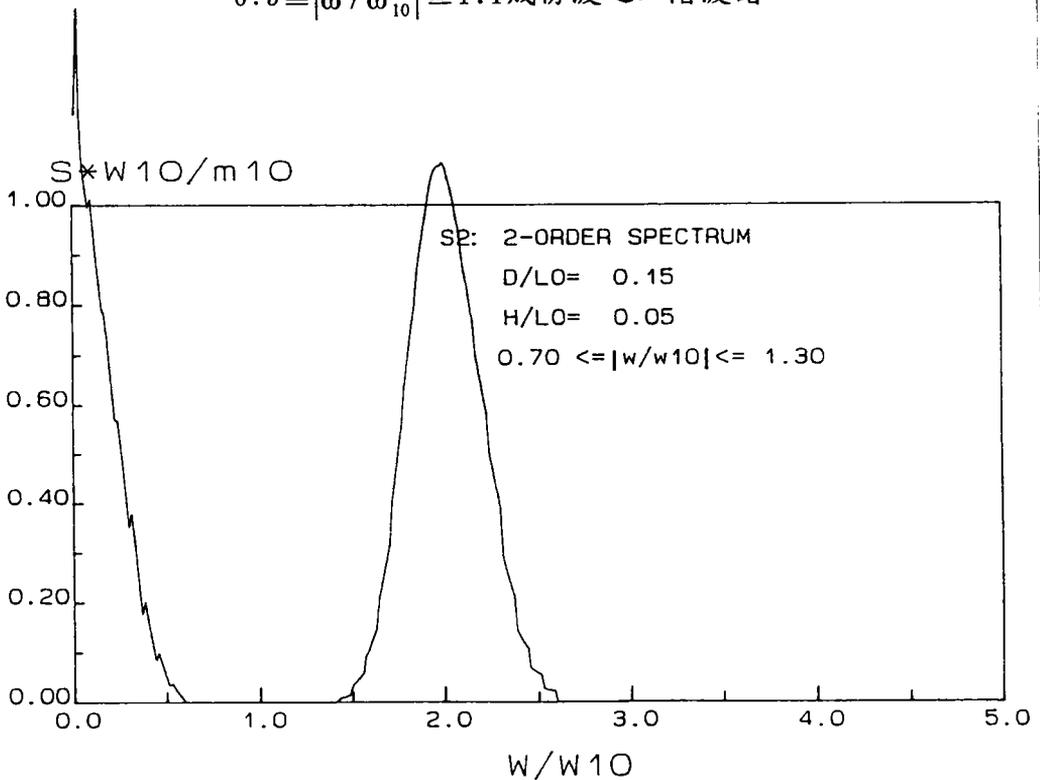


圖3-35 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.7 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.3$ 成份波之二階波譜

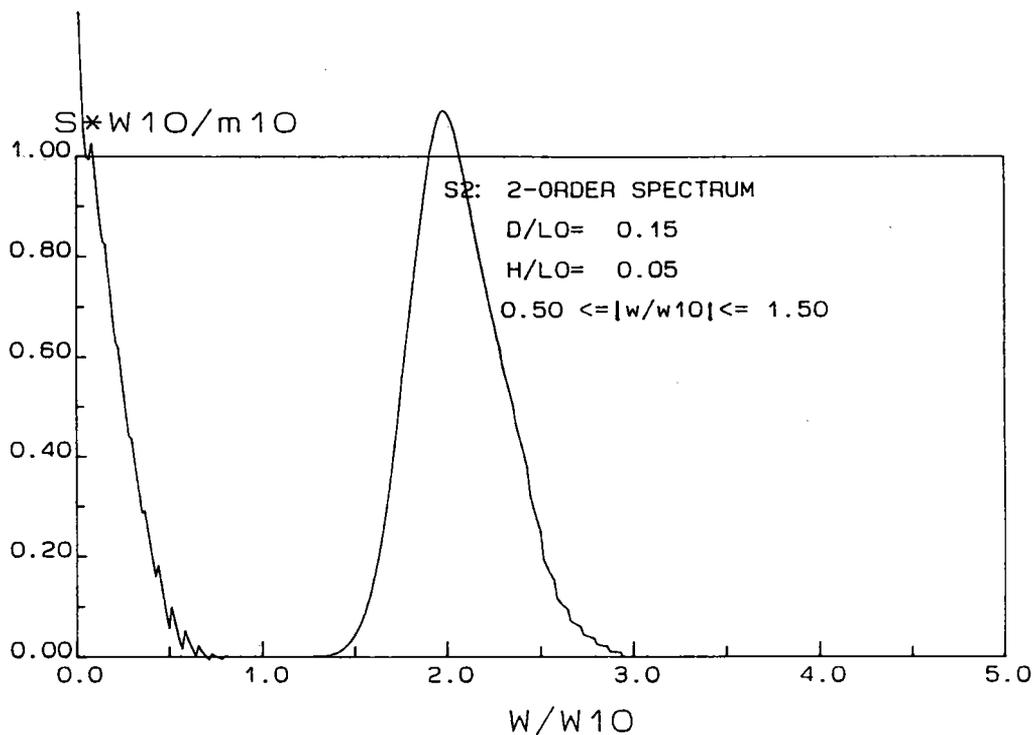


圖3-36 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.5 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.5$ 成份波之二階波譜

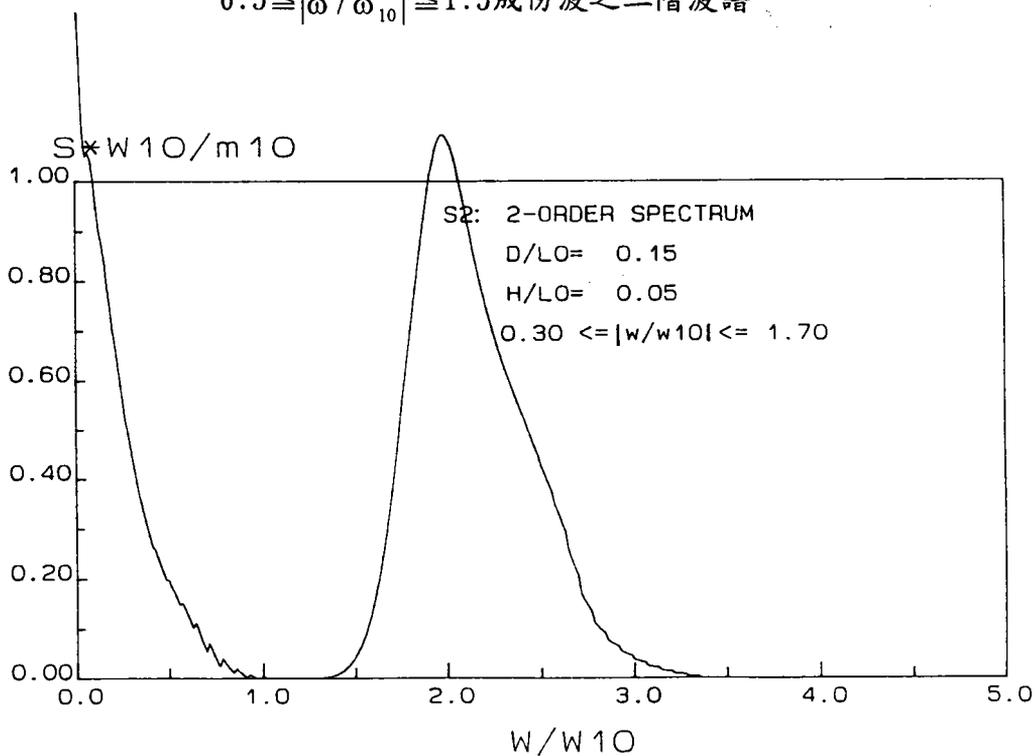


圖3-37 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.3 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.7$ 成份波之二階波譜

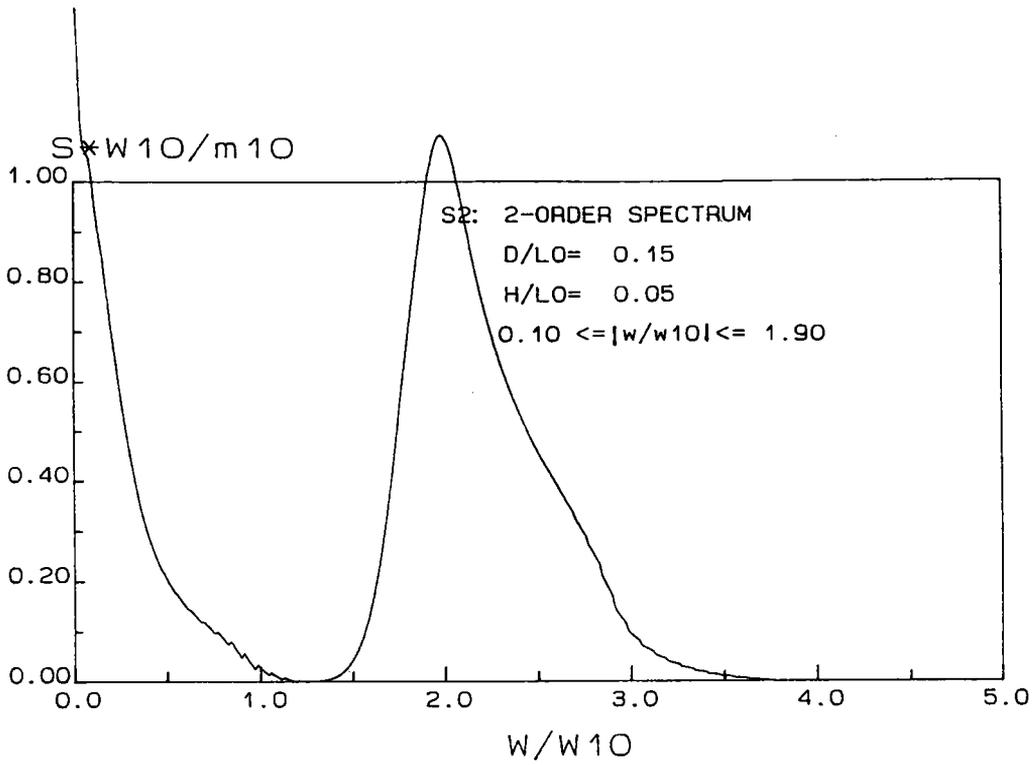


圖3-38 JONSWAP波譜為入射波譜， $H/L_0=0.05$ ， $D/L_0=0.15$
 $0.1 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.9$ 成份波之二階波譜

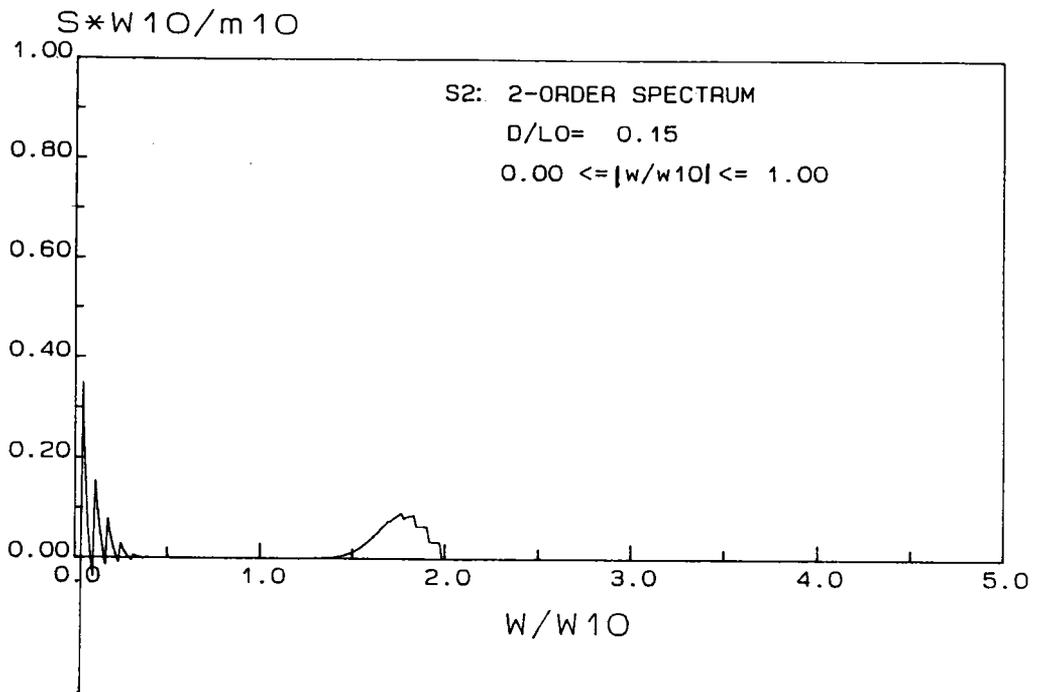


圖3-39 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.0 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.0$ 成份波之二階波譜

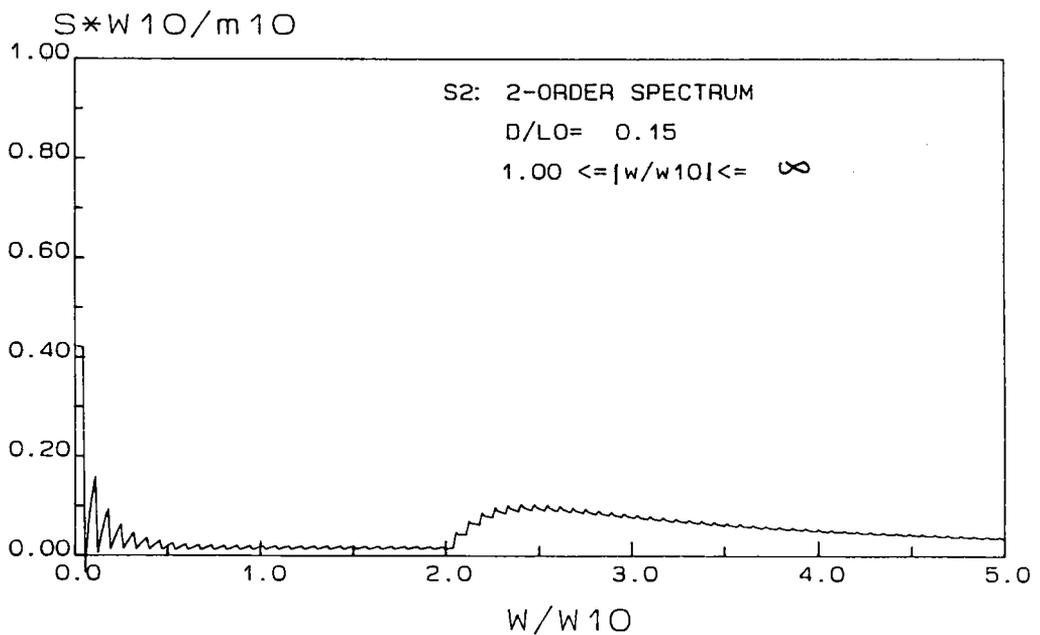


圖3-40 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $1.0 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq \infty$ 成份波之二階波譜

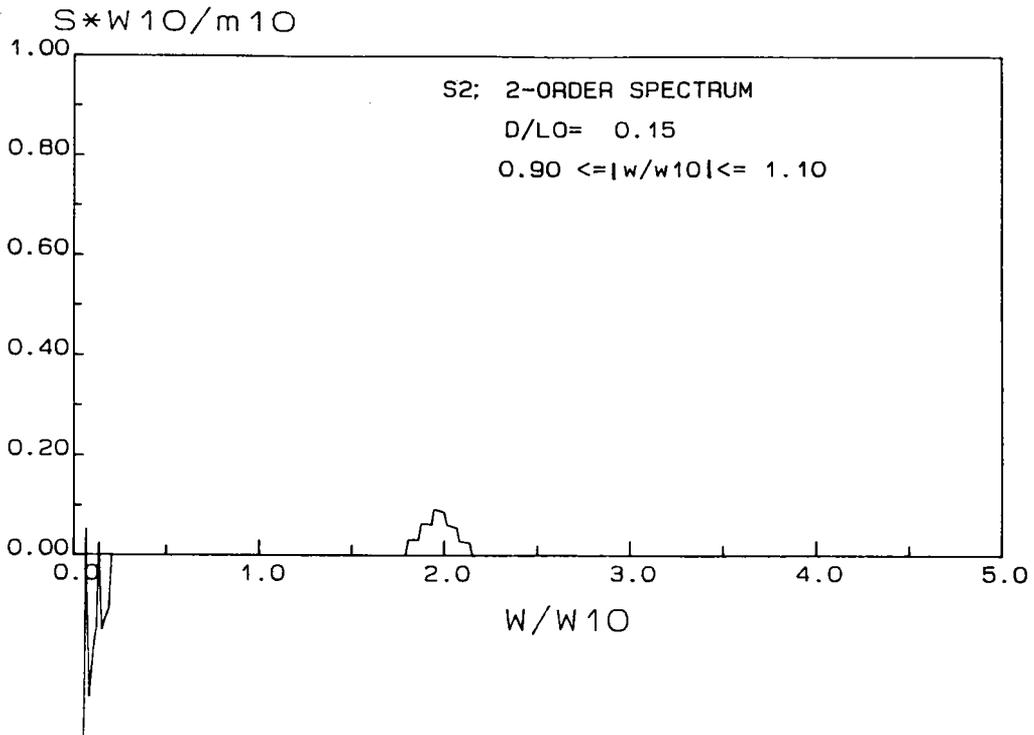


圖3-41 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.9 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.1$ 成份波之二階波譜

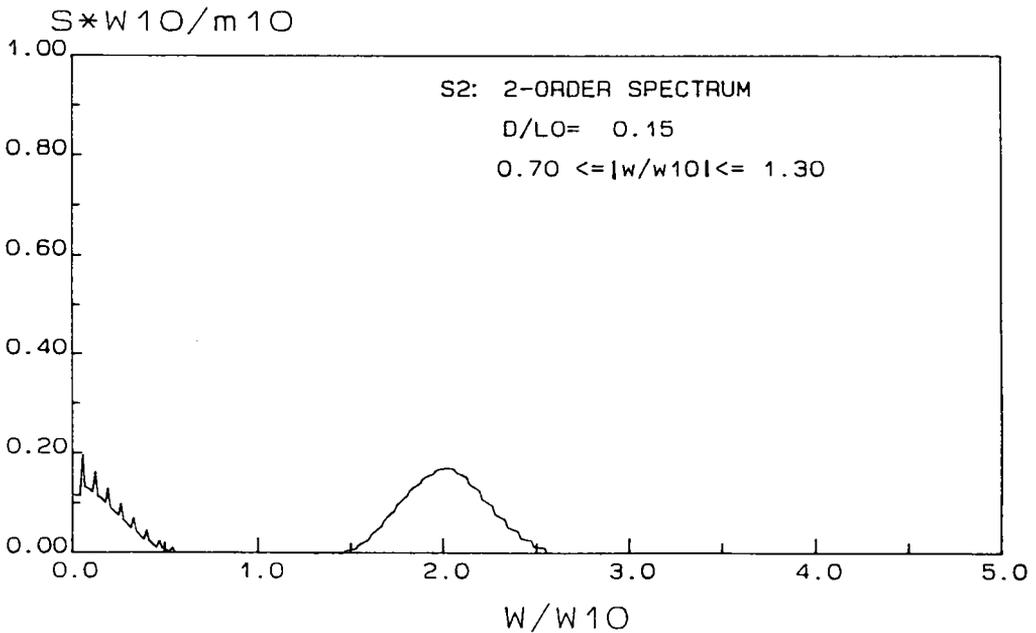


圖3-42 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.7 \leq |\omega / \omega_{10}| \leq 1.3$ 成份波之二階波譜

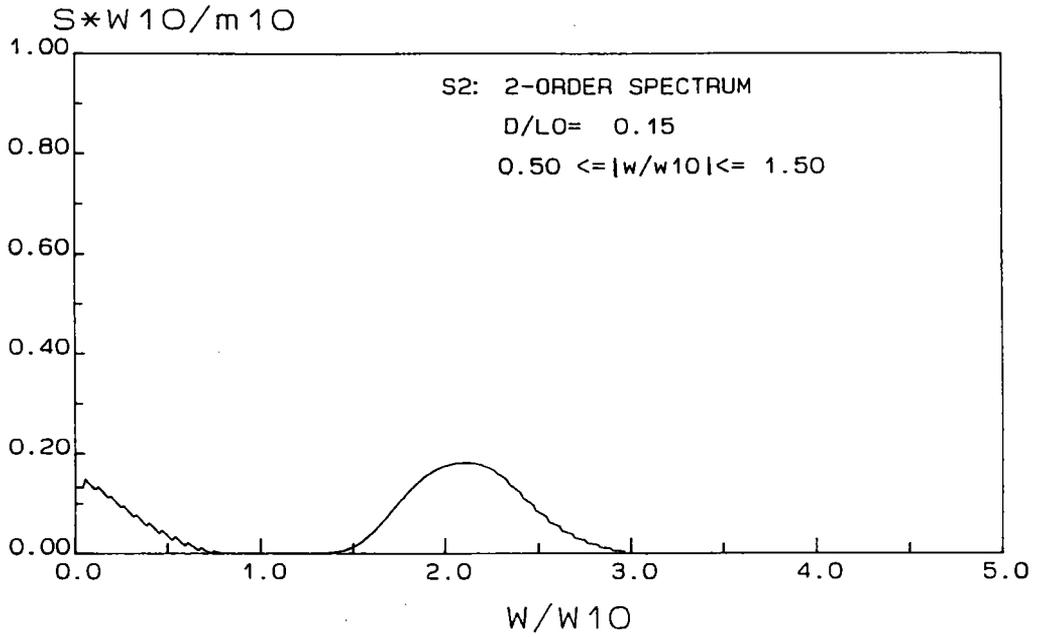


圖3-43 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.5 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.5$ 成份波之二階波譜

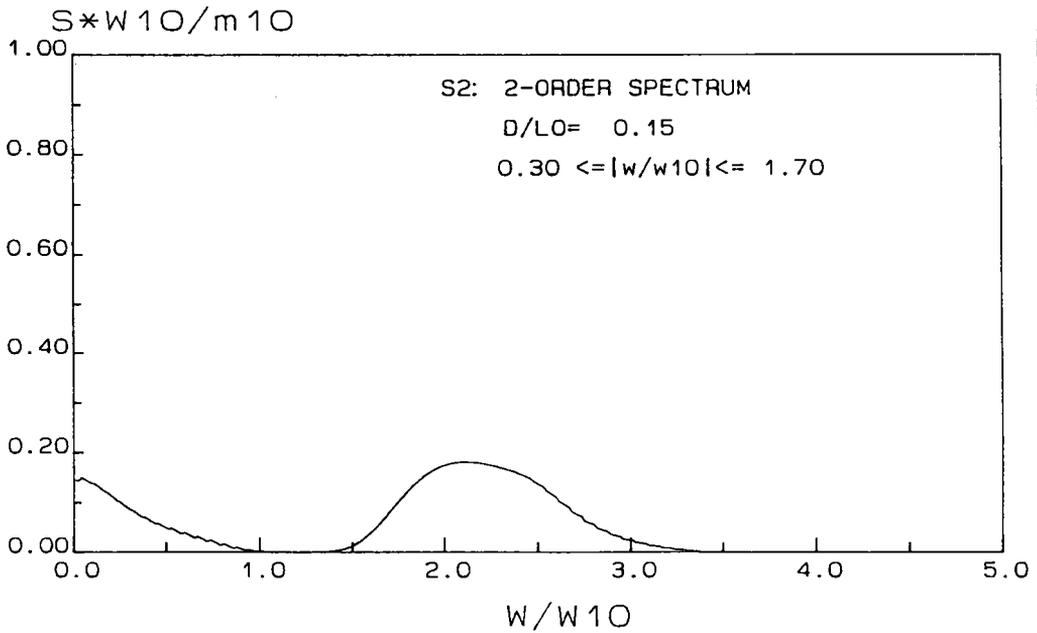


圖3-44 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.3 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.7$ 成份波之二階波譜

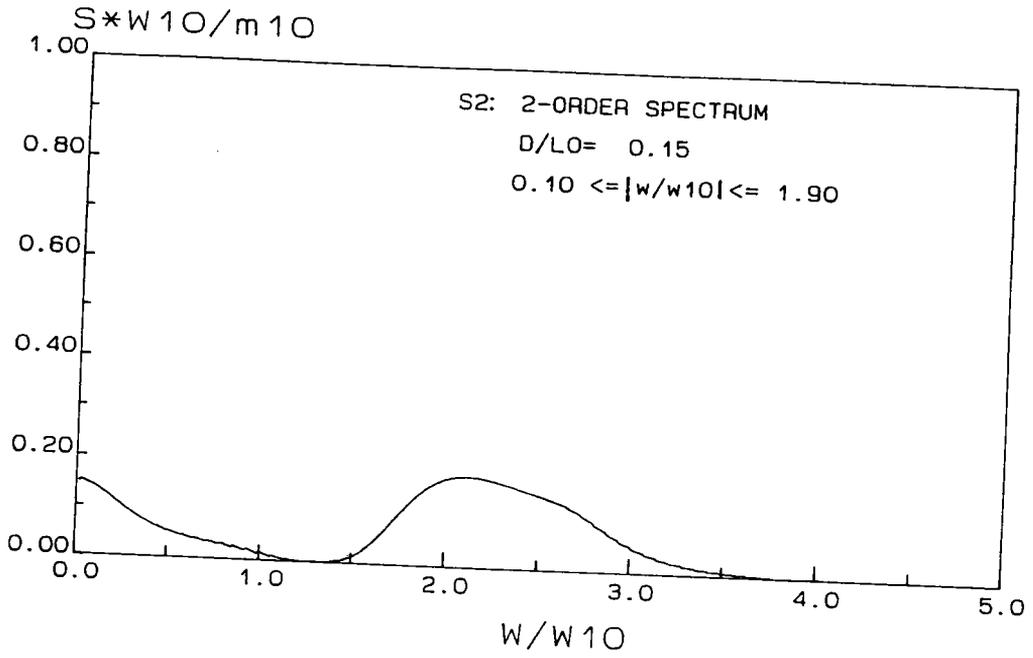


圖3-45 P-M波譜為入射波譜， $D/L_0=0.15$
 $0.1 \leq |\omega/\omega_{10}| \leq 1.9$ 成份波之二階波譜