

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
一．前言	1
二．淺水近似理論	3
三．各種深度皆適用的理論	11
四．數值計算	14
五．結果與比較	17
六．結論	19
附錄	20
參考文獻	21

花蓮和蘇澳港附近長波研究

徐 進 華

摘 要

花蓮港外海具有一坡度極陡峭的地形，根據 Molin (1982)，Mei & Ben-moussa (1984) 和 Liu (1989) 的理論，短波群行進在此地形上將引發自由行進的長波，此長波可能導致花蓮港(甚或蘇澳港)內海水的共振。目前我們已發展出一組可適用在坡度更陡情況下的控制方程式，並針對一平面斜坡連接兩固定水深區(水深分別為 100 米和 2000 米)之地形，應用邊界元素法求其數值解，其結果顯示，若短波群的包絡線之振幅為 8 米，則在斜坡區所引發向岸行進之自由長波的振幅可達 10 公分以上，此一長波在更接近海岸時，尚可因各種過程(如發生 edge wave)使其振幅顯著增加，故極可能與颱風來襲時花蓮港發生共振現象有關。

利用目前適用範圍較廣泛的解，我們亦測試以往的淺水近似解之適用範圍，發現後者可適用在較原先所預期水深變化更劇烈的情況，但在某些時候它仍將產生相當大的誤差，且它需要在坡度不同的區域間進行接合的手續，此點當面臨複雜的二度空間地形時可能產生極大的困難，因此未來針對實際地形計算時宜使用目前的模式。

A study of the long waves off Hwalien and Su-Auo Harbours

Jinn-Hwa Shyu

ABSTRACT

Since the angle of the continental slope outside Hwalien Harbour is unusually large, according to Molin (1982), Mei & Benmoussa (1984) and Liu (1989), free long waves can very effectively be induced by short-wave groups propagating on this slope, that might be responsible for the resonance in Hwalien Harbour (or even in Su-Auo Harbour). To estimate the amplitudes of these free long waves, a different set of governing equations have been established which remain valid for a very steep slope. These equations are solved numerically by using the boundary element method for a plane slope connecting two unequal (100 m and 2000 m) but constant depths. The results indicate that when the amplitude of the short-wave envelope is about 8 m, the amplitude of the landward free long wave can exceed 10 cm. These long waves, when entering the even shallower water, can become even higher due to several processes, including resonant edge wave excitation. Therefore the resonance in Hwalien Harbour may be excited directly by these free long waves.

The present solutions valid for a wide range of conditions is also utilized to advantage to check how far the previous shallow-water approximation can go. The comparison shows that the conditions for its validity is not as severe as we expected, but in some cases a large discrepancy between this approximation and the present solution exist. This and the fact that non-trivial matching conditions along the borders of each region with constant slope are required for solving the shallow-water equation suggest the use of the present model rather than the shallow-water one, especially for a complicated two-dimensional topography.

誌 謝

由閱讀港研所蘇青和組長所介紹之 Brebbia (1984) 一書, 作者發現原引用自 Lapidus & Pinder (1982) 書中一有關邊界元素法的公式有誤, 因此得以改正電腦程式, 為此作者特致謝忱。另外, 本所莊文傑先生推薦使用 IMSL 的套裝軟體, 江中權先生提供本所採購之該軟體, 以及吳基先生先前所介紹的 “Numerical Recipes” 一書, 對本研究皆有很大的幫助, 而李勇榮先生, 曾哲茂先生和簡仲璟博士所提供的電腦新知及軟體亦使本研究得以順利進行, 故作者特表謝意。本篇報告的打字是由楊怡芸小姐, 卓麗卿小姐和錢爾潔小姐協助完成, 作者在此亦深表謝意。

一．前言

位在台灣東岸的花蓮和蘇澳港,在颱風來襲時,港內海水常發生劇烈的長週期振盪,目前港研所已在花蓮港內測得一非常明顯週期約160秒的振盪(曾, 1995),此一週期且經由數值計算證實與該港的自然週期相近(蘇, 1995),故極可能代表一共振現象。另外,港研所的曾相茂近來分析一些失而復得的資料時,發現在颱風來襲時花蓮港港外確有一些超長重力波(infragravity waves)存在,雖其週期因觀測時間不長(僅20多分鐘)而無法準確決定。

週期約160秒的自由行進長波目前被認為應由在暴風區內所產生的短波群行進至近岸後在當地引發,有關這方面的觀測證據可參考Guza & Thornton (1985), Webb *et al.* (1991),和Elgar *et al.* (1992)等。由短波群引發自由長波的過程,很早即由Munk (1949)和Tucker (1950)建議是與短波群在岸邊破碎後,其所挾帶的質通量(實即伴隨短波群行進之強制性長波)發生反射現象有關,有關這方面較嚴密的理論最近已由Symonds, Huntley & Bowen (1982)和Schäffer (1993, 1994)提出,此三篇論文皆考慮碎波點位置振盪所產生的效應。

另一方面, Bowers (1977), Mei & Agnon (1989)和Wu & Liu (1990)建議,當短波群由港口入射,再反射回來以後,伴隨它的強制性長波將與港口旁的強制性長波不連續,因而將引發自由長波,他們並證明此種自由長波可引發港內的共振。

除上述兩種過程外,台灣東岸的花蓮港,因其外海具有一很陡的陸坡(見圖一),由Molin (1982), Mei & Benmoussa (1984)和Liu (1989)的理論,自由長波尚可能因水深變化顯著及坡度不連續兩種因素,由短波群在當地引發。由於在花蓮港外很大範圍內皆具有此種極不尋常的地形,而其港內共振現象又極顯著,因此有必要對此一過程詳加研究。

在研究由短波群行進在一斜坡上所引發的自由長波時, Molin (1982)考慮屬於深水波的短波群(即 $k, h \gg 1$)正向入射於一度空間變化的地形上, Mei & Benmoussa (1984)和Liu (1989)則將其理論延伸至短波群可為中間水深,且斜向入射於一度空間的地形(但他們曾導出可適用於二度空間地形的控制方程式)。由於 k, h 愈小,伴隨短波群行進之強制性長波的振幅將愈大(參考徐(1995)之第三節),因而將引發振幅較大的自由長波,故Mei & Benmoussa (1984)和Liu (1989)的理論較能預測振幅較大的自由長波。

當 $k, h = O(1)$ 時, 由於強制性長波的波長比短波的波長至少大一個量級 (由前者所引發的自由長波將更長), 故 $k_L h \ll 1$ (k_L 表強制性長波的 wave-number), 表長波應為淺水波。另外, Mei & Benmoussa (1984) 和 Liu (1989) 亦假設水深變化的長度尺度 (lengthscales) 雖小, 但僅和強制性長波的波長 (即短波群的長度) 相當, 因此他們採用具有淺水近似性質的控制方程式。

在淺水近似中, 流速在垂直方向的變化很小, 且壓力在垂直方向近似呈靜壓分佈, 故流體 elements 在垂直方向的加速度亦很小, 這些性質在水深和波長相比不算很小的深水區內固不存在, 即使是在斜坡上水深較淺的一端, 只要其坡度很大, 上述條件亦無法滿足, 因此要計算花蓮港外由短波群在斜坡上所引發的自由長波時, 須採用不同的控制方程式。

在徐 (1995) 中我們曾導出一組適用範圍更廣泛的控制方程式, 此組方程式對強制性和自由長波皆未做任何假設, 僅短波必須具有緩慢變化的性質, 此項限制亦僅影響 forcing terms, 故若我們將 forcing terms 視為給定, 則對於長波而言, 此組方程式可適用於任何水深變化的情況, 目前我們針對一斜坡連接兩固定水深區的地形 (見圖二) 求其數值解, 此一地形與圖一相近, 故其結果可做為我們初步估計花蓮港外自由長波的量, 另外, 利用其結果我們亦可測試以往的淺水近似解之適用範圍, 因此在下一節我們將首先導出淺水近似解。

二．淺水近似理論

在本節中我們將介紹 Mei & Benmoussa (1984) 和 Liu (1989) 有關短波群在斜坡上引發長波的淺水近似理論，由於此兩篇論文較著重於短波群斜向入射的情況，故未將較簡單的正向入射情況之解析解清楚地表出，僅將一些計算結果與斜向入射情況之數值解用圖形加以解說。因此我們目前根據 Mei & Benmoussa (1984) 和 Liu (1989) 的理論，並參考 Schäffer (1993) 解相同方程式的解法，求出一平面斜坡連接兩固定水深區的解析解，此解雖具有一明白的形式，但因其內包含一些積分，故欲獲得實際的數字，仍需使用電腦從事一些數值計算，其結果將在第五節與目前的理論相比較。

上述三篇論文所採用的控制方程式，在二度空間流場時，皆可表為

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

其中 $\bar{\zeta}$ 表由短波群的非線性效應所引發的二階平均自由表面位移， h 表當地之水深， g 表重力加速度， ρ 表水密度， S_x 表輻射應力 (radiation stress)。上式之獲得曾假設由短波群所引發的平均流在垂直方向的變化很小，因此代表一淺水近似。

為討論明確起見，且又不失其通用性，我們假設短波群是由兩振幅相同，且頻率極接近的單波疊加而成，即

$$\zeta_s = \frac{1}{2} a'(x) \exp \left[i \left(\int k^{(1)}(x) dx + \omega^{(1)} t \right) \right] + \frac{1}{2} a'(x) \exp \left[i \left(\int k^{(2)}(x) dx + \omega^{(2)} t \right) \right] + * \quad (2.2)$$

其中

$$\omega^{(1)} = \omega_s (1 + \epsilon), \quad \omega^{(2)} = \omega_s (1 - \epsilon) \quad (2.3)$$

$$k^{(1)} \approx k_s \left(1 + \epsilon \frac{C}{C_g} \right), \quad k^{(2)} \approx k_s \left(1 - \epsilon \frac{C}{C_g} \right) \quad (2.4)$$

而 ω_s 和 k_s 滿足線性波離散關係式

$$\omega_s^2 = g k_s \tanh k_s h \quad (2.5)$$

且 $C \equiv \omega_s/k_s$, $C_g \equiv \partial\omega_s/\partial k_s$ 分別為短波之相位速度和群速度。(2.2)式又可改寫為

$$\zeta_s = \frac{1}{2}a \exp \left[i \left(\int k_s dx + \omega_s t \right) \right] + * \quad (2.6)$$

其中

$$a = 2a' \cos \theta \quad (2.7)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \int \frac{k_L}{2} dx + \frac{\omega_L}{2} t \\ k_L &= k^{(1)} - k^{(2)}, \quad \omega_L = \omega^{(1)} - \omega^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.8a, b)$$

下面的討論將顯示, ω_L 和 k_L 分別代表由短波群所引發的強制性長波之週期與波數, 且因

$$\frac{\omega_L}{k_L} \equiv \frac{\omega^{(1)} - \omega^{(2)}}{k^{(1)} - k^{(2)}} \approx \frac{\partial\omega_s}{\partial k_s} = C_g \quad (2.9)$$

此一強制性長波的相位速度將等於短波的群速度, 故前者將伴隨短波群行進, 而與有相同頻率之自由長波的行進速度截然不同。

當短波群的水面位移為(2.6)式, 由其引發的幅射應力

$$S_x = \frac{\rho g}{2} a^2 \left(2 \frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right)$$

由於

$$\frac{C_g}{C} = \frac{1}{2} + \frac{k_s h}{\sinh 2k_s h} \quad (2.10)$$

上式又可改寫為

$$S_x = \frac{\rho g}{2} a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \quad (2.11)$$

由(2.7)和(2.8a)我們可明顯看出 S_x 隨時間和空間兩者成週期性變化, 故(2.1)式之等號右邊的 forcing term 亦如此, 因而將引發相同週期的波動, 此即為強制性長波 (ω_L , k_L 分別遠小於 ω_s , k_s)。另外, 我們亦強調, 當水深 h 變化時, 由波運動守恆方程式, ω_s 和 ω_L 皆不變, 但 k_s , k_L 和 a' 將改變, 其中 k_s 和 k_L 可由(2.5)和(2.9)決定, 而 a' 的變化, 在水深為緩慢變化時, 應滿足能量守恆方程式

$$\frac{\partial a'^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_g a'^2) = 0$$

目前因 $\partial a'^2 / \partial t = 0$, 故可以得到

$$a'^2 = \frac{C_{g,0}}{C_g} a_0'^2 \quad (2.12)$$

其中 $C_{g,0}$ 和 a_0' 表兩者在某一參考點上的值。

由(2.7)式,

$$a^2 = 4a'^2 \cos^2 \theta = 2a'^2 (1 + \cos 2\theta) = 2a'^2 + a'^2 (e^{i2\theta} + *) \quad (2.13)$$

代入(2.11)式可知(2.1)式的解應具有以下形式

$$\bar{\zeta} = \xi_0(x) + \frac{1}{2} \{ \xi_1(x) e^{i\omega_L t} + * \} \quad (2.14)$$

其中 $\xi_0(x)$ 代表 steady-state component, 若將(2.13), (2.14) 和(2.11)代入(2.1)可證明 ξ_0 應滿足

$$\frac{d}{dx} \left(h \frac{d\xi_0}{dx} \right) = -\frac{d^2}{dx^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) a'^2 \right] \quad (2.15)$$

故可獲得

$$\xi_0 = -\frac{a'^2 k_s}{\sinh 2k_s h} \quad (2.16)$$

表因波向海岸入射, 使平均海面下降的現象 (Longuet-Higgins & Stewart (1962))

。

將(2.13)、(2.14)和(2.11)代入(2.1)式, 可獲得另一個方程式

$$\frac{d}{dx} \left(gh \frac{d\xi_1}{dx} \right) + \omega_L^2 \xi_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \left[ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \exp \left(i \int k_L dx \right) \right] \quad (2.17)$$

此式與 Mei & Benmoussa (1984) 的(3.15)式和 Liu (1989) 的(2.10)式, 當兩者簡化為波正向入射時, 實際相同, 故我們亦如他們般將等水深區和水深變化區分開求解。

當水深 h 為固定時, 令

$$\xi_1 = \xi_L \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \quad (2.18)$$

代入後可直接獲得

$$\xi_L = -a'^2 g \left(2 \frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) / (gh - C_g^2) \quad (2.19)$$

上式可應用在圖二之 $x_1 < x$ 或 $x < x_0$ 區域, 但其完全解尚須包含 (2.17) 式之 homogeneous solutions, 故 (2.18) 應改寫為

$$(\xi_1)_j = (\xi_L)_j \exp \left[i \int_{x_0}^x (k_L)_j dx \right] + (\xi_F)_j, \quad (j = 0, 1) \quad (2.20)$$

其中 $j = 0$ 表 $x < x_0$ 區域內的解, $j = 1$ 表 $x_1 < x$ 內的解, 而 ξ_F 即為 (2.17) 式之 homogeneous solutions, 亦即為無外力作用下自由行進的長波。由於我們可預期此自由長波在目前的情況下應產生於水深變化的區域 ($x_0 \leq x \leq x_1$), 然後向外傳遞, 因此 ξ_F 可表為

$$(\xi_F)_j = B_j \exp [i(-1)^j \lambda_j (x - x_j)] \quad (2.21)$$

其中

$$\lambda_j^2 = \frac{\omega_L^2}{gh_j} \quad (2.22)$$

乃為自由波的離散關係式之淺水近似。上式中的 B_0 和 B_1 未來將由等水深區和斜坡區間的 matching conditions 決定。

在水深變化的區域, h , k_s , a' 和 k_L 皆為變數, 故 (2.17) 式的解較複雜, 因此我們採用變數轉換的方法求其解。首先將 (2.17) 式改寫為

$$\frac{d}{dx} \left(gh \frac{d\xi_1}{dx} \right) + \omega_L^2 \xi_1 = G(x)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} H(x) \\ H(x) &= ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.23a, b)$$

上式又可展開爲

$$gh \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} + gh_x \frac{d\xi_1}{dx} + \omega_L^2 \xi_1 = G(x)$$

其中 $h_x \equiv dh/dx = (h_1 - h_0)/(x_1 - x_0)$ 在此乃爲定值, 由於 $h = h_0 + h_x(x - x_0)$, 上式又可改寫

$$\frac{d^2 \xi_1}{dx^2} + \frac{h_x}{h_0 + h_x(x - x_0)} \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{\omega_L^2}{g[h_0 + h_x(x - x_0)]} \xi_1 = \frac{G(x)}{g[h_0 + h_x(x - x_0)]}$$

故若令新的獨立變數

$$x' = \frac{2\omega_L}{h_x} \left(\frac{h}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

則可獲得

$$\frac{d^2 \xi_1}{dx'^2} + \frac{1}{x'} \frac{d\xi_1}{dx'} + \xi_1 = \frac{G(x)}{\omega_L^2} \quad (2.25)$$

上式之 homogeneous solutions 爲零階的 Bessel functions $J_0(x')$, $Y_0(x')$, 故其通解爲

$$\begin{aligned} \xi_1 = & -J_0(x') \int_{x_0}^x \frac{Y_0(x')G(x)/\omega_L^2}{\Delta(J_0, Y_0)} dx' + Y_0(x') \int_{x_0}^x \frac{J_0(x')G(x)/\omega_L^2}{\Delta(J_0, Y_0)} dx' \\ & + C_1 J_0(x') + C_2 Y_0(x') \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中

$$\Delta(J_0(x'), Y_0(x')) = \frac{2}{\pi x'} \quad (2.27)$$

表 J_0 和 Y_0 的 Wronskian。上式中的 C_1 和 C_2 如同前面的 B_0 和 B_1 一樣, 需共同用 matching conditions 決定, 在決定 matching conditions 以前, 我們先將 (2.26) 式表爲另一種形式, 首先由 (2.24) 式

$$x'^2 = \frac{4\omega_L^2}{gh_x^2} [h_0 + h_x(x - x_0)]$$

微分可得

$$x' dx' = \frac{2\omega_L^2}{gh_x} dx \quad (2.28)$$

故將(2.27)和(2.28)代入(2.26)導致

$$\begin{aligned}\xi_1 = & -\frac{\pi}{gh_x} J_0(x') \int_{x_0}^x Y_0(x') G(x) dx + \frac{\pi}{gh_x} Y_0(x') \int_{x_0}^x J_0(x') G(x) dx \\ & + C_1 J_0(x') + C_2 Y_0(x')\end{aligned}$$

再應用integration by parts 以及(2.23a)產生

$$\begin{aligned}\xi_1 = & \frac{\pi}{gh_x} J_0(x') \left(\left[Y_0(x') \frac{dH}{dx} \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x Y_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right) \\ & - \frac{\pi}{gh_x} Y_0(x') \left(\left[J_0(x') \frac{dH}{dx} \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x J_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right) \\ & + C_1 J_0(x') + C_2 Y_0(x') \\ = & \frac{\pi}{gh_x} \left\{ J_0(x') \left[-Y_0(x_0') \frac{dH}{dx}(x_0) + \int_{x_0}^x Y_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right] \right. \\ & \left. - Y_0(x') \left[-J_0(x_0') \frac{dH}{dx}(x_0) + \int_{x_0}^x J_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right] \right\} \\ & + C_1 J_0(x') + C_2 Y_0(x')\end{aligned}\quad (2.29)$$

上式即為平面斜坡上的解,此解應與兩端等水深區的解相接合,故而可決定其未定係數 C_1 和 C_2 。

綜合以上討論,我們共有四個未定係數,故需四個matching conditions,首先由於自由表面位移在 x_0 和 x_1 兩點上(參看圖二)需連續,因此

$$\xi_1 = (\xi_1)_j \quad \text{at} \quad x = x_j$$

將(2.29)、(2.20)和(2.21)代入後可得以下兩個方程式：

$$C_1 J_0(x_0') + C_2 Y_0(x_0') = \xi_L(x_0) + B_0 \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}& \frac{\pi}{gh_x} \left\{ J_0(x_1') \left[-Y_0(x_0') \frac{dH}{dx}(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} Y_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right] \right. \\ & \quad \left. - Y_0(x_1') \left[-J_0(x_0') \frac{dH}{dx}(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} J_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right] \right\} \\ & + C_1 J_0(x_1') + C_2 Y_0(x_1') = \xi_L(x_1) \exp \left(i \int_{x_0}^{x_1} k_L dx \right) + B_1\end{aligned}\quad (2.31)$$

接下來, 由於 dh/dx 在 x_0 和 x_1 兩點上不連續, 故 (2.17) 式右邊的 forcing term 的積分亦不連續, 因此 $d\xi_1/dx$ 在此兩點上亦不連續, 其差值可以由對 (2.17) 式積分獲得, 從 $x = x_0 - \delta$ 積分至 $x_0 + \delta$, 並令 $\delta \rightarrow 0$, 可得

$$\begin{aligned} gh \frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x_0^+} - gh \frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x_0^-} &= - \frac{d}{dx} \left[ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \right] \Big|_{x_0^+} \\ &\quad + \frac{d}{dx} \left[ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \right] \Big|_{x_0^-} \\ &= - \frac{d}{dx} \left[ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \right] \Big|_{x_0^+} - ik_L ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \Big|_{x_0^+} \\ &\quad + ik_L ga'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \Big|_{x_0^-} \end{aligned}$$

由於 h, k_s, k_L 本身在 x_0 上連續, 因此上式中最後兩項互相抵消, 且由 (2.15)

$$h \frac{d\xi_0}{dx} \Big|_{x_0^+} = - \frac{d}{dx} \left[a'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2k_s h}{\sinh 2k_s h} \right) \right] \Big|_{x_0^+}$$

故上式可化簡為

$$\frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x_0^+} - \frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x_0^-} = \frac{d\xi_0}{dx} \Big|_{x_0^+} \quad (2.32)$$

同理可得

$$\frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x_1^+} - \frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x_1^-} = - \frac{d\xi_0}{dx} \Big|_{x_1^-} \exp \left(i \int_{x_0}^{x_1} k_L dx \right) \quad (2.33)$$

將 (2.18)–(2.21) 代入 $(d\xi_1/dx)_{x_0^-}$, $(d\xi_1/dx)_{x_1^+}$, 並將 (2.29) 代入 $(d\xi_1/dx)_{x_0^+}$, $(d\xi_1/dx)_{x_1^-}$, 且應用 (2.16) 式, 可由 (2.32) 和 (2.33) 最後獲得

$$-C_1 J_1(x'_0) \frac{dx'}{dx}(x_0) - C_2 Y_1(x'_0) \frac{dx'}{dx}(x_0) = (ik_L \xi_L + i\lambda_0 B_0)_{x_0^-} + \frac{d\xi_0}{dx} \Big|_{x_0^+} \quad (2.34)$$

及

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{gh_x} \left\{ -J_1(x'_1) \frac{dx'}{dx}(x_1) \left[-Y_0(x'_0) \frac{dH}{dx}(x_0) + Y_0(x'_1) \frac{dH}{dx}(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} Y_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right] \right. \\
& \quad \left. + Y_1(x'_1) \frac{dx'}{dx}(x_1) \left[-J_0(x'_0) \frac{dH}{dx}(x_0) + J_0(x'_1) \frac{dH}{dx}(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} J_1(x') \frac{dH}{dx} \frac{dx'}{dx} dx \right] \right\} \\
& -C_1 J_1(x'_1) \frac{dx'}{dx}(x_1) - C_2 Y_1(x'_1) \frac{dx'}{dx}(x_1) = i(k_L \xi_L)_{x_1^+} \exp \left(i \int_{x_0}^{x_1} k_L dx \right) - i\lambda_1 B_1 \\
& \quad + \frac{d\xi_0}{dx} \Big|_{x_1^-} \exp \left(i \int_{x_0}^{x_1} k_L dx \right) \tag{2.35}
\end{aligned}$$

利用 (2.30), (2.31), (2.34) 和 (2.35) 此四個線性聯立方程式, 即可決定 B_0 , B_1 , C_1 , C_2 此四個未知係數, 因此完全決定各區內的強制和自由行進長波, 但由於 (2.31) 和 (2.35) 皆包含定積分, 這些定積分非用數值方法無法求其解, 其實際計算的結果將延至第五節討論, 並與未採用淺水近似所獲得的結果相比較。

三．各種深度皆適用的理論

在本節中我們將採用徐(1995)所導出的方程式,求在相同的地形下,由短波群所引發的強制和自由行進的長波,由於此組方程式對所有強制和自由長波皆未假設其具有淺水的性質,故它們的解應可適用於各種水深條件下。

當未採用淺水近似,不論是強制或自由長波,我們仍需求其流勢函數 $\bar{\phi}$,使滿足 Laplace equation

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

另外,根據徐(1995)的討論, $\bar{\phi}$ 以及與其對應的水面位移 $\bar{\zeta}$,在自由表面上須滿足以下邊界條件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega_s a^2}{2 \tanh k_s h} \right) \\ g \bar{\zeta} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} &= - \frac{\omega_s^2 a^2}{4 \sinh^2 k_s h} \end{aligned} \right\} \quad (z = 0) \quad (3.2a, b)$$

我們在這裏所採用的符號與徐(1995)略有不同,其中由於我們目前假設短波群的水面位移(2.6)式中的 ω_s 與徐(1995)的(2.4)式相差一個符號,故(3.2a)式等號右邊目前為正。

短波群仍假設由兩個振幅相同,頻率極接近的單波疊加而成,故其振幅變化 $a(x, t)$ 仍由(2.7)表示,且為已知,其 a' 的變化亦可由極簡單的(2.12)式決定。在此種情況下,參考(2.13)式,我們同樣令

$$\left. \begin{aligned} \bar{\zeta} &= \xi_0(x) + \frac{1}{2} \{ \xi_1(x) e^{i\omega_L t} + * \} \\ \bar{\phi} &= \phi_0(x, z) + \frac{1}{2} \{ \phi_1(x, z) e^{i\omega_L t} + * \} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

代入(3.2)可直接獲得 steady-state solution (2.16) 式,而我們目前所關心的週期性變化解則可證明滿足以下邊界值問題:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}i\omega_L\xi_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega_s a'^2}{2 \tanh k_s h} \exp \left(i \int k_L dx \right) \right] \\ \frac{1}{2}g\xi_1 + \frac{1}{2}i\omega_L\phi_1 &= -\frac{\omega_s^2 a'^2}{4 \sinh^2 k_s h} \exp \left(i \int k_L dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (z=0) \quad (3.5a, b)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \quad \text{at} \quad z = -h(x) \quad (3.6)$$

上述邊界值問題在目前的斜坡地形下，無法如上節一樣獲得其解析解，故僅能求其數值解，但即使如此，我們仍須事先決定其 far-field conditions。

我們目前所考慮的地形（見圖二），在 $x_1 < x$ 和 $x < x_0$ 區域內為等水深，故 (2.6) 式中的 a' , k_L , ω_L , k_s , ω_s 皆為定值，因此我們可決定在此區域內強制性長波的解，不僅如此，我們尚可決定離斜坡較遠處的自由長波，雖其振幅仍有待決定。

由於 (3.5) 式中的 forcing terms 含 $\exp(i \int k_L dx)$ ，故我們令

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_L \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \\ \phi_1 &= (A_L e^{k_L z} + B_L e^{-k_L z}) (-i) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.7a, b)$$

其中 (3.7b) 已可滿足 Laplace equation，將其代入底部邊界條件

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = -h$$

可得

$$B_L = A_L e^{-2k_L h} \quad (3.8)$$

故

$$\phi_1 = A_L (e^{k_L z} + e^{-2k_L h} e^{-k_L z}) (-i) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \quad (3.9)$$

將 (3.7a) 和 (3.9) 代入 (3.5a) 可得

$$A_L = - \left(\frac{\omega_L}{k_L} \xi_L - \frac{\omega_s}{\tanh k_s h} a'^2 \right) (1 - e^{-2k_L h})^{-1} \quad (3.10)$$

再代入 (3.5b) 可決定

$$\xi_L = -a'^2 \left(\frac{\omega_s^2}{2 \sinh^2 k_s h} + \frac{g k_s \omega_L}{\omega_s \tanh k_L h} \right) \left(g - \frac{\omega_L^2}{k_L \tanh k_L h} \right)^{-1} \quad (3.11)$$

以上爲原式在 $x_1 < x$ 或 $x < x_0$ 區域內的特解, 其通解尚須包含代表自由長波的 homogeneous solutions, 故

$$(\phi_1)_j = (\phi_L)_j \exp \left[i \int_{x_0}^x (k_L)_j dx \right] + (\phi_F)_j \quad (3.12)$$

其中 $j = 0$ 和 $j = 1$ 分別代表 $x < x_0$ 和 $x_1 < x$ 區域, 而由 (3.9) 和 (3.10)

$$(\phi_L)_j = i \left[\frac{\omega_L}{(k_L)_j} (\xi_L)_j - \frac{(\omega_s)_j}{\tanh(k_s)_j h_j} (a'_j)^2 \right] \frac{\cosh(k_L)_j (z + h_j)}{\sinh(k_L)_j h_j} \quad (3.13)$$

其中 $(\xi_L)_j$ 即如 (3.11) 所示。在自由長波方面, 由於其 evanescent modes 在斜坡區生成後向外呈指數衰減, 故在離斜坡較遠處我們可預期

$$(\phi_F)_j = i B_j \frac{\omega_L \cosh \lambda_j (z + h_j)}{\lambda_j \sinh \lambda_j h_j} \exp [i(-1)^j \lambda_j (x - x_j)] \quad (3.14)$$

其中 λ_j 滿足

$$\omega_L^2 = g \lambda_j \tanh \lambda_j h_j \quad (3.15)$$

而 B_j 則有待決定。在 (3.14) 和 (3.15) 中, 我們皆採用正確的表式, 而非採用如 (2.22) 之淺水近似。

當 $j = 0, 1$, (3.12)–(3.15) 代表目前所考慮的邊界值問題中的兩個 far-field conditions, 有了這些 conditions, 我們即可決定 ϕ_1 的唯一解。要強調的是, 若水深很淺, 且海底的坡度不大, 則 (3.14) 中的 B_j 應和 (2.21) 的 B_j 近似相等。另外, 邊界條件 (3.5a,b) 尚可結合爲一個方程式, 並消去 ξ_1 , 其結果爲

$$g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \omega_L^2 \phi_1 = F(x) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right) \quad (3.16)$$

其中

$$F(x) = - \left[\frac{i \omega_L \omega_s^2 a'^2}{2 \sinh^2 k_s h} + \frac{i g k_L \omega_s a'^2}{\tanh k_s h} + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega_s a'^2}{\tanh k_s h} \right) \right] \quad (3.17)$$

在附錄中, 我們且證明

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega_s a'^2}{\tanh k_s h} \right) = - \frac{g k_s a'^2}{C_g} \left[\frac{3 \sinh 2k_s h + 4k_s h - 2k_s h \cosh 2k_s h}{(2k_s h + \sinh 2k_s h) \sinh 2k_s h} \right] \frac{dh}{dx} \quad (3.18)$$

故利用離散關係式 (2.5) 及短波的能量守恆方程式 (2.12), 我們可事先決定 forcing term 在各點的分佈, 因此接下來即可進行數值的計算。

四．數值計算

在本節中我們將用數值方法解第三節所獲得的邊界值問題，以瞭解由各種短波群在坡度不同的斜坡上引發自由行進長波的量，並將其結果與第二節的淺水近似解相比較。

經由第三節的討論，目前我們所欲求解的邊界值問題可表為

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

$$g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \omega_L^2 \phi_1 = F(x) \cdot \exp \left(i \int_{x_0}^x k_L dx \right), \quad (z = 0) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = -\frac{dh}{dx} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad (z = -h) \quad (4.3)$$

以及 far-field conditions

$$(\phi_1)_j = (\phi_L)_j \exp \left[i \int_{x_0}^x (k_L)_j dx \right] + (\phi_F)_j, \quad j = 0, 1 \quad (4.4)$$

其中 $F(x)$, $(\phi_L)_j$ 和 $(\phi_F)_j$ 的表式分別為(3.17)、(3.13)和(3.14)。此一邊界值問題，在短波群已知的情況下，可適用於任何水深條件下，但因其具有二度空間流場的性質（第二節內所使用的控制方程式本質上為一度空間流），故即使是在目前所考慮的平面斜坡地形下，亦僅能獲得其數值解。但在另一方面，由於目前的 forcing term (3.17) 未含二階導函數項，故我們不需如第二節，將坡度不同的區域分開處理，再以 matching conditions 相連接，此點對未來實際地形中有很多不同的坡度，且水深變化為二度空間情況，自有其方便之處。

由於在 far-field conditions 中含未知的係數（參看(3.14)），故目前的數值計算較適合採用邊界元素法 (boundary element method)，此一方法的詳細內容可參考 Brebbia (1984), Lapidus & Pinder (1982) 或莊 (1995)，根據此方法我們可以將原來的偏微分方程（即 Laplace equation）離散化為一組數目有限之線性聯立方程式，此組聯立方程式可表為以下矩陣的形式：

$$\left[H \right] \left\{ \phi_1 \right\} - \left[G \right] \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right\} = 0 \quad (4.5)$$

其中 $[H]$ 和 $[G]$ 皆為方形矩陣, $\{\phi_1\}$ 和 $\{\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\}$ 表向量, 其內元素則分別代表未知函數 ϕ_1 在邊界上各節點處的函數值及其向外正向之導函數值。上式中的未知數目前比方程式的數目多一倍, 但利用邊界條件我們可以將前者消去一半, 例如由 (4.2) 可得自由表面上各點的

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\omega_L^2}{g}\phi_1 + \frac{F(x)}{g} \exp\left(i \int_{x_0}^x k_L dx\right) \quad (4.6)$$

由 (4.3) 可得在海底底床上

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = 0 \quad (4.7)$$

另外, 若斜坡兩端之等水深區的長度足夠長, 則在遠方邊界上, 利用 (3.13) 和 (4.4), ϕ_1 和 $\partial\phi_1/\partial n$ 中的一部份已知, 其餘者利用 (3.14) 亦可得

$$\left(\frac{\partial\phi_F}{\partial n}\right)_j = -i\lambda_j(\phi_F)_j \quad (4.8)$$

將 (4.6)–(4.8) 代入 (4.5), 且將所有已知的部份 (包括 (4.6) 中最後一項) 移至 (4.5) 之等號右邊, 最後可得

$$[A]\{\psi\} = \{b\} \quad (4.9)$$

其中 $\{\psi\}$ 的元素在自由表面和底床上即等於 ϕ_1 , 而在遠方邊界上則僅為 $(\phi_F)_j$ 。此一聯立方程式, 由於 (4.8) 所施加的限制, 並不具有非零的 homogeneous solution, 故矩陣 $[A]$ 不為 singular 或 ill-conditioned, 因此可用一般的 LU decomposition method 求解, 我們目前是採用 IMSL 中的套裝軟體 LSLCG 解聯立方程式。當獲得 (4.9) 的解以後, 利用 (3.14) 即可求出 B_0 和 B_1 , 兩者分別代表由短波群在斜坡區引發向外傳遞之自由長波的複數振幅。

在利用邊界元素法導出 (4.9) 式時, 由於在遠方邊界上的解與 B_0 , B_1 有最直接的關係, 為了增加此邊界上元素的個數, 我們在自由表面以及底床上定每一元素的長度為 50 米, 而在遠方的垂直邊界上則僅定其為 10 米, 但不論是那一種長度, 它們與長波的波長 (至少大於 1 公里) 相比皆甚小, 因此我們可假設在每一元素上的 ϕ_1 和 $\partial\phi_1/\partial n$ 皆為定值, 即採用 constant elements 的型式。另一方

面,爲了避免 evanescent modes 影響 far-field conditions,我們定斜坡兩邊等水深區的長度各爲 10 公里(自由長波的波長可大至 25 公里),如此一來,矩陣 $[A]$ 具有約 1200×1200 個元素。此一數目雖相當大,但我們針對一水深完全相等的情況所做的測試顯示,由目前解聯立方程式的電腦程式所獲得的結果與理論解相當接近(見圖三)。

當實際計算時,我們將斜坡兩邊的等水深區的深度分別固定爲 100 米和 2000 米,僅變化斜坡區的寬度以及短波的週期(長波的週期則固定爲 184 秒),前者可改變斜坡的坡度,後者除影響 forcing term 以外,亦將改變強制性長波的波長(參考(2.9)式),故經由此兩項變化,我們可估計各種短波在不同坡度及不同相對水深情況下,引發長波的量,亦可比較在各種情況下由淺水近似理論與目前的理論所獲得的結果。

五．結果與比較

在解說結果以前，我們先檢驗由(4.9)式的解以及(3.14)式所決定的 B_0 和 B_1 是否在每一深度皆相同，由圖四和圖五我們可看出其結果相當理想。由於所獲得的 B_0 和 B_1 在不同的深度仍有少許的變化，圖六-圖十上每一點皆代表所有深度之簡單平均值。

從圖六至圖九我們逐步增加短波的週期，但維持長波的週期不變為184秒，此一週期在 $h_0 = 100$ m處所對應的自由行進長波的波長為5750 m，在 $h_1 = 2000$ m處則為24700 m，故兩者皆接近於一淺水波。

圖六中的短波週期為8秒，故它在每一區域皆為深水波，其波長約為100 m，由於短波的群速度在每一點皆相同，由(2.9)式，強制性長波的波長在各點也相等，約為1150 m，故它在水深 $h_0 = 100$ m區域，勉強接近於一淺水波，但在斜坡以下，由於水深加大，它將先變為中間水深波，然後在更深處則轉為深水波，但水深的增加亦使強制性長波的振幅減小(參看徐(1995)的第三節)，因此在水深遠大於100 m的區域，強制性長波雖已不為淺水波，但其影響已不大，故在圖六中，當斜坡的坡度 θ 小於 20° 時，淺水近似解和各種深度皆適用的解之間的差距始終維持在10%左右，只有在斜坡坡度更增加時，此項差值才開始上升，此乃因當斜坡坡度太大時，即使是斜坡上水深較淺的一部份亦無法適用淺水近似。當 $\theta \approx 60^\circ$ 時，上項差值已接近於30%。

坡度為 60° 的斜坡已接近於一階梯的地形，故我們在此也利用徐(1995)所獲得的公式(此公式在最後的階段亦採用淺水近似加以簡化)，計算一階梯地形之 $|B_0|$ 值，其結果為 9.85×10^{-3} ，故超出圖六中的最大值很多，顯示在目前的情況下，淺水近似確無法適用，且斜坡地形也無法用階梯地形做為近似。

當短波週期僅8秒時， $k_s h_0 \approx 6$ ， $k_L h_0 \approx 0.6$ ，故與徐(1995)之第三節內的狀況(1)和(2)較接近，因此由該短波群引發長波的效應較不顯著(圖六中的 $|B_0|$ 僅1~2 mm)，但圖六(以及圖七-圖十)的結果是假設在水深 $h_0 = 100$ m處， $a' = 1$ m，由於 $|B_0|$ 是與 a'^2 成正比，因此若 a' 增加為3.2m，自由長波的振幅可為1~2 cm。

當短波的週期增加為11秒時，強制性長波的波長約為1600 m，故在水深 $h_0 = 100$ m區域及其鄰近的斜坡帶，強制性長波已更接近於一淺水波，因此，當斜坡坡度很小時，淺水近似解和目前所獲得的數值解之間的差距已可小至2%，只有當坡度增加到 25° ，兩種解才具有約10%的差距，當坡度達到 60° 時，此一差

值可增至18%,表底床坡度對淺水近似的影響仍不可忽略。另外,在目前的情況下,由階梯地形解可得 $|B_0| = 8.53 \times 10^{-3}$ (在徐(1995)的表一中, $a_F/a_0^2 = 2.2 \times 10^{-3}$;此兩數字不同的原因是 $a_0^2 = 4a'^2$),故仍與圖七中的結果相差甚大。

圖七中的結果顯示,由週期為11秒, $a' = 1$ m之短波所引發向岸行進之自由長波的振幅約為2~3 mm,故當 a' 增加為3.2 m時,其振幅可為2~3 cm。

若短波的週期更進一步增加為15秒,圖八顯示當斜坡的坡度由 10° 增加到 30° ,淺水近似解和目前的數值解之間的差距由0.2%增加到約5%,但較迅速的增加仍發生在坡度大於 20° 以後;當坡度約 60° 時,此兩種解的差距約10%。階梯地形解此時仍比圖八中最大的值還高出約六成。此外,圖八中的 $|B_0|$ 約為3~5 mm,故若 $a' = 3.2$ m,自由長波的振幅可達3~5 cm。

圖九更顯示短波週期長達19秒時的結果,此時當斜坡坡度很小時,淺水近似理論和目前的理論之間的差異已小於數值模式本身的誤差,只有在坡度大於 20° 後,我們才能看出此兩種理論之間差異的趨勢,但即使坡度增加到 60° ,兩者之間的差距亦僅約4%,若再與階梯地形解相比,其差距亦縮小到36%。另外,當 $a' = 3.2$ m時,自由長波的振幅,對應於圖九,大約為7~10 cm。

由圖八,特別是圖九,的結果顯示,當短波的週期(因此波長)相當大時,即使斜坡的坡度很大,淺水近似的理論仍適用,其原因可能是強制性長波的波長如今較長,故和此一波長相比,能影響目前解的斜坡範圍已相對較小,其坡度效應因此也較小。此一推測可由目前的解與徐(1995)的階梯地形解如今較接近而獲得一部份佐證;因在導後者時,我們曾完全忽略深度為 h_0 區域外的強制性長波,故當此一階梯地形解與目前的解相差不大時,即可能表目前斜坡上的強制性長波(不論其是否為淺水波)確已較不重要。

由圖六到圖九,當短波的週期改變,使自由長波的振幅增大時,淺水近似解和目前的解之間的差異減小,但此點並不意味著只有當被引發的自由長波之振幅很小時,淺水近似解才和目前的解具有一明顯的差異。圖十即顯示在某種情況下,雖自由長波的振幅大至與圖九者相當,淺水近似解卻和目前的解相差甚大。值得注意的是,此時強制性長波的波長僅約650公尺,故根據上一段的說明,坡度效應此時應極顯著,因此與圖十的結果相符合。

六．結論

當近岸水深變化的長度尺度與伴隨短波群行進之強制性長波的波長具有相同的一個量級或更小時，由目前的計算結果顯示，在一個水深由2000米升至100米的斜坡上，當短波群之水面位移的包絡線之振幅為2米（即 $2a' = 2\text{ m}$ ）時，由水深變化及坡度不連續所產生向岸自由行進之長波的振幅約介於1 mm至1 cm之間，其中，當水深變化尺度與強制性長波波長的比值愈小時，自由長波的振幅愈大，但後者尚與短波的波長和水深比有關。

上面所獲得的自由長波之振幅雖很小，但首先需注意的是，此一振幅與 a' 的平方值成正比，故若 a' 為原先的3.2倍，則此一振幅將為上面數字的10倍。此一數字且僅為自由長波在100米水深處的振幅，當它行進至更淺的海域時，波浪淺化效應將使其振幅加大，且可能因能量被trap在岸邊（如發生edge wave現象），使振幅顯著的增加（僅岸邊反射現象即可使自由長波的振幅加倍），故詳細情形仍有待我們未來從事更大範圍以及三度空間的計算。

本研究另一個目的是測試以往淺水近似理論的適用範圍，並發展另一種可適用於任何水深變化條件下的理論及數值計算模式。經由以上分析我們發現，由於由短波群引發強制性長波的作用隨水深增加而減小，故深水區的影響不大，甚至在斜坡上屬於淺水的部份，儘管其流場與淺水近似相差很大（因坡度的效應），且其能量密度亦大，但因其水平範圍與強制性長波的波長相比不大，故其影響亦有限，因此在目前的情況下，淺水近似適用的範圍較我們原先所預期者大，但有時它仍將產生相當大的誤差（有高估的現象），故為確保所計算的結果為正確，在類似於花蓮港外海陡峭的陸坡上，宜採用目前所發展的模式。

目前的模式雖較以往的淺水模式多考慮一個空間的變化，但採用邊界元素法從事數值計算，仍可將積分領域減少一度空間，況且目前的模式不需如淺水模式般，將坡度不同的區域分別積分再予連接（後者在二度空間地形時恐非易事），故目前的模式應用於較複雜的地形亦較方便。

目前的模式唯有在水深變化的尺度小至與短波的波長相當時，方可能因其forcing terms無法準確決定（淺水模式亦有此問題存在），而產生較大的誤差，但一個眾所周知的現象是，多尺度漸近近似理論（forcing terms即應用此理論導出）實際可適用的範圍往往遠比我們原先所假設的寬，故此一限制應不會產生太大的影響。

附錄： 証明(3.18) 式

首先由(2.5) 式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega_s a'^2}{\tanh k_s h} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g k_s a'^2}{\omega_s} \right) = \frac{g a'^2}{\omega_s} \frac{d k_s}{d x} + \frac{g k_s}{\omega_s} \frac{d a'^2}{d x} \quad (A.1)$$

再由(2.12) 式

$$\frac{d a'^2}{d x} = -\frac{a'^2}{C_g} \frac{d C_g}{d x}$$

將(2.9) 和(2.5) 式代入上式, 並考慮 $\omega_s = \text{const}$, 可得

$$\frac{d a'^2}{d x} = -\frac{a'^2}{C_g} \left[-\frac{C_g}{k_s} \frac{d k_s}{d x} + C \frac{d}{d x} \left(\frac{k_s h}{\sinh 2 k_s h} \right) \right] \quad (A.2)$$

另外, 因

$$\frac{d}{d x}(\omega_s^2) = \frac{d}{d x}(g k_s \tanh k_s h) = 0$$

故展開後亦可獲得

$$\frac{d k_s}{d x} = -\frac{2 k_s^2}{2 k_s h + \sinh 2 k_s h} \frac{d h}{d x} \quad (A.3)$$

由上式, 並經一些代數運算, 我們可進一步獲得

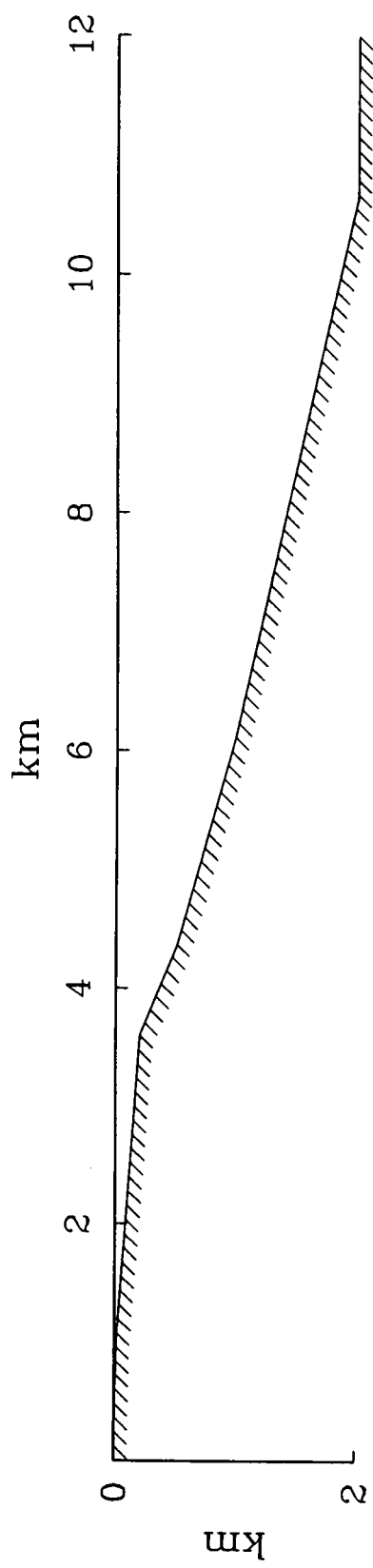
$$\frac{d}{d x} \left(\frac{k_s h}{\sinh 2 k_s h} \right) = \frac{k_s (\sinh 2 k_s h - 2 k_s h \cosh 2 k_s h)}{(2 k_s h + \sinh 2 k_s h) \sinh 2 k_s h} \frac{d h}{d x} \quad (A.4)$$

將(A.2)-(A.4) 代入(A.1) 即可證明(3.18) 式。

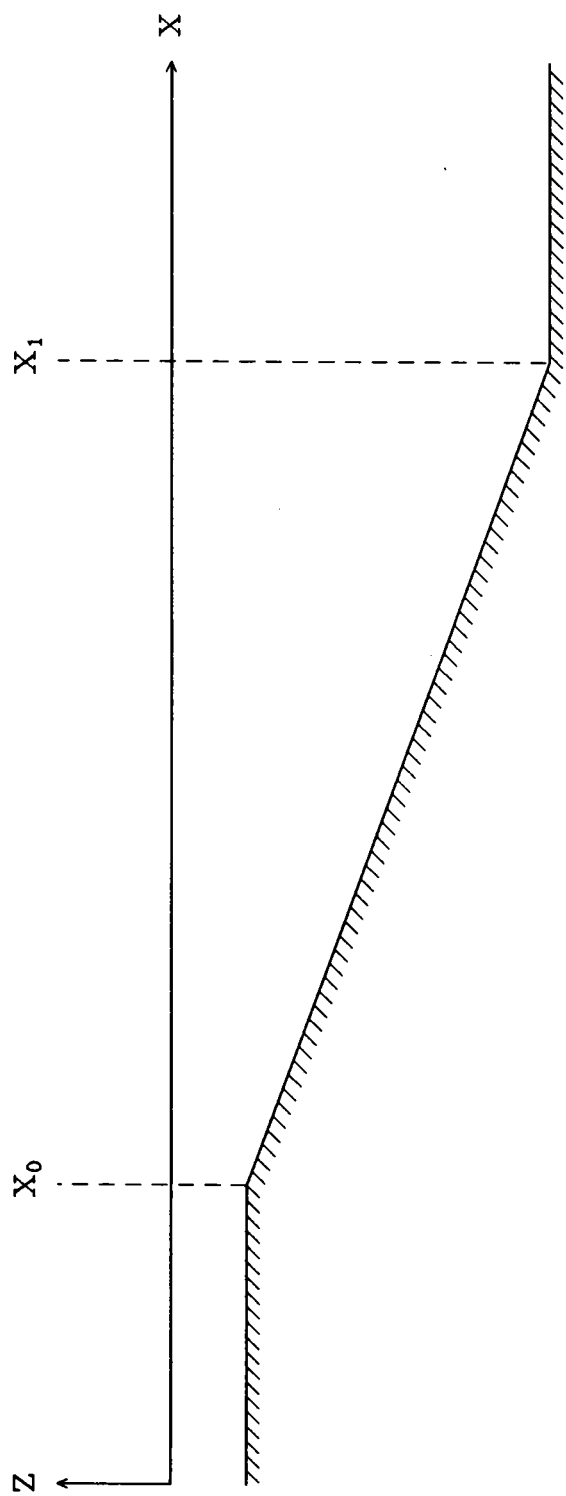
參考文獻

- Bowers, E. C. 1977 Harbour resonance due to set-down beneath wave groups. *J. Fluid Mech.* **79**, 71–93.
- Brebbia, C. A. 1984 The Boundary Element Method for Engineers, 2nd edn. Pentech Press.
- Elgar, S., Herbers, T. H. C., Okihiro, M., Oltman-Shay, J. & Guza, R. T. 1992 Observations of infragravity waves. *J. Geophys. Res.* **97**, 15573–15577.
- Guza, R. T. & Thornton, E. B. 1985 Observations of surf beat. *J. Geophys. Res.* **90**, 3161–3172.
- Lapidus, L. & Pinder, G. F. 1982 Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering.
- Liu, P. L.-F. 1989 A note on long waves induced by short-wave groups over a shelf. *J. Fluid Mech.* **205**, 163–170.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1962 Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to ‘surf beats’. *J. Fluid Mech.* **13**, 481–504.
- Mei, C. C. & Agnon, Y. 1989 Long-period oscillations in a harbour induced by incident short waves. *J. Fluid Mech.* **208**, 595–608.
- Mei, C. C. & Benmoussa, C. 1984 Long waves induced by short-wave groups over an uneven bottom. *J. Fluid Mech.* **139**, 219–235.
- Molin, B. 1982 On the generation of long-period second order free waves due to changes in the bottom profile. *Ship. Res. Inst. Papers*, vol. **68**. Tokyo.
- Munk, W. H. 1949 Surf beats. *Trans. Am. Geophys. Union* **30**, 849–854.
- Schäffer, H. A. 1993 Infragravity waves induced by short-wave groups. *J. Fluid Mech.* **247**, 551–588.
- Schäffer, H. A. 1994 Edge waves forced by short-wave groups. *J. Fluid Mech.* **259**, 125–148.
- Symonds, G., Huntley, G. A. & Bowen, A. J. 1982 Two dimensional surf beats: long wave generation by a time-varying break point. *J. Geophys. Res.* **87**, 492–498.
- Tucker, M. J. 1950 Surf beats: sea waves of 1 to 5 min. period. *Proc. R. Soc. Lond. A* **202**, 565–573.

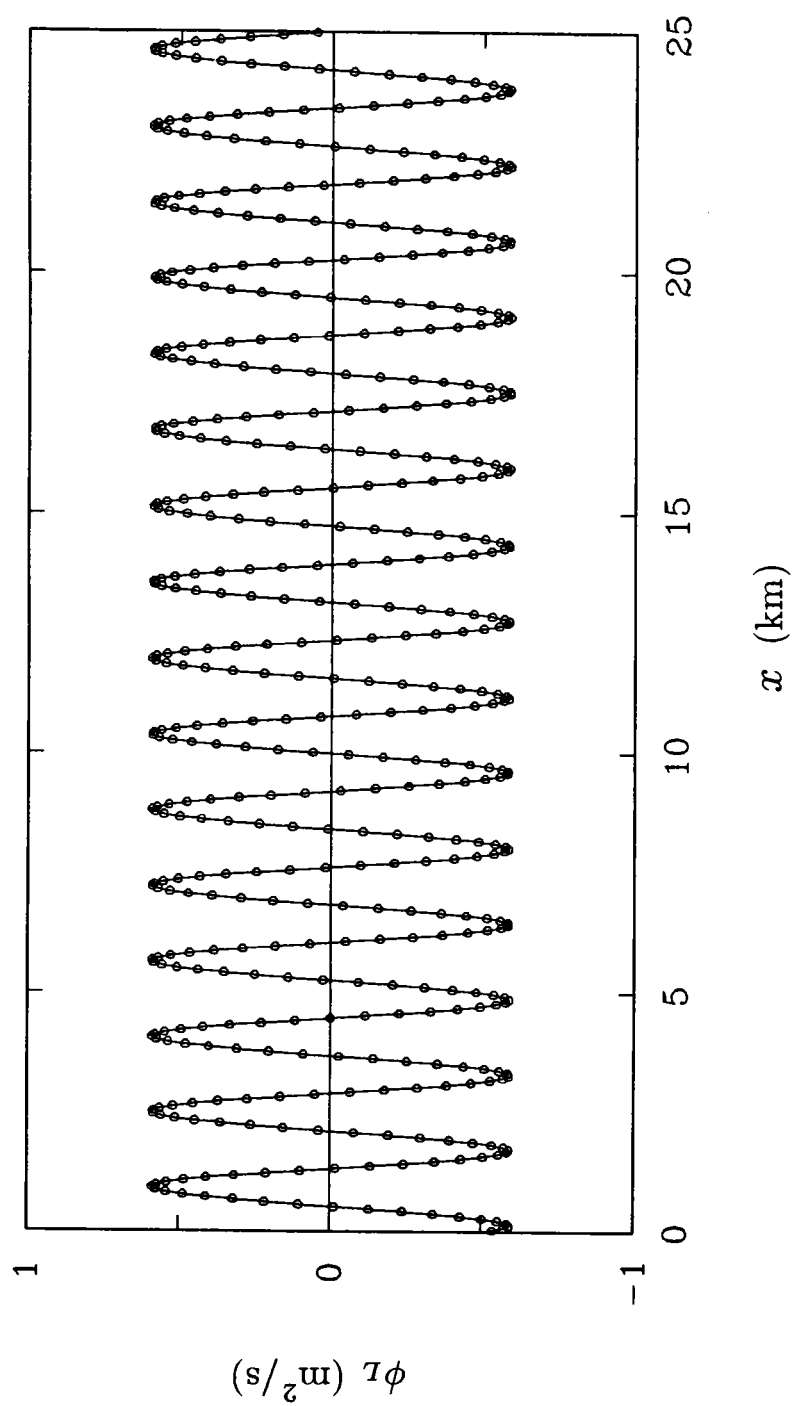
- Webb, S. C., Zhang, X. & Crawford, W. 1991 Infragravity waves in the deep ocean. *J. Geophys. Res.* **96**, 2723–2736.
- Wu, J.-K. & Liu, P. L.-F. 1990 Harbour excitations by incident wave groups. *J. Fluid Mech.* **217**, 595–613.
- 曾相茂 1995 花蓮港港灣設施改善計畫之研究期中報告—現場海氣象調查, 港灣技術研究所。
- 蘇青和 1995 花蓮港港灣設施改善計畫之研究期中報告—數值模擬, 港灣技術研究所。
- 莊文傑 1995 直立堤前水深非對稱溝渠上之波浪特性研究, 港灣技術研究所研究報告, 84研(六)-2。
- 徐進華 1995 長波非線性效應研究, 港灣技術研究所研究報告, 84研(七)。



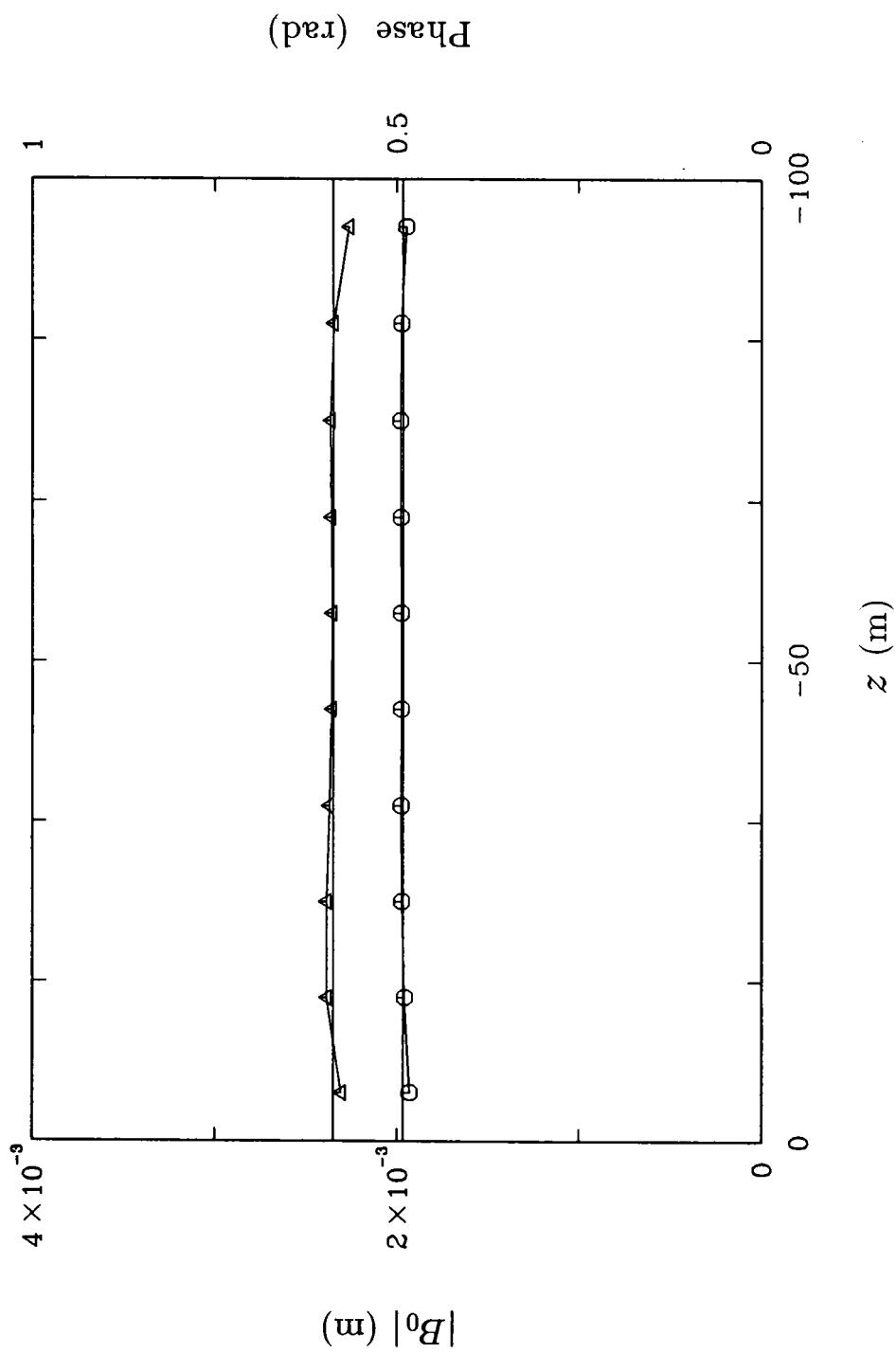
圖一．台灣東岸海底地形概略圖。



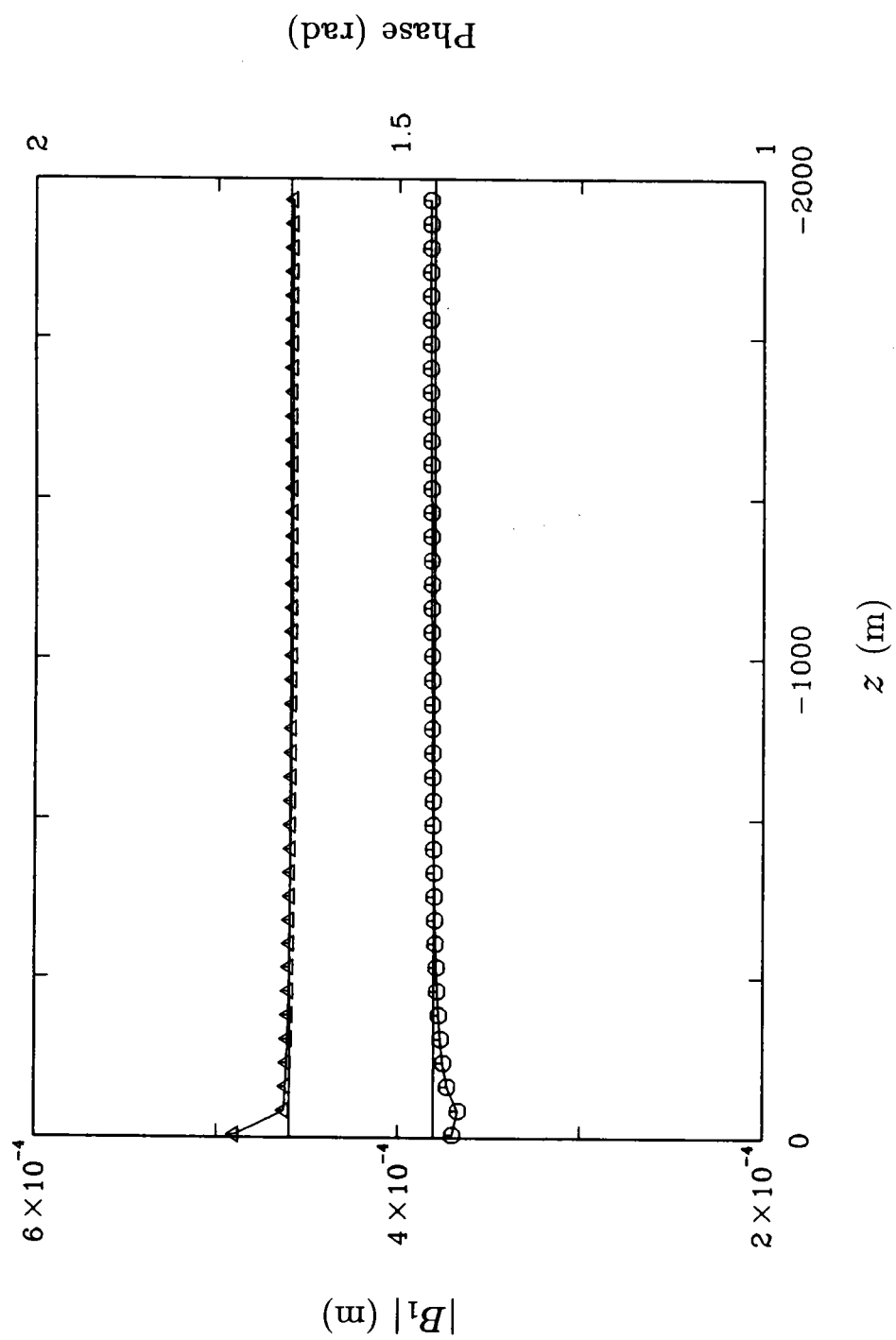
圖二. 示意圖。



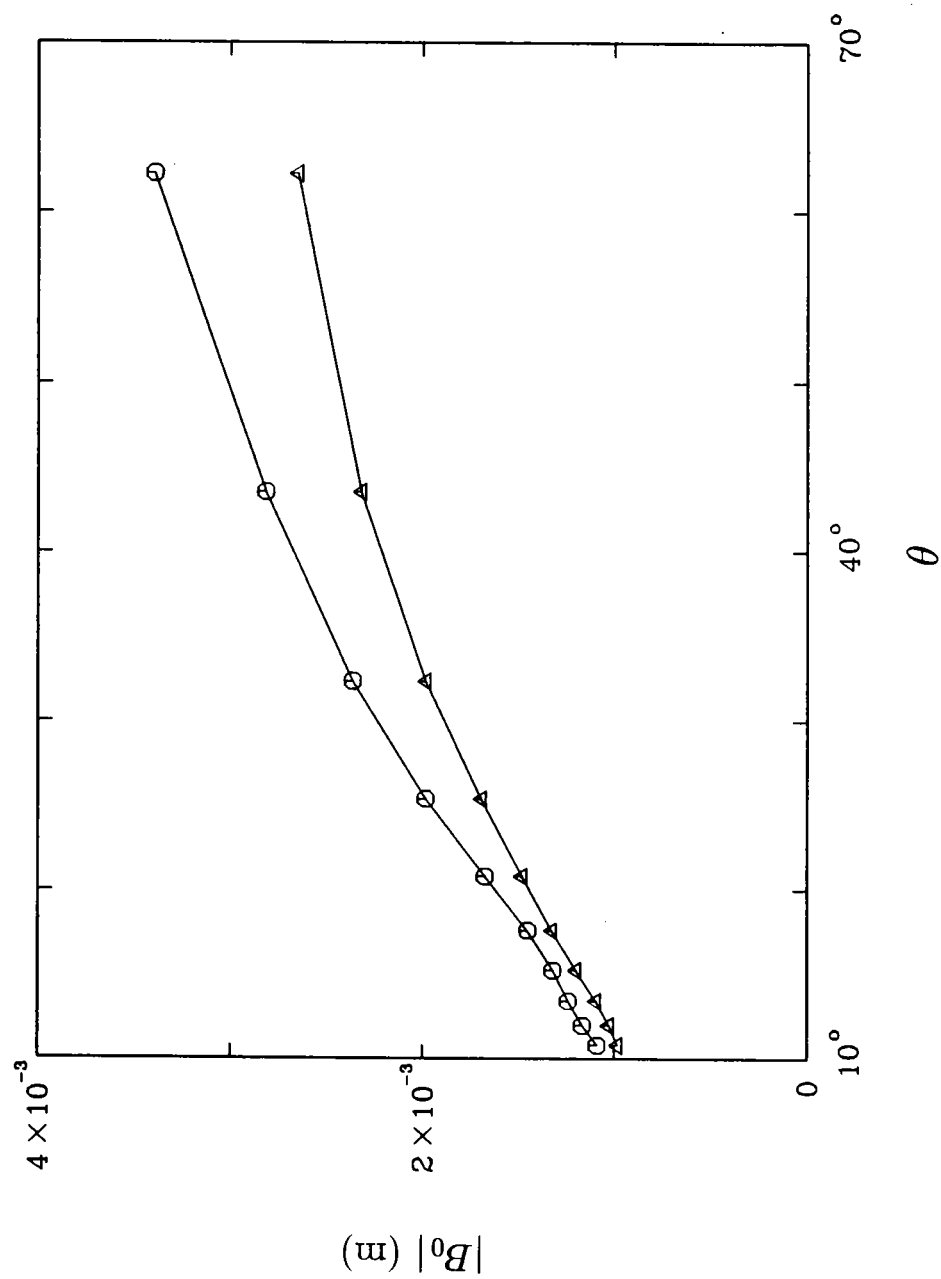
圖三. 電腦程式之測試。實線表理論值, 圓圈代表電腦程式之計算結果。水深為 1000 米, 短波週期為 11 秒, 長波週期為 18.4 秒, $\alpha' = 1$ m。



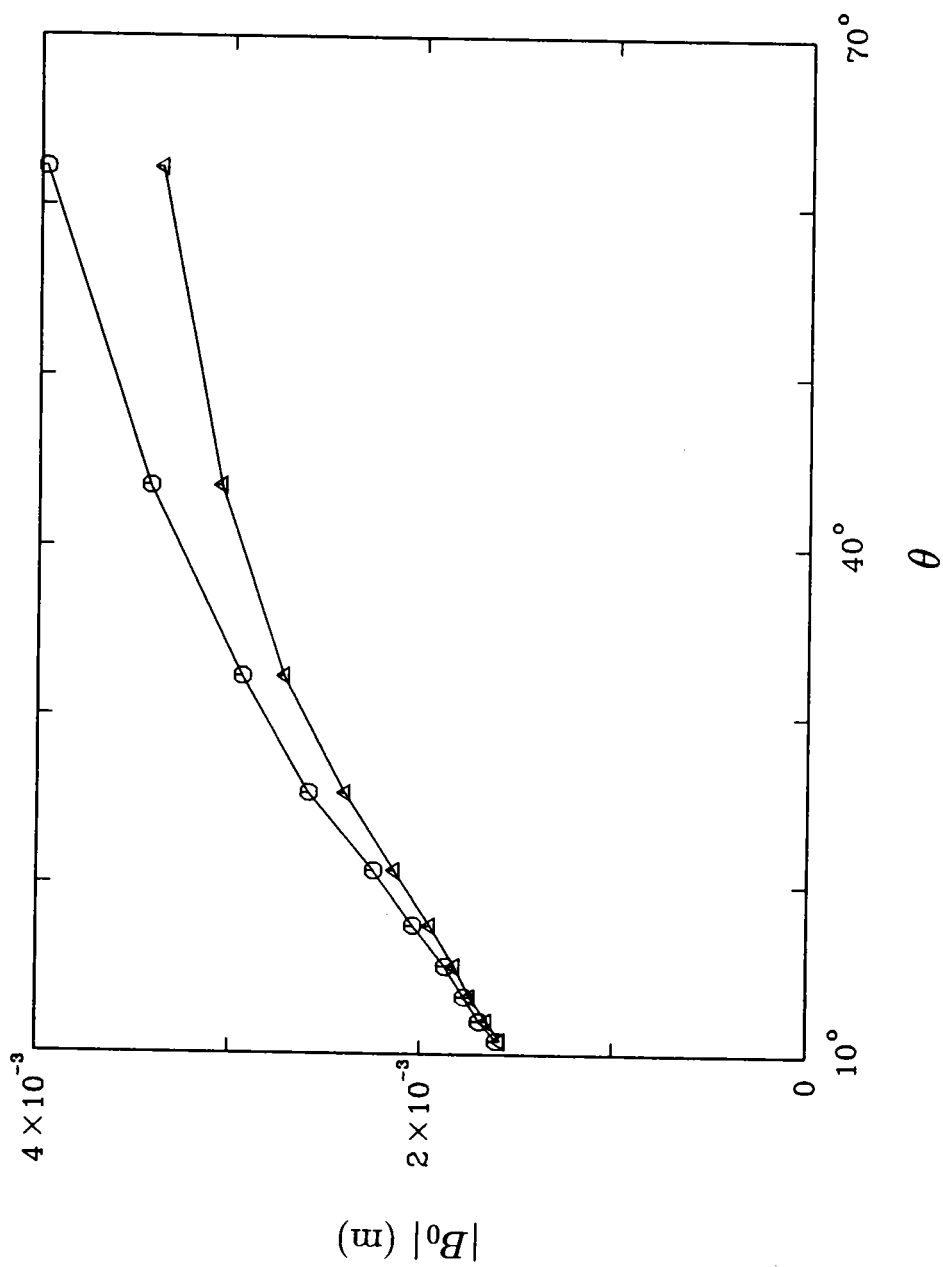
圖四. 向岸行進之自由長波的振幅在各深度上的估計值。圓圈表振幅的量, 三角形表其相位, 直線代表所有深度之平均值。短波週期為 11 秒, 斜坡坡度約 18° 。



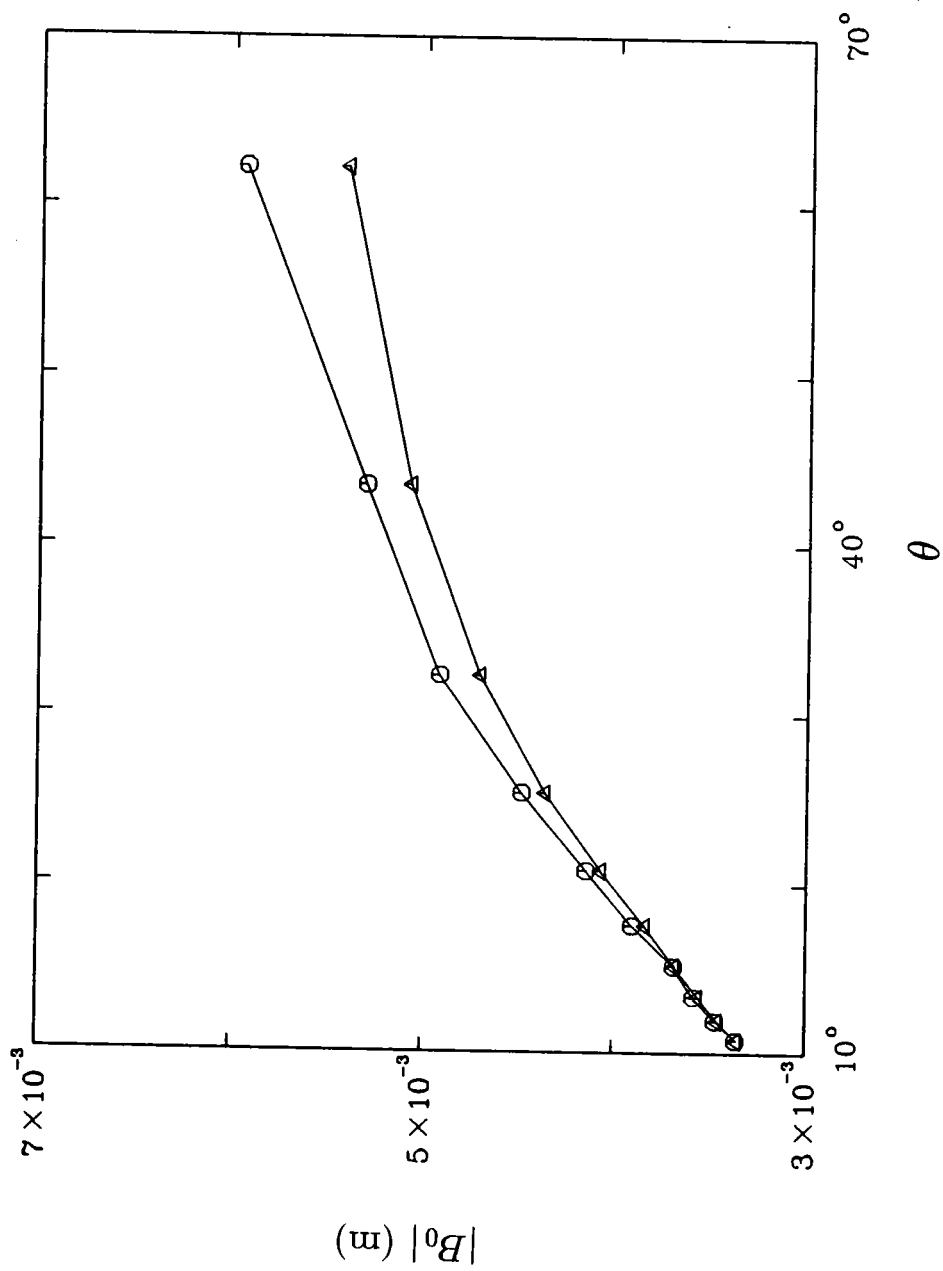
圖五. 與圖四類似,但改爲向外海行進之自由長波的振幅。



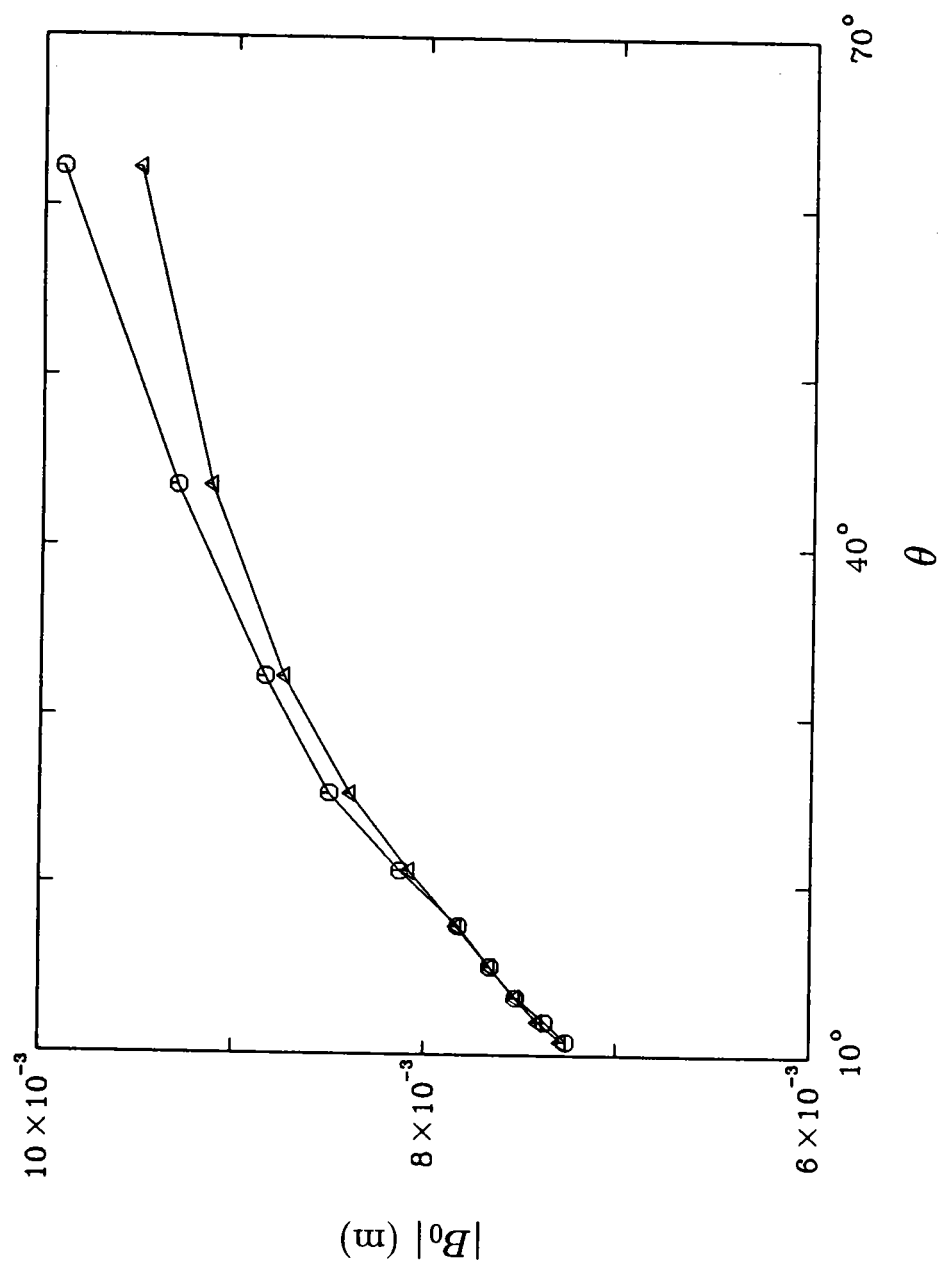
圖六. 向岸行進之自由長波的振幅隨斜坡坡度變化的情形。圓圈表淺水近似解、三角形表目前的數值解。短波週期為8秒。



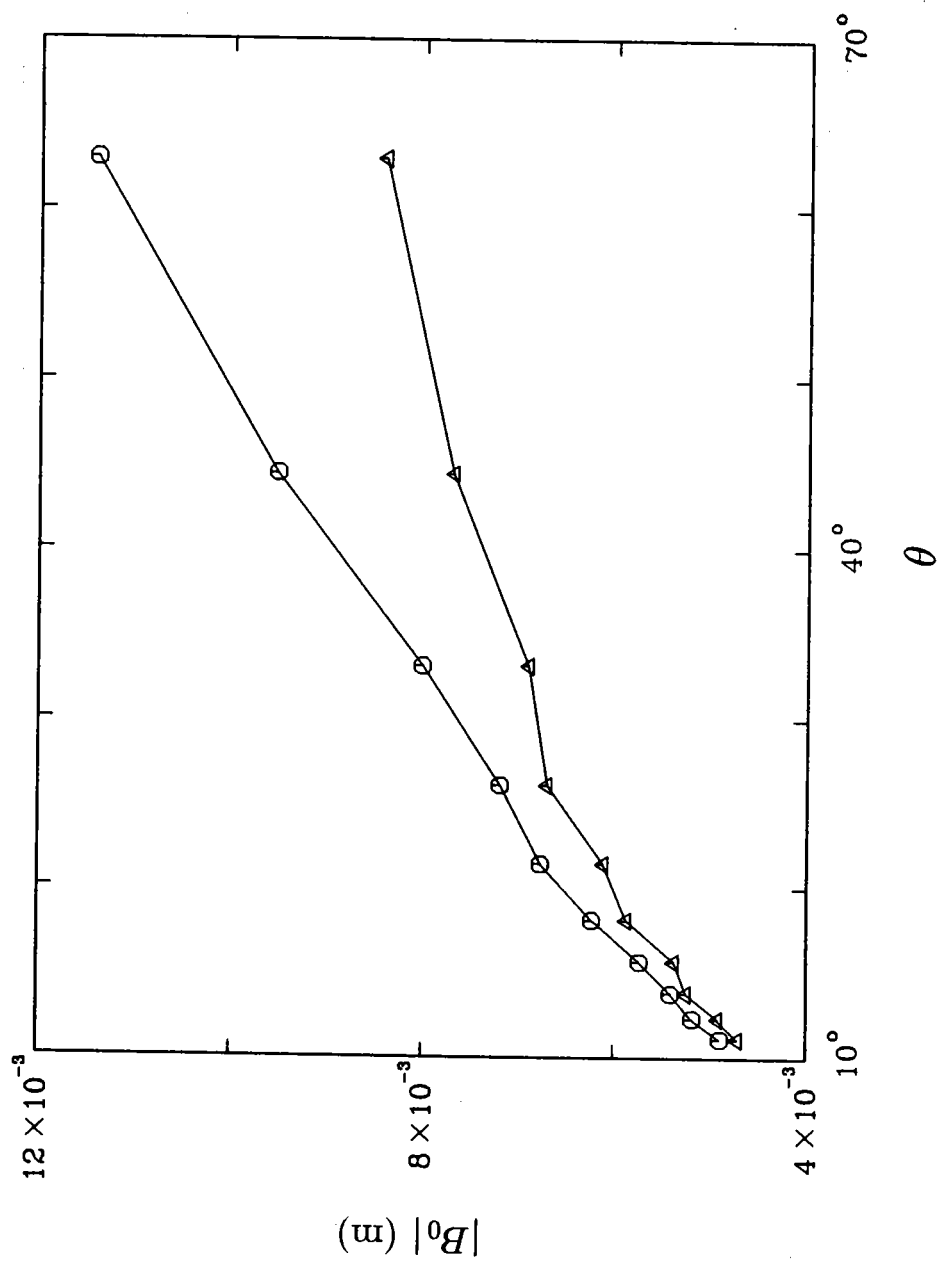
圖七. 與圖六相同, 僅短波週期改爲11秒。



圖八. 與圖六相同, 僅短波週期改爲15秒。



圖九. 與圖六相同, 僅短波週期改爲 19 秒。



圖十. 與圖六相同, 但 h_0 目前僅為 40 m, 長波週期為 100 秒, 其餘條件不變。

花蓮和蘇澳港附近長波研究

作 者：徐 進 華

發行人：張 金 機

發行所：台灣省交通處港灣技術研究所
台中縣梧棲鎮臨海路83號
04-6564216

中華民國85年出版，印製150本，非賣品