

94-60-7155  
MOTC-IOT-93-H2BB02

# 時頻分析法比較研究與應用探討 —— 仔波與波譜共關協振特性比較



交通部運輸研究所  
中華民國九十四年四月

94-60-7155  
MOTC-IOT-93-H2BB02

# 時頻分析法比較研究與應用探討 ——仔波與波譜共關協振特性比較

著 者：李勇榮

交通部運輸研究所  
中華民國九十四年四月

時頻分析法比較研究與應用探討——  
——仔波與波譜共關協振特性比較

交通部運輸研究所

GPN : 1009401210

定價 100 元

國家圖書館出版品預行編目資料

時頻分析法比較研究與應用探討：仔波與波譜  
共關協振特性比較 / 李勇榮著. -- 初版. --  
臺北市：交通部運研所，民94  
面；公分  
參考書目：面  
ISBN 986-00-0995-3(平裝)

1. 波動

332.654

94007597

時頻分析法比較研究與應用探討  
—仔波與波譜共關協振特性比較

著 者：李勇榮  
出版機關：交通部運輸研究所  
地 址：台北市敦化北路 240 號  
網 址：[www.ihmt.gov.tw](http://www.ihmt.gov.tw) (中文版/中心出版品)  
電 話：(04)26587176  
出版年月：中華民國九十四年四月  
印 刷 者：飛燕印刷有限公司  
版(刷)次冊數：初版一刷 120 冊  
本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站  
定 價：100 元  
展 售 處：  
交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880  
三民書局重南店：台北市重慶南路一段 61 號 4 樓•電話：(02)23617511  
三民書局復北店：台北市復興北路 386 號 4 樓•電話：(02)25006600  
國家書坊台視總店：台北市八德路三段 10 號 B1•電話：(02)25787542  
五南文化廣場：台中市中山路 6 號•電話：(04)22260330  
新進圖書廣場：彰化市中正路二段 5 號•電話：(04)7252792  
青年書局：高雄市青年一路 141 號 3 樓•電話：(07)3324910

GPN：1009401210

ISBN：986-00-0995-3 (平裝)

## 交通部運輸研究所出版品摘要表

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                         |                          |                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 出版品名稱：時頻分析法比較研究與應用探討 — 仔波與波譜共關協振特性比較                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                         |                          |                                                              |
| 國際標準書號（或叢刊號）<br>ISBN 986-00-0995-3 (平裝)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 政府出版品統一編號<br>1009401210 | 運輸研究所出版品編號<br>94-60-7155 | 計畫編號<br>93-H2DA10                                            |
| 主辦單位：港灣技術研究中心<br>主管：邱永芳<br>計劃主持人：李勇榮<br>研究人員：李勇榮<br>聯絡電話：04-26587183<br>傳真號碼：04-26587183    04-26571329                                                                                                                                                                                                                                                                  |                         |                          | 研究期間<br>自 93 年 01 月<br>至 93 年 12 月                           |
| 關鍵詞：水波分析最佳函基、水槽波流場試驗訊號、波譜與仔波共關協振、資料長度需求、訊號品質之影響、相位糙音之影響。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                         |                          |                                                              |
| 摘要：<br><br>此處我們探討仔波與富立葉波譜之多類共關協振，比較與界定其行為表現。其仔波所使用之函基是為先前研究所得之水波分析最適函基，所應用之資料係為水槽試驗之波場與流場訊號，試驗條件有風生波與史脫克司型態機械波。主要探討項目有：資料長度對共關協振分佈曲線收斂性之影響；使用複數仔波函基及其相關之實數函基所造成不同行為；數據品質對兩類型共關協振的影響；非同步或不同位置之量測所帶來效應；統計上的義涵；實際物理與解析因子或數學對應項之描述。整體而言，此一研究延伸吾人先前相對於水波訊號應用上其最佳函基鑑取之探討。而此處仔波共關協振之優越表現，一方面驗證了先前內容之可靠與適切性，一方面則提示著此一最適仔波的一個應用面。                                                 |                         |                          |                                                              |
| 出版日期                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 頁數                      | 定價                       | 本 出 版 品 取 得 方 式                                              |
| 94 年 4 月                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 60                      | 100                      | 凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。 |
| 機密等級：<br><input type="checkbox"/> 限閱 <input type="checkbox"/> 機密 <input type="checkbox"/> 極機密 <input type="checkbox"/> 絕對機密<br>（解密【限】條件： <input type="checkbox"/> 年   月   日解密， <input type="checkbox"/> 公布後解密， <input type="checkbox"/> 附件抽存後解密，<br><input type="checkbox"/> 工作完成或會議終了時解密， <input type="checkbox"/> 另行檢討後辦理解密）<br><input checked="" type="checkbox"/> 普通 |                         |                          |                                                              |
| 備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                         |                          |                                                              |

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS  
INSTITUTE OF TRANSPORTATION  
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                              |                                 |                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>TITLE: Time-Frequency Analyses and Their Applications – Characteristic Behaviors of Wavelet and Fourier Spectral Coherences</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                              |                                 |                                                                                                                                                |
| ISBN (OR ISSN)<br>ISBN 986-00-0995-3<br>(pbk.)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER<br>1009401210 | IOT SERIAL NUMBER<br>94-60-7155 | PROJECT NUMBER<br>93-H2DA10                                                                                                                    |
| DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER<br>DIVISION DIRECTOR: Yung-Fang Chiu<br>PRINCIPAL INVESTIGATOR: Yueon-Ron Lee<br>PROJECT STAFF: Yueon-Ron Lee<br>PHONE: 886-4-26587183<br>FAX: 886-4-26587183, 886-4-26571329                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                              |                                 | PROJECT PERIOD<br>FROM Jan. 2004<br>TO Dec. 2004                                                                                               |
| <b>KEY WORDS:</b> Optimal wavelet function basis for water waves; Wave and current fields in wave tank experiments; wavelet and Fourier spectra coherences; Data length requirements, Effects of signal quality; Influences of phase.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                              |                                 |                                                                                                                                                |
| <b>ABSTRACT:</b><br><br><p>Here we examine, as well as compare, various coherent features based upon a wavelet and the Fourier spectrum perspectives. The wavelet perspective is associated with an optimum wavelet function basis, i.e., the semi-orthogonal cardinal spline wavelet as was identified in our previous studies. Data used is related to measurements of the wave and current fields associated with wind waves or mechanically generated waves of Stokes type. The main topics concerned include: effects of data length on convergent tendencies for the two types of coherences; differences in coherences arising from using either complex or real functions related to the optimum wavelet basis; effects of data quality on the coherence distributions; symptoms arising from non-concurrent or displaced measurements; statistical implications; and physical depictions of analytical aspects or mathematical counterparts. Overall, the present study, on the one hand, fully vindicates the usefulness and superiority of the identified basis and serves as an extension of our previous studies concerning the identification of an optimum wavelet function basis for water wave related signals as well as the relevant data analysis methodology; on the other hand, it serves as an example for the basis' practical applications.</p> |                                              |                                 |                                                                                                                                                |
| DATE OF PUBLICATION<br>April 2005                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | NUMBER OF PAGES<br>60                        | PRICE<br>100                    | CLASSIFICATION<br><input type="checkbox"/> SECRET<br><input type="checkbox"/> CONFIDENTIAL<br><input checked="" type="checkbox"/> UNCLASSIFIED |
| The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                              |                                 |                                                                                                                                                |

時頻分析法比較研究與應用探討  
— 仔波與波譜共關協振特性比較

Time-Frequency Analyses and  
Their Applications –  
Characteristic Behaviors of Wavelet and  
Fourier Spectral Coherences

李 勇 榮

交通部運輸研究所港灣技術研究中心

Email: [ronlee@ms4.hinet.net](mailto:ronlee@ms4.hinet.net)

Revision: 1.0, December 27, 2004, 07:03:06

Printed: April 21, 2005

# 目錄

|               |    |
|---------------|----|
| 圖目錄           | ii |
| 摘要            | iv |
| ABSTRACT      | v  |
| 1 前言與研究背景     | 1  |
| 2 波譜與仔波共關協振   | 3  |
| 3 仔波函基之選用     | 8  |
| 4 試驗資料        | 14 |
| 5 資料長度需求比較    | 17 |
| 6 數複與實數函基共關協振 | 23 |
| 7 訊號品質之影響     | 28 |
| 8 相位糙音之影響     | 32 |
| 9 結論          | 39 |
| 附錄一 — 審查意見回覆表 | 40 |
| 附錄二 — 簡報資料    | 44 |
| 參考文獻          | 48 |

# 圖目錄

|     |                                                                                                                                              |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | 本圖以交正交 (bi-orthogonal) 仔波函基 BO22D 之仔波轉換係數其分佈形狀之變異情形說明移位非不變效應。 . . . . .                                                                      | 6  |
| 2.2 | 本圖以正交 (orthogonal) 仔波函基 ON33A 之仔波轉換係數其分佈形狀之變異情形說明移位非不變效應。 . . . . .                                                                          | 7  |
| 3.1 | 所選用最適函基其實虛部分佈曲線圖。 . . . . .                                                                                                                  | 10 |
| 3.2 | 具有特異或迷人解析特性 (fancy analytical properties) 的仔波往往有非常奇特古怪的波形，其在水波物理探討或應用上可說難得其門而入，這些不論是從熵值大小之表現，亦或其數值收斂行為而言，都可加以驗證或說明。 . . . . .                | 11 |
| 3.3 | 此圖顯示交正交仔波 BO35O 其連續暴展之表現行為。相關數據如下，長度：512 點、單位值仔波係數元之反轉換原點：e12、暴展點：225、階位值：2、階位點：12 (即 $U_2^{12}$ )、暴展比例值： $2^6$ 。由圖可見其低收斂性與特異傾斜行為。 . . . . . | 12 |
| 3.4 | 此圖示正交仔波 ONxxA 與 ONxxS 其仔波包之暴展行為。相關數據可於各別分圖上的註記取得。 . . . . .                                                                                  | 13 |
| 4.1 | 試驗佈置示意圖。 . . . . .                                                                                                                           | 15 |
| 4.2 | 三種史脫克司型態波之能譜圖。其基礎協鳴 (fundamental harmonic) 頻率分別為 1.4、2.0、2.8 Hz，代表波浪陡峻率 (wave steepness $ka$ ) 分別為 0.06、0.20、0.30。 . . . . .                 | 16 |
| 5.1 | 三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之仔波共關協振分佈曲線。上、中、下圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。水速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。 . . . . .                                          | 19 |
| 5.2 | 三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之波譜共關協振分佈曲線。上、中、下圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。水速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。此圖之 FFT 區段分割長度為 512 點。 . . . . .                    | 20 |
| 5.3 | 三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之波譜共關協振分佈曲線。上、中、下、圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。水速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。此圖之 FFT 區段分割長度為 256 點。 . . . . .                   | 21 |
| 5.4 | 資料長度為 9472 點下之波譜共關協振。 . . . . .                                                                                                              | 22 |
| 6.1 | 在三種不同風速下，即 6.1 (實線)、5.1 (長虛線)、與 4.0 (短虛線) m/sec，波高與水流速共關協振分佈情形，上、下分圖分別表示使用複、實數函基之轉換。其所含能量現象參見內文。 . . . . .                                   | 25 |

|     |                                                                                                                          |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.2 | 此圖以一史脫克司型態波之波場其時頻分佈演化圖說明側頻不穩現象暨 FPU 遞嬗反覆行為。 . . . . .                                                                    | 26 |
| 6.3 | 仔波實數函數共關協振（上圖）與波譜者（下圖）比較。所用波浪為一高波浪陡峻率之史脫克司波（ $ka = 0.30$ ），共關協振為波高與不同深度水流速之間。由仔波之圖可見較深處主頻帶區有最高之共關協振數值。 . . . . .         | 27 |
| 7.1 | 同步量測之低（上兩分圖）高（中兩分圖）品質之 LDV 水速訊號與波高（下兩分圖）訊號。此圖資料抓取速率為 40 Hz。 . . . . .                                                    | 29 |
| 7.2 | 同步量測之低（上兩分圖）高（中兩分圖）品質之 LDV 水速訊號與波高（下兩分圖）訊號。此圖資料抓取速率為 200 Hz。 . . . . .                                                   | 30 |
| 7.3 | 在一史脫克司波浪下（ $ka = 0.06$ ），不同品質訊號相互間之共關協振曲線。其實線係為良好水速訊號與波高之共關協振，另二線則分別為低品質水速訊號與波高間者、暨高低品質水速訊號間者。上分圖表仔波者，下分圖表波譜者。 . . . . . | 31 |
| 8.1 | 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其不同水深處水流速相互間的仔波共關協振。此圖顯示非同步量測所帶來之影響（不同水深之量測所生之時移位效應）。 . . . . .        | 34 |
| 8.2 | 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其不同水深處水流速相互間的波譜共關協振。由圖可見非同步量測所帶來之影響較仔波者更為顯著。 . . . . .                 | 35 |
| 8.3 | 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其上、中、下游的三支波高計同時量測所得波高相互間的仔波共關協振。此圖顯示空間移位效應，相關解說參見內文。 . . . . .         | 36 |
| 8.4 | 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其上、中、下游的三支波高計同時量測所得波高相互間的波譜共關協振。與仔波者比較，可明顯看出兩者之差異表現。 . . . . .         | 37 |
| 8.5 | 本圖以兩個相鄰尺度之仔波合成訊號其富立葉能譜說明模糊效應與相位糙音之影響。 . . . . .                                                                          | 38 |

## 摘要

此處我們探討仔波與富立葉波譜之多類共關協振，比較與介定其行為表現。其仔波所使用之函基是為先前研究所得之水波分析最適函基，所應用之資料係為水槽試驗之波場與流場訊號，試驗條件有風生波與史脫克司型態機械波。主要探討項目有：資料長度對共關協振分佈曲線收斂性之影響；使用複數仔波函基及其相關之實數函基所造成不同行為；數據品質對兩類型共關協振的影響；非同步或不同位置之量測所帶來效應；統計上的義涵；實際物理與解析因子或數學對應項之描述。整體而言，此一研究延深吾人先前相關於水波訊號應用上其最佳函基鑑取之探討。而此處仔波共關協振之優越表現，一方面驗證了先前內容之可靠與適切性，一方面則提示著此一最適仔波的一個應用面。

# ABSTRACT

Here we examine, as well as compare, various coherent features based upon a wavelet and the Fourier spectrum perspectives. The wavelet perspective is associated with an optimum wavelet function basis, i.e., the semi-orthogonal cardinal spline wavelet as was identified in our previous studies. Data used is related to measurements of the wave and current fields associated with wind waves or mechanically generated waves of Stokes type. The main topics concerned include: effects of data length on convergent tendencies for the two types of coherences; differences in coherences arising from using either complex or real functions related to the optimum wavelet basis; effects of data quality on the coherence distributions; symptoms arising from non-concurrent or displaced measurements; statistical implications; and physical depictions of analytical aspects or mathematical counterparts. Overall, the present study, on the one hand, fully vindicates the usefulness and superiority of the identified basis and serves as an extension of our previous studies concerning the identification of an optimum wavelet function basis for water wave related signals as well as the relevant data analysis methodology; on the other hand, it serves as an example for the basis' practical applications.

## 前言與研究背景

在一個多尺度、多作用因子、亦或複雜的互作用系統裡（諸如，考量風、浪、流、結構物、地形、降雨條件、等等多項因子作用下的偶合系統），不同訊號亦或物理量間的共關協振（coherences），代表著整個系統物理作用之偶合程度與相互間的抑揚遞嬗作用。藉著研究共關協振在不同試驗條件或不同參數下的變化情形，我們可以瞭解各不同尺度的演化行為，參悟能量現象，從而取得系統的主要作用因子、或各因子之主要效應為何。此處對共關協振之探討，可說是延伸於我們先前相關於仔波最佳函基（the optimum wavelet function basis）的一些研究（Lee and Wu 1996a、1996b、2003a、2003b），另外其因果關係，實亦與我們所曾涉略的一些訊號分析法，諸如希伯解析訊號法（Hilbert analytic signal procedure），有所關聯（Cohen 1995；Lee and Wu 1997、1999、2001）。而這樣的延伸與關聯很自然地形成此處文章之目的之一，亦即作為先前研究結果之驗證。另一方面，此文除了展現此一最適仔波的一個具體應用面外，亦提示著仔波共關協振之有義性與可能用途。

在先前相關於仔波最適函基之研究，我們針對水波相關訊號之模擬分析上其最佳函基之選擇暨處理手法，進行了三項優化工程。其第一個優化工作是相關於各類萊芝仔波函基（Riesz wavelet bases）（另及於富立葉函基）之轉換係數的各類熵值（entropy）探討；第二個優化工作則是尋找離散轉換與連續轉換之對應，及其所造成之差異；而第三個優化工作則是針對實際物理義意的增益模擬。這三項工作大致可較詳細陳述如下：

爲了鑑取得一個水波相關訊號分析應用上最適化的仔波分析函基與技法，我們由源頭、最根本起，開發了一個相當徹底的仔波分析程式，程式主要以 Asyst 語言撰寫，另亦發展其諸多相關程式與整合套件。所研究內容包含相當廣泛而完整的離散仔波類屬及其衍生類屬。首先吾人探討其各項解析與數值行爲，並將其可能之對應物理表徵與可能之使用性加以說明。而爲了要在廣泛離散之仔波類屬中鑑取最佳的函基，我們以各種標準下的熵值表現一致判定最佳離散仔波是爲半正交樞點順適仔波（cardinal spline semi-orthogonal wavelet）。

所謂的熵值鑑定是一統計手法，它無法看出何種解析因子造成函基之不同表現。針對這一訴求，我們研究各仔波其特性函數（一個通常以  $m_0(\xi)$  表示之函數）（Daubechies 1992）之相位分佈情形，將其結果之衍化與相關趨勢行爲對比於熵值之表現行爲，從而斷定線性相位分佈（相關於 linear phase filtering）是爲最適化數理根由，亦是必備條件。

對一複雜的水波訊號系統而言，前面所取之最適化離散仔波可說是分析優化的第一項工作，其分析仍有一重大考量是爲分析不定性之增進。針對這一基本訴求，我們說明引入連續仔波轉換之原因與需求，亦即第二項優化工程。此外亦闡明各種數理要義暨相應物理表徵。

在前述雙重優化下，我們又針對最佳仔波與所模擬水波實際物理現象之差異加以探討說明，從而再加引入時頻窗（time-frequency windows）調適之機制。蓋因不同尺度之水波其演化衰減趨勢與仔波轉換時其時頻窗之大小設爲固定所呈現的趨勢並不相符（Phillips 1977）。此外，亦解析上驗證這一調適符合連續仔波之入允資格條件（wavelet admissibility condition）。

事實上，當我們在瞭解仔波共關協振之數值表現，並與富立葉波譜者相比較後，再來回顧前述之諸項說明，我們將得以更容易領悟這些優化工作於此處數值表現所帶來的因果關係或其必然關聯性。❖

## 波譜與仔波共關協振

設  $g(t)$  與  $h(t)$  為兩個以  $t$  為變數之函數，則其交相關函數（cross correlation function）為如下之內乘積（inner product）， $c(t) = \langle g(t + \tau), h(\tau) \rangle$ ，式中  $\tau$  為虛擬變數，而其相關係數函數， $r_s(t)$ ，則為

$$r_s(t) = \frac{c(t)}{\|g(t)\| \|h(t)\|}, \quad (2.1)$$

上式之富立葉領域對應式為

$$\frac{\widehat{c(t)}}{\|g(t)\| \|h(t)\|} = \frac{G(\omega) \overline{H(\omega)}}{\|G(\omega)\| \|H(\omega)\|}, \quad (2.2)$$

式中  $\omega$  為對應於  $t$  之富立葉領域變數，而函數之上頭直橫線表共軛值。根據這一關係式，共關協振函數遂可依下式給定，

$$R_s^2(\omega) = \frac{|\mathbf{E}[G(\omega) \overline{H(\omega)}]|^2}{(\mathbf{E}[|G(\omega)|^2] \mathbf{E}[|H(\omega)|^2])^{1/2}}, \quad (2.3)$$

式中  $\mathbf{E}$  代表期望值。就此一波譜共關協振函數而言，其與正確解析上的差異主要有二，其一乃期望值之導入，另一則為常規標準化（normalization）之導入。

至於仔波共關協振關係式則可如下推衍給定：上述兩函數其仔波同等位單元

解析 (the wavelet resolution of identity) 爲

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^\infty \langle g, \psi_{a,b} \rangle \overline{\langle h, \psi_{a,b} \rangle} db da, \quad (2.4)$$

式中  $\psi$  爲仔波函數， $c_\psi$  爲常數。就某一尺度  $a$  而言，其分量等位解析爲

$$\langle g_a, h_a \rangle = \frac{1}{c_\psi} \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^\infty \langle g, \psi_{a,b} \rangle \overline{\langle h, \psi_{a,b} \rangle} db. \quad (2.5)$$

檢視這一式子，同樣地將期望值與常規標準化的義涵應用於上，則我們得到仔波共關協振關係式如下：

$$R_w^2(a) = \frac{|\mathbf{E}_b[\langle g, \psi_{a,b} \rangle \overline{\langle h, \psi_{a,b} \rangle}]|^2}{(\mathbf{E}_b[|\langle g, \psi_{a,b} \rangle|^2] \mathbf{E}_b[|\langle h, \psi_{a,b} \rangle|^2])^{1/2}}, \quad (2.6)$$

式中  $b$  代表仔波轉換中的移位參數 (translation parameter)，而  $\mathbf{E}_b$  表針對此移位參數取平均。

上面兩個共關協振關係函數我們可給予如下之定性比較：波譜共關協振其期望值之導入是較不自然的人爲加工。反觀仔波者，其期望值實際上是很自然地對應於仔波移位變數之求積，可說幾乎不含人爲介入，也就是說應用式與正確解析式少了隔閡。而實際上我們還可以真正的資料處理手法加以具體闡述如下：

對波譜共關協振關係式而言，若資料處理時不再經過進一步的人爲操控，則該式實際上是一無用處，蓋因此式對任何兩個訊號或函數而言，其任何頻率上的共關協振係數完全都是相等的單位值 (即 unity)。實際的求算是必須把兩個函數都切割分段，各安排成多一個因次之矩陣，因爲如果沒有這樣一個多出來的因次，則期望值不發揮作用，即每一個變數都只對應有一個樣本。至於切割法則正如離散轉換下富立葉波譜求算的切割方式。反觀仔波共關協振則不需任何切割，基本上每一個  $b$  值都提供了一個統計樣本值，如是，我們很容易了解到，這樣一個樣本空間的樣本數通常會較波譜共關協振樣本數大上二個 – 甚至是三個 – 級距 (order)。

前面的說明似乎已明確提示著，相關於波譜分析之特性行爲也將具體而微

地出現在波譜共關協振的表現行為上。這些主要相關於波譜分析或正交類屬函基其自由度（degrees of freedom）、變異數（variances）、移位非不變特性（shift non-invariance property）、相位糙音（phase noises）、模糊效應（ambiguity effects）、與數值處理過程額外引入的一些效應等。圖 2.1 與 2.2 具體說明了移位非不變效應暨相位糙音與模糊效應。圖 2.1 係以交正交（bi-orthogonal）仔波函基 BO22D（相關函基之註記或標示請參見往昔研究）為例，而圖 2.2 則以正交（orthogonal）仔波函基 ON33A 為例。

此外值得一提的是，此處我們所給予的仔波共關協振關係式與 Liu（1994）所用的共關協振是截然不同的，Liu 所用的，暨其數值分析例，可說是不具期望值之概念，也因此，參照我們先前相關於仔波等之研究經驗及此處之結果，可以說明其文章表示之義涵具有相當大的非穩態現象，或則說是甚高的不確定性，只宜作局部或片段的現象陳述，而不宜當作整體代表行為或一般趨勢之描述。❖

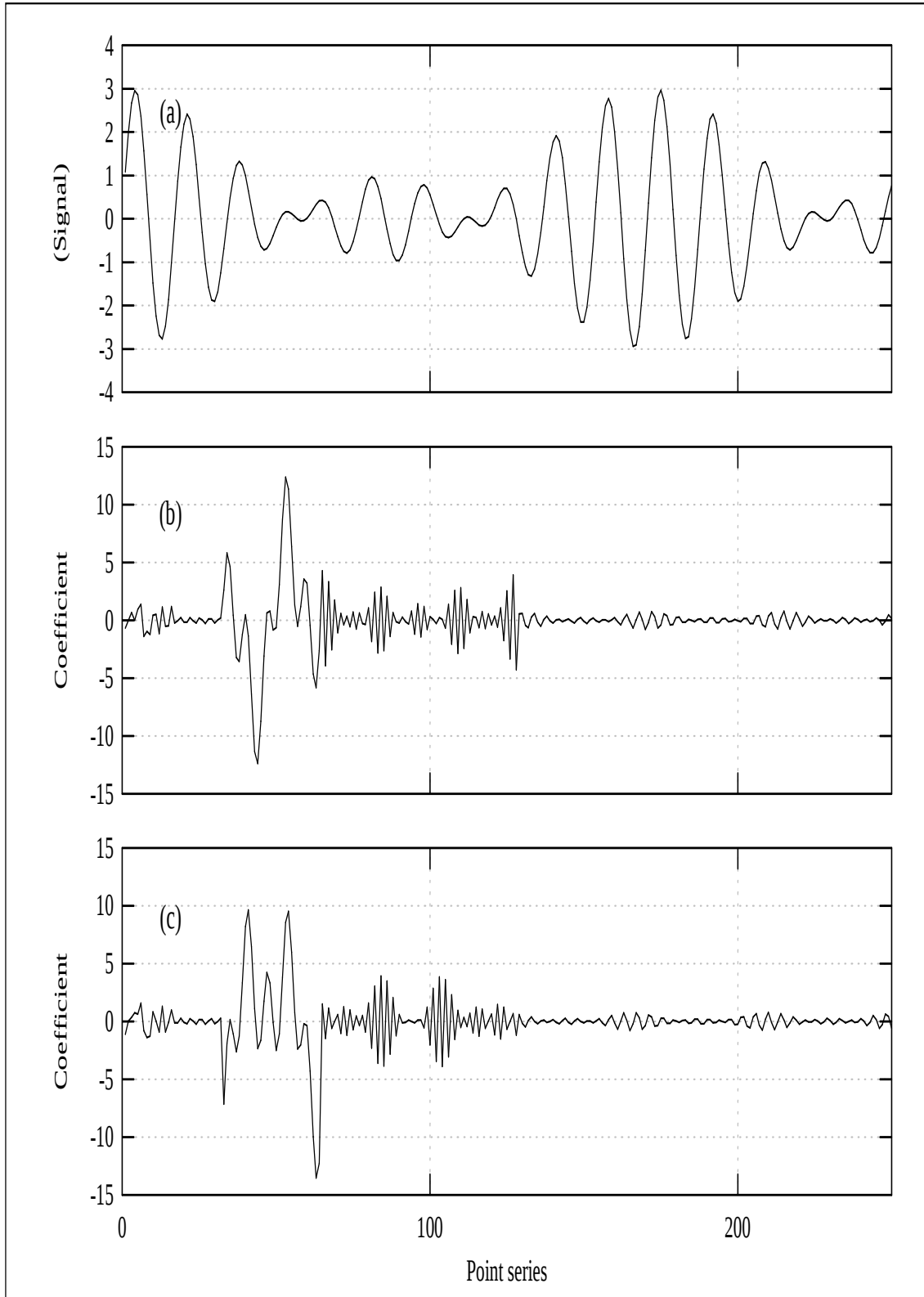


圖 2.1 本圖以交正交 (bi-orthogonal) 仔波函基 BO22D 之仔波轉換係數其分佈形狀之變異情形說明移位非不變效應。上圖表一訊號，中圖表其基於 BO22D 之仔波轉換係數分佈，下圖表將最上圖左移 20 點後之仔波轉換係數分佈情形。

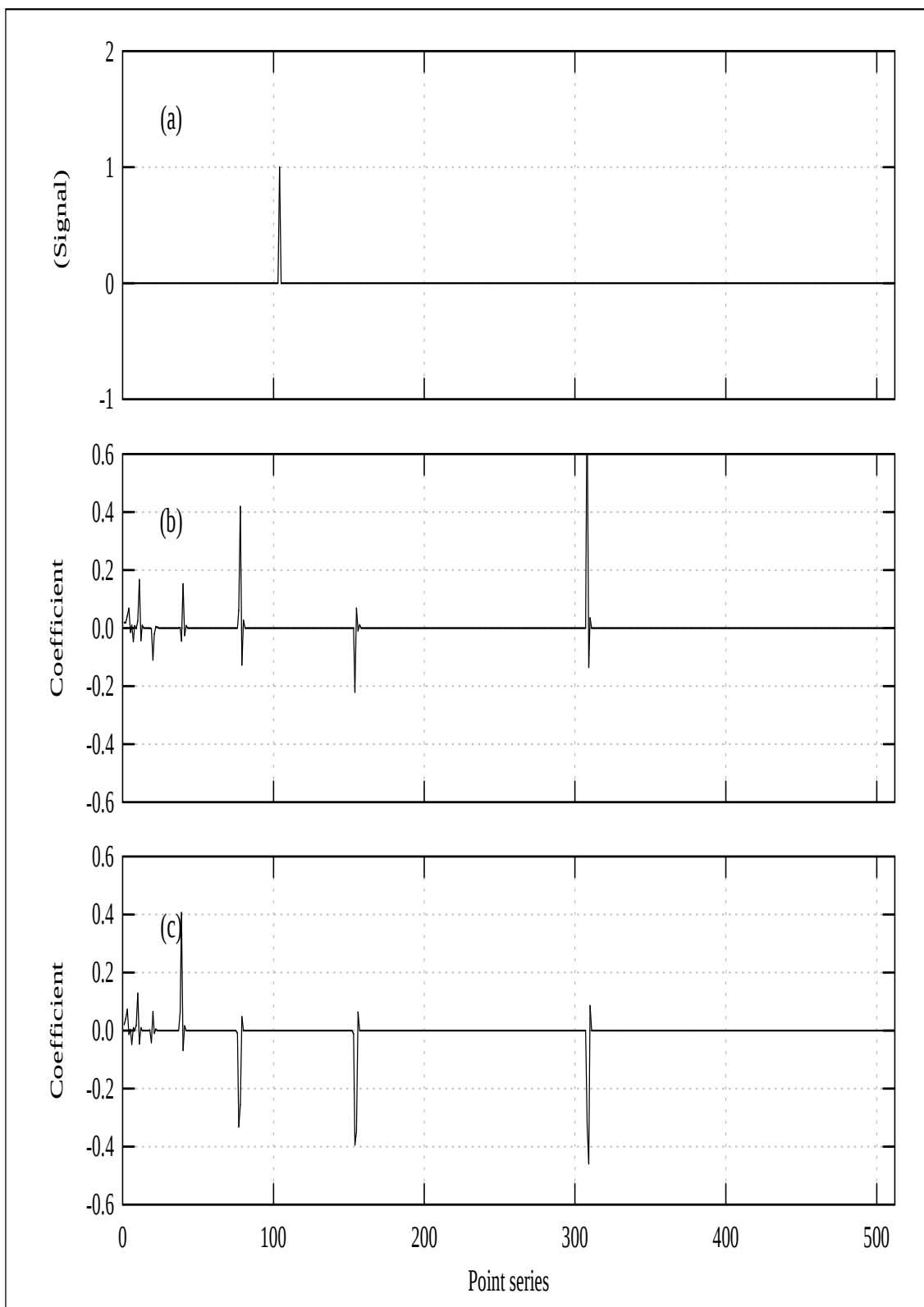


圖 2.2 本圖以正交（orthogonal）仔波函基 ON33A 之仔波轉換係數其分佈形狀之變異情形說明移位非不變效應。上圖表一訊號，中圖表其基於 ON33A 之仔波轉換係數分佈，下圖表將最上圖左移 3 點後之仔波轉換係數分佈情形。

## 仔波函基之選用

在前述共關協振的關係式中，相關於波譜者其函基是唯一的，但相應於  $\psi$  的仔波函基，基本上無論其種類與數量都是可以無窮多的，因而  $\psi$  的選用當然會對共關協振表現有重大影響。根據我們先前一些研究探討，此處說明其選用。

依據最小熵值規範，水波模擬最適函基是為半正交之樞點順適仔波（semi-orthogonal cardinal spline wavelet），而此一離散之萊芝（Riesz）函基其於連續轉換領域之對應函數是為調振高斯分佈函數（modulated Gaussian distribution），再者此一函數形狀基本上幾乎近於莫利仔波（Morlet wavelet），因而取用函基為

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2})e^{-t^2/2}, \quad (3.1)$$

式中  $\omega_0$  為時頻窗（或振幅衰減程度）之表徵參數。圖 3.1 示所選用最適函基其實虛部分佈曲線圖。實際上，此函基在此之表現是相關於諸多數理解析特性的，諸如函基規則性、全振性（Chui 1992a、1992b）、全正性、分佈延展拓撐長度、時空移位時之轉換變動性、海參堡不定性定理（Heisenberg uncertainty principle）、及其非正交性之贅餘性等。

此處另加說明的是：具有特異或迷人解析特性（fancy analytical properties）的仔波往往有非常奇特古怪的波形，其在水波物理探討或應用上可說難得其門而入，這些不論是從熵值大小之表現，亦或其數值收斂行為而言，都可加以驗證或說明。圖 3.2 顯示交正交仔波（bi-Orthogonal wavelet）BO31O 其連續暴展（blow-ups）之表現。其相關數據如下，長度：512 點、單位值仔波係數元之

反轉換原點：e12、暴展點：150、階位值：2、階位點：12（即  $U_2^{12}$ ）、暴展比例值： $2^6$ 。由圖可見其非收斂性行為。圖 3.3 示另一交正交仔波 BO35O 其連續暴展之表現。相關數據如下，長度：512點、單位值仔波係數元之反轉換原點：e12、暴展點：225、階位值：2、階位點：12（即  $U_2^{12}$ ）、暴展比例值： $2^6$ 。由圖可見其低收斂性與特異傾斜行為。圖 3.4 示正交仔波 ONxxA 與 ONxxS 其仔波包（wavelet packets）之暴展行為。相關數據可於各別分圖上的註記取得。❖

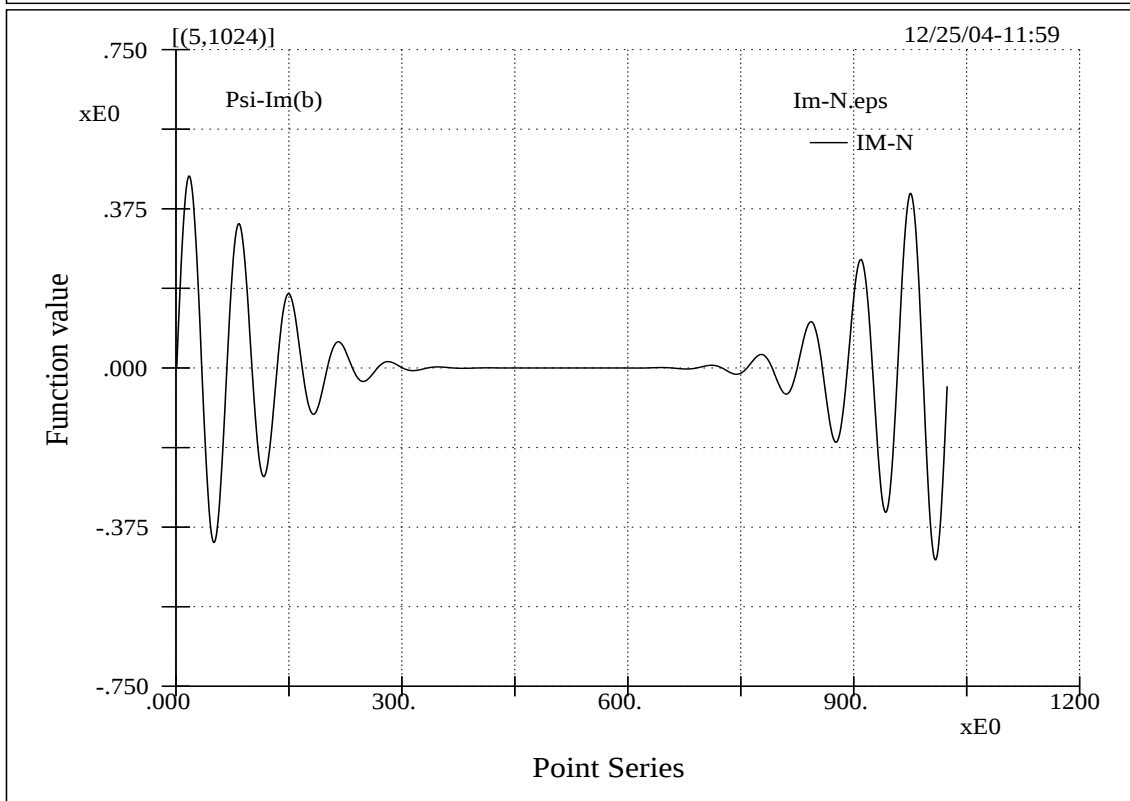
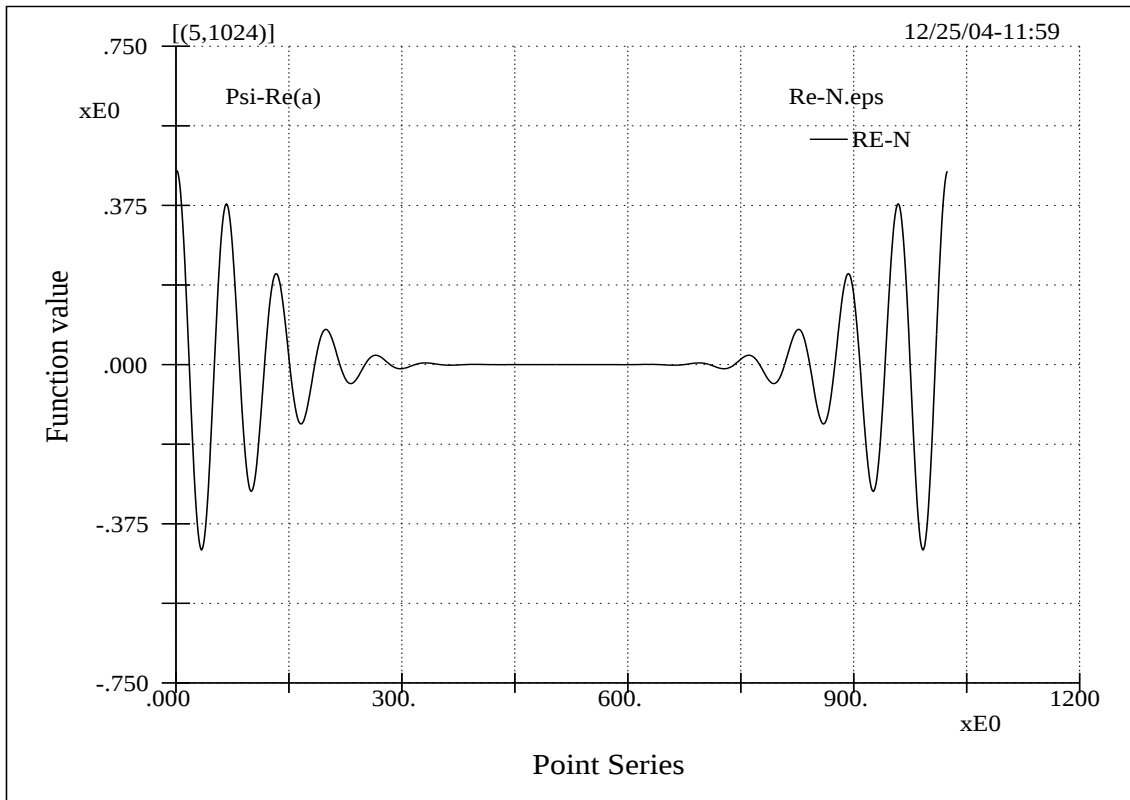


圖 3.1 所選用最適函基其實虛部分佈曲線圖。

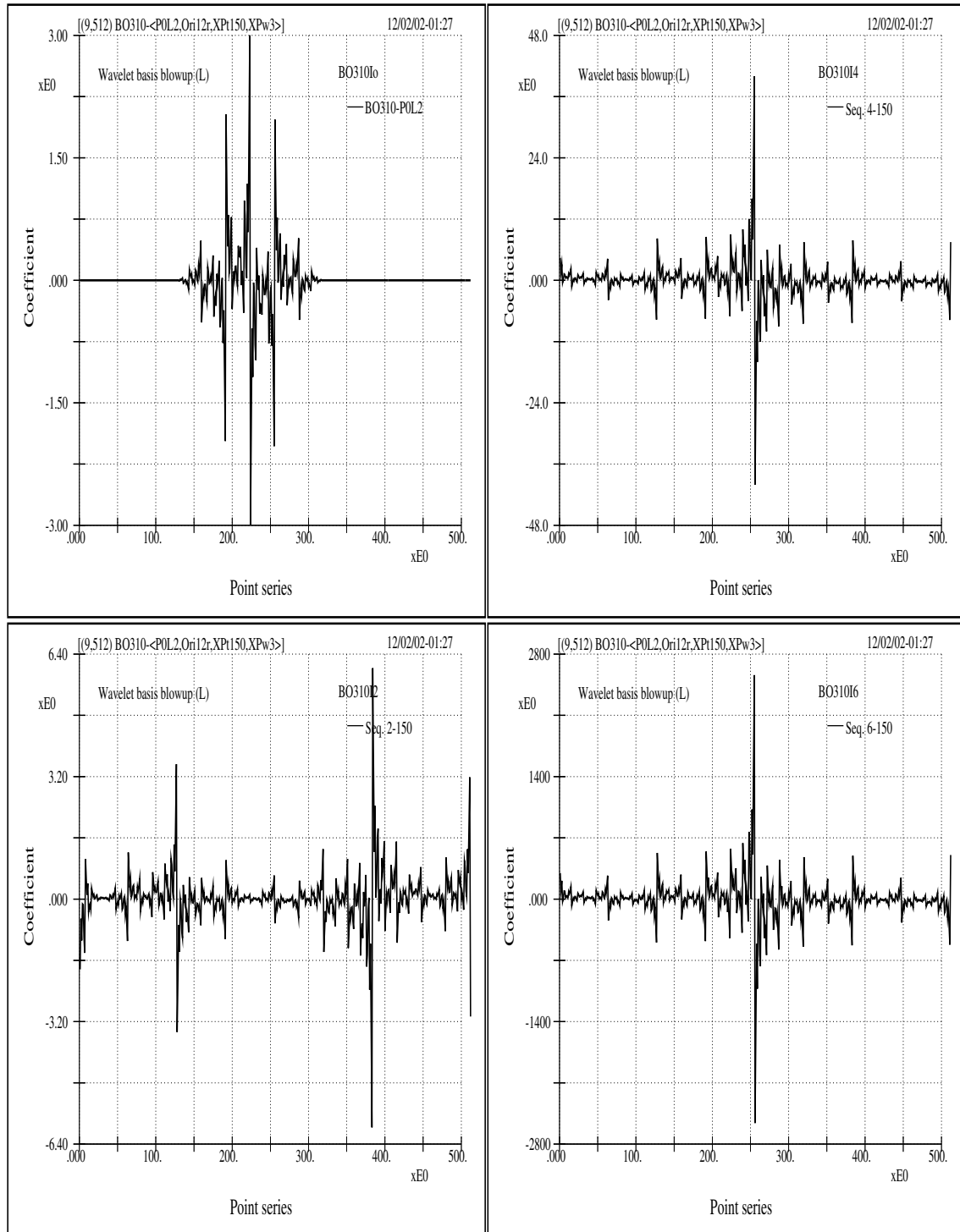


圖 3.2 具有特異或迷人解析特性 (fancy analytical properties) 的仔波往往有非常奇特古怪的波形，其在水波物理探討或應用上可說難得其門而入，這些不論是從熵值大小之表現，亦或其數值收斂行為而言，都可加以驗證或說明。此圖顯示交正交仔波 (bi-Orthogonal wavelet) BO310 其連續暴展 (blow-ups) 之表現。相關數據如下，長度：512 點、單位值仔波係數元之反轉換原點：e12、暴展點：150、階位值：2、階位點：12 (即  $U_2^{12}$ )、暴展比例值： $2^6$ 。由圖可見其非收斂性行為。

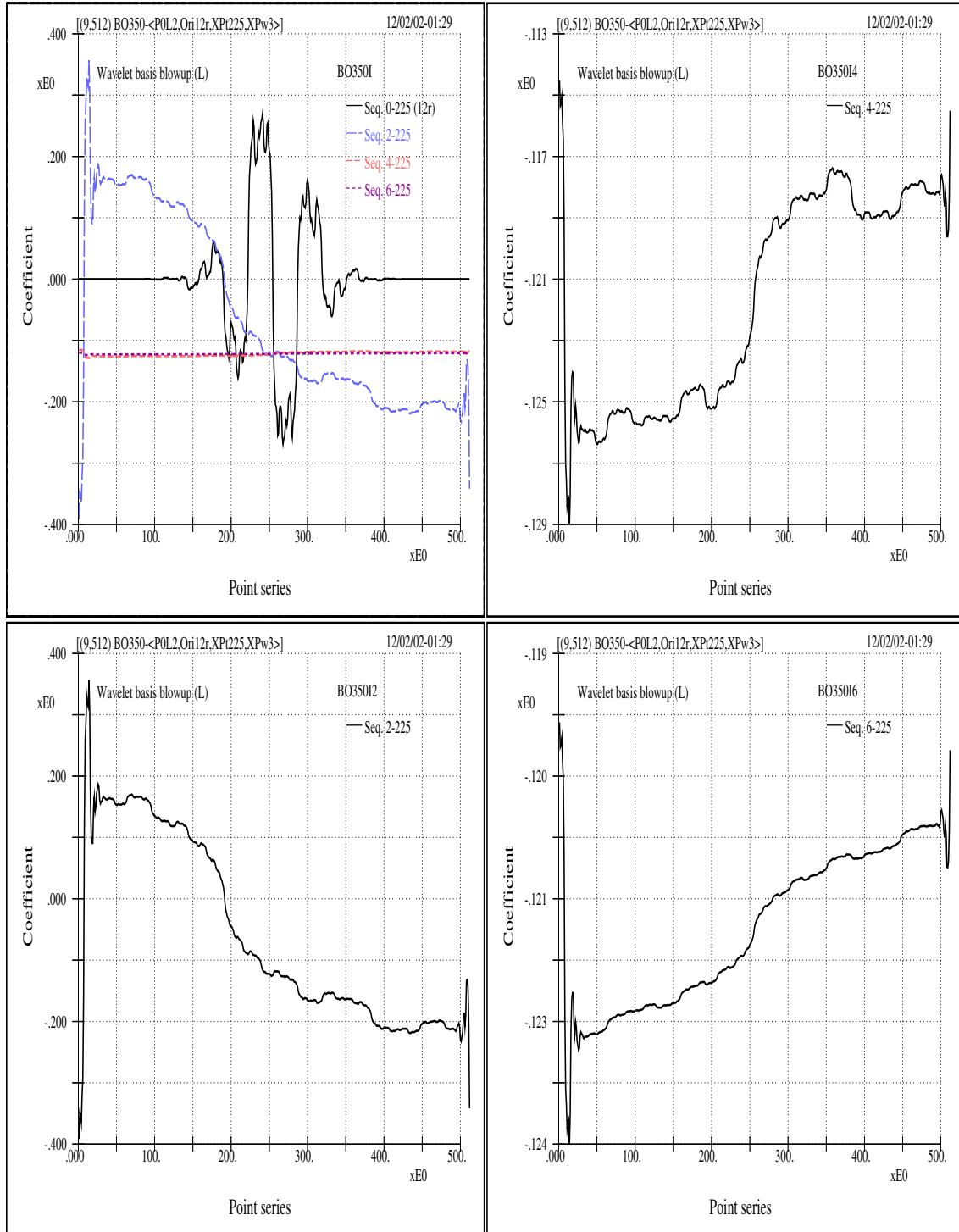


圖 3.3 此圖顯示交正交仔波 BO350 其連續暴展之表現行爲。相關數據如下，長度：512 點、單位值仔波係數元之反轉換原點：e12、暴展點：225、階位值：2、階位點：12（即  $U_2^{12}$ ）、暴展比例值： $2^6$ 。由圖可見其低收斂性與特異傾斜行爲。

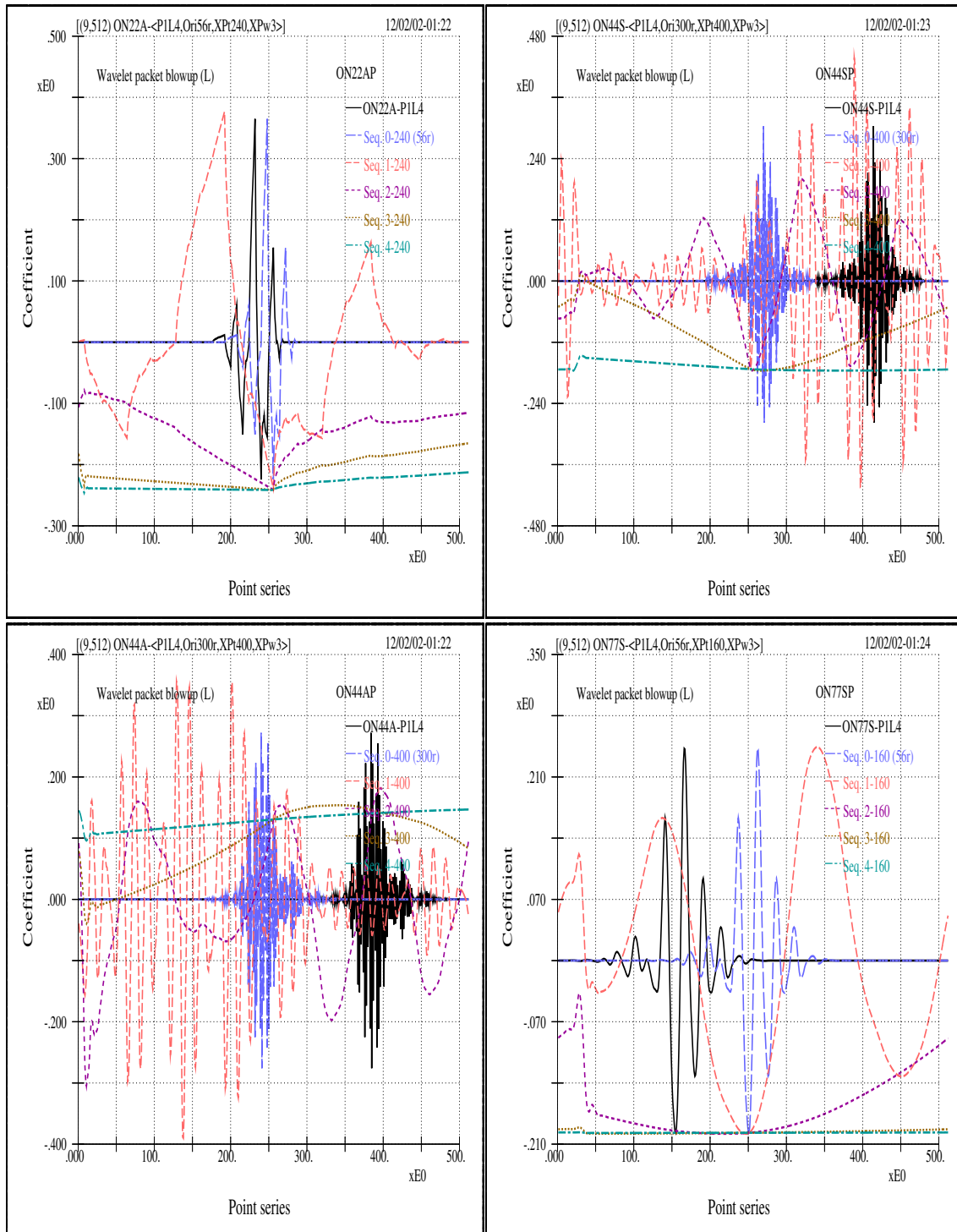


圖 3.4 此圖示正交仔波 ONxxA 與 ONxxS 其仔波包之暴展行爲。相關數據可於各別分圖上的註記取得。

## 第 4 章

### 試驗資料

所分析之資料係為波或流訊號，其係取自一循環水槽之波浪相關試驗，此水槽為橢圓形，具有 5 m 長之直觀測段，其寬高分別為 35 及 45 cm，水深則取 24 cm，在觀測段對向位置設有一可調速之鼓風機及引流水平板，而在觀測段則有一臺可以裝上卸下、並前後移動之上下衝擊式機械造波機，水槽彎曲段則設有數個直立的導流板。波高係以美國德拉瓦大學 ASI 試驗室自行設計製造之容量式波高計量測，水流則是以 TSI 公司製造之二維都卜勒流速儀 (LDV) 測計。試驗條件是取不同風速暨不同史脫克司 (Stokes) 型態波為之，量測點則有數個斷面上的波高及在不同深度之水流。試驗佈置如圖 4.1 所示。圖 4.2 示三種史脫克司型態波之能譜圖。其基礎協鳴 (fundamental harmonic) 頻率分別為 1.4、2.0、2.8 Hz，代表波浪陡峻率 (wave steepness  $ka$ ) 分別為 0.06、0.20、0.30。❖

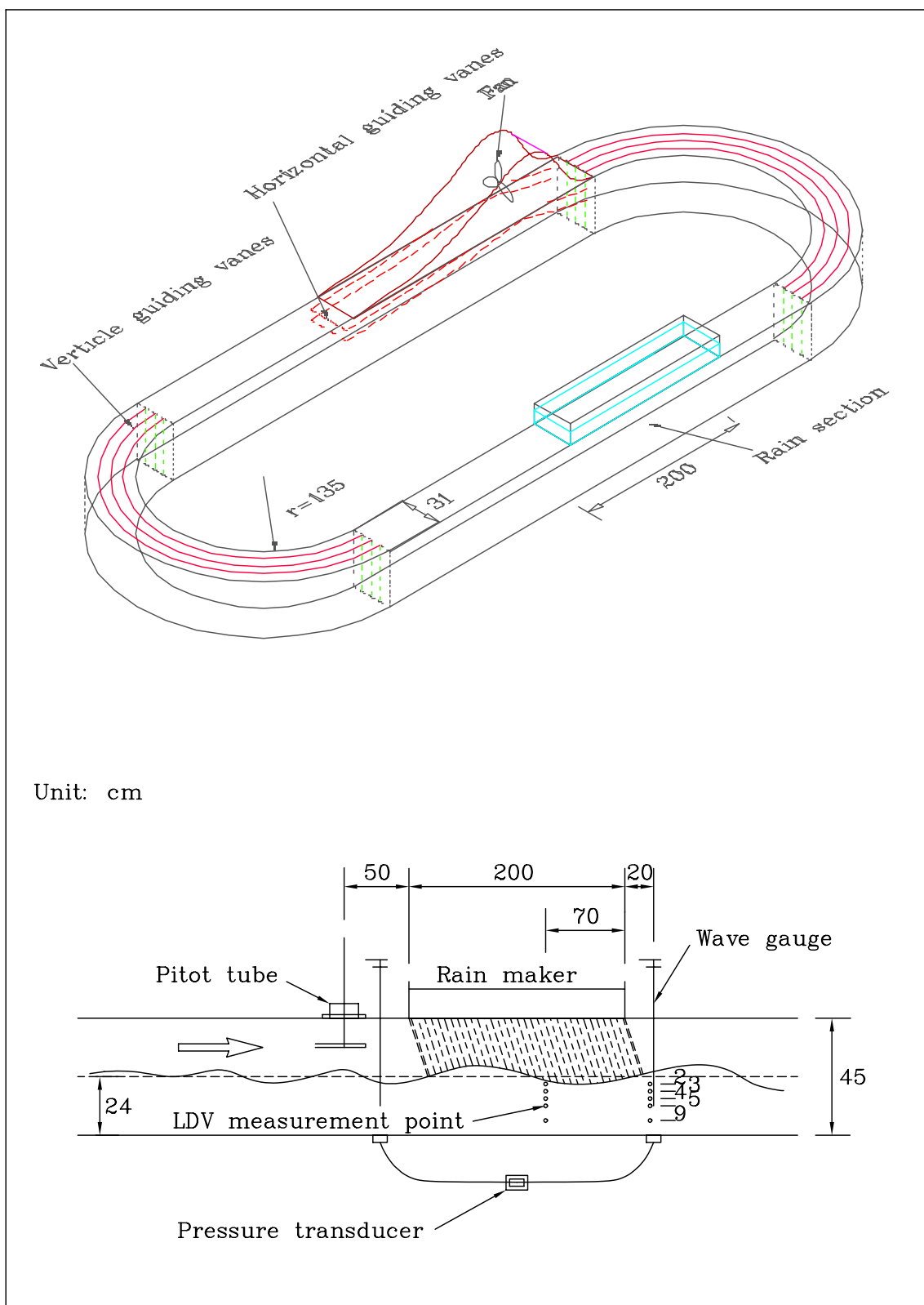


圖 4.1 試驗佈置示意圖。

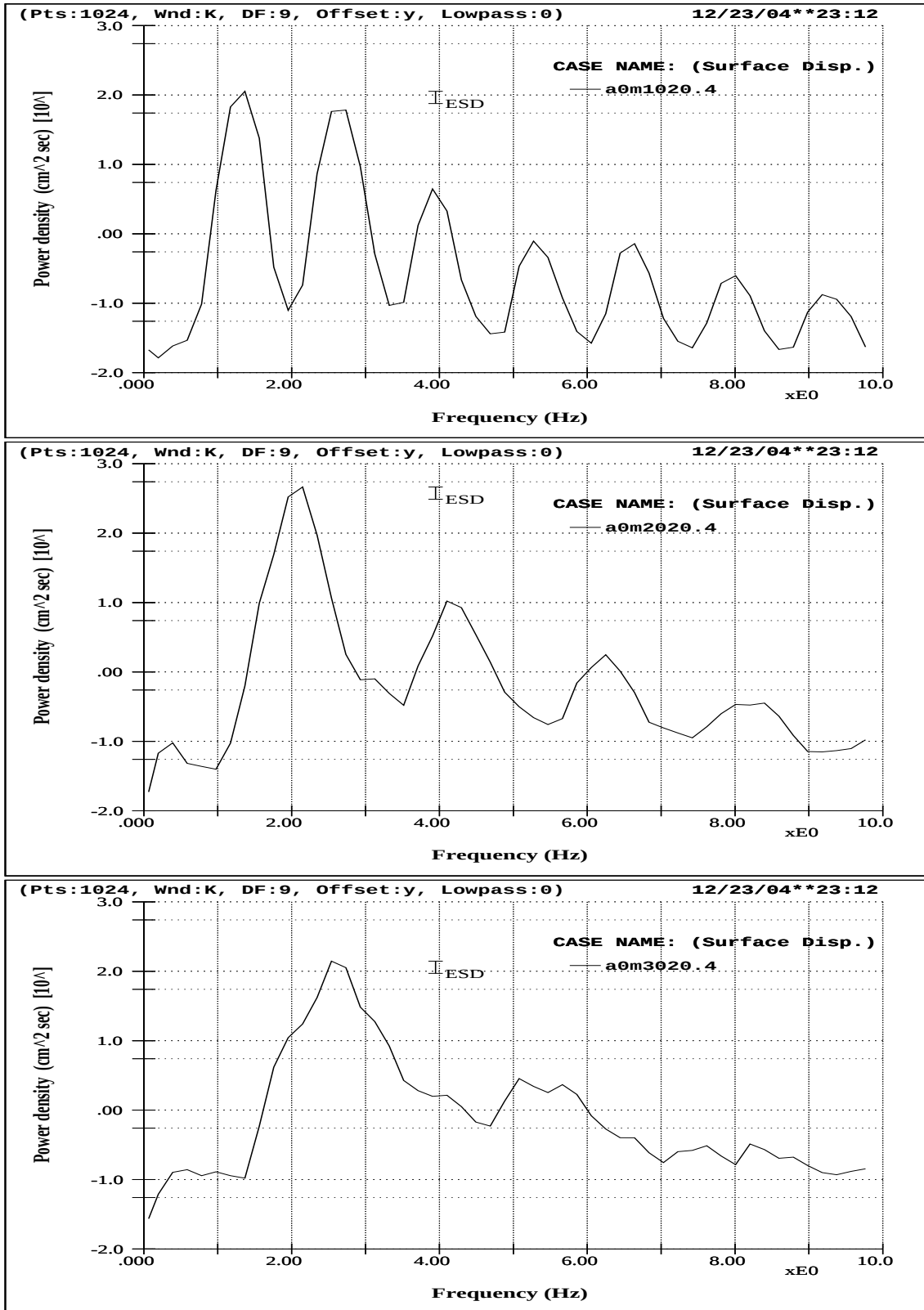


圖 4.2 三種史脫克司型態波之能譜圖。其基礎協鳴（fundamental harmonic）頻率分別為 1.4、2.0、2.8 Hz，代表波浪陡峻率（wave steepness  $ka$ ）分別為 0.06、0.20、0.30。

## 資料長度需求比較

圖 5.1、5.2、5.3 示三種資料長度下，波高與水流間之仔波與波譜共關協振分佈曲線。各圖中之上、中、下分圖其資料長度分別為 1024、2048、4096 點，流速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm，波高是相應於 6 m/sec 之風浪，水流與其中一支波高計同步量測斷面基本上在同一位置（相距 0.5 cm）。圖 5.1 是為仔波者，圖 5.2 與 5.3 是為波譜者，其係選用兩種不同 FFT 參數，主要在自由度大小之差別。由這些圖得以馬上看到一個最突出的結果是：即使只要用 1024 點，仔波共關協振的諸分佈曲線可說已顯現非常良好的趨勢，且它們都已很接近數據資料長度較長下的分佈情形。事實上，在此一試驗條件下，1024 點（相當於 25.6 sec）對一些資料分析觀點而言，其統計可說還是相當非穩態（non-stationary），然而就仔波共關協振的觀點言，所有曲線則已顯示出其甚小之異變行為。至於波譜者其行為表現可說相差非常大，此外有一點可以斷言的是，在高頻部分，波譜共關協振常見有尖凸之峰形，這些可以說沒有實質意義，它們是引入之糙音，其中包含資料處理時區段分割與邊緣效應所肇生成分。

圖 5.4 示另一甚長資料長度下之波譜共關協振，此時所用點數為 9472 點。綜合前述各圖，尚可具體推論如下：

（1）就波譜共關協振而言，資料長度之增加對其共關協振行為之增益改善是非常緩慢的，且其效用越來越不明顯，特別是在能量相對較低之尺度區或高頻帶；（2）就仔波共關協振而言，使用甚少之資料量，其共關協振分佈已具穩態特性，亦即長度增加並不改變其分佈情形，這裡具有三層意義。其一表示仔波共

關協振分析不需要很大的數據量。其二表示就此處試驗水波訊號而言，所取的 1024 點資料長度已可非常適當對水波各成分波加以模擬，用解析的術語言，是說這一長度可以含蓋函基中各函數之延展拓撐長度（support lengths）。其三是說，隨著使用資料長度之增加，此處連續仔波轉換係數其贅餘性所提供的有用訊息亦快速微量化，因而過多的數據其助益不大。（3）比較使用 9472 點之波譜共關協振分佈與仔波者。我們可以查覺兩者間其曲線形態具有某些程度的相似性，這一點得以讓我們作如此的推論：對水波而言，即使是拿此處相關於小水槽中的短週期（亦或短生命期）風生小波而論，以水波來對比於各類屬仔波的波形，那水波可說是極為規則緩變的，這在仔波解析上的數學術語就是說，這樣一個最適函基其規則度（regularity）或可微分性非常高，而另一方面，則是說，幾乎所有「奇特」仔波，都很難在水波研究中一展所長，特別是當我們是著重於物理層面之探討時（Lee and Wu 1996a、2001、2003b）。

上述主要就曲線之分佈作表徵說明，其它可以解說的數理因子尚有：（1）使用正交或非正交函基其所造成之差異性。波譜函基是為正交者，正交函基轉換係數變異性一般均相當嚴重，因而造成數值收斂性甚低。而所用最適函基，則是一個相當鬆散的非正交、亦且連續轉換形的仔波。（2）使用離散轉換時，許多或大部分的轉換係數是對一些對我們所欲探討尺度區間毫無關聯的頻帶區作求算，因而可說這些係數都無物理義涵，換句話說，此時的數據處理有很多都浪費在那些對我們討論內容沒有絲毫助益的求算。比如就波譜共關協振而言，整個進行的頻率區間是 2 點切斷頻率與尼克斯頻率間（即 cutoff 與 Nyquist rate 相應頻率），而這一區間一般都遠遠超出有義物理頻率，舉例言，此處水槽風生波主頻帶不逾 1 至 4 Hz，此外尚可視風速調小頻帶區範圍。反觀此處仔波共關協振就沒有這一問題，其所有無關緊要的頻帶區都可以不必求算，只要針對研究有義區間作數值轉換即可，此外其解析點位置與密度可任意給定。（3）對正交轉換或離散轉換而言，由於其解析點固定且點數有限之限制，致使真確尺度無法映投於正確解析點上，因而造成了折映投射現象，而再加上離散或正交轉換其移位非不變性所造成效應，遂形成相當擾人的變異與不定性。相關現象說明可參考圖 2.1、2.2、3.2、3.3、3.4、8.5。❖

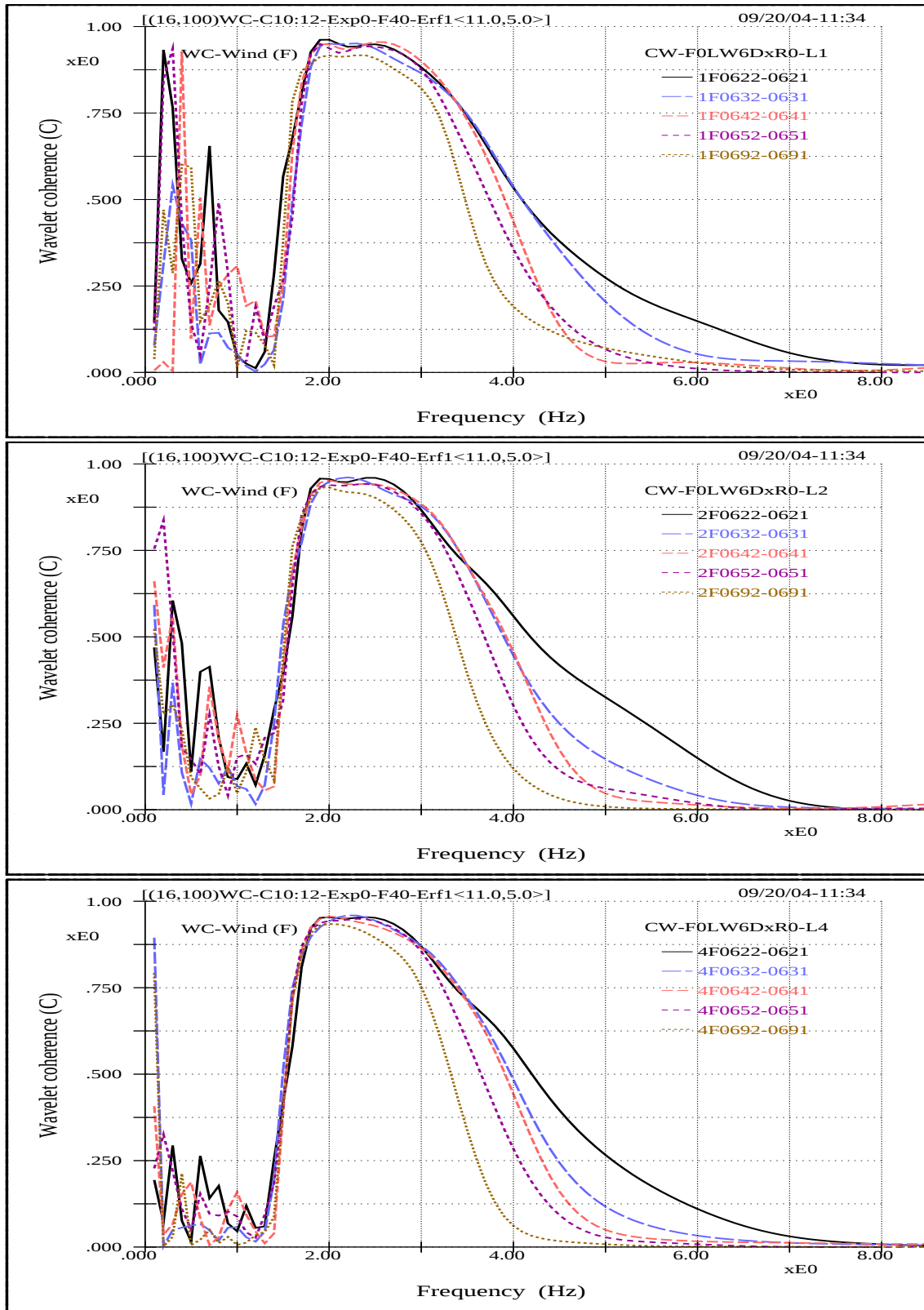


圖 5.1 三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之仔波共關協振分佈曲線。上、中、下圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。水速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。

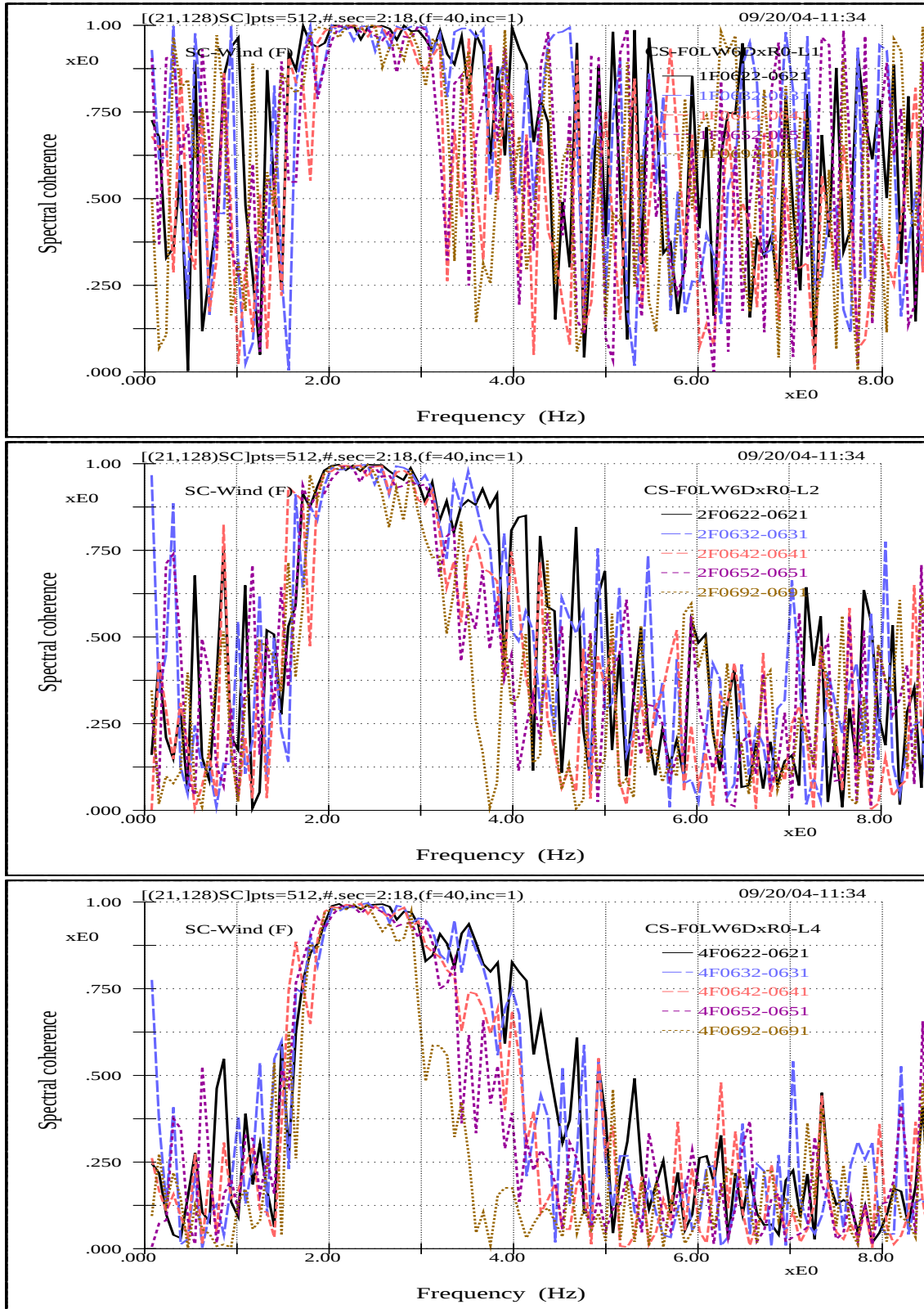


圖 5.2 三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之波譜共關協振分佈曲線。上、中、下圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。水速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。此圖之 FFT 區段分割長度為 512 點。

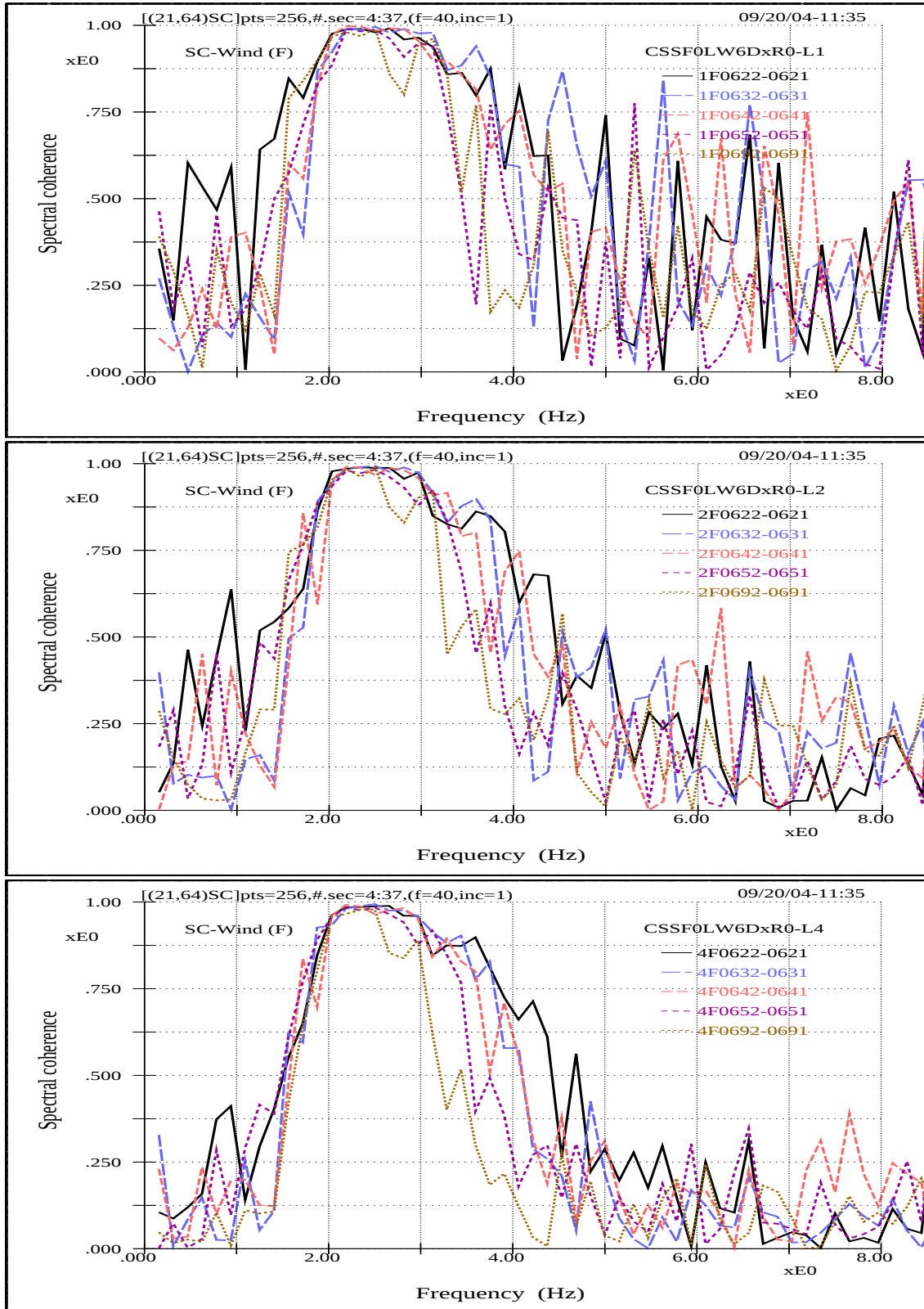


圖 5.3 三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之波譜共關協振分佈曲線。上、中、下圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。水速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。此圖之 FFT 區段分割長度為 256 點。

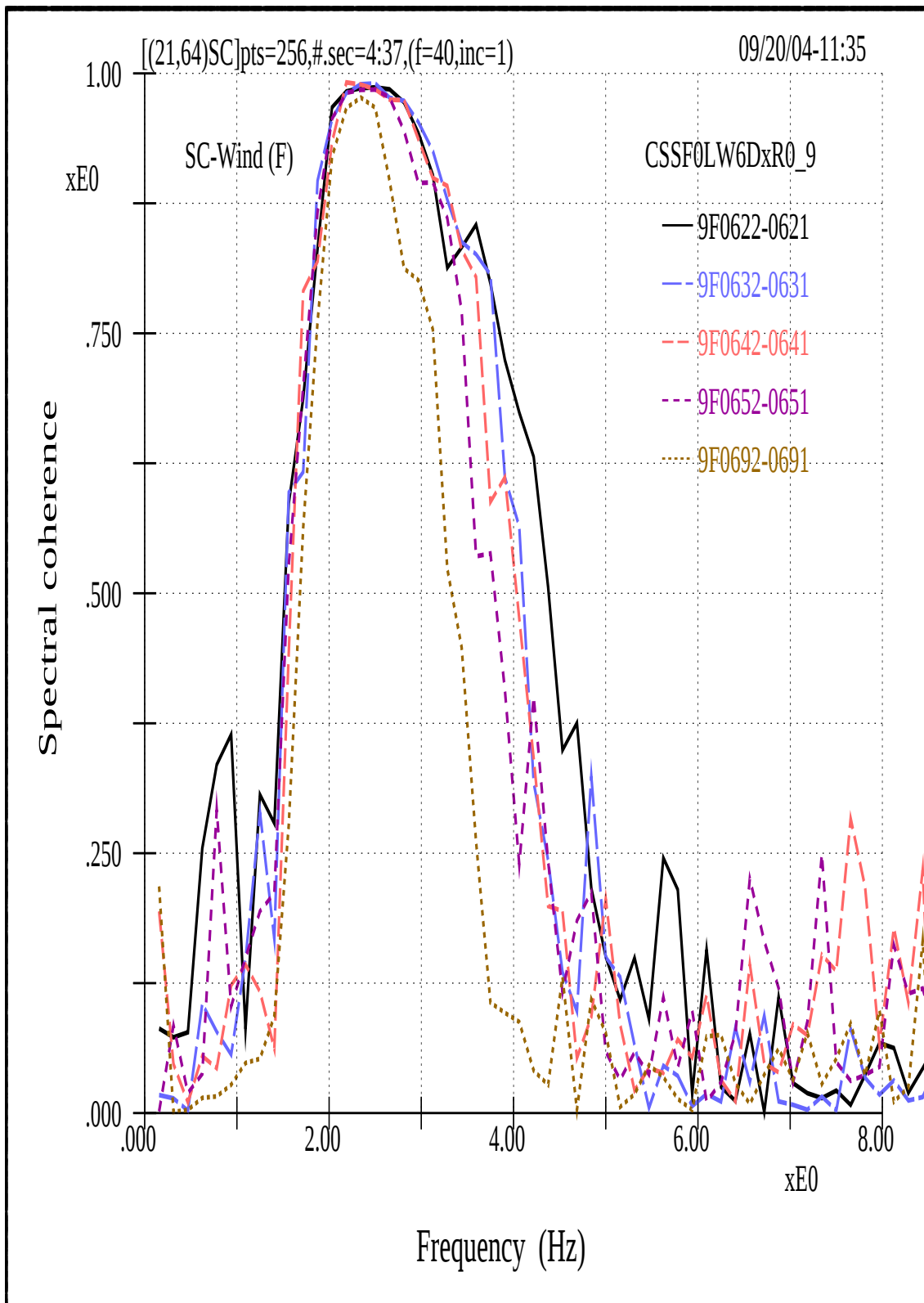


圖 5.4 資料長度為 9472 點下之波譜共關協振。

## 數複與實數函基共關協振

在仔波共關協振的關係式中。 $\psi$ 之取用可以為實數、虛數、亦或複數，而事實上大部分已知仔波函數以實數居多。此處我們選用的函基是為複數，而本文中大部分圖所示之曲線亦是以此函基所得，唯在這裡我們另外亦取其實數部分作共關協振的求算，此一實函數可視為調振下的高斯函數（modulated Gaussian function）。圖 6.1 表示在三種不同風速下（即 6.1、5.1、與 4.0 m/sec）波高與水流速共關協振分佈情形，上、下分圖分別表示使用複、實數函基之轉換。一般而言，取實數轉換可以強化共關協振演化之差異行為，也就是把曲線相互間之差別拉大，這一點有時可以產生有助於判別演化效應或作用趨勢的好處。此外尚可容易看出一些物理現象。比如在小風速下，水槽波浪大致仍是處於一種增益成長的狀態，亦即類似於吹風距離之效應。再者，由實數轉換之曲線演化趨勢可以察知隨著風速之增加，主能量的分佈頻寬變窄，而其共關協振值則明顯提升，這一現象亦隱含著波浪成長、或成熟效應，亦且表示著諸成分波之間的相互作用，而其能量有交互傳承與遞轉行為，亦即相關於水波不穩定性、側頻遞傳不定性、或所謂的Fermi-Pasta-Ulam recurrence phenomenon（Debnath 1994；Lee and Wu 1997）。另有一點可以加強說明的是，相對能量甚低或沒有能量的成分波，其實數函基共關協振值亦同樣幾乎都可忽略。圖 6.2 以一波浪陡峻率（wave steepness  $ka$ ）為 0.20 之史脫克司型態波之波場其三個量測點之時頻分佈演化情形說明側頻不穩現象暨FPU遞嬗反覆行為。三個分圖其量測點與造波機之距離分別為 2.3、3.5、4.5 M。

圖 6.3 另示高波浪陡峻率 ( $ka = 0.30$ ) 下一個史脫克司波其波高與不同深度水流速之間的共關協振，其上圖為仔波者，下圖為波譜者。同樣地，我們可以由實數仔波共關協振圖清晰地看到不同深度時曲線演化趨勢，此時深水處有較高之最大共關協振值，此乃蓋因此史克脫司波其非線性行為很大，反觀波譜者，其曲線大概是什麼也分辨不清。 ❖

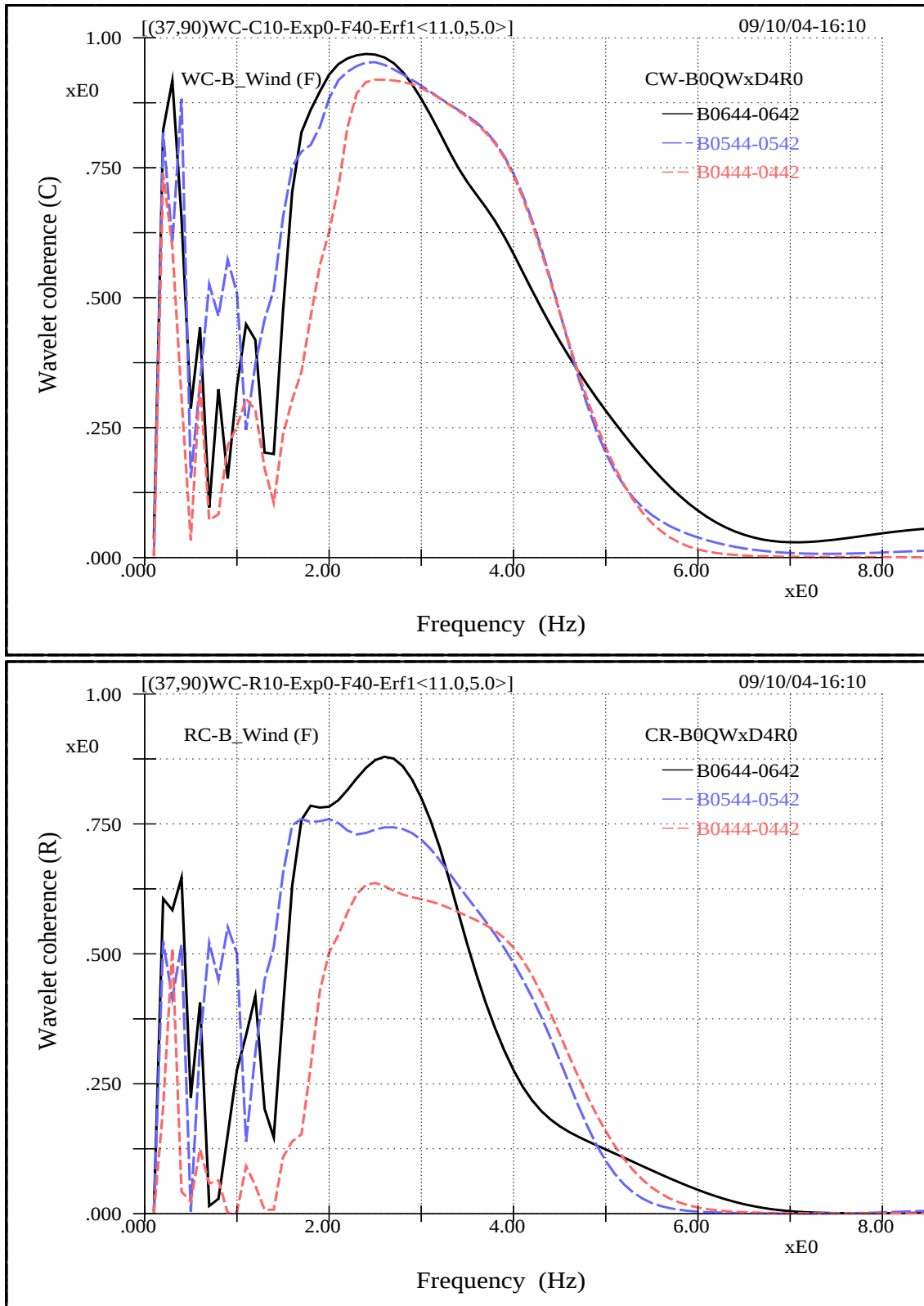


圖 6.1 在三種不同風速下，即 6.1（實線）、5.1（長虛線）、與 4.0（短虛線）m/sec，波高與水流速共關協振分佈情形，上、下分圖分別表示使用複、實數函基之轉換。其所含能量現象參見內文。

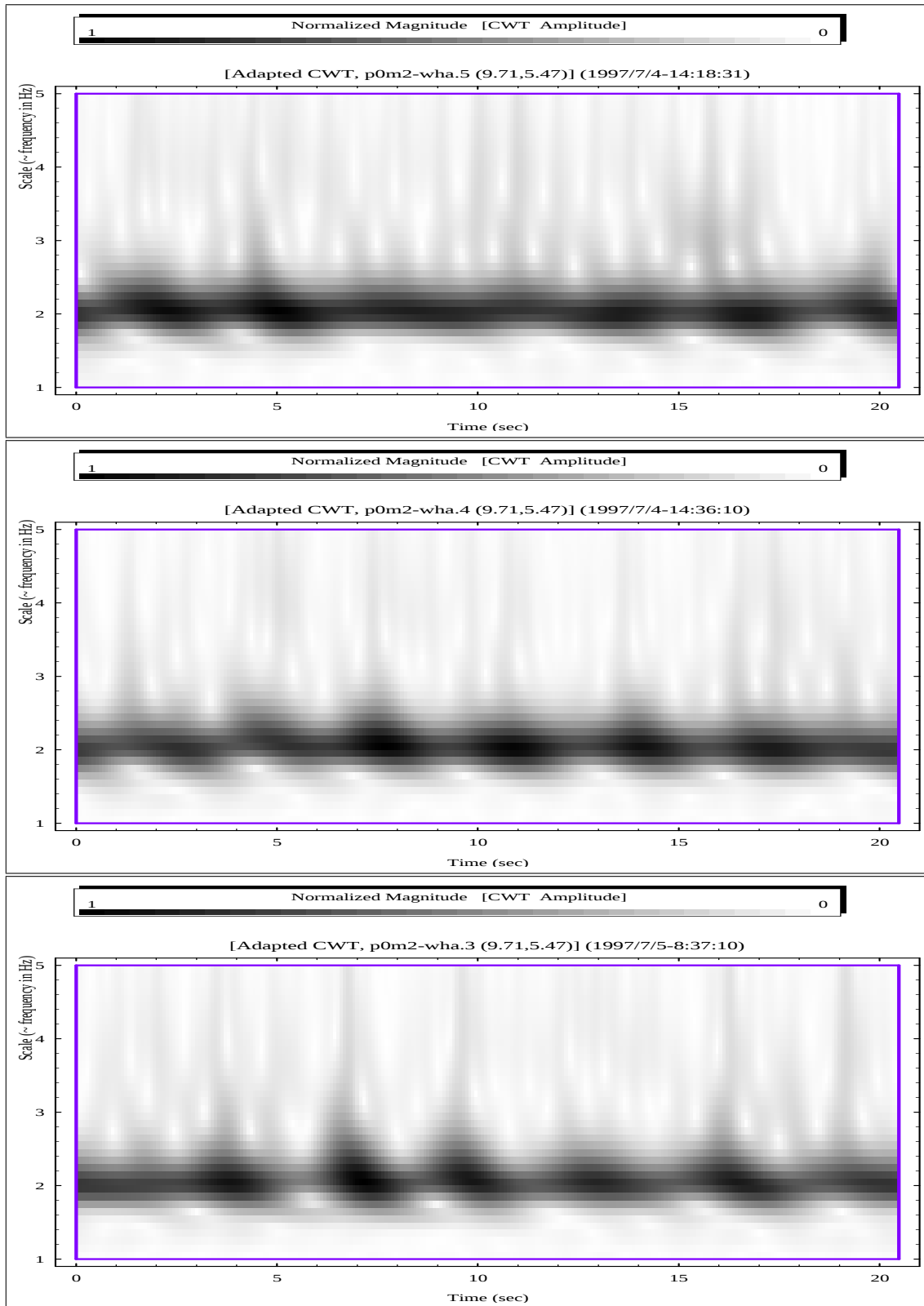


圖 6.2 此圖以一史脫克司型態波之波場其時頻分佈演化圖說明側頻不穩現象暨 FPU 遞嬗反覆行爲。此一史脫克司型態波之代表波浪陡峻率 (wave steepness  $ka$ ) 爲 0.20 三個分圖分別表示三個不同量測點，其與造波機之距離分別爲 2.3、3.5、4.5 M。

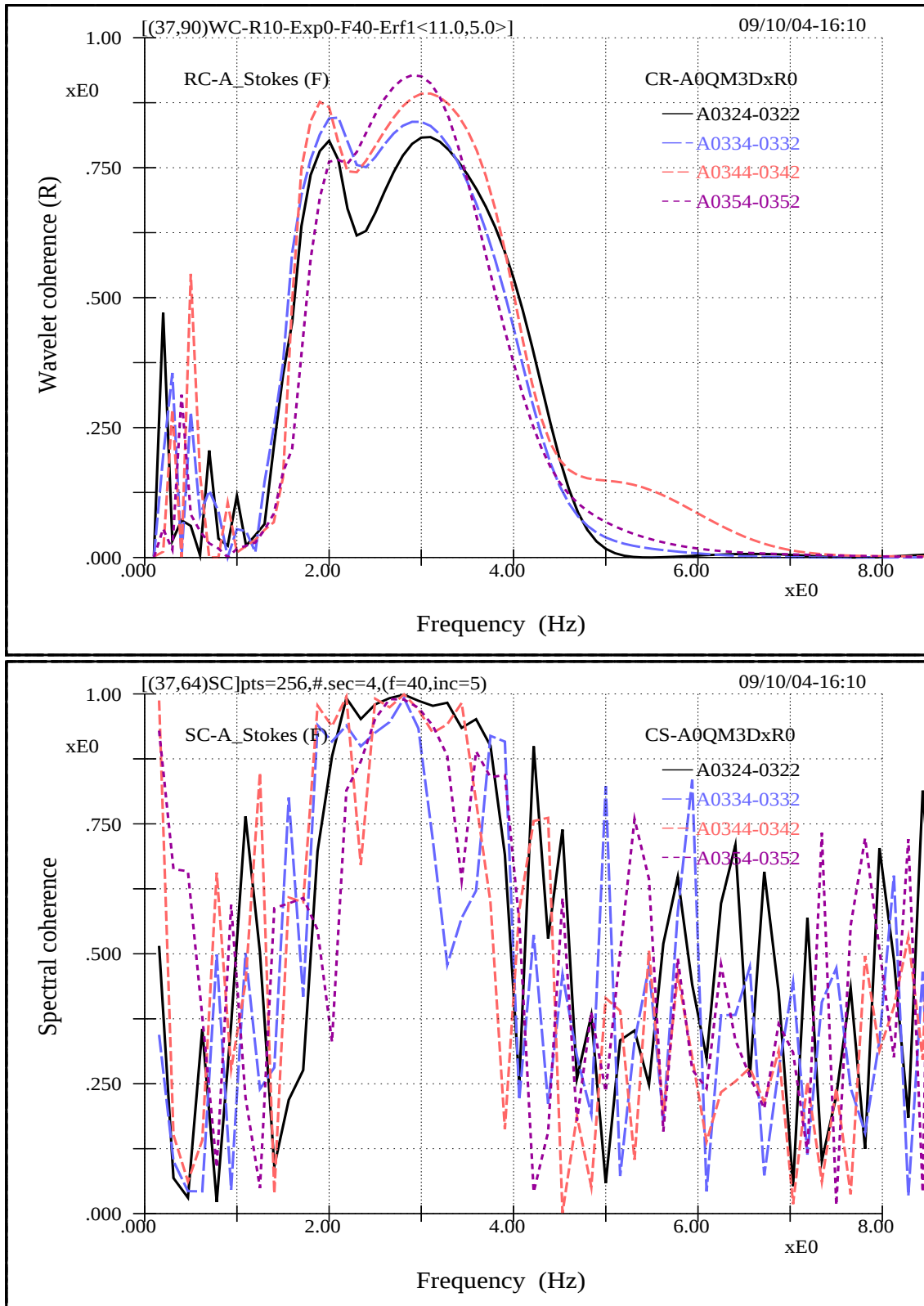


圖 6.3 仔波實數函數共關協振（上圖）與波譜者（下圖）比較。所用波浪為一高波浪陡峻率之史脫克司波（ $ka = 0.30$ ），共關協振為波高與不同深度水流速之間。由仔波之圖可見較深處主頻帶區有最高之共關協振數值。

## 訊號品質之影響

在 LDV 的量測上，可同步量測水平與垂直之兩個水速度分量，由於此 LDV 儀器設備屬於較早期之系統，其光輸出功率不是很高，加以儀器使用已有一段時日，其中一個維向的光束輸出功率劣化，其最大功率僅能調校至另一維向輸出值之約 40%，此一能量差異造成了兩個水速度分量訊號品質之明顯差異，低功率之訊號常伴隨有階梯狀之線形。圖 7.1 與 7.2 分別表示兩個資料抓取速率（40 與 200 Hz）下之高低品質之典型水速訊號與同步量測之波高。由兩圖可見流場有較高紊亂度或較高頻訊號，亦或可說是波場與流場量測反應變化率屬於不同位階，因而探討波流共關協振時資料抓取速率不需太高。

圖 7.3 乃為三個訊號相互間之共關協振比較，上分圖表仔波者，下分圖表波譜者，這裡以一史脫克司型態波為例，其實線係為良好水速訊號與波高之共關協振，另二線則含有較低品質水速訊號者，圖中可看出仔波者其表現較波譜者來得理想合理，對仔波者而言，含較低品質之曲線可說一致下降，可是對波譜者，它們在主頻區的峰值未見下降，而在主頻區外的曲線則變異跳動甚大。此外，對仔波者而言，兩條含較低品質訊號的曲線可說非常一致，近乎重疊，這一點是很合理的，蓋因波高訊號與良好水速訊號可說是二位一體，因而第三者與其個別之共關協振應是相同的，從另一角度看，這些曲線驗證了存在有非常良好的 LDV 量測。❖

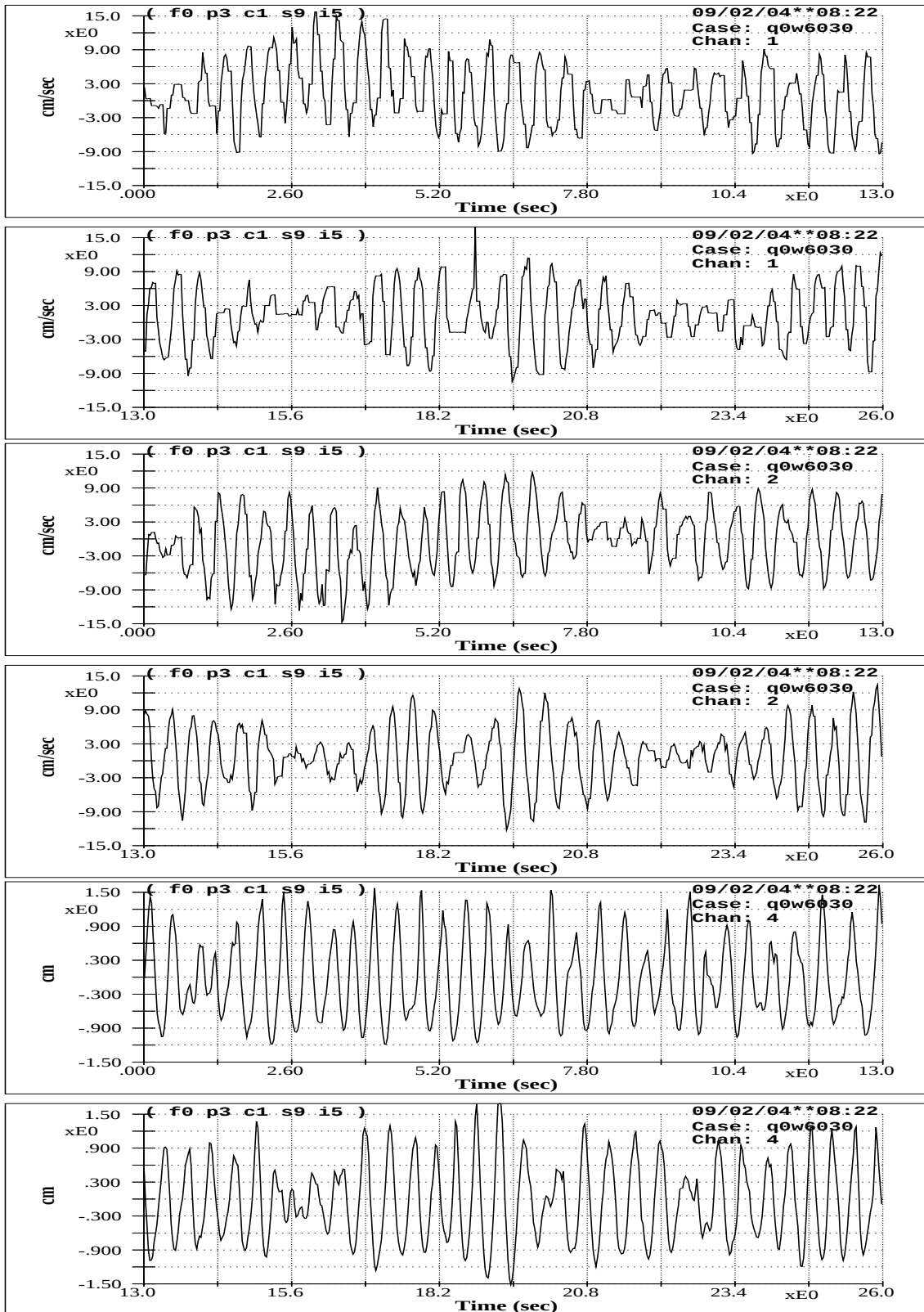


圖 7.1 同步量測之低（上兩分圖）高（中兩分圖）品質之 LDV 水速訊號與波高（下兩分圖）訊號。此圖資料抓取速率為 40 Hz。

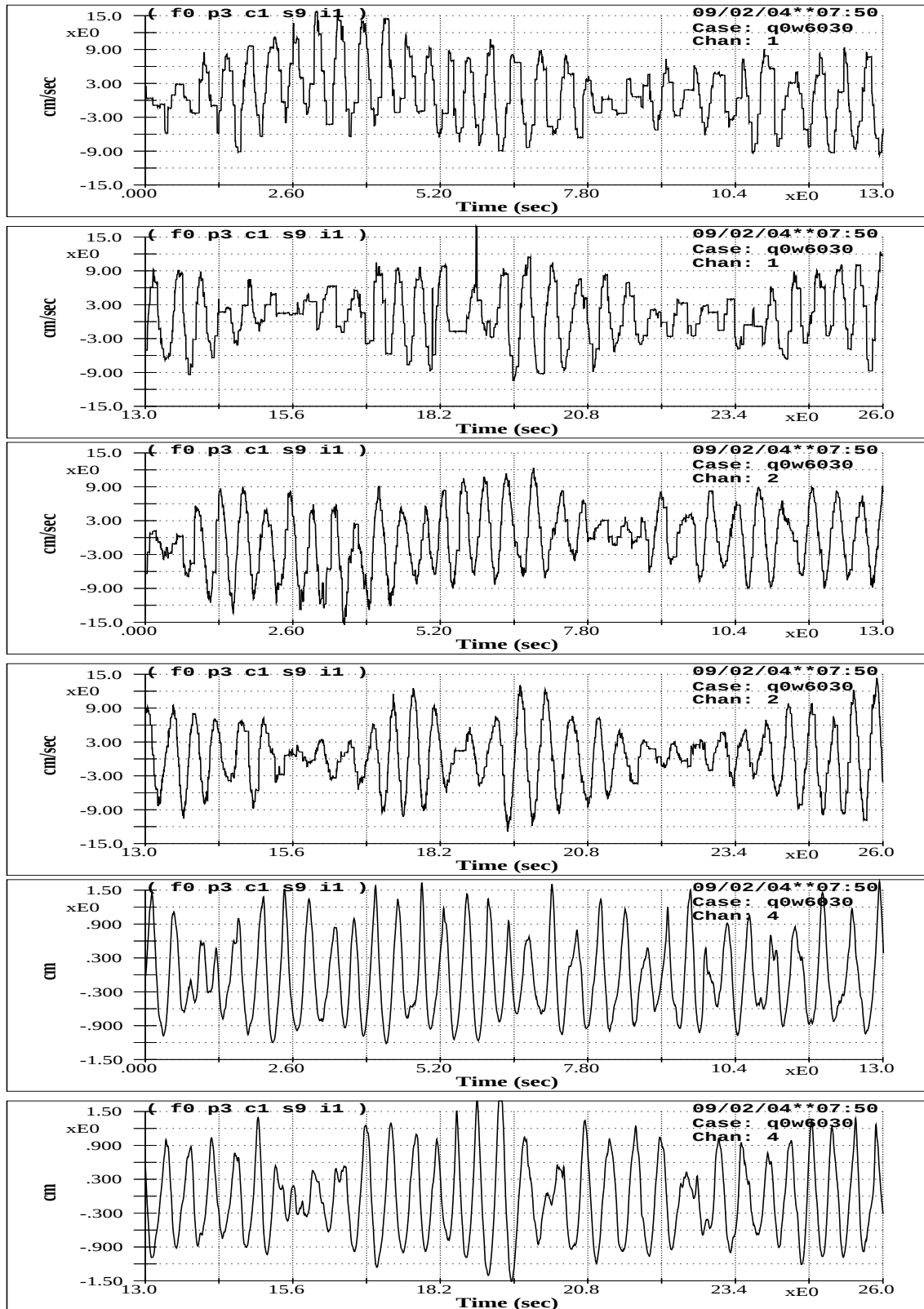


圖 7.2 同步量測之低（上兩分圖）高（中兩分圖）品質之 LDV 水速訊號與波高（下兩分圖）訊號。此圖資料抓取速率為 200 Hz。由圖可見流場有較高紊亂度或較高頻訊號，參較前一圖，或可說是波與流量測反應變化率屬於不同位階，因而探討波流共關協振時資料抓取速率不需太高。

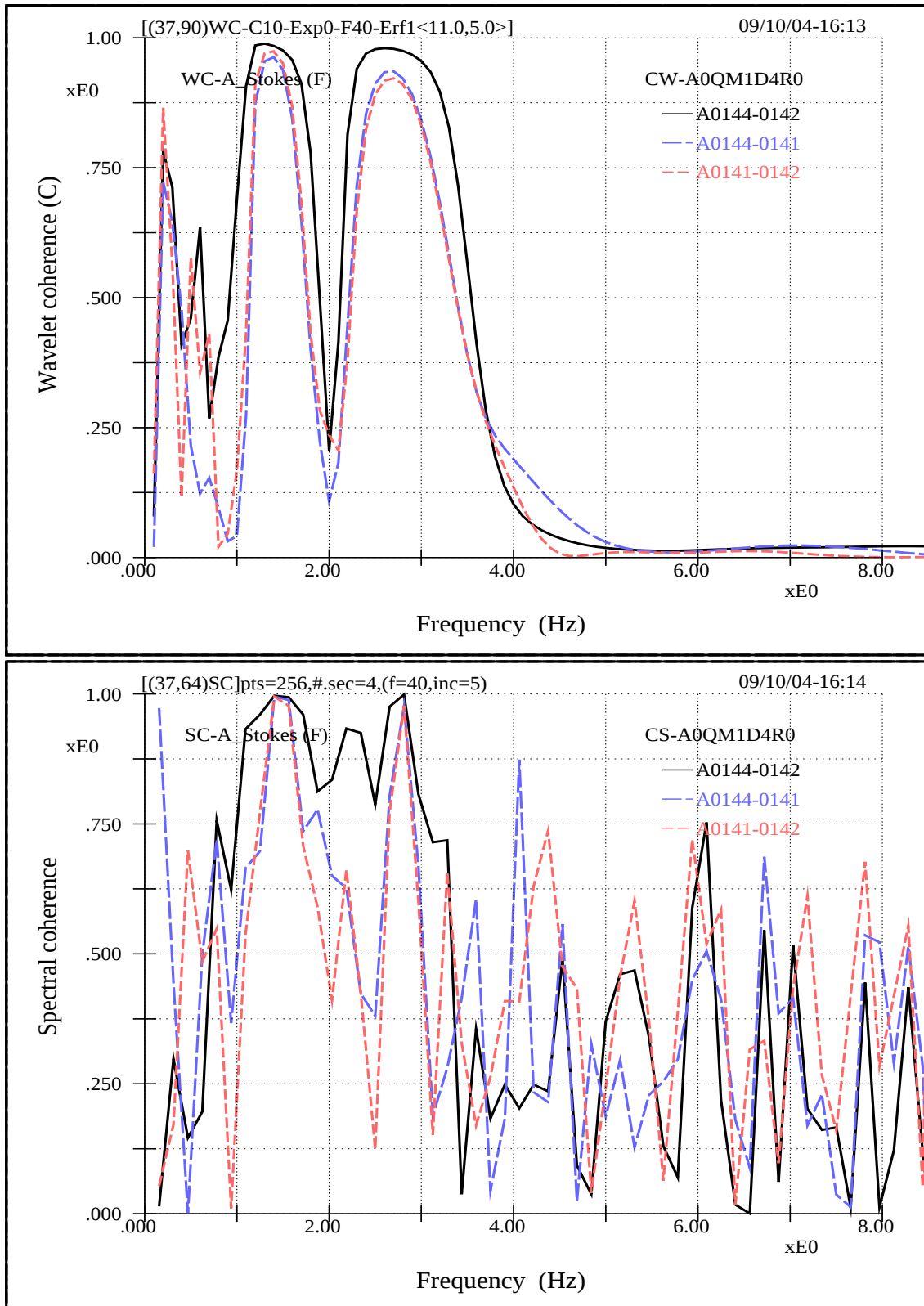


圖 7.3 在一史脫克司波浪下 ( $ka = 0.06$ )，不同品質訊號相互間之共關協振曲線。其實線係為良好水速訊號與波高之共關協振，另二線則分別為低品質水速訊號與波高間者、暨高低品質水速訊號間者。上分圖表仔波者，下分圖表波譜者。

## 相位糙音之影響

圖 8.1 與 8.2 分別表示仔波與波譜者其在不同波浪陡峻率下之司脫克司波其不同水深處水流速相互間的共關協振。對個別的圖而言，其量測都是在相同的試驗波浪條件下為之，上部分圖為小波浪陡峻率（ $ka = 0.06$ ）者，下部分圖則為大波浪陡峻率（ $ka = 0.3$ ）者。由仔波上部圖可見，即使對相當穩態狀況下的史脫克司波而言，其因非同步量測而產生的相位糙音可說也已是很明顯，這一情形可說具體的反應移位而非不變性之效應，唯此處之移位為時移位，不過由仔波上分圖還是可見深水處之間有較高共關協振。至於兩個下部分圖，則已顯現幾乎找不到任何有義的共關協振趨勢。同樣地，對仔波者而言，其共關協振若不顯著的話，它的曲線不會有甚高的起伏跳躍，但對波譜者而言，則每個地方都顯現突兀的高低峰。

上面為時移位效應，接下來我們檢視空間移位相關的相位糙音，如圖 8.3 與 8.4 所示。此處取上、中、下游的三支波高計同時量測所得波高相互間的共關協振為之，同樣以前頭之兩個史脫克司波為例，此三支波高計其上中游與中下游之分隔距離分別為 120 及 10 cm。很顯然地，我們可以由圖直覺感受到仔波共關協振與波譜共關協振相對的良莠性。就仔波而言，由於中下游之間距只有 10 cm 故其共關協振值明顯來得大，再者，其於高頻區之曲線則亦較長距離之共關協振顯著提升，此一行為，表現出小波浪生命期物理現象。至於長距離兩個分佈線在大波浪陡峻率下，主頻帶之共關協振值降為甚低，則亦輔助說明此一情形的非線性行為相當顯著，而各成分波浪間有著能量遞轉回送之情形，另及其成分波之相位

衍變，並與移位非不變性偶合，因而產生重大相位糙音。

圖 8.5 另以數值模擬來說明模糊效應與相位糙音所可能帶來之巨大影響，其係以兩個相鄰尺度之仔波合成訊號的富立葉能譜加以顯示。圖中上分圖示一 1024 點序列之最小兩個相鄰尺度之 Lemarié 仔波合成訊號，其左脈動係為相應於單位仔波係數元  $e_{600}$  之仔波反轉換，右脈動係為相應於單位仔波係數元  $e_{470}$  之仔波反轉換。此一圖再次充份顯示時變性與相位性這兩個因子對富立葉頻譜亦或正交函基其相關應用分析所可能帶來之巨大影響。

此處之說明，並參照前些節的一些現象，我們可以作如下的論定：即使仔波共關協振之表現是遠較波譜者良好，但其所受相位糙音之影響乃很明顯，亦是仍有待克服的問題。❖

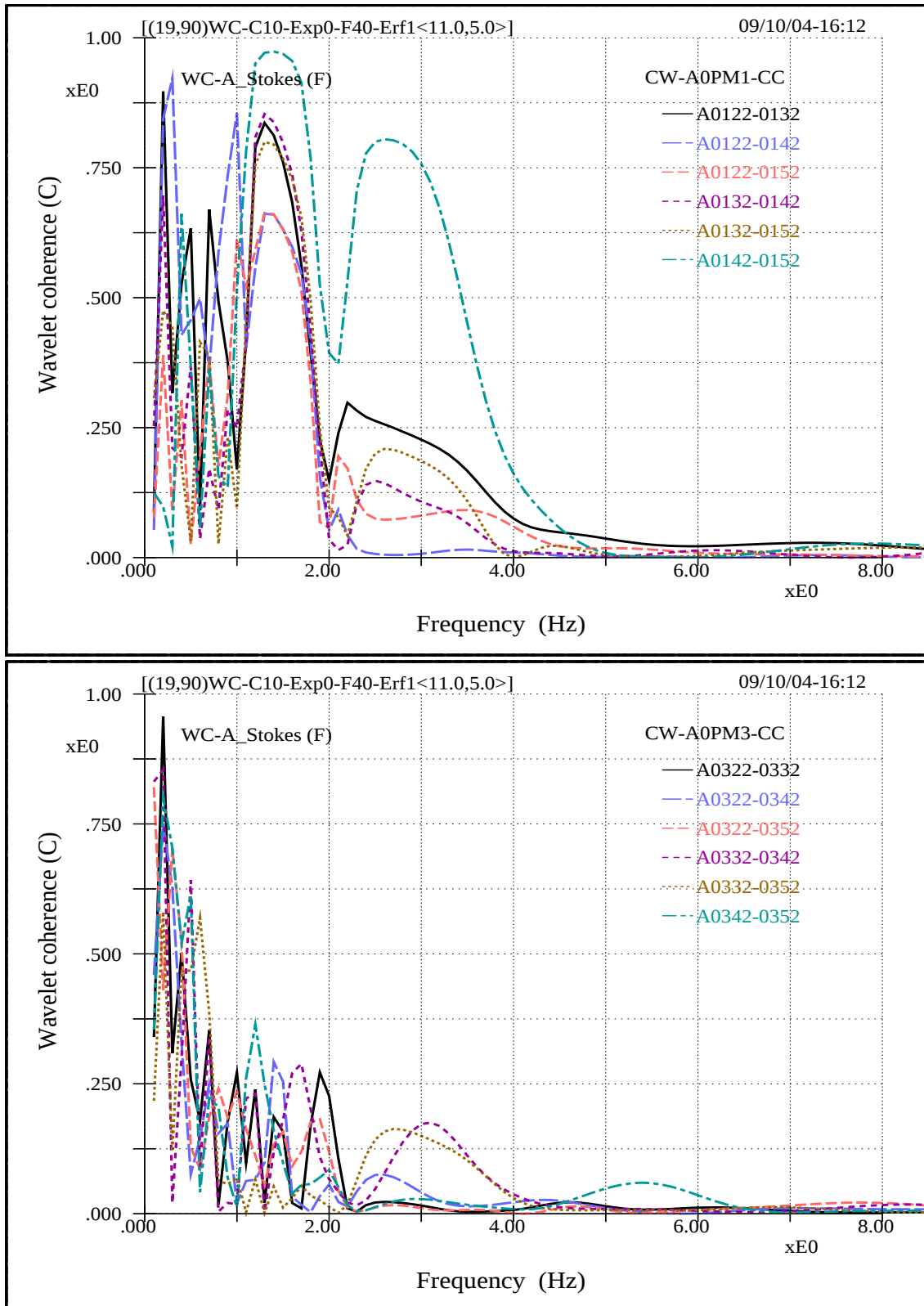


圖 8.1 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其不同水深處水流速相互間的仔波共關協振。此圖顯示非同步量測所帶來之影響（不同水深之量測所生之時移位效應）。

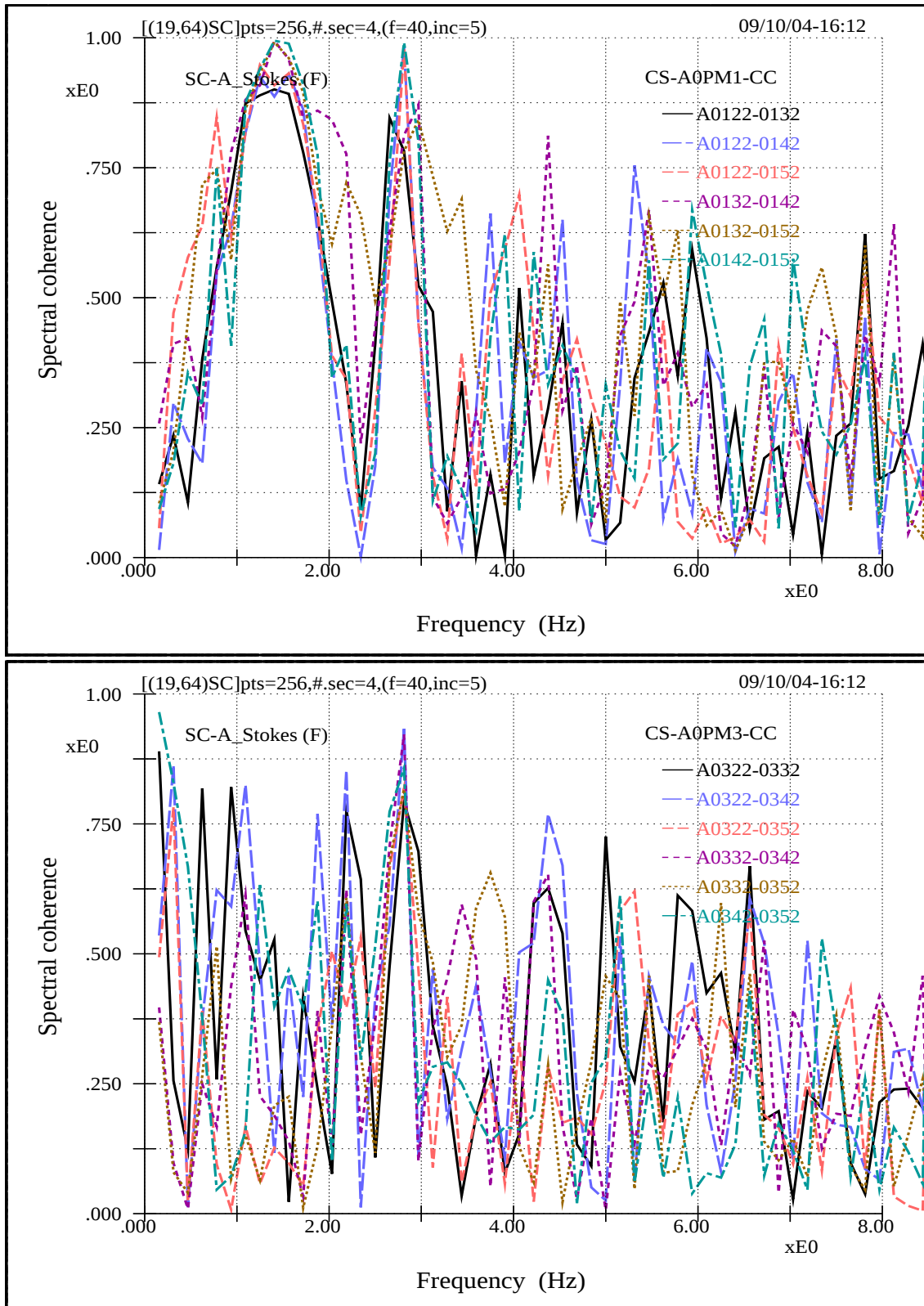


圖 8.2 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其不同水深處水流速相互間的波譜共關協振。由圖可見非同步量測所帶來之影響較仔細波者更為顯著。

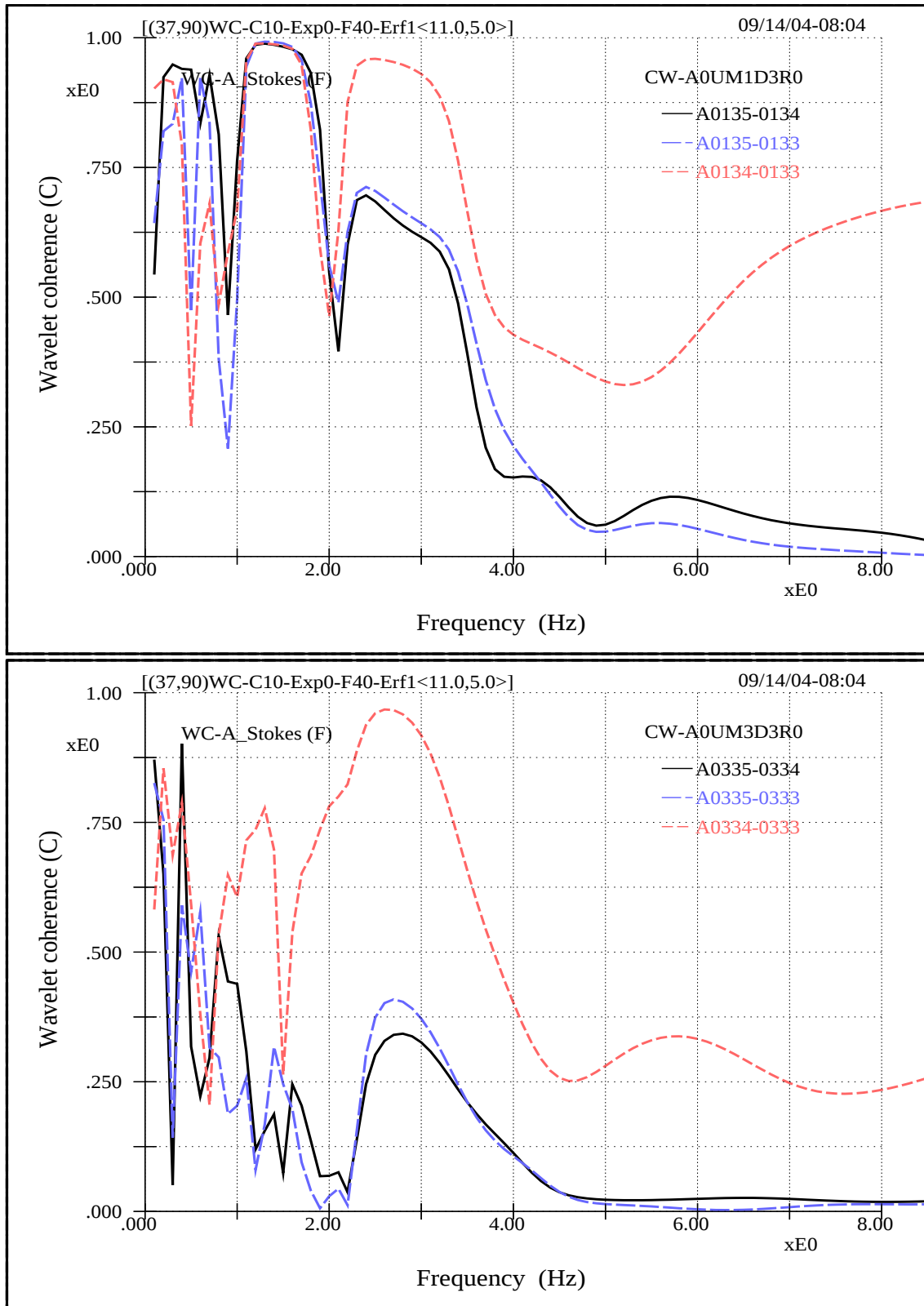


圖 8.3 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其  
上、中、下游的三支波高計同時量測所得波高相互間的仔波共關協振。此圖顯  
示空間移位效應，相關解說參見內文。

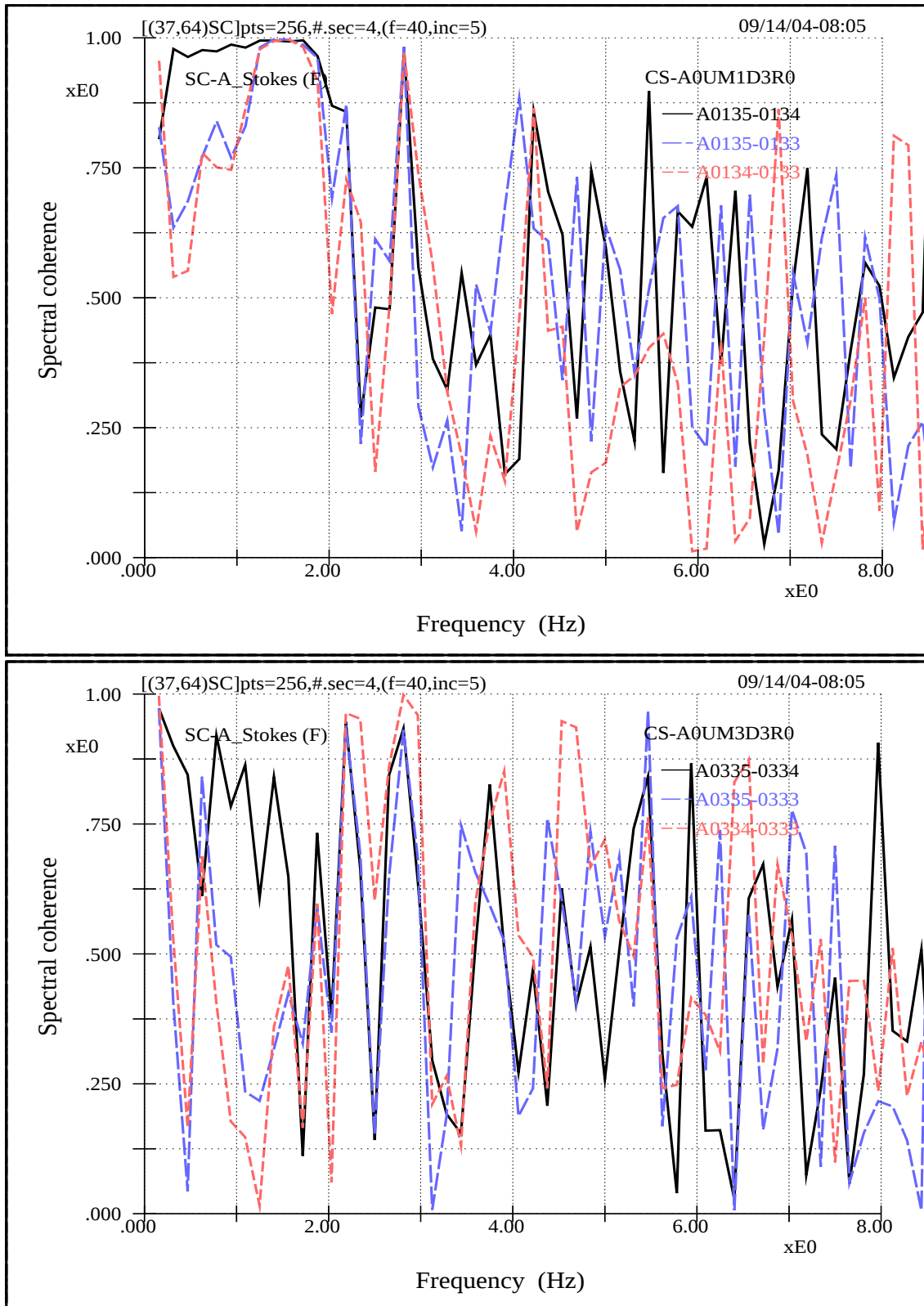


圖 8.4 兩個高（下圖， $ka = 0.3$ ）低（上圖， $ka = 0.06$ ）波浪陡峻率之司脫克司波其上、中、下游的三支波高計同時量測所得波高相互間的波譜共關協振。與仔波者比較，可明顯看出兩者之差異表現。

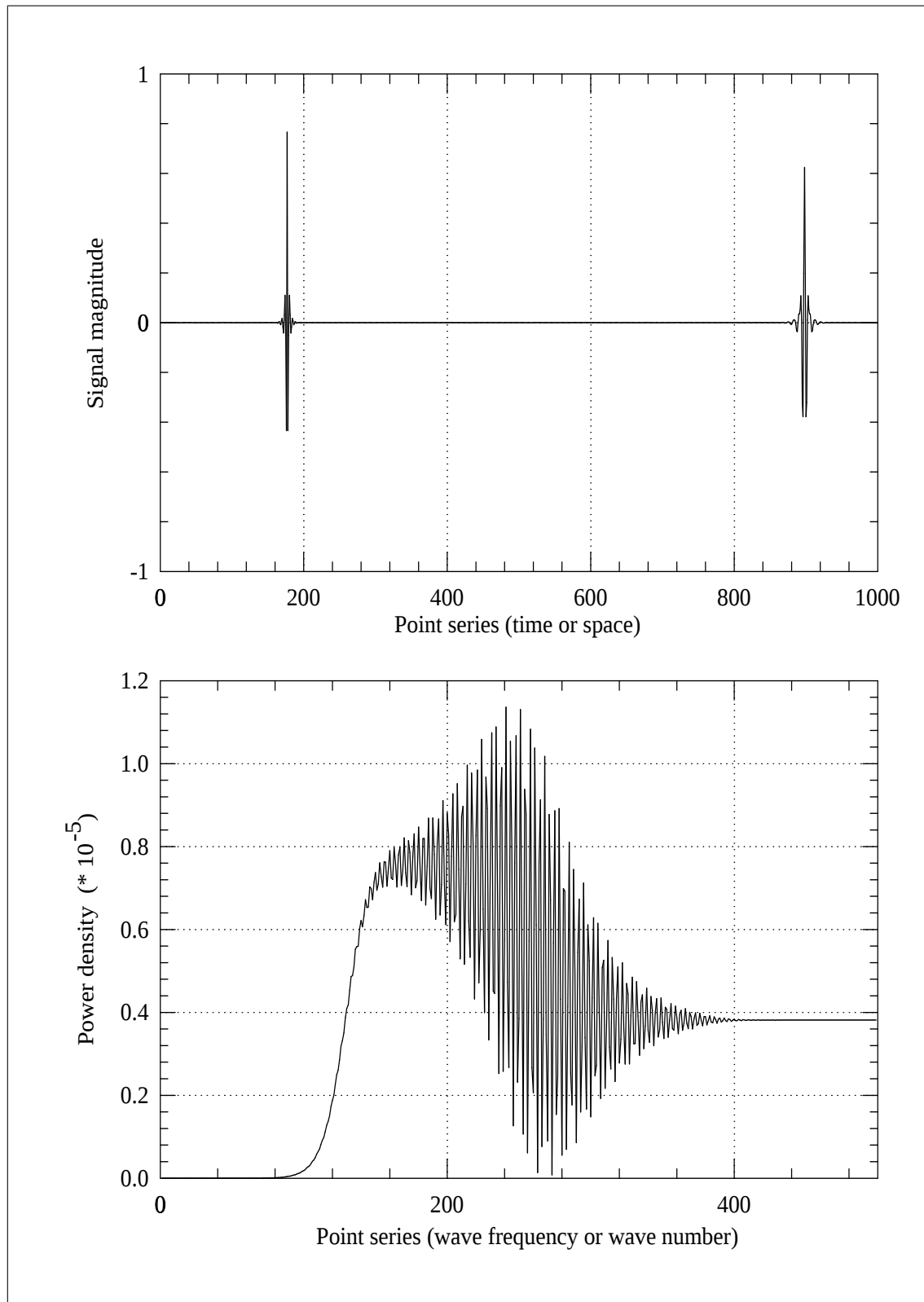


圖 8.5 本圖以兩個相鄰尺度之仔波合成訊號其富立葉能譜說明模糊效應與相位糙音之影響。上圖示一 1024 點序列之最小兩個相鄰尺度之 Lemarié 仔波合成訊號，其左脈動係為相應於單位仔波係數元  $e_{600}$  之仔波反轉換，右脈動係為相應於單位仔波係數元  $e_{470}$  之仔波反轉換。下分圖則為合成訊號之富立葉能譜。此圖充份顯示時變性與相位性這兩個因子對富立葉頻譜亦或正交函基其相關應用分析所可能帶來之巨大影響。

## 第 9 章

### 結論

此處我們以水槽相關試驗訊號，包括各種風波與史脫克司型態波之波場與流場訊號，探討訊號相互間之各類共關協振現象，從而比較基於仔波函基與富立葉波譜函基之共關協振行為表現，並介定其各類相應特性，另亦及於物理上與解析上對應因子之解說。由於此處仔波函基是取自於吾人先前已鑑取得之相關於水波訊號應用之最適函基，因而其共關協振分析所能提供的訊息均遠較波譜者來的多而真切。總而言之，本文一方面充分驗證了此一最適函基及其相關處理分析方式的適切性與優異性，另一方面則提示著仔波共關協振在物理探討上的可用性與有義性。❖

## 審查意見回覆表

# 交通部運輸研究所港灣技術研究中心

## 自辦研究計畫期末審查意見回覆表

(時頻分析法比較研究與應用探討—仔波與波譜共關協振特性比較)

| 審查委員及審查意見                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 意見回覆                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 國立中山大學陳陽益教授：                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本計畫研究結果對實測之訊號分析有應用的價值。</li> <li>2. 以期望值 <math>E(\blacksquare)</math> 定出之共關協振關係 (2.3) 式是取其均方後之平均值，由此定出者較直接由 cross correlation <math>C(t)</math> (2.1) 式取其絕對值者（或實數值者）之優點何在，建請詳述一下，以更明顯本結果之優良性。</li> <li>3. (2.4) 式～(2.6) 式分別有同時對 <math>da db</math> 與先對 <math>db</math> 積分者，建請資料分析時討論一下先對 <math>da</math> 或先對 <math>db</math>、或到逆順序及同時對 <math>da db</math> 積分間的差異與一致性，如此，應用時才較可分類出何種仔波與波譜之適用性。</li> <li>4. 對積分之可析連續性與均勻收斂性，請考量較好。</li> </ol> | <p>本研究為一初步的應用探討，其應用性不分試驗與現場資料，未來主要考量的應是如何排除或降低相位引入糙音。並儘可能收集一些實測資料加以應用。</p> <p>對波譜共關協振關係式而言，若資料處理時不再經過進一步的人為操控，則 (2.1) 實際上是一無用處，蓋因此式對任何兩個訊號或函數而言，其任何頻率上的共關協振係數完全都是相等的單位值（即 unity）。實際的求算是必須把兩個函數都切割分段，此為期望值 <math>E(\blacksquare)</math> 引入於共關協振關係式中，藉以帶來統計義涵。</p> <p>由於 <math>a</math> 與 <math>b</math> 是兩個完全獨立的變數，理論上無先後積分之差別需求，唯此處 <math>a</math> 變數是為尺度變數，相當於富立葉分析上的頻率變數，在物理意義的需求上，很自然地是對表示移位變數的 <math>b</math> 加以積分，因而形成 <math>a</math> 變數上的函數變化分佈，並因而得以跟波譜者（<math>\omega</math> 變數上的函數變化分佈）比較。至於出何種仔波具適用性，則相關於先前所探討之水波訊號之最適仔波研究，這當中我們是藉由熵值法加以區判。</p> <p>由於所應用之連續仔波轉換是出發於「the equation of resolution of identity」其理論收斂性是存在的，另就此處所選用的仔波分析函數而言，其亦具可析連續性。唯就實務事實而言，許多數位計算往往是不計較理論上之「不可析性」。</p> |

國立交通大學張憲國教授：

- |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Cross correlation 計算過程中是否會產生多餘的能量。</li> <li>2. 在 wavelet 計算應用至波浪時，是否必要檢測能量守恆（水位之平方平均）。此種分析技巧能否應用至實際海洋之波浪資料。</li> </ol> | <p>此因素決定於所取函基類屬，就此處之技法而言，由於所涉連續仔波轉換具有多重 correlation 和積，故具高度贅餘性。</p> <p>仔波轉換其函基有數種類型，此外亦涉及所用離散或連續轉換相應之個別處理技法，若所取函基屬於正交類型，則其一般離散轉換具能量守恆（亦相關於 Frame bounds）。此處分析技法之使用應無現場或試驗資料之差別，主要考量應是如何排除或降低相位引入糙音。</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

國立成功大學許泰文教授：

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本計畫對複雜的水位訊號系統提出最佳適化離散仔波方法，從而瞭解仔波共關協振數值表現，並與傳統富立葉頻譜比較，以突顯此法的優越性。</li> <li>2. 就仔波共關協振方法，使用較少資料量，共關協振具穩定特態，即共關協振不需要很大取據量。</li> <li>3. 相位糙音在本方法如果非常重要，在第二章理論方面，是否整個 auto and cross correlation 積分是否非常 smooth，如果不是，是否意謂 noise filter 還是要考慮。</li> </ol> | <p>本研究研伸先前對水波訊號其最適仔波函基之探討，故此處共關協振之表現其數理因子得以明確了解。</p> <p>基本上而言，仔波與波譜之共關協振分析，其形成之轉換係數樣本空間內的數據樣本數有二至三個級距差。</p> <p>若糙音在兩個測計上是獨立的，則濾不濾除並不重要，共相關分析具有自動濾除之效應。事實上本研究分析之資料是完全不加以任何預處理或人為調適的，亦即是原始粗資料。至於相位糙音一般是非獨立的，且難以濾除。</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

| 港研中心蘇青和研究員：                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本計畫對仔波分析一系列的研究成果頗為深入，具學術價值。</li> <li>2. 仔波與波譜之基本數理差異及應用文中建議簡略的介紹，以方便中心一般同仁參閱。</li> </ol> | <p>現階段，一般而言，仔波分析於波浪研究應用之顯易性與寬廣度，均不如富立葉分析。其肇因個人認為主要涉及二個核心觀念，其一為解析用之函基的龐雜性、歧異性、或其與水波之相似度，另一則涉及物理解說性、或分析結果如何賦予可重覆、具一致性與通盤性的有義描述。本研究可視為一種初步的應用探討，於此兩方面都有涉略。</p> <p>由於本報告延伸於先前幾年之研究，另由於離散仔波函基為相對複雜而難以精簡表示之數學式，故可參考先前報告，事實上，另外參閱一些經典教科書（如 Daubechies, 1992與 Chui, 1992）亦是必要。</p> |
| 港研中心何良勝研究員：                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 研究分析方法針對相關訊號解析有極大助益，建議未來能應用更多試驗資料作為驗證之用。</li> </ol>                                      | <p>本研究為一初步的應用探討，其應用性不分試驗與現場資料，希望未來能有更多各類資料加以應用與驗證。</p>                                                                                                                                                                                                                     |

## 簡報資料

## 主要内容

- 研究背景 – 先前研究結果之驗證與最適仔波的應用面
- 波譜型與仔波型共關協振關係式 ▶
- 仔波函基之選用 –  $\psi(t) = \pi^{-1/4}(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2})e^{-t^2/2}$  ▶
- 試驗資料 ▶
- 資料長度需求比較 ▶
- 數複與實數函基共關協振 ▶
- 訊號品質之影響 ▶
- 相位糙音之影響 ▶



1/6



## Theoretical background

- Spectral coherence
  - Correlation coefficient :

$$R_s^2(\omega) = \frac{|\mathbf{E}[G(\omega)\overline{H(\omega)}]|^2}{(\mathbf{E}[|G(\omega)|^2]\mathbf{E}[|H(\omega)|^2])^{1/2}} \quad (1)$$

- $\mathbf{E}$  is additional
- Need to introduce one additional dimension

- Wavelet coherence
  - From the equation of resolution of identity

$$R_w^2(a) = \frac{|\mathbf{E}_b[\langle g, \psi_{a,b} \rangle \overline{\langle h, \psi_{a,b} \rangle}]|^2}{(\mathbf{E}_b[|\langle g, \psi_{a,b} \rangle|^2] \mathbf{E}_b[|\langle h, \psi_{a,b} \rangle|^2])^{1/2}} \quad (2)$$

- $\mathbf{E}$  is a natural extension of “ $\int$ ”
- No need to introduce additional dimension
- Liu's problem [Liu 1994] – Lack of  $\mathbf{E}$



2/6



## 水波物理探討與暴展 (blow-ups) 行爲

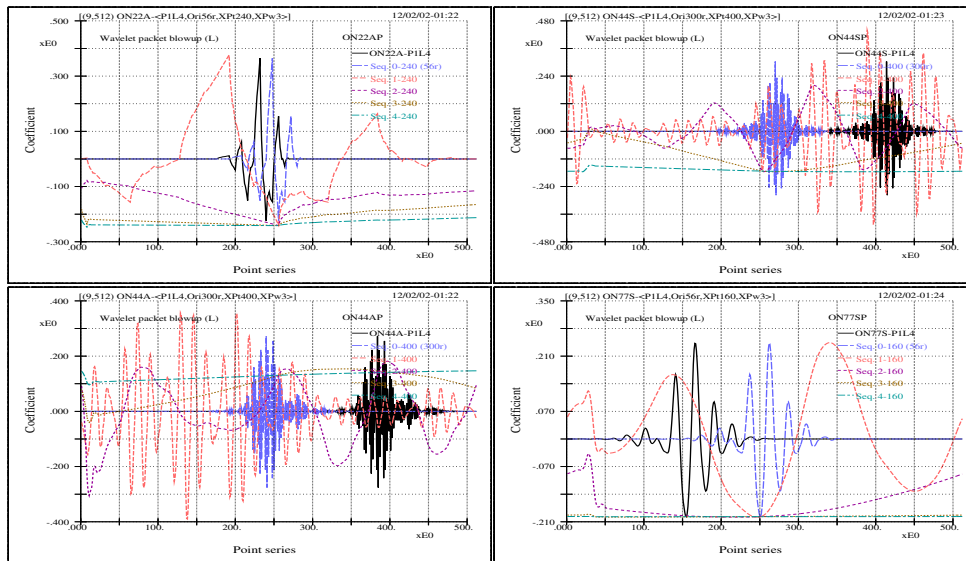


圖 1：具有特異或迷人解析特性的仔波往往有非常奇特古怪的波形，其在水波物理探討或應用上可說難得其門而入。此圖示正交仔波 ONxxA 與 ONxxS 其仔波包之暴展行爲。相關數據可於各別分圖上的註記取得。

## 三種資料長度下波高與水流間之仔波與波譜共關協振

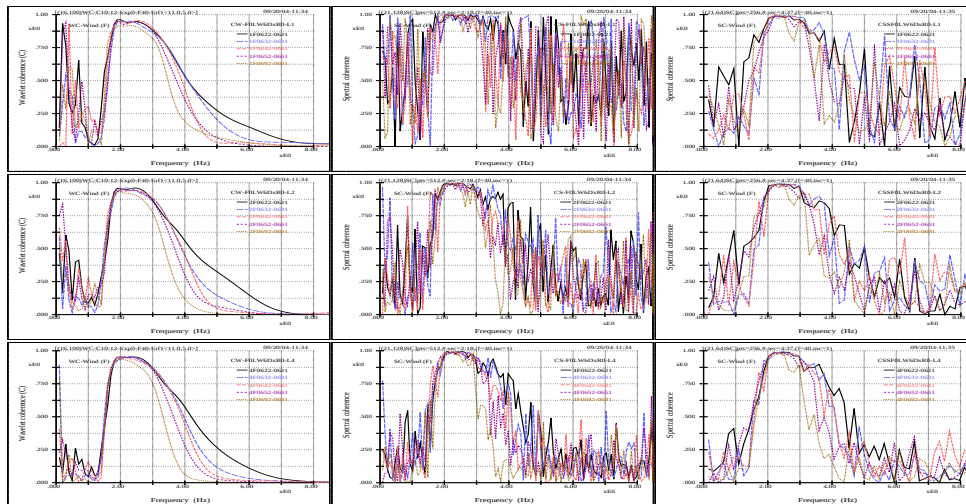


圖 2：三種資料長度下，波高與不同水深處水流間之仔波與波譜共關協振分佈曲線。上中下圖資料長度分別為 1024、2048、4096 點。流速之量測點分別為靜水面下 2、3、4、5、9 cm。圖中最左側分圖是為仔波者，右側二行分圖是為波譜者，其係選用兩種不同 FFT 參數。

### 仔波實數函基共關協振與波譜者比較

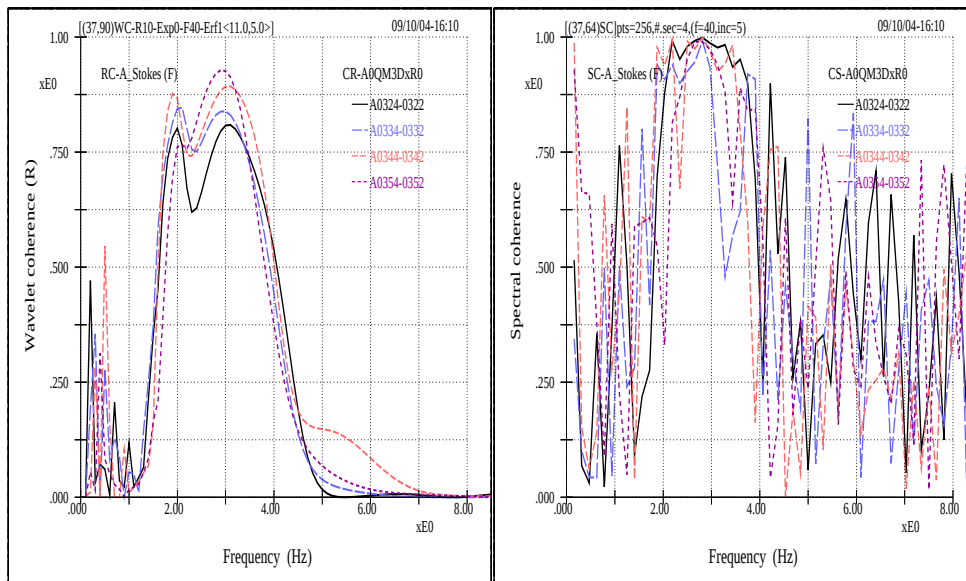


圖 3：仔波實數函基共關協振（左圖）與波譜者（右圖）比較。所用波浪為一高波浪尖銳度之史脫克司波，共關協振為波高與不同深度水流速之間，由仔波之圖可見較深處有最高之共關協振數值。

### 側頻不穩現象

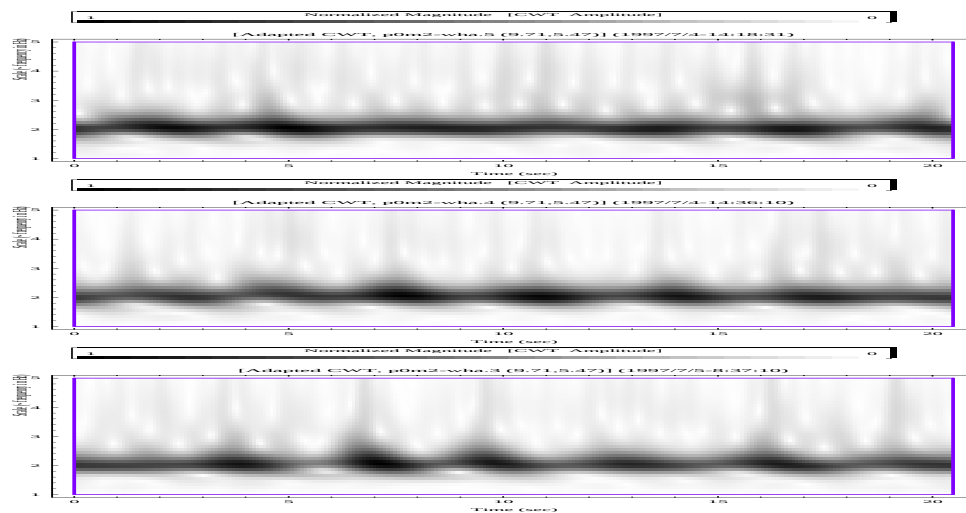


圖 4：此圖以一史脫克司型態波之波場其時頻分佈演化圖說明側頻不穩現象暨 FPU 遞嬗反覆行為。此一史脫克司型態波之代表波浪陡峻率（wave steepness  $ka$ ）為 0.20 三個分圖分別表示三個不同量測點，其與造波機之距離分別為 2.3、3.5、4.5 M。

## 參考文獻

- [1] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [2] Chui, C.K. On cardinal spline-wavelets. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 439–452. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [3] Cohen, L. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [4] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 1992.
- [5] Debnath, L. *Nonlinear Water Waves*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1994.
- [6] Lee, Y.R. Signal Analysis from Wave Modulation Perspective. Technical report, No.2001–09, Institute of Harbor and Marine Technology, Taichung, Taiwan, 2001.
- [7] Lee, Y.R. Wavelet Time-Frequency Analysis - An Optimum Basis and Its Applications to Water Waves. Technical report, No.93-79-7112, Institute of Harbor and Marine Technology, Taichung, Taiwan, 2003.
- [8] Lee, Y.R., and J. Wu. Continuous wavelet transform using a locally adapted time-frequency window. In *Proc. 18th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 95–106, 1996.
- [9] Lee, Y.R., and J. Wu. Wavelet and wavelet packet best basis for laboratory water waves. In *Proc. 18th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 83–94, 1996.

- [10] Lee, Y.R., and J. Wu. Time-frequency features and side band instability. In *Proc. 19th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 32–39, 1997.
- [11] Lee, Y.R., and J. Wu. A quasi-wavelet function bases for improved time-frequency characterizations. *Proc. 21th Conf. on Ocean Engineering in Taiwan*, pages 101–108, 1999.
- [12] Lee, Y.R., and J. Wu. The wavelet optimum basis and the phase distribution of the characteristic function. *Proc. 26th Conf. on Ocean Engineering in Taiwan*, pages 149–156, 2003.
- [13] Liu, P. Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves. In E.F. Georgiou, editor, *Wavelets in Geophysics*, pages 151–166. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1994.
- [14] Phillips, O.M. *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge University Press, New York, USA, second edition, 1977.