

97-44-7330

MOTC-IOT-96-H2DA002

臺灣東岸港口共振現象改善方案 研究(3/4)



交通部運輸研究所

中華民國 97 年 3 月

97

臺灣東岸港口共振現象改善方案研究
(3/4)

交通部運輸研究所

GPN : 1009700837

定價 100 元

97-44-7330

MOTC-IOT-96-H2DA002

臺灣東岸港口共振現象改善方案 研究(3/4)

著 者：徐進華

交通部運輸研究所

中華民國 97 年 3 月

國家圖書館出版品預行編目資料

臺灣東岸港口共振現象改善方案研究. (3/4) /
徐進華著. -- 初版. -- 臺北市：交通部運
研所，民97.03

面；公分

參考書目：面

ISBN 978-986-01-3903-7(平裝)

1. 港埠管理 2. 波動 3. 數值分析 4. 臺灣

443.2

97006757

臺灣東岸港口共振現象改善方案研究(3/4)

著者：徐進華

出版機關：交通部運輸研究所

地址：臺北市敦化北路 240 號

網址：www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電話：(04)26587176

出版年月：中華民國 97 年 3 月

印刷者：德輝興業有限公司

版(刷)次冊數：初版一刷 120 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站

定價：100 元

展售處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

五南文化廣場：臺中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1009700837

ISBN：978-986-01-3903-7 (平裝)

著作財產權：中華民國(代表機關：交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部份內容者，須徵求交通部運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：臺灣東岸港口共振現象改善方案研究 (3/4)			
國際標準書號（或叢刊號） ISBN 978-986-01-3903-7（平裝）	政府出版品統一編號 1009700837	運輸研究所出版品編號 97-44-7330	計畫編號 96-H2DA002
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計劃主持人：徐進華 聯絡電話：04-26587182 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 96 年 01 月 至 96 年 12 月
關鍵詞：花蓮港、港池共振、多區域邊界元素法、連續壓縮過程、電腦程式			
摘要： 為解決臺灣東岸港口之港池共振問題，本研究將徐(2003)應用多區域邊界元素法及連續壓縮過程所設計之可針對入射波為緣岸波情況，估計港池共振強度的電腦程式，進行大幅度的修改，使其能適用於港內外地形及水深分佈皆為不規則的情況。在修改中我們將原來程式裡被視為定值的參數(如邊界元素上各點之單位法線向量)改為變數，且將原來被簡化的公式改為可普遍適用之數學公式。另一項重要的修改是使目前的程式亦能將港內加以分區，並連續壓縮，以確保在電腦記憶容量有限的情況下，港內各節點與節點間之距離皆足夠小。因此目前的程式已可應用在地形十分複雜的港灣，且當我們將它應用於圓形港及美國加州之 Long Beach Harbour，其結果和 Lee (1971)的數值解十分接近。此一電腦程式目前亦被應用於花蓮港，但其結果是否準確，乃與港內分區的數目是否適當有關，後者則可依兩項準則來加以判斷。			
出版日期	頁數	定價	本 出 版 品 取 得 方 式
97 年 3 月	58	100	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 （解密條件： ☐ 年 ☐ 月 ☐ 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密） ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: Methods for the Reduction of Resonance of the Harbors on the Eastern Coast of Taiwan (3/4)			
ISBN(ORISSN) ISBN978-986-01-3903-7 (pbk.)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1009700837	IOT SERIAL NUMBER 97-44-7330	PROJECT NUMBER 96-H2DA002
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Yung-Fang Chiu PRINCIPAL INVESTIGATOR: Jinn-Hwa Shyu PHONE: 886-4-26587182 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2007 TO December 2007
KEY WORDS: Haw-Lien Harbor; Harbor resonance; Multizone boundary element method; Sequential condensation process; Computer program.			
ABSTRACT: To solve the problem of the harbor resonance occurring in the harbors on the eastern coast of Taiwan, the computer program written by Shyu (2003) based on a sequential condensation process combined with the multizone boundary element method for estimation of the harbor resonance induced by incident edge waves was modified extensively to allow for the irregular topographies inside and outside the harbors. In this effort, certain parameters (e.g., the unit normal to the boundaries), which have previously been considered as constants on a plane boundary element, are permitted to vary on a curved element, and the simplified relations utilized in the original program are replaced by their general forms. Another significant improvement in the new program is that the region inside a harbor can also be broken up into many zones followed by the sequential condensation process, ensuring that the distances between the nodes in this region are sufficiently small even when the computer memory is limited. Consequently, the new program is applicable to a harbor of complex geometry so that it has been applied for calculation of the oscillations in a circular harbor and in a model of the Long Beach Harbor, California. The results agree well with the numerical solutions of Lee (1971). When this program has finally been applied to the Haw-Lien Harbor, the accuracy of the results depends upon whether or not the number of the zones inside the harbor is adequate, the criteria of which have also been found.			
DATE OF PUBLICATION March 2008	NUMBER OF PAGES 58	PRICE 100	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

目 錄

中文摘要表	i
英文摘要表	ii
圖目錄	iv
第一章 前言	1
第二章 數值計算所求解之邊界值問題	4
第三章 分區及連續壓縮的數值方法	9
第四章 網格產生的方式	14
第五章 數值計算與比較	17
第六章 結論	20
參考文獻	21
附錄一 審查意見回覆	41
附錄二 簡報內容	44

圖 目 錄

圖一、示意圖，細實線表岸邊斜坡與外海等深區之分隔線.....	23
圖二、遠離港口地區之海底地形.....	24
圖三、多區域邊界元素法及連續壓縮過程解說圖.....	25
圖四、示意圖.....	26
圖五、六節點三角形邊界元素.....	27
圖六、海底以及自由表面上之網格型態.....	28
圖七、海岸線上及其對面邊界上之網格型態.....	29
圖八、垂直海岸線的邊界上之網格型態.....	30
圖九、示意圖.....	31
圖十、圓形港池內的真實網格型態.....	32
圖十一、圖九中圓形港內 P 點之振幅放大率，曲線表 Lee(1971) 在等水深且 入射波為非緣岸波情況下所獲得之數值解，圓點表應用目前的電腦程 式，並採用圖十中的網格型態所獲得的數值解.....	33
圖十二、圓形港內之分區狀況.....	34
圖十三、類似於圖十一，但目前的圓點表圓形港內加以分區後所獲得的數值解.....	35
圖十四、類似於圖十三，但當 $ka < 1$ 時，目前的數值解改用圖十一中的結果.....	36
圖十五、Long Beach Harbour 內之分區狀況.....	37
圖十六、圖十五中Long Beach Harbour 內 A 點之振幅放大率，曲線表 Lee(1971) 之數值解，圓點表目前的數值解.....	38
圖十七、花蓮港內之分區狀況.....	39
圖十八、應用目前的電腦程式所獲得的花蓮港內 A 點（見圖十七）之振幅 放大率.....	40

第一章 前言

位在臺灣東岸的花蓮港和蘇澳港，在颱風來襲時，即使其暴風圈離港口尚遠，港內仍經常發生劇烈的長週期振盪。此種振盪可能是由波長較長的湧浪，以一種波群的方式行進到近岸，因海底坡度不連續，在當地引發波長更長且自由行進的亞重力波 (infragravity waves)。這些亞重力波大部份將在岸邊被反射回深海，但因臺灣東部具有一段相當長且直的海岸線，故仍有一部份亞重力波，因滿足緣岸波 (edge waves) 之離散關係式，而被 trapped 在岸邊，形成沿海岸線行進的緣岸波。這些緣岸波在由南向北行進過程中，由於不斷有新的能量加入，因此當行進到花蓮港附近時，其能量可增為相當大，故花蓮港和蘇澳港的強烈長週期振盪，可能是由此種緣岸波引發港內海水發生共振運動所導致。

有關緣岸波在臺灣東岸存在的現場證據，由於需使用一大規模的儀器陣列來觀測，目前尚無法獲得。但國外確有現場證據顯示，在某些近岸海域內所發生的亞重力波主要為緣岸波 (Huntley, Guza & Thornton 1981)。另一方面，由短波群引發緣岸波的理論亦可參考 Schäffer (1994)，其結果顯示，當地形變化為 one-dimensional，故海岸線為無限延伸時，若不考慮摩擦效應，緣岸波的振幅將為無窮大。因此，當臺灣東部有一段相當長且直的海岸線時，緣岸波確可能明顯存在（特別是在颱風來襲時）。

為降低花蓮港和蘇澳港的長週期振盪，一種可能的方法是改變兩港的港形，但若港的形狀需大幅改變方能達到其目的，則可能因牽涉太廣而難以實施。但若兩港的長週期振盪確由緣岸波所引發，由於緣岸波的能量集中在岸邊，故或許可以在臺灣東岸，沿垂直海岸線方向，築一道防波堤來阻止緣岸波北上。此防波堤可能不需很長即可達到其目的，因此若我們經由數值計算決定一適合的長度，即使因緣岸波無法在實驗室內單獨產生，故無法進行實驗驗證，但因其耗資不大，或許仍可逕行施工，再觀其成效。因此我們目前需要一個能計算緣岸波受地形影響發生變化，以及能計算由緣岸波引發港池振盪之電腦程式。

由於緣岸波僅能在一個岸邊斜坡（其坡度可沿垂直海岸線方向任意變化）上存在，故上述電腦程式必須能應用在港外水深為變化的情況，且若我們係針對穩定狀態的波浪場加以計算，則須進一步假設岸邊斜坡乃沿著海岸線方向無限延伸。然而基於以下所述的原因，除非採用一種新的方法，此點將使目前的數值計算不易實施。而另一種針對短暫 (transient) 非穩定波浪場進行數值計算的設計，由於仍需考慮一段相當長（和波長相比）的岸邊斜坡，故其可行性亦有疑問。

當我們針對波浪受地形影響發生繞射與散射現象之穩定狀態進行數值計算時，須考慮其計算領域之所有邊界上的邊界條件。這些邊界條件有些（如岸壁上的 no-flux condition）可輕易獲得，有些（如外部邊界上的條件）則無法事先準確獲得。要解決此一問

題，最直接的方法是選擇一個很大的領域，然後將原來適用於無窮遠的條件應用在此一領域之外部邊界上，做為其邊界條件的近似，但此一近似要足夠準確，領域的尺度必須大於數個波長的長度。由於在數值模式中的節點與節點間距離又必須遠小於波長，故上述大領域的需求將使其數值計算必須用到大量的電腦記憶體，此一狀況目前更因緣岸波在岸邊，沿垂直海岸線方向變化劇烈，故需使用更高的解析度，而益發嚴重。故此一方法若直接應用，實際將有困難，此一困難以往皆採用差分法 (finite difference method) 之數值方法，並充分利用其所涉及的矩陣為 tridiagonal 之性質，經由一些特殊的安排來加以克服，但由於差分法在模擬港內邊界的位置及條件時較困難，故目前我們未採用此種數值方法。

另一種解決外部邊界條件難以獲得之問題的方法是，將全部海域或一個有限範圍以外的海域視為等深，然後應用數學理論將原本適用在無窮遠的條件推演為可適用在港內和港外的交界面上，或適用在上述有限範圍海域之外部邊界上。前者如 Lee (1971) 的理論，後者如 Berkhoff (1972), Chen & Mei (1974), Bai & Yeung (1974), Chenot (1975) 和 Yue *et al.* (1978) 等人所使用的 hybrid element method。另外, Hwang & Tuck (1970) 在港內和港口附近邊界上佈以各種強度未知的 source, 亦滿足無窮遠的條件。凡此種種 (其詳細說明可參考 Mei (1978) 和 Mei (1983)), 皆可使數值計算的領域遠小於第一種方法，因而可在一台個人電腦上輕易實施，且計算效率極佳。然而，當岸邊具有一沿海岸線無限延伸的斜坡時，上述的理論及方法將無法應用，故此種在一小範圍內計算的數值方法目前無法適用。

為解決上述問題，徐 (2003) 仍考慮一個大的計算領域，但為了要節省電腦記憶空間，故將整個計算領域分割為許多分區，然後在每一個分區內進行一種壓縮過程，以減少其聯立代數方程式中方程式的數目，但為了要獲得其唯一解，各分區內的方程式仍需經由考慮分區與分區之交界面上的連續條件而加以連結。此時為了要達到節省更多電腦記憶容量的目的，一種連續壓縮的過程亦被使用，應用它我們不需將所有分區內的方程式一次結合在一起，因此可以避免再度形成一過大的聯立方程式，故如今我們每次僅需在電腦記憶體中存放一個分區之聯立方程式的係數。由於邊界元素法 (boundary element method) 可很自然地描述分區與分區之交界面及其上的邊界條件，故上述連續壓縮過程乃配合多區域邊界元素法使用，有關後者的理論可參考 Kane (1997)。

應用上述方法，徐 (2003) 乃設計一可計算由緣岸波引發港內海水振盪的電腦程式，此一程式雖已證明十分準確，但僅能應用在港灣形狀為矩形時，故為了要能針對花蓮港和蘇澳港實際地形進行數值計算，本計畫乃大幅修改此一程式，其中包括將原來程式中被視為定值的參數 (如邊界元素上各點之單位法線向量) 改為變數，且將原來被簡化的

公式改為可普遍適用之數學公式。另一項重要的修改則是，目前的程式亦能將港內加以分區，並進行連續壓縮過程，以確保在電腦記憶容量有限的情況下，港內各節點與節點間的距離皆足夠小。因此目前的程式已可應用在地形十分複雜的港灣，故我們將它應用於圓形港、美國加州之 Long Beach Harbour 以及花蓮港，並將其結果和以往的數值解比較，以證明其準確度。

第二章 數值計算所求解之邊界值問題

當引發港池振盪的入射波之波長與水深相比甚長時，由於流速在垂直方向上的變化甚小，且壓力在垂直方向上呈靜壓分佈，故原本我們可以求解二維的長波方程式，但因目前的入射波為緣岸波，故需在一大範圍內求解，因此為了解決電腦記憶體不足的問題，有必要將此一大範圍海域分割成許多較小的區域，分別處理，再加以連接，而為了方便連接，需採用邊界元素法求方程式的數值解。由於二維的長波方程式不具有邊界元素法所需之 fundamental solutions (其定義將在下一章裡介紹)，因此目前我們直接求解三維的 Laplace equation

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

其中 $\phi(x, y, z, t)$ 代表流勢函數。

由於我們目前採用線性波近似，故在自由表面上的運動及動力邊界條件分別為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad (z = 0) \quad (2.2)$$

其中 ζ 表水面位移, g 表重力加速度, $z = 0$ 的位置則和平均水面的位置相同。

上述線性波的假設也使我們每次僅需考慮一種頻率的波做為入射波，且因我們目前僅求解穩定狀態下的港內外振盪，故在每一點上的 ϕ 和 ζ 隨時間的變化皆可表為 $e^{-i\omega t}$ ，其中 ω 即為入射波的頻率，因此在 (2.2) 中的兩式可合併為一僅包含 ϕ 的方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad (z = 0) \quad (2.3)$$

另外，在任何剛性邊界上，包括在海堤面及海床上，其邊界條件即為 no-flux condition

$$\partial \phi / \partial n = 0 \quad (2.4)$$

其中 n 表垂直邊界方向的座標。

上述的邊界條件已足以應用在所有港內的邊界上，但在一個範圍有限的領域之外部邊界 (outer boundary) 上，其邊界條件仍有待決定。為達到此目的，我們將港外的 ϕ 表為

$$\phi = \phi_i + \phi_d, \quad (2.5)$$

其中 ϕ_i 代表行進在一簡單地形上的緣岸波,此一緣岸波即為入射波(其原因將在下一段落內加以說明), ϕ_d 則代表因港的存在以及任何和此一簡單地形不同的地形所產生的擾動。由於 ϕ_i 滿足 Laplace equation (2.1),故 ϕ_d 亦同樣滿足此一線性,且為 homogeneous 之方程式。同理,由 (2.3) 式, ϕ_d 亦滿足以下的自由表面的邊界條件

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi_d \quad (z = 0) \quad (2.6)$$

由於遠離港口地區之實際地形,對於港內及離港很近的區域內的解,除了在決定入射波的特性與大小以外,影響很小。故我們可以假設在離港口很遠的地區,其海岸線如圖一所示為一條直線,其海底地形則為一簡單的一維地形。在此種情況下,由遠方入射的緣岸波的解 ϕ_i 可應用解析的方法,或半解析半數值的方法,事先獲得。目前我們所考慮的一維海底地形如圖二所示,在此一地形下, ϕ_i 的分佈已由徐 (2003) 獲得。此一分佈滿足在岸壁及海底上 $\partial \phi_i / \partial n = 0$ 之邊界條件,故在此一遠離港口的區域, ϕ_d 在岸壁及海底同樣滿足

$$\partial \phi_d / \partial n = 0 \quad (2.7)$$

此一邊界條件 (參看 (2.4) 和 (2.5))。

然而,在港口附近,若海岸線或防波堤凸出於外海,則在港的附近之 ϕ_d 的分佈將產生相當大的變化,並進而影響港內的振盪。故在實際計算時,這些離港口不遠的地形變化必須加以考慮。為達到此目的,在這些凸出的地形上, ϕ_d 的解須滿足

$$\partial \phi_d / \partial n = -\partial \phi_i / \partial n \quad (2.8)$$

此一邊界條件 (同樣參考 (2.4) 和 (2.5) 式)。上式中的 ϕ_i 乃為已知,故上式確為一個實際可用的邊界條件。

另外,在港口附近也可能存在一些內凹的海灣,這些海灣也會影響港口附近及港內的振盪,因此必須加以考慮。在這些海灣內,我們必須如同在港內一樣,求解原來的流勢函數 ϕ ,而非 ϕ_d ,而在此種海灣的入口處以及港的入口處,亦即在圖一的 $\overline{AB}$ 界面上,可令港 (或灣) 內的 ϕ 和港 (或灣) 外的 ϕ_d 滿足以下的連續條件

$$\phi|_{x=0^-} = \phi_i|_{x=0^+} + \phi_d|_{x=0^+} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_{x=0^-} = \frac{\partial \phi_i}{\partial n}|_{x=0^+} + \frac{\partial \phi_d}{\partial n}|_{x=0^+} \quad (2.10)$$

由於 $(\partial\phi_i/\partial n)|_{x=0^+} = 0$, 故 (2.10) 式可化減為

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{x=0^-} = \frac{\partial\phi_d}{\partial n}\Big|_{x=0^+}. \quad (2.11)$$

上述的公式已提供為解港內外之 ϕ 和 ϕ_d 所需的所有位在內部邊界 (interior boundaries) 上的邊界條件, 接下來我們將考慮 ϕ_d 在無窮遠處的條件, 這些條件在實際數值計算時, 將被應用在一個大領域之外部邊界 (outer boundaries) 上做為其近似的邊界條件。為明確討論計, 我們令入射的緣岸波在圖一中朝正 y 軸方向行進。由於在離海岸線一段距離以外的無限大的海域之水深為等深, 故在離港口無窮遠處, 除了在岸邊斜坡上及其附近, ϕ_d 應僅含屬於 leaky modes 的波, 且這些 leakage 應僅發生在離港口不遠的斜坡上 (因在離港口較遠的斜坡上所存在的波已為 trapped modes)。因此, 在無窮遠, 但非在斜坡上, ϕ_d 可滿足 the Sommerfeld radiation condition

$$(k_l r)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_l \right) \phi_d \rightarrow 0 \quad \text{when} \quad k_l r \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

其中 (r, θ) 表圖一中的極座標, k_l 表在此一等深海域內波的 wave-number。應用上式, 我們在實際計算時即可在一個大領域的外部邊界上, 將其邊界條件定為

$$\frac{\partial\phi_d}{\partial n} \approx \frac{\partial\phi_d}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \approx ik_l \phi_d \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.13)$$

至於在無窮遠的岸邊斜坡上, 應僅有屬於 trapped modes 的緣岸波, 且它們的振幅為定值。因此, 當 $y \rightarrow \infty$, 在岸邊斜坡上的 ϕ_d 可表為

$$\phi_d = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x, z) e^{ik_{yj}y}, \quad (2.14)$$

其中 k_{yj} 代表 mode 為 j 的緣岸波在沿海岸線方向上的 wave-number, a_j 表此緣岸波的振幅 (乃為複數), $\psi_j(x, z)$ 則代表此緣岸波的流勢函數在 x -和 z -方向上的分佈。當頻率 ω 以及圖二所示的一維地形給定, 上式中的 $k_{yj}, \psi_j(x, z)$, 以及在此一地形上所有可能存在的緣岸波之 modes 的數目 m , 皆可應用解析的方法或半解析半數值的方法事先決定。應用這些結果, 且在上式之可適用的區域內之外部邊界上選擇 m 個點, 我們即可建立一組包含 m 個方程式的聯立方程式, 此組聯立方程式若使用矩陣的符號可表為

$$\{\phi_d\} = [C] \{a\}, \quad (2.15)$$

其中 column vector $\{\phi_d\}$ 之各個分量表 ϕ_d 在此 m 個點上的值, $\{a\}$ 的分量則為 (2.14) 中的 $a_1, a_2, \dots, a_m$, 而 square matrix $[C]$ 中的元素則可經由將此 m 個點的座標 (x, y, z) 代入 $\psi_j(x, z)e^{ik_{yj}y}$, ($j = 1, 2, \dots, m$) 而事先決定。

另外, 由 (2.14) 式

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial y} = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^m i a_j k_{yj} \psi_j(x, z) e^{ik_{yj}y},$$

故應用相同的方法, 我們亦可獲得

$$\left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial y} \right\} = [D] \{a\}, \quad (2.16)$$

其中 $[D]$ 是改用 $ik_{yj}\psi_j(x, z)e^{ik_{yj}y}$, ($j = 1, 2, \dots, m$) 來事先決定。因此, 儘管 $\{a\}$ 未知, 應用 (2.15) 和 (2.16) 我們仍可獲得一個 $\{\phi_d\}$ 和 $\{\partial \phi_d / \partial y\}$ 之間的關係式

$$\left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial y} \right\} = [D] [C]^{-1} \{\phi_d\} \quad (2.17)$$

此一關係式可做為在岸邊斜坡上之外部邊界上的邊界條件。

需強調的是, 在 (2.14) 中的某一個分量是和入射的緣岸波 mode 相同, 此一分量可能代表入射波部份能量繞射進港內, 使原入射波通過港口後能量減少的部份, 但由於此一分量的 phase 仍行進在正 y 方向, 因此在 (2.14) 中所有 k_{yj} 前的符號皆為正。

另一方面, 當 $y \rightarrow -\infty$ 時, 在岸邊斜坡上, 所有 ϕ_d 的分量是行進在負 y 方向, 故 (2.14) 可改寫為

$$\phi_d = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^m b_j \psi_j(x, z) e^{-ik_{yj}y}, \quad (2.18)$$

應用上式, 我們可同樣獲得一可適用在一個大領域之位於在岸邊斜坡上的外部邊界 (其 y 座標為負) 之邊界條件, 其形式和 (2.17) 者相同。

以上的應用在岸邊斜坡上之外部邊界的條件, 可適用在極廣泛的情況下, 但因目前在遠離港口處, 我們僅考慮一個如圖二所示的地形, 且令 h_0 為 15 m, h_1 為 115 m, 岸邊斜坡之斜率為 0.05, 而入射波的週期則固定為 160 秒 (對不同週期的入射波所產生的港內振盪, 我們則以改變港的大小來顯示)。在此種情況下, 根據徐 (2003) 的計算, edge waves 僅有一個 mode 能存在, 故在 (2.14) 和 (2.18) 中, $m = 1$, 因此 (2.17) 式可化減為

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial y} = ik_y \phi_d \quad (2.19)$$

其中 k_y 由徐 (2003) 的計算, 乃為 $0.001764 \text{ rad m}^{-1}$ 。而由(2.18) 式亦可直接獲得

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial y} = -ik_y \phi_d \quad (2.20)$$

所以目前我們已建立一組完整的, 可適用於入射波為緣岸波, 且地形為不規則情況之邊界值問題, 接下來我們將討論如何獲得其數值解。

第三章 分區及連續壓縮的數值方法

當入射波為緣岸波，且討論一個穩定狀態的共振現象時，必須考慮一個沿海岸線無限延伸的岸邊斜坡。此點將使以往假設各處水深為等深，或至少在一個有限範圍以外的海域為等深的一些數值方法無法應用。此時爲了要將原本應用在無窮遠處的邊界條件應用在一有限範圍的邊界上，必須在一相當大（半徑至少超過三個波長）的領域內求解。

當我們在一個大領域內求數值解時，通常須使用大量的電腦記憶體，故實際將有困難。爲解決此問題，我們將整個領域分割成許多分區，因此每一次僅需針對一個分區內的節點建立一組聯立代數方程式，然後將所獲得的聯立方程式加以壓縮，再合併至一個相鄰的分區。由於此種合併是經由考慮分區與分區間的交界面上的連續條件而達成，故我們目前採用可很自然地描述交界面及其上條件的邊界元素法，將每一個分區內的微分方程轉換爲一組聯立代數方程式，而爲達到此目的，首先必須將 (2.1) 式用一個邊界積分方程式 (boundary integral equation) 來取代，其方式如下。

我們考慮一個圍繞體積 V 的封閉面 S ，並應用 Green's identity formula

$$\int_V (b \nabla^2 a - a \nabla^2 b) dV = \int_S (b \nabla a \cdot \mathbf{n} - a \nabla b \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (3.1)$$

其中 a 和 b 可以是任何能使式中積分可行的純量函數。接下來我們令 $b = \phi$ ，且令

$$a = \phi^* \equiv 1/4\pi r, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{d}|, \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{x}$ 表空間中每一點的位置向量， $\mathbf{d}$ 表某一固定點的位置向量。由於 $\nabla^2 \phi = 0$ ，且

$$\nabla^2 \phi^* = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})$$

其中 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})$ 表 source 位在 $\mathbf{d}$ 點上的 Dirac delta function，故代入 (3.1) 式後產生

$$-c\phi(\mathbf{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS \quad (3.3)$$

其中

$$c = \begin{cases} 0, & \mathbf{d} \text{ is outside } S; \\ 1, & \mathbf{d} \text{ is inside } S; \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{d} \text{ is on a smooth portion of } S; \\ \frac{\theta}{4\pi}, & \mathbf{d} \text{ is at a sharp corner on } S \text{ with a solid angle } \theta. \end{cases} \quad (3.4)$$

當 source point $\mathbf{d}$ 準確地位在 S 上時, (3.3) 式中的被積分函數在 $\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 位置上變為 singular, 但如果我們將 (3.3) 內的積分用其 Cauchy principal-value 來代表, 仍可獲得 (3.4) 內最後兩個關係式。

積分方程式 (3.3) 只涉及 S 上 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 的值, 而且我們可以將這些值用 S 上有限個點 (稱為節點) 上的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 值及內插法來獲得其近似 (有關這方面的討論將在下一章說明)。由於在這些節點上的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 值在內插過程中不再被視為是函數, 故可以將它們拿到積分符號以外, 而其餘在內插法中所使用的已知函數則可逕行積分 (雖大多數時候須採用數值積分的方法), 因此若我們亦將 $\mathbf{d}$ 的位置選在每個節點上, 則可獲得一組 N 個線性代數式

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}\phi_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中 N 表節點的數目, ϕ_j 和 $(\partial\phi/\partial n)_j$ 表位在第 j 個節點上的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 值。上式亦可改用矩陣符號表為

$$[H]\{\phi\} - [G]\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\} = 0. \quad (3.5)$$

當上式應用下面所說的方法獲得 ϕ_j 和 $(\partial\phi/\partial n)_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) 的解以後, 經由選擇 $\mathbf{d}$ 為 S 之內部各點, 並完成 (3.3) 中的積分, 亦可獲得 S 內各點上的 ϕ 值。然而由於目前的波長甚長, 故 ϕ 在垂直方向上的變化甚小, 因此沒有必要另行計算其內部的值。

由於在上一章所定義的 ϕ_d 亦滿足 Laplace equation, 經由相同的討論, 我們亦可獲得

$$[H_d]\{\phi_d\} - [G_d]\left\{\frac{\partial\phi_d}{\partial n}\right\} = 0. \quad (3.6)$$

應用此組聯立方程式, 我們可估計位在港外之某一封閉表面上的節點之 ϕ_d 和 $\partial\phi_d/\partial n$ 的值。若我們為獲得 (3.5) 和 (3.6) 所選擇的兩個封閉表面分別是將全部港內和全部港外區域包含在內, 則應用第二章所給定的邊界條件, 將可自 (3.5) 和 (3.6) 式中消去其含邊界上各節點之 $\partial\phi/\partial n$ 和 $\partial\phi_d/\partial n$ 的項, 甚至在應用 (2.9) 和 (2.11) 此兩個 matching conditions 以後, 位在圖一中的 $\overline{AB}$ 界面上各節點之 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 亦可被同一點上的 ϕ_d 和 $\partial\phi_d/\partial n$ 取代。此時 (3.5) 和 (3.6) 變為聯立, 故必須同時求解, 因此若 (3.6) 式中節點的數目為 L , 則 (3.5) 和 (3.6) 結合在一起後, 乃形成內含 $L + N$ 個未知數的一組 $L + N$ 個聯立的方程式。此組聯立方程式因 ϕ_i 存在於 (2.9), 故為 nonhomogeneous, 因此理論上我們可以應用一個解聯立方程式的數值方法獲得其唯一非零的解, 但因目前的 $L + N$ 值太大, 需使用大量的電腦記憶體, 故實際無法在一台電腦上求解, 因此必須用一種分區及連續壓縮的方法來解決此一問題。

在上面的討論裡，我們已將全部的領域劃分為港內和港外兩個分區，但尚未壓縮。爲了要壓縮 (3.5) 式，我們先將其內各項的順序重新排列，並加以分割 (詳情可參考 Kane, 1994)，故原式可改寫爲

$$\begin{bmatrix} [H_{MM}] & [H_{MC}] \\ [H_{CM}] & [H_{CC}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_M\} \\ \{\phi_C\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{MM}] & [G_{MC}] \\ [G_{CM}] & [G_{CC}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{(\partial\phi/\partial n)_M\} \\ \{(\partial\phi/\partial n)_C\} \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

其中 $\{\phi_M\}$ 和 $\{(\partial\phi/\partial n)_M\}$ 僅包含位在圖一的 $\overline{AB}$ 界面上各節點之 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 的值，而 $\{\phi_C\}$ 和 $\{(\partial\phi/\partial n)_C\}$ 則僅包含位在港內邊界上各節點之 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 的值。因此將邊界條件 (2.3) 和 (2.4) 代入上式，並重新整理後得到

$$\begin{bmatrix} [H_{MM}] & [H'_{MC}] \\ [H_{CM}] & [H'_{CC}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_M\} \\ \{\phi_C\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{MM}] & [0] \\ [G_{CM}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{(\partial\phi/\partial n)_M\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.8a, b)$$

其中 $[H'_{MC}]$ 與 $[H'_{CC}]$ 已和原來的 $[H_{MC}]$ 與 $[H_{CC}]$ 有所不同。上式亦可被視為內含兩個方程式之聯立方程式，其中的每一個方程式本身亦爲一組聯立方程式，故由其中的 (3.8b) 式可得

$$\{\phi_C\} = [H'_{CC}]^{-1} ([G_{CM}]\{(\partial\phi/\partial n)_M\} - [H_{CM}]\{\phi_M\}). \quad (3.9)$$

再將其代入 (3.8a) 後產生

$$[F]\{\phi_M\} = [E]\{(\partial\phi/\partial n)_M\}, \quad (3.10)$$

其中

$$[F] = [H_{MM}] - [H'_{MC}][H'_{CC}]^{-1}[H_{CM}], \quad (3.11)$$

$$[E] = [G_{MM}] - [H'_{MC}][H'_{CC}]^{-1}[G_{CM}]. \quad (3.12)$$

在 (3.10) 中，其未知向量 $\{\phi_M\}$ 和 $\{(\partial\phi/\partial n)_M\}$ 僅包含位在圖一的 $\overline{AB}$ 界面上各節點之 ϕ 和 $\partial\phi/\partial n$ 值，故 (3.10) 的階數遠小於 (3.5)，因此若我們改用 (3.10) 來和港外的 (3.6) 式結合，將產生一組較小的聯立方程式，此一方程式的解一旦獲得，可被代回 (3.9) 式，以進一步獲得港內的 $\{\phi_C\}$ 值。

需注意的是，在上述壓縮過程裡，如 Kane (1994) 所指出，並無任何一項被省略，且未採用任何的近似，因此上述過程可以在範圍更大的港外區重複使用，而不會增加其誤

差。為達到此一目的，我們將港外的領域，如圖三所示，分成許多分區，故在第一分區內，應用導出 (3.5) 或 (3.6) 的過程，可獲得

$$\left[H_d \right]_1 \left\{ \phi_d \right\}_1 - \left[G_d \right]_1 \left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \right\}_1 = 0. \quad (3.13)$$

其中 $\{\phi_d\}_1$ 和 $\{\partial \phi_d / \partial n\}_1$ 包含第一分區之邊界上各節點的 ϕ_d 和 $\partial \phi_d / \partial n$ 值。接下來我們再度重新安排上式中各項的順序，並加以分割為

$$\begin{bmatrix} [H_{dMM}]_1 & [H_{dMC}]_1 \\ [H_{dCM}]_1 & [H_{dCC}]_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_{dM}\}_1 \\ \{\phi_{dC}\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{dMM}]_1 & [G_{dMC}]_1 \\ [G_{dCM}]_1 & [G_{dCC}]_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{(\partial \phi_d / \partial n)_M\}_1 \\ \{(\partial \phi_d / \partial n)_C\}_1 \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

其中 $\{\phi_{dM}\}_1$ 和 $\{(\partial \phi_d / \partial n)_M\}_1$ 僅包含位在第一分區和第二分區交界面上各節點的 ϕ_d 和 $\partial \phi_d / \partial n$ 值，而 $\{\phi_{dC}\}_1$ 和 $\{(\partial \phi_d / \partial n)_C\}_1$ 則包含位在第一分區之其他邊界上各節點的值。由於在其他邊界上的邊界條件已在第二章內獲得，故在 $\{(\partial \phi_d / \partial n)_C\}_1$ 內的所有元素皆可用 $\{\phi_{dC}\}_1$ 內的元素或零取代，因此 (3.14) 化為

$$\begin{bmatrix} [H_{dMM}]_1 & [H'_{dMC}]_1 \\ [H_{dCM}]_1 & [H'_{dCC}]_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_{dM}\}_1 \\ \{\phi_{dC}\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{dMM}]_1 & [0] \\ [G_{dCM}]_1 & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{(\partial \phi_d / \partial n)_M\}_1 \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.15a, b)$$

由 (3.15b) 式可得

$$\{\phi_{dC}\}_1 = [H'_{dCC}]_1^{-1} ([G_{dCM}]_1 \{(\partial \phi_d / \partial n)_M\}_1 - [H_{dCM}]_1 \{\phi_{dM}\}_1). \quad (3.16)$$

代入 (3.15a) 後產生

$$[F_d]_1 \{\phi_{dM}\}_1 = [E_d]_1 \{(\partial \phi_d / \partial n)_M\}_1, \quad (3.17)$$

其中

$$[F_d]_1 = [H_{dMM}]_1 - [H'_{dMC}]_1 [H'_{dCC}]_1^{-1} [H_{dCM}]_1, \quad (3.18)$$

$$[E_d]_1 = [G_{dMM}]_1 - [H'_{dMC}]_1 [H'_{dCC}]_1^{-1} [G_{dCM}]_1. \quad (3.19)$$

由於 (3.17) 式亦可被改寫為

$$\{(\partial \phi_d / \partial n)_M\}_1 = [E_d]_1^{-1} [F_d]_1 \{\phi_{dM}\}_1, \quad (3.20)$$

故它可被用在第二分區內做為其位在第一分區和第二分區交界面上的邊界條件 (此一邊界條件的形式類似於 (2.17) 式)，因此上述由 (3.13) 獲得 (3.17) 的壓縮過程可以被重

複使用在第二分區，然後再繼續下去，最後獲得位在圖三中之第五分區和第十二分區交界面上的邊界條件

$$\{(\partial\phi_d/\partial n)_M\}_5 = [E_d]_5^{-1} [F_d]_5 \{\phi_{dM}\}_5, \quad (3.21)$$

同樣地，由第六分區開始進行連續壓縮的過程，最後可獲得位在第十分區和第十二分區交界面上的邊界條件

$$\{(\partial\phi_d/\partial n)_M\}_{10} = [E_d]_{10}^{-1} [F_d]_{10} \{\phi_{dM}\}_{10}, \quad (3.22)$$

上面兩個經由數值方法所產生的邊界條件乃應用於第十二分區，另一方面，(3.10) 式連同 (2.9) 和 (2.11) 亦提供其位在第十一分區和第十二分區交界面上的邊界條件，因此應用連續壓縮的過程，我們最後可獲得第十二分區之所有邊界條件。由於此一分區遠小於原來的領域，故可應用一台 PC 計算此一分區內的數值解。

當獲得第十二分區內的數值解以後，應用在其他分區內與 (3.16)–(3.19) 相似的方程式，我們可回過頭來計算所有其他分區內，包括港內之數值解。由於這部份工作可分開進行，故所涉及之聯立方程式的係數可先貯存在電腦硬碟內，而電腦記憶體則可在獲得某一分區內的解以後，重新被用來存放另一分區內之聯立方程式的係數。因此，在目前的連續壓縮的方法裡，分區的數目不受電腦記憶體容量的限制，故當電腦記憶體容量較小時，我們可將整個領域分割成較多的分區，使每一個分區亦較小。

目前我們應用一台記憶體容量為 2 Gb 的個人電腦，針對一個外部邊界乃距離港口約四倍波長遠的領域加以計算，此一大小經由徐 (2003) 的收斂性測試，已可確保目前所使用的外部邊界條件之準確性。接下來，我們將整個領域先如圖三所示分為 202 個分區，再將所有港外的分區一分為二，其中一個分區離海岸線較近，另一個分區離海岸線較遠。此一做法除可更進一步降低電腦記憶體的需要量外，另一個優點是，此時我們可以在此兩個分區內採用間隔不相同的網格。由於緣岸波在岸邊將沿著垂直海岸線方向上迅速變化，故在離海岸線較近的分區內之節點與節點的距離須較小，而在離海岸線較遠的分區內則可較大。

第四章 網格產生的方式

要計算 (3.3) 式內的積分，必須將封閉表面 S 劃分為許多小面積（稱為邊界元素），分別積分，再累加在一起。而當我們欲針對各個邊界元素進行積分時，其被積分函數將用其位在我們所選擇的各節點上的值及其內插函數來取代，且其實際的邊界元素將用一通過各節點之內插的邊界元素來做為近似。有關這方面的討論在 Kane (1994) 中有詳盡的說明，但因上述的內插法和我們如何產生數值模式中所需的網格點有密切的關連，故有必要在此先簡單介紹上述兩種內插近似。

在一封閉表面上可選擇各種形狀的邊界元素，目前我們乃選擇最簡單，但具有最多優點的三角形元素。故若此三角形元素為一平面，則在此元素上各點的位置向量 $\mathbf{R}_s$ 可用圖四中的頂點 3 的位置向量 $\mathbf{R}_3$ 和兩個單位向量 $\mathbf{e}_1$ 與 $\mathbf{e}_2$ ，以及兩個邊長 L_1 與 L_2 來表示：

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_3 + a_1 L_1 \mathbf{e}_1 + a_2 L_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.1)$$

其中 $0 \leq a_1 \leq 1$, $0 \leq a_2 \leq 1$ ，而 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 則可由三角形元素的三個頂點在一卡氏座標系統中的座標來決定，其結果若應用 summation convention 可表為

$$\mathbf{e}_1 = \frac{x_k^{(1)} - x_k^{(3)}}{L_1} \mathbf{i}_k; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{x_k^{(2)} - x_k^{(3)}}{L_2} \mathbf{i}_k \quad (4.2)$$

將 (4.2) 代入 (4.1) 後可得

$$\begin{aligned} x_j^{(s)} &= x_j^{(3)} + a_1 L_1 \frac{x_j^{(1)} - x_j^{(3)}}{L_1} + a_2 L_2 \frac{x_j^{(2)} - x_j^{(3)}}{L_2} \\ &= a_1 x_j^{(1)} + a_2 x_j^{(2)} + (1 - a_1 - a_2) x_j^{(3)} \\ &= a_k x_j^{(k)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中

$$a_3 = 1 - a_1 - a_2 \quad (4.4)$$

由 (4.3) 和 (4.4) 可知，當三個頂點的位置固定後，在三角形元素上任何一點的位置可以由一組本質 (intrinsic) 座標 (a_1, a_2, a_3) 來唯一決定，其中 a_3 座標可由 a_1 和 a_2 完全決定，故為非獨立座標。此組座標（參考圖四中的右圖）可被用來進行內插。

當我們選擇一個三角形元素的三個頂點為節點時，若被積分函數在此三個節點上的值分別為 $T^{(1)}$ 、 $T^{(2)}$ 和 $T^{(3)}$ ，則在此元素上其他各點的被積分函數的值 $T(a_1, a_2)$ 可近似表為

$$T(a_1, a_2) = a_k T^{(k)} \quad (4.5)$$

由上式及 (4.4) 式, 當 $a_1 = 0$ 及 $a_2 = 0$ (表頂點 3) 時, $T(0, 0) = T^{(3)}$, 當 $a_1 = 0$ 及 $a_2 = 1$ (表頂點 2) 時, $T(0, 1) = T^{(2)}$, 而當 $a_1 = 1$ 及 $a_2 = 0$ (表頂點 1) 時, $T(1, 0) = T^{(1)}$ 。因此 (4.5) 式確實代表一個由各節點上的值所決定的線性內插近似。

值得注意的是 (4.3) 和 (4.5) 形式完全相同, 表若實際的三角形元素不為平面, 則我們可用一組相同的內插函數 $h^{(k)}$ 來內插此一元素之幾何形狀及被積分函數兩者, 而其內插函數目前即為

$$h^{(k)} = a_k \quad (4.6)$$

故 (4.3) 和 (4.5) 可改寫為

$$x_j(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^3 h^{(k)} x_j^{(k)}; \quad T(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^3 h^{(k)} T^{(k)} \quad (4.7)$$

爲了要增加數值解的準確度, 我們目前在三角形邊界元素上實際選擇如圖五所示之六個節點, 它們的本質座標分別為 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0.5, 0.5, 0)$, $(0, 0.5, 0.5)$, $(0.5, 0, 0.5)$, 故此一元素及其節點在本質座標系統中的位置如圖五之本質元素 (intrinsic element) 所示。在此種情況下, 其內插函數亦增為六個, 分別是

$$\left. \begin{aligned} h^{(1)} &= a_1(2a_1 - 1); & h^{(4)} &= 4a_1a_2 \\ h^{(2)} &= a_2(2a_2 - 1); & h^{(5)} &= 4a_2a_3 \\ h^{(3)} &= a_3(2a_3 - 1); & h^{(6)} &= 4a_3a_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

而 (4.7) 式則改爲

$$x_j(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^6 h^{(k)} x_j^{(k)}; \quad T(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^6 h^{(k)} T^{(k)} \quad (4.9)$$

將六個節點的本質座標代入 (4.8), 再將其結果代入 (4.9), 可顯示 (4.9) 連同 (4.8) 確實代表一個在節點上的值和正確值完全相等的內插近似。此一內插三角形元素可為一個曲面, 但在離港口較遠的分區內, 由於其海岸線為直線, 且其海底地形變化亦為片斷線性, 因此雖然我們應用 (4.8) 和 (4.9) 來內插邊界元素上的被積分函數以及元素的幾何形狀兩者, 但後者的內插近似仍為一個平面, 且它和真實的平面沒有差異, 然而被積分函數的內插近似, 則會和實際者在非節點上有差異。

由於我們採用內含六個節點的三角形元素, 故在上述離港口較遠, 且地形為規則的分區內, 其海底以及自由表面上的網格如圖六所示 (本圖以及圖七和圖八中的元素的數目

僅為舉例說明，並不代表實際的數目)，而其位在海岸線上及海岸線對面之垂直邊界上之網格，將如圖七所示，至於其位在與海岸線垂直的兩個邊界上的網格則如圖八所示。在圖七和圖八中，由於水深和波長相比甚小，故全部水深僅分割為一個元素。

在上述情況下，由於各節點的位置變化具有規律性，故可經由計算獲得，而各節點的編號亦可由電腦程式決定。凡此種種皆可應用在每一個地形為規則的分區內，故即使分區的數目很大，仍不會增加程式設計及應用上的困難。

另一方面，在港口附近以及港內這些地形為不規則的分區內，各節點的位置（可彈性選擇）需輸入電腦，但為了要將原來針對規則地形分區所設計的電腦程式之流程，應用在不規則地形分區內，我們仍採用圖六—圖八的網格型態，但此時其網格中的三角形元素乃為其本質元素，而其實際元素則可類似於圖五之左圖所顯示者。在此種情況下，即使節點的真實位置不規則，故仍須輸入，但由於網格的整體架構在本質上具有規則性，故我們可以將各節點的真實位置，以一種最方便且固定的順序輸入，然後由電腦程式決定其編號，如此仍可大量減輕使用者的負擔。

當港內的地形十分複雜（例如在兩個不規則港池間以一個相對較窄的航道相連）或較特殊（如圓形港池）時，若仍採用圖六—圖八的網格型態，且在各處皆維持足夠的解析度，須將港內區域亦分割成數個分區（並進行連續壓縮），然後將上述網格產生方式應用在每一分區內。由於目前所採用的數值方法本身即為多區域邊界元素法，故將港內區域加以分割並不會增加太多程式設計上的困難，因此目前的網格產生方式實際可適用在地形極為複雜的港灣內。

第五章 數值計算與比較

由於採用上述的網格產生方式，我們在設計電腦程式時，亦分為兩個階段：第一階段是針對一矩形港池設計程式。此一電腦程式的計算結果和 Ünlüata & Mei(1973) 以及 Mei(1983) 的解析解極為接近 (徐,2003)，故可證明程式的準確性。接下來我們將程式修改為可適用在港內及其鄰近海域之地形為不規則的情況。此一修改使目前的程式和原來的程式有兩個主要的差異：一個差異是原來的程式因考慮邊界元素皆為平面三角形，且其三邊皆為直線，故某些關係式被簡化，某些變數則改為常數，而目前的程式則使用 Kane (1994) 所提供之完整的公式。另一個主要的差異是，目前的程式亦可將港內水域分割為許多分區，並應用第三章所述的連續壓縮過程，因而可以確保港內各節點與節點間的距離皆足夠小。

由於原來的程式已經過充份驗證，故為測試目前的程式，我們首先將它應用於矩形港灣，並將其計算結果與應用原來的程式所獲得者比較，其結果顯示兩者相差不到0.01%，表目前的程式雖使用較複雜的公式，且大幅改變其編碼，但當邊界元素為平面時，仍可獲得正確之結果。

接下來，為測試目前的電腦程式亦可針對曲面元素加以計算，並獲得正確的結果，我們應用它針對一圓形港灣來加以計算，並將其結果和 Lee(1971) 的數值解比較。由於 Lee(1971) 是計算一個由外海，以垂直海岸線方向入射之有限水深重力波所引發之港池振盪，且其港內和港外的水深皆相等，故要將其結果和目前的入射波為緣岸波的結果相比，表面上似乎不可行，但根據 Miles & Munk (1961) 的理論，當港的入口很窄 (和波長相比) 時，港內的振盪和入射波的方向無關，因此仍可進行以下的比較。

在 Lee(1971) 的論文裡曾將港內某一固定位置 (即圖九中的 P 點) 上的振幅放大率 R (其定義乃為該點的振幅和海岸線上的入射波和反射波振幅總和之比值) 表為無因次參數 ka 的函數，其中 a 代表圓形港灣之半徑， k 表 wave-number。此時由於港的大小固定，故 Lee(1971) 乃針對不同的 k 值 (亦即不同週期的入射波) 加以計算。然而，目前為了確保在我們所選定的岸邊斜坡上之緣岸波只有一種 mode 能存在，因而可以用 (2.19) 和 (2.20) 取代較複雜的 (2.17) 式，特將入射波的週期固定為 160 秒，因此港內的 wave-number k 亦固定，而為獲得 R 隨 ka 之變化，我們乃針對各種不同半徑的圓形港池加以計算，但港的開口角度 (見圖九) 則和 Lee(1971) 一樣固定為 10° (Lee(1971) 亦曾針對 60° 的情況來加以計算)，因此當目前的 ka 值和 Lee(1971) 的 ka 值相等時，不但表港內波長和港的半徑之比值兩者相等，且表港內波長和港的入口寬度之比值兩者亦相等，故我們確可將兩種數值解加以比較。

當港的形狀為正圓形時，其節點的位置可在事先決定其分佈型態後，用電腦來計算其

準確位置。儘管如此，目前我們爲了要模擬不規則港形的處理狀況，特將節點的位置先存放在一個資料檔中，再將此檔做爲從事數值計算的電腦程式之輸入檔。圖十即顯示目前我們所採用的位在港內海底或自由表面上的節點及其所屬的三角形元素之分佈型態，在港內其他邊界上的節點位置亦可由圖十間接瞭解。當圖十中的元素轉換爲其本質元素後，圖十中的網格型態將轉換爲如圖六所示者。另外，在圖十中由內插法所決定的港的邊界（虛線）和其真正的邊界（實線）極接近。

應用圖十中的網格型態及新的電腦程式，我們乃計算由相同的緣岸波引發各種不同半徑之圓形港池內的振盪，而爲了和 Lee (1971) 的結果相比較，我們將目前所獲得的位在圖九中 P 點上的振幅放大率，連同 Lee 的結果，繪於圖十一。其結果顯示，當 ka 小於 1 時，目前的數值解和 Lee (1971) 的解十分接近，而兩者之 peaks 的高度差，則和入射的緣岸波與一般重力波的波形不相同有關。但另一方面，當 ka 大於 1 時，目前的數值解逐漸出現不穩定的現象，其原因則和圖十中位在某些橫斷面上的節點與節點間距離，此時變爲太大有關。此一現象在電腦記憶容量有限的情況下，無法經由增加節點的數目來解決，僅能如第四章最後所述，將港內，亦如同港外，分割爲許多分區來解決。

爲解決圓形港內某些地區節點與節點間距離過大的問題，我們將港內分割爲如圖十二所示之 13 個分區，並採用目前的多區域邊界元素法及連續壓縮過程來加以計算，其結果如圖十三所示。圖中，目前的數值解在 $ka > 1$ 時，和 Lee (1971) 的結果十分接近，表上述數值解不穩定現象確可用分區來解決。但此時，當 ka 甚小時，新的誤差將產生，使圖十三中最左邊的 peak 之位置略爲偏移，且當 $ka \rightarrow 0$ 時，振幅放大率 R 無法如預期趨近於 1。此一現象亦發生在其他形狀的港池之數值解中，故可能是由於此時在某些港內分區內， ϕ 的值在各點幾乎相等，因而使目前的連續壓縮過程出現一種誤差放大的現象。實際是否如此，仍需經由數學分析來加以證明，目前我們僅將 $ka < 1$ 的解，改用港內未分區時的解（亦即圖十一中的解）來取代，因而獲得圖十四此一十分理想的結果。

接下來，我們應用目前的電腦程式來計算美國加州之 Long Beach Harbour 內的振盪，並將其結果和 Lee (1971) 的結果比較。此時由於港內分爲東西兩部，故爲了採用第四章所敘述的網格產生方式，必須將港內加以分區。目前我們僅將港內分爲如圖十五所示之六個分區，而爲了獲得不同的 ka 值所對應的圖十五中 A 點之振幅放大率，我們亦如前面所說，變化港池的大小（亦即變化圖十五中所定義的 a 值），如此即可和 Lee (1971) 的解比較，其結果如圖十六所示。

在圖十六中，當 $ka \rightarrow 0$ 時，振幅放大率仍無法趨近於 1，表上述誤差放大現象亦發生在 Long Beach Harbour 的情況。另一方面，當 $ka > 4$ 時，目前的數值解逐漸變爲不穩定。此一現象，由前面的經驗推測，可經由將港內分割爲更多個分區來加以解決。除這

些差異以外，目前的數值解在圖十六中皆和 Lee(1971) 的解十分吻合，且兩者之 peaks 的位置亦十分接近（在此我們仍強調，兩者之 peaks 的高度差，僅和緣岸波與一般重力波的波形不相同有關），故由此結果以及圖十四，我們已可確定目前的電腦程式在語法和邏輯上應無誤，且使用的數學理論及公式應正確。

在經由與其他數值解比較，以確定目前的電腦程式正確以後，我們即將它應用於花蓮港。由於花蓮港的港形亦相當複雜，故為確保港內各節點與節點之間隔在每一處皆足夠小，仍必須將港內加以分區。目前為方便起見，我們將它分割為如圖十七所示之18個分區，並在計算後，將圖十七中A點（其位置接近於10號碼頭）上的振幅放大率繪於圖十八。在圖十八中，當 $ka \rightarrow 0$ 時，由於某些分區內的 ϕ 值幾乎無變化，可能使得在目前的連續壓縮過程中，產生一種誤差放大的現象，因而使振幅放大率無法趨近於1。此一現象使令對 ka 值較小時所出現的 peak 存疑，但未來我們可以經由減少分區的數目，因而增加每一分區的面積，來改善此一現象。另一方面，當 ka 值較大時，振幅放大率的估計值並未出現如圖十一和圖十六中所呈現的不穩定現象，因此我們判斷在 $ka = 0.63$ 附近所出現的 peak 應可信賴。

由於國內以往針對花蓮港所做的數值計算，大都考慮港內水深為非等深，而目前的電腦程式雖亦可在不同的位置輸入不同的水深，但如今所輸入者皆為15米，因此無法將目前的解和以往的解加以比較。另一個無法比較的原因是，在以往的文獻中（例如蘇、陳,1995），其共振曲線圖上之橫座標乃為波的週期，故其計算乃針對週期小於200秒的入射波，而目前的計算則大抵相反（若將 ka 中的 a 改視為定值），因此兩者代表不同條件範圍內的計算。

第六章 結論

本研究乃應用多區域邊界元素法及連續壓縮過程，完成一可針對岸邊具有一沿海岸線無限延伸斜坡，且港內及港外地形（包含水深）皆為不規則情況，估計由緣岸波引發港內海水振盪現象之電腦程式。此一程式不僅能將港外計算領域加以分區，且可將港內亦分區，以確保在電腦記憶容量有限的情況下，節點與節點間的距離在各處皆足夠小。此一數值模式之另一個優點是，它可以很自然及準確地模擬港內邊界的形狀及條件，因此儘管上述電腦記憶容量不足的問題，亦可應用差分法，並考慮其所涉及的矩陣為 tridiagonal，因而得以採用一些特殊的方法來解決，但目前的程式仍將對解決花蓮港共振問題有很大的幫助。

應用目前的電腦程式，針對圓形港及美國加州之 Long Beach Harbour 所做的計算顯示，目前的數值解可和 Lee (1971) 的解一致，而兩者的差異亦可獲得充分的解釋。由於電腦程式已證明無誤，且可適用於任何形狀的港池，故接下來我們即應用它來計算花蓮港的共振現象，其結果顯示，當共振發生時，花蓮港的振幅放大率遠超過圓形港及 Long Beach Harbour 之振幅放大率，其原因可能和花蓮港為一狹長的港池有關。

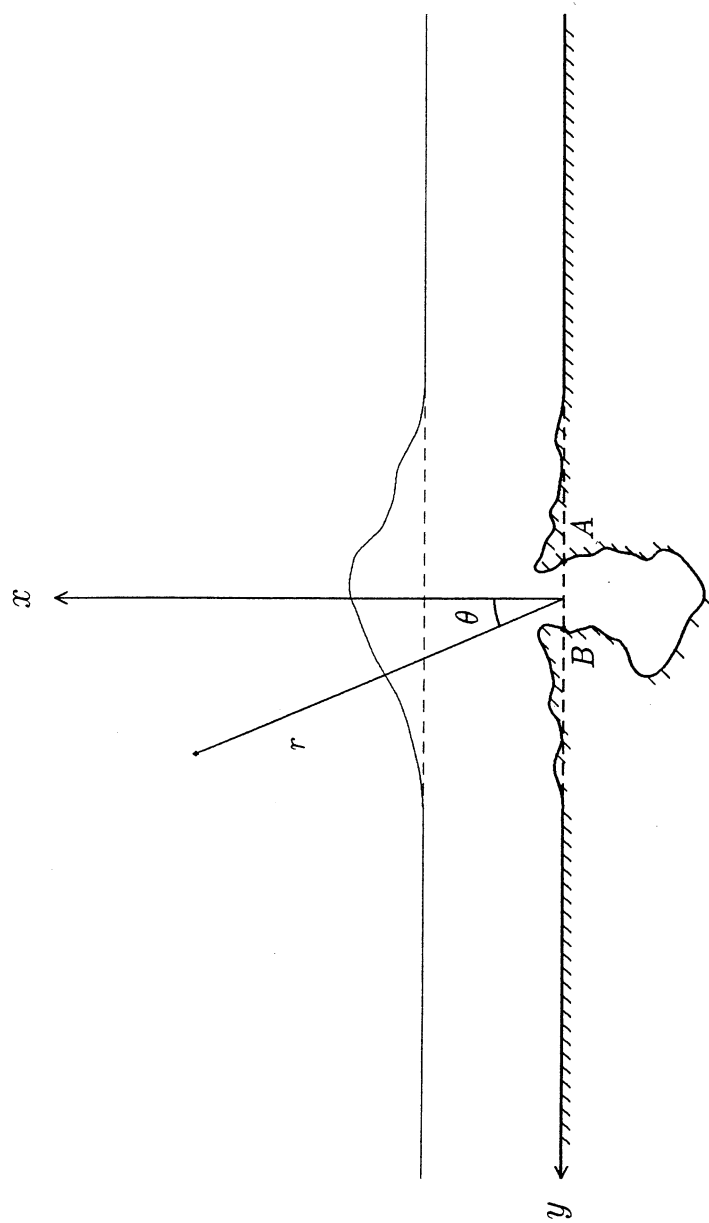
當港內節點與節點的間隔太大（與波長相比）時，數值計算將產生很大的誤差，此一現象在應用其他數值模式時亦同樣發生（參見 Lee (1971) 之結論），而為解決此問題，且若港的形狀十分複雜，水深又不均勻，則較為理想的方法是將港內亦加以分區。但由目前的數值計算顯示，當港內分區數目過大及過小時，仍會使數值解產生很大的誤差，但前者可以由觀察所估計的振幅放大率是否在 $ka \rightarrow 0$ 時，趨近於 1，來加以判斷，後者則可以經由觀察，當 ka 較大時，數值解能否穩定，來判斷港內是否須增加分區的數目。因此當應用此兩種判斷準則來調整分區的數目，由目前的電腦程式即可獲得極可信賴的數值解。故未來我們將應用此一程式，針對略為不同的花蓮港港形及入口位置，計算其振幅放大率，以期能降低後者。如其結果顯示，花蓮港非經大規模改建，無法改善其共振現象，則我們將進一步，針對不同的港外防波堤佈置，同樣應用目前的電腦程式來加以計算，以期能因減少入射的緣岸波能量，使港內的振盪亦依相同的比率降低。因此，儘管目前的電腦程式在計算時十分耗時，但因它能針對緣岸波加以計算，故仍有其必要性。

參考文獻

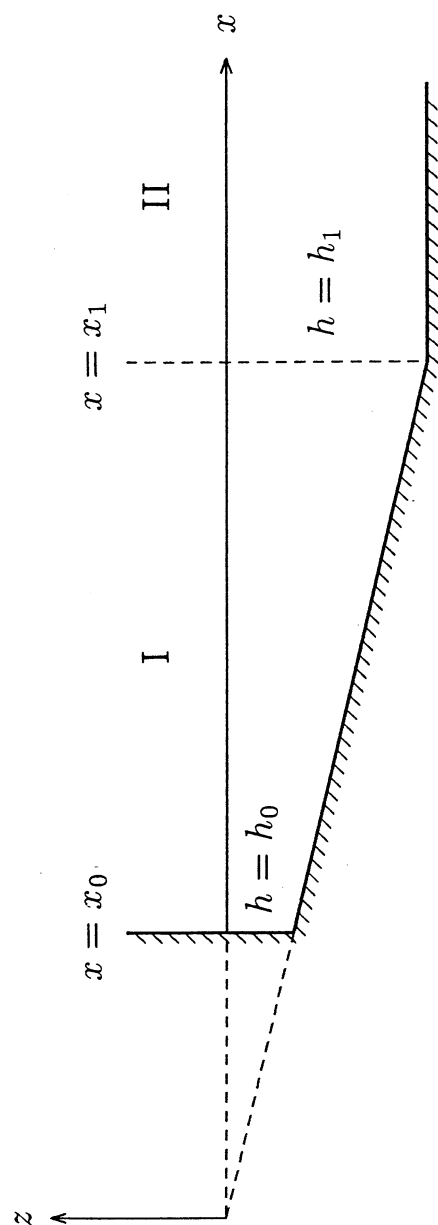
- Bai, K. J. & Yeung, R. 1974 Numerical solutions of free-surface flow problems. *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn., Cambridge, Mass.*, 609–647.
- Berkhoff, J. C. W. 1972 Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver*. **1**, 471–490.
- Chen, H. S. & Mei, C. C. 1974 Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea. *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn., Cambridge, Mass.*, 573–596.
- Chenot, J. L. 1975 Méthode numérique de calcul du mouvement d'un corps flottant soumis à l'influence d'une houle périodique en théorie linéaire. *Rev. Inst. Fr. Pet.* **30**, 779–802.
- Huntley, D. A., Guza, R. T. & Thornton, E. B. 1981 Field observations of surf beat, 1. progressive edge waves. *J. Geophys. Res.* **86**, 6451–6466.
- Hwang, L.-S. & Tuck, E. O. 1970 On the oscillations of harbours of arbitrary shape. *J. Fluid Mech.* **42**, 447–464.
- Kane, J. H. 1994 *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Lee, J.-J. 1971 Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry. *J. Fluid Mech.* **45**, 375–394.
- Mei, C. C. 1978 Numerical methods in water-wave diffraction and radiation. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 393–416.
- Mei, C. C. 1983 *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Wiley-Interscience, New York.
- Miles, J. & Munk, W. 1961 Harbor paradox. *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., J. Waterways Harbors Div.* **87**, 111–130.
- Schäffer, H. A. 1994 Edge waves forced by short-wave groups. *J. Fluid Mech.* **259**, 125–148.
- Ünlüata, Ü & Mei, C. C. 1973 Long wave excitation in harbors—an analytic study. Dept. of Civ. Engrg. M.I.T. T.R. no. 171.
- Yue, D. K. P., Chen, H. S. & Mei, C. C. 1978 A hybrid element method for diffraction of water waves by three dimensional bodies. *Int. J. Num. Methods Engineering* **12**, 245–266.

蘇青和、陳冠宇 1995 消波式岸壁港池之波場數值推算研究, 港灣技術研究所基本研究計畫成果論文集, 359-386。

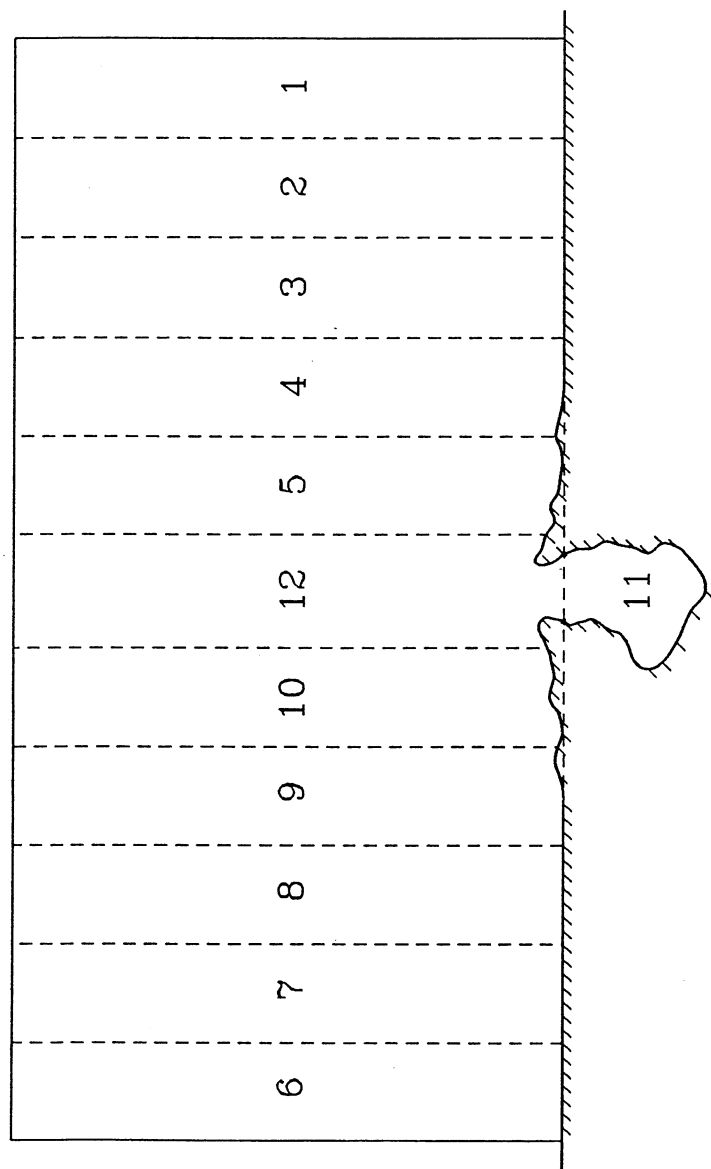
徐進華 2003 防波堤堤頭附近波浪特性研究, 運輸研究所港灣技術研究中心。



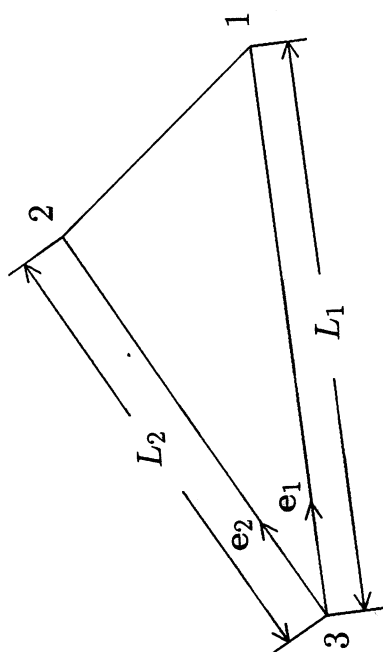
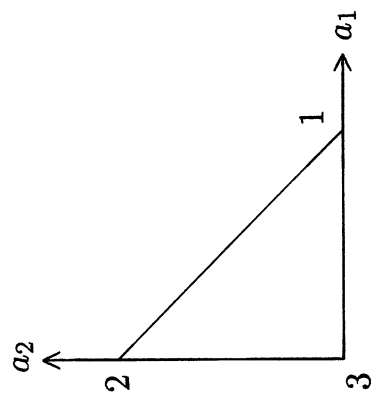
圖一、示意圖，細實線表岸邊斜坡與外海等深區之分隔線



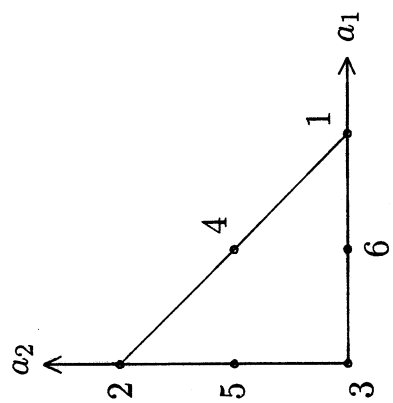
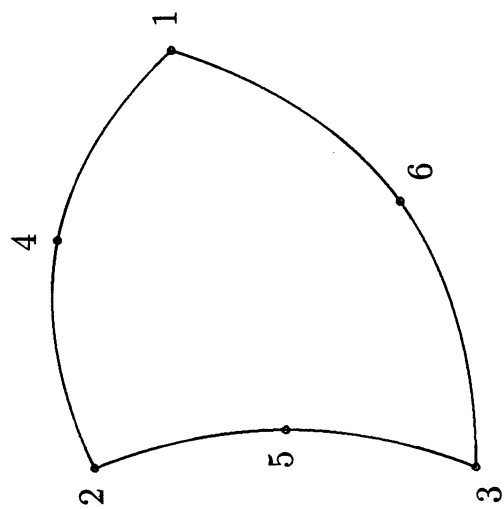
圖二、遠離港口地區之海底地形



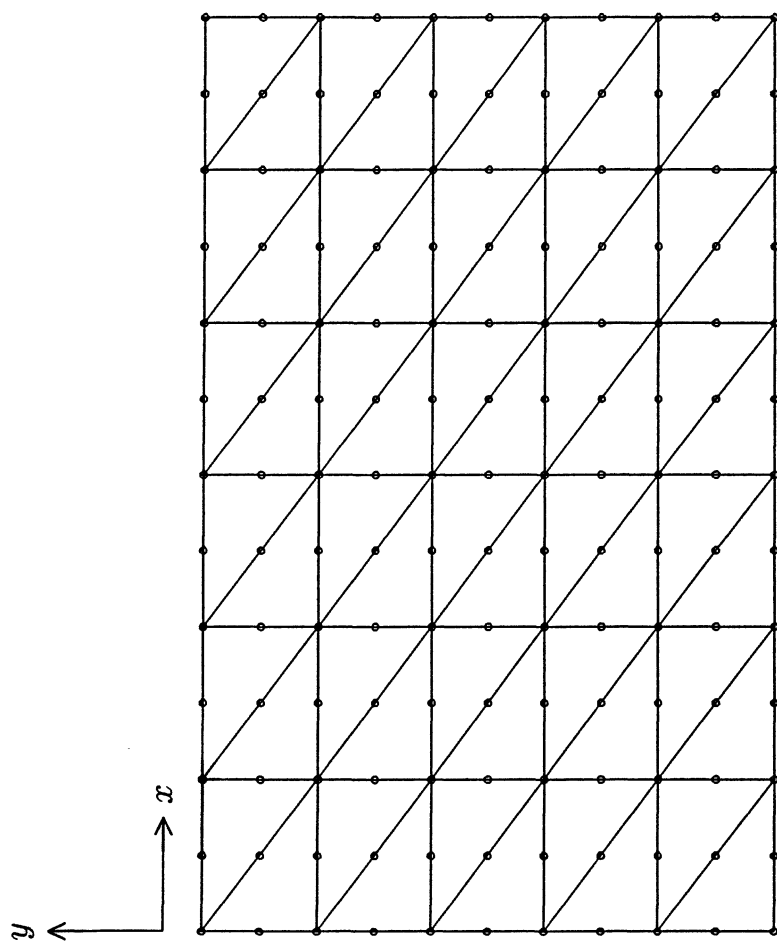
圖三、多區域邊界元素法及連續壓縮過程解說圖



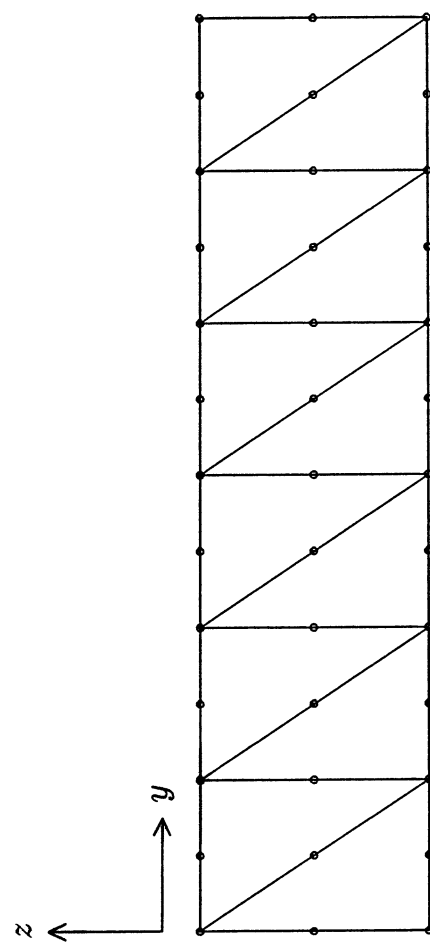
圖四、示意圖



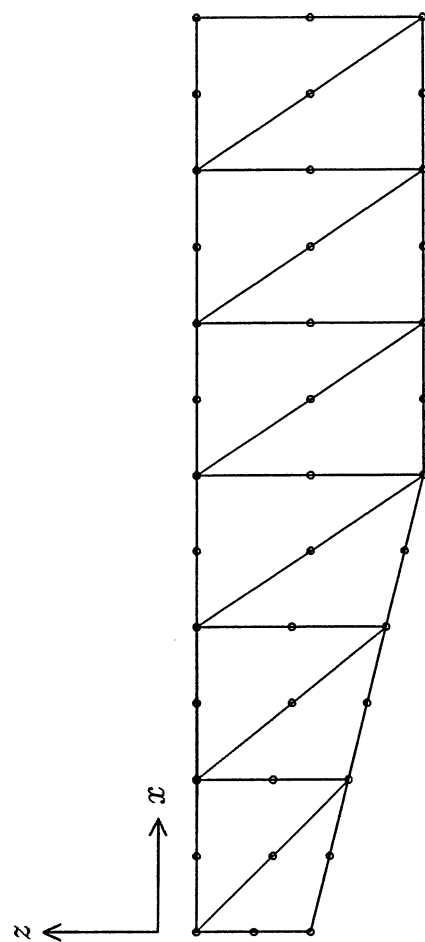
圖五、六節點三角形邊界元素



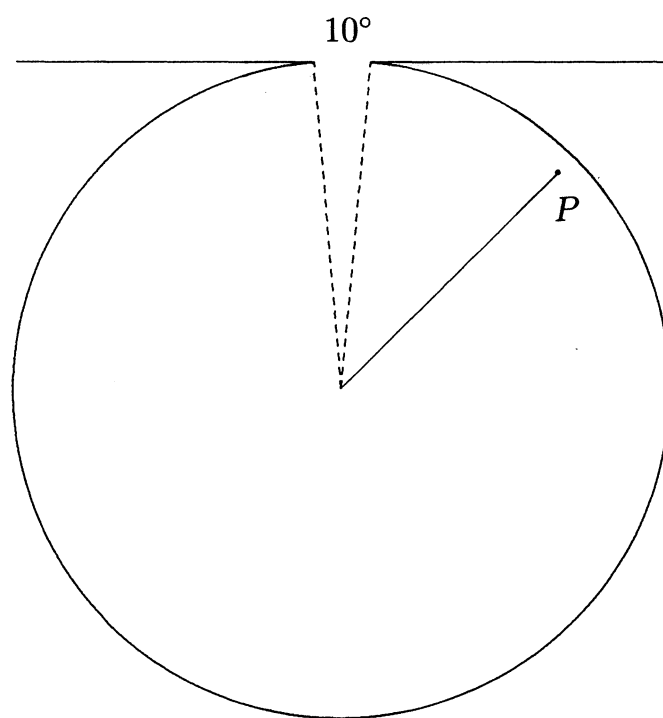
圖六、海底以及自由表面上之網格型態



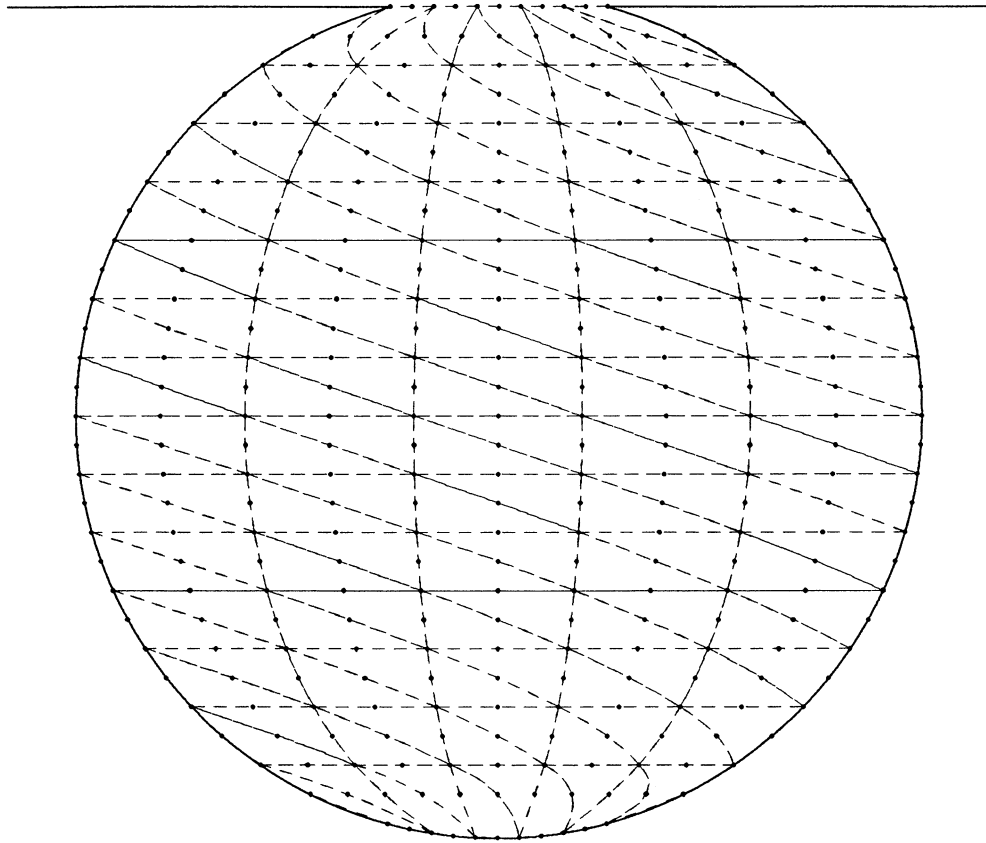
圖七、海岸線上及其對面邊界上之網格型態



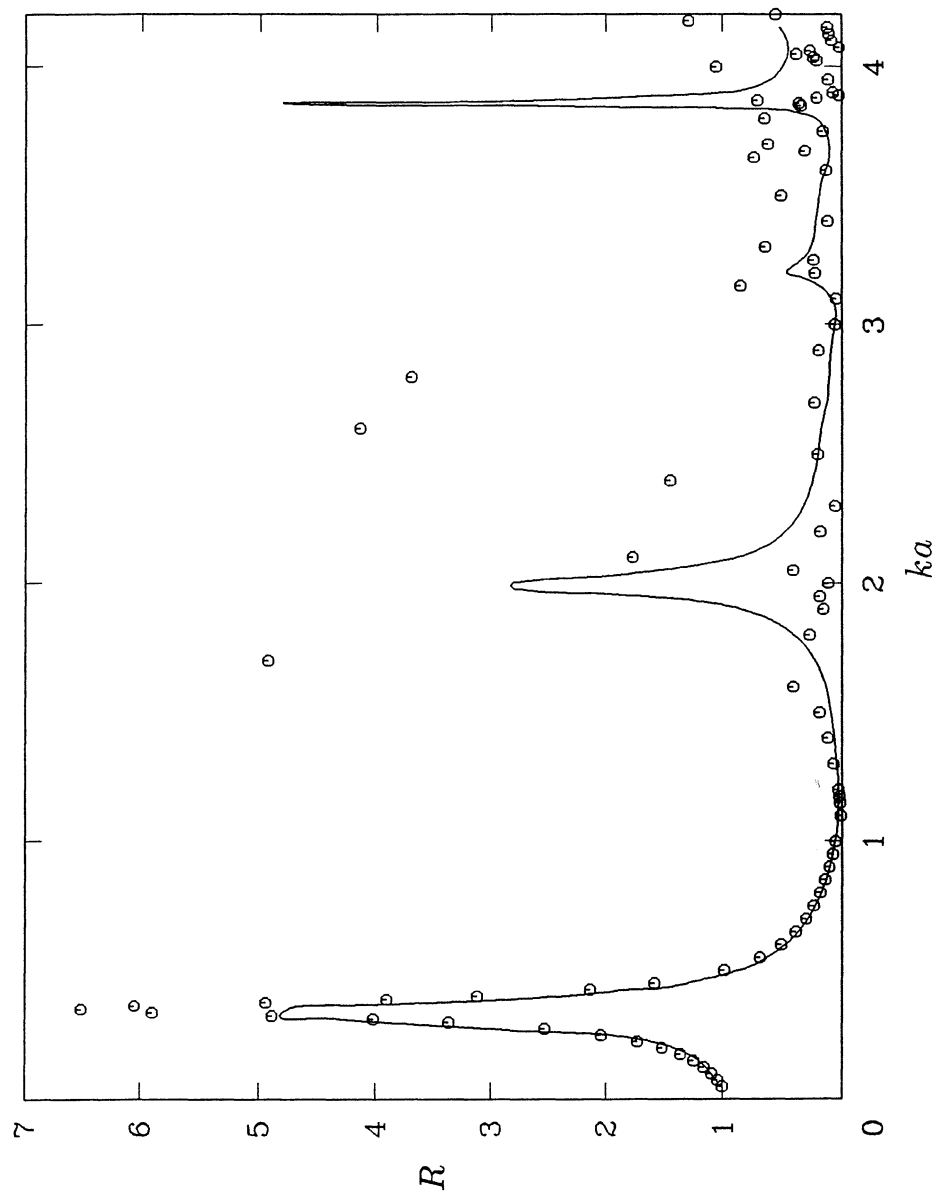
圖八、垂直海岸線的邊界上之網格型態



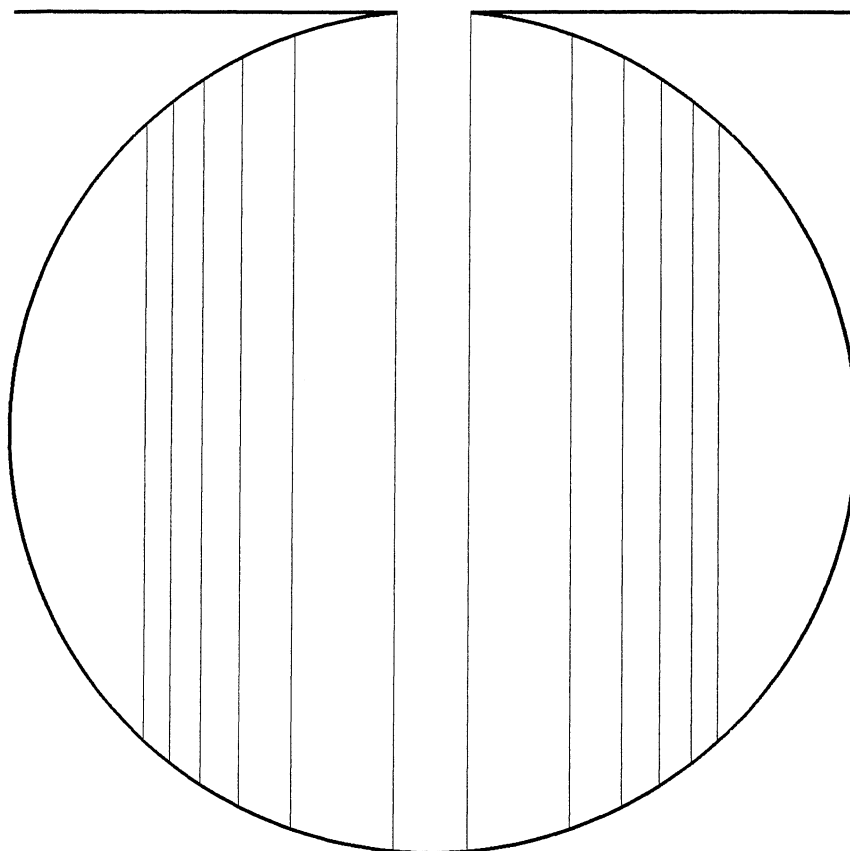
圖九、示意圖



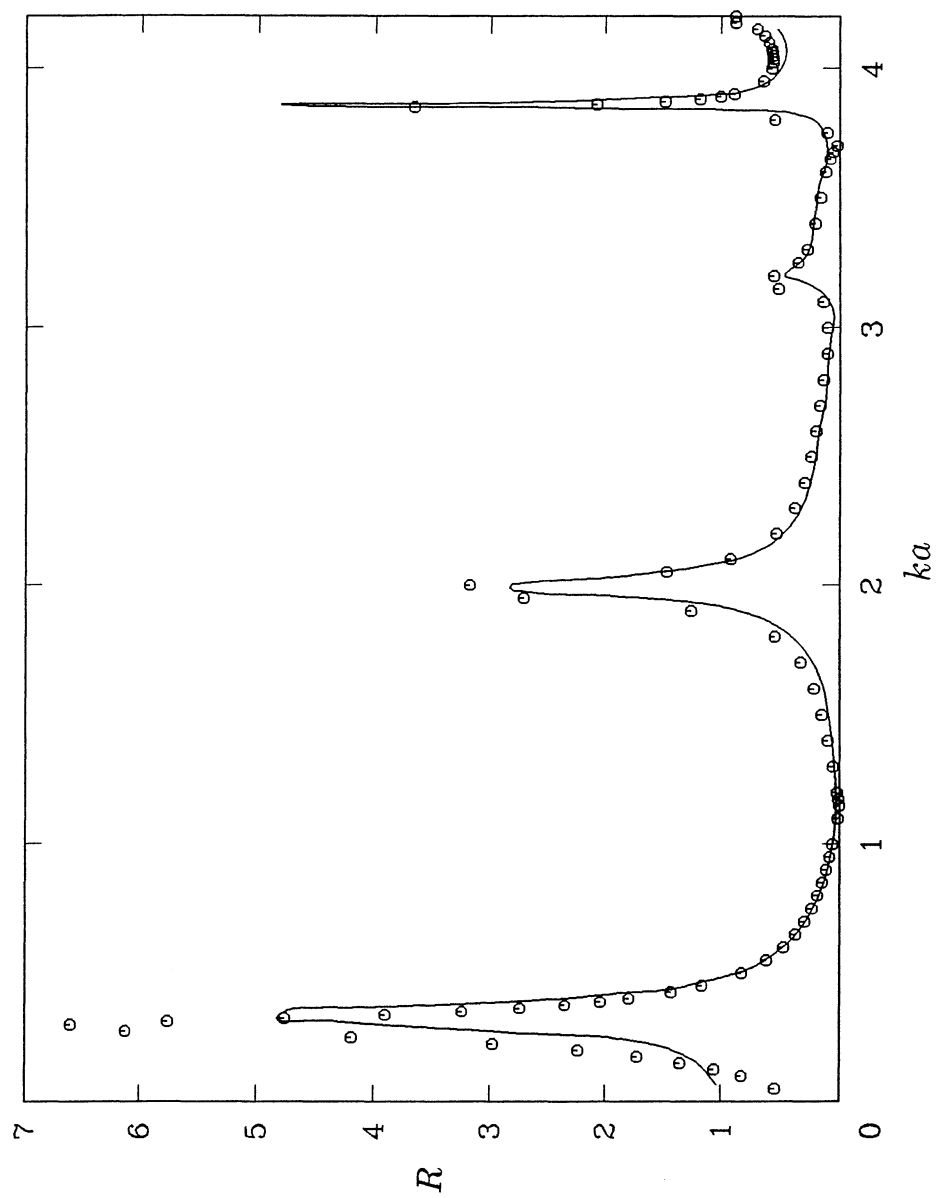
圖十、圓形港池內的真實網格型態



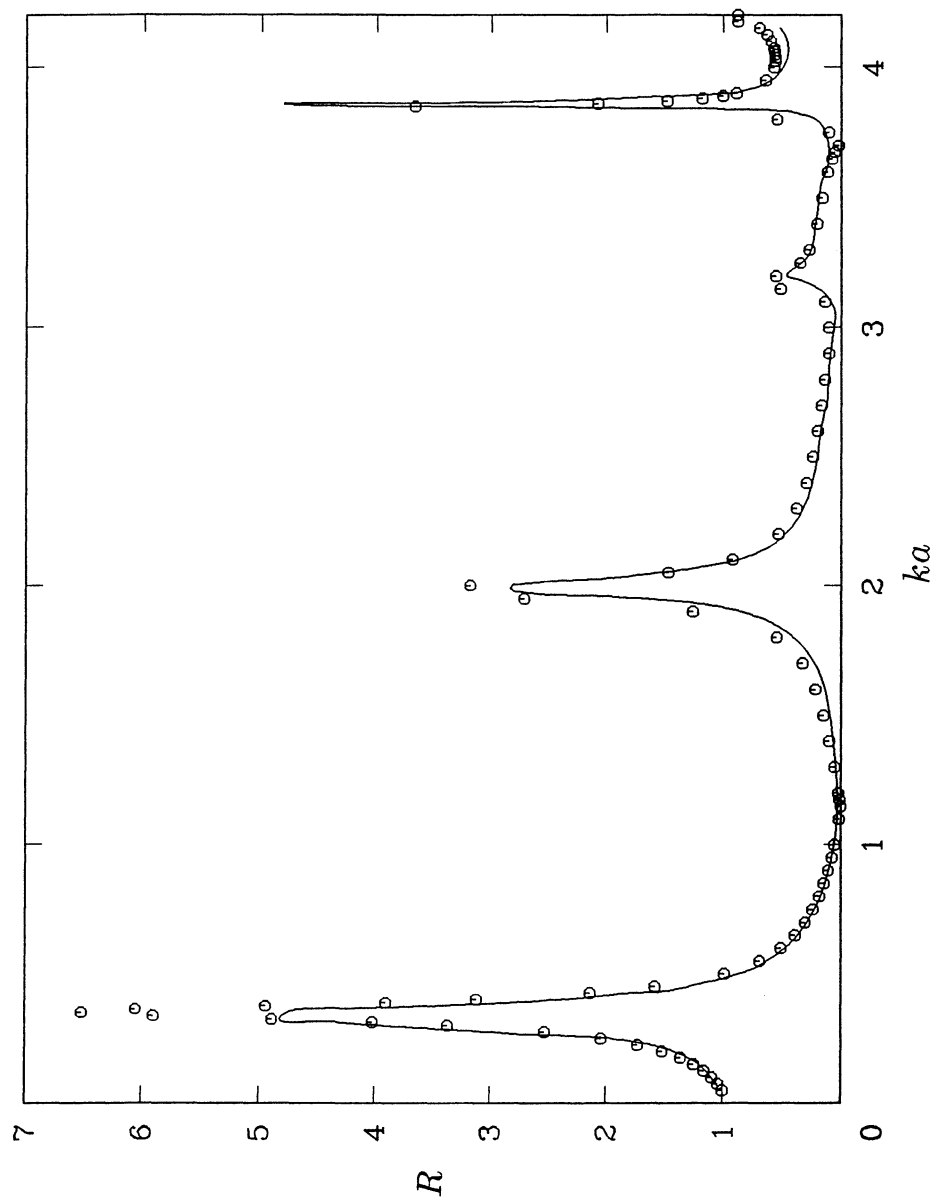
圖十一、圖九中圓形港內 P 點之振幅放大率，曲線表 Lee(1971) 在等水深且入射波為非緣岸波情況下所獲得之數值解，圓點表應用目前的電腦程式，並採用圖十中的網格型態所獲得的數值解



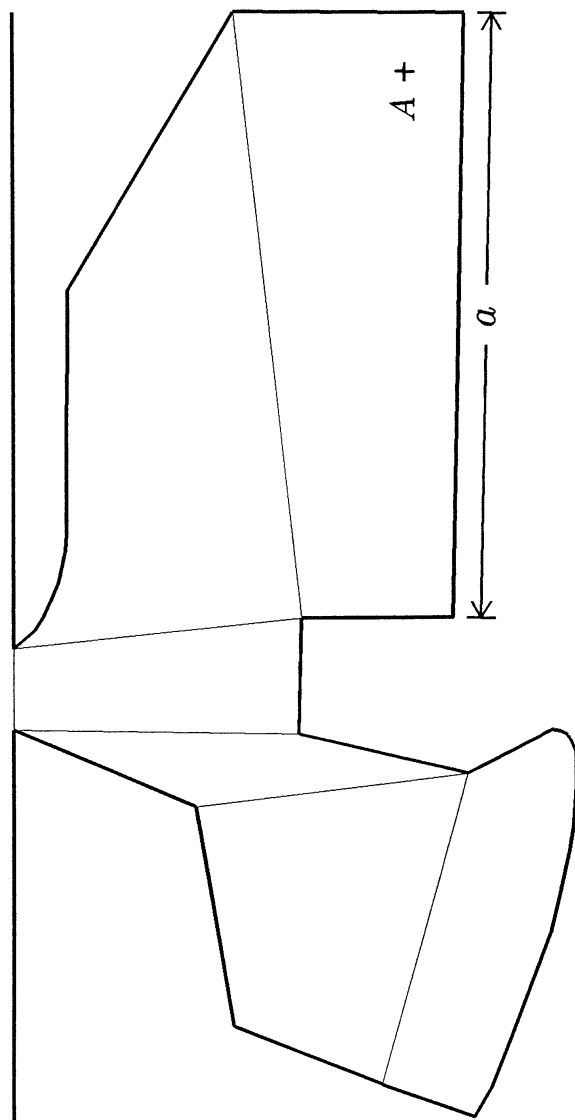
圖十二、圓形港內之分區狀況



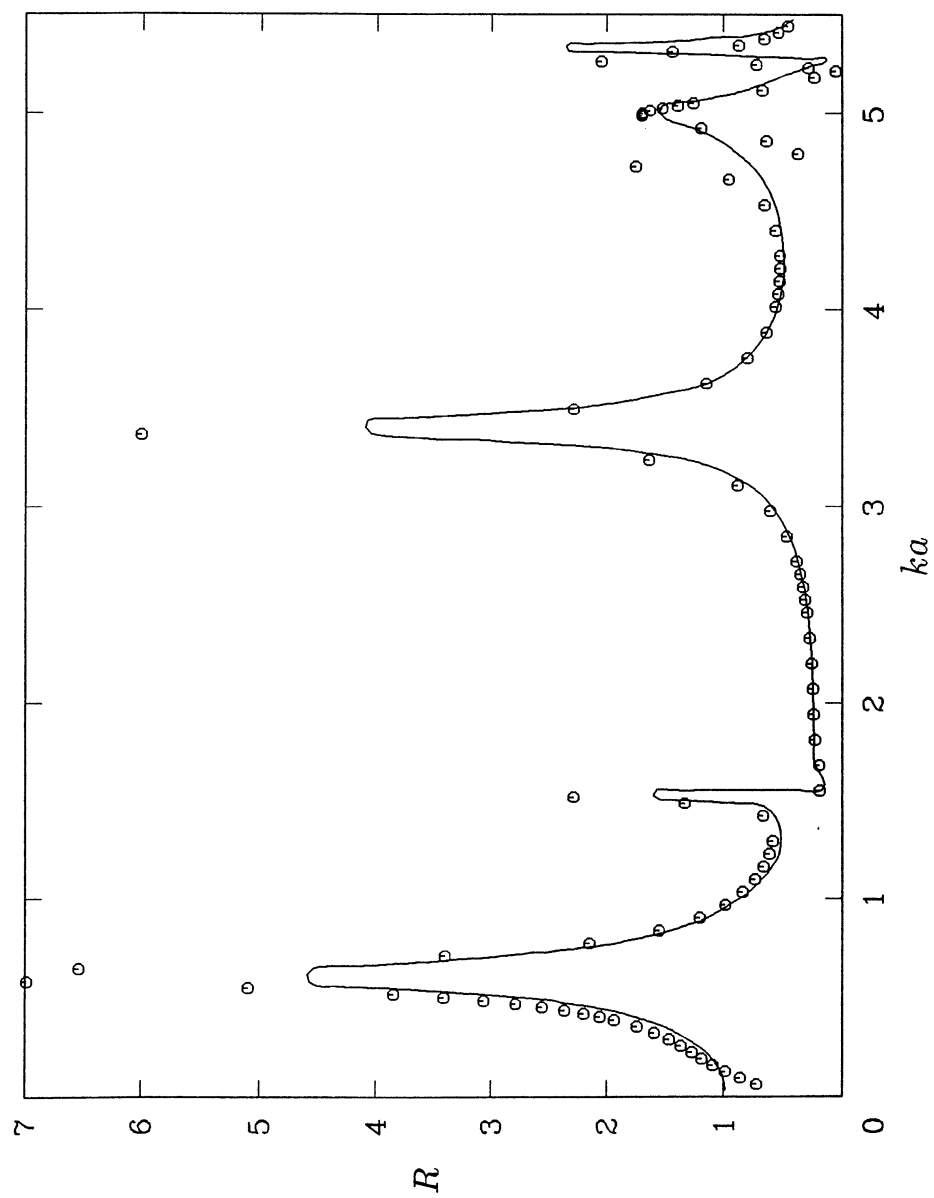
圖十三、類似於圖十一，但目前的圓點表圓形港內加以分區後所獲得的數值解



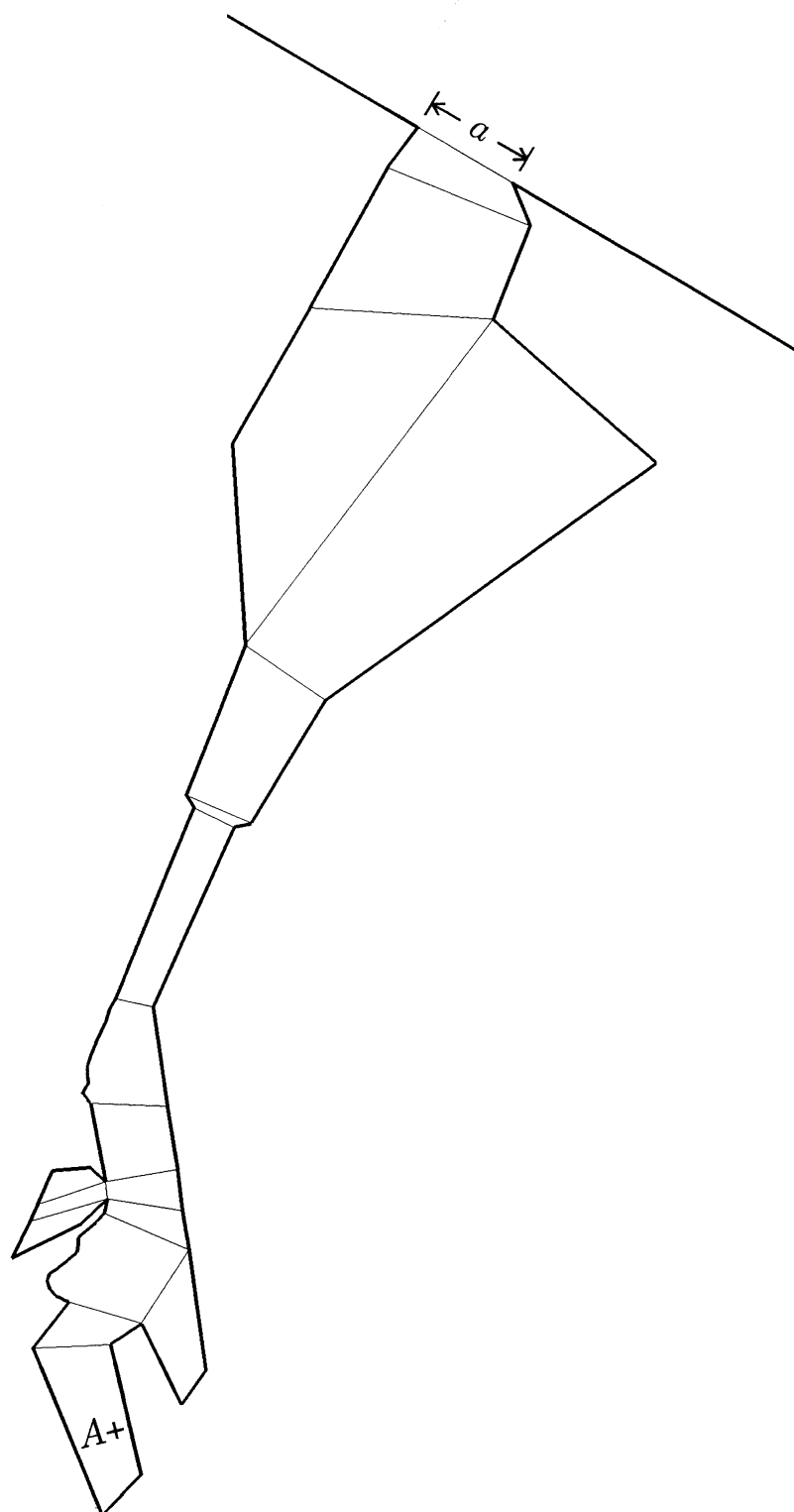
圖十四、類似於圖十三，但當 $ka < 1$ 時，目前的數值解改用圖十一中的結果



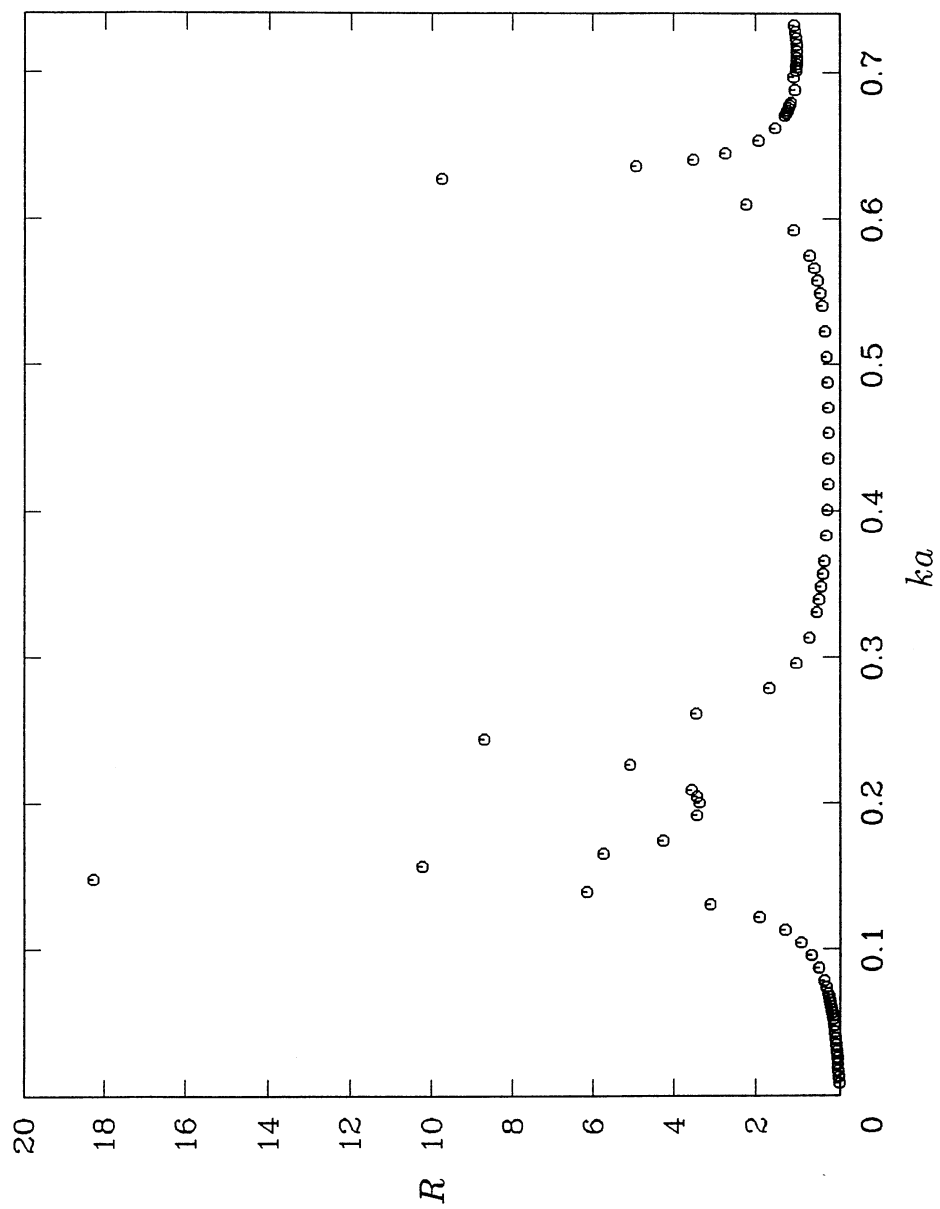
圖十五、Long Beach Harbour 內之分區狀況



圖十六、圖十五中Long Beach Harbour 內A點之振幅放大率，曲線表 Lee(1971) 之數值解，
圓點表目前的數值解



圖十七、花蓮港內之分區狀況



圖十八、應用目前的電腦程式所獲得的花蓮港內A點 (見圖十七) 之振幅放大率

交通部運輸研究所

「臺灣東岸港口共振現象改善方案研究(3/4)」

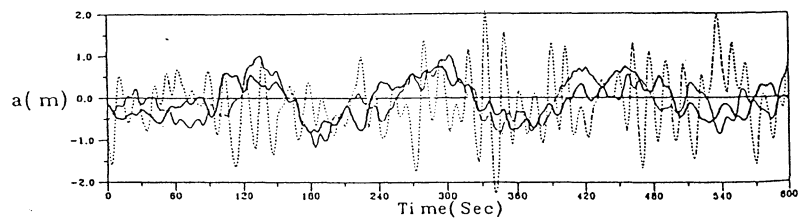
九十六年度科技計畫審查會審查意見答覆及辦理情形

審查委員及審查意見	答覆及辦理情形
林銘崇教授： 本研究以 edge wave 作用為前提條件，故就 edge wave 在本海域之存在性可適度蒐集理論的或實際的資料稍作佐証說明。	已在第一章前言裡增加一段文字，說明國外有關 edge wave 存在的現場證據及相關的理論，並註明其參考文獻。由這段文字我們可瞭解，儘管在颱風來襲時測 edge wave 十分困難，因而無法獲得其存在於臺灣東岸之現場證據，但颱風來襲時 edge wave 確可能存在。
歐善惠校長： 1. 本計畫擬以減少台灣東岸緣岸波的方法，降低花蓮港共振現象，構想相當具有創意，但因無法進行實驗驗證，構想的可靠度仍需借助更多的數值驗證。	1. 在本計畫的最後一年(97 年)裡，將進行更多的數值驗證，且藉由檢驗數值解的收斂性及穩定性，來確保其準確。另外，由於摩擦效應與非線性效應對屬於亞重力波之緣岸波影響較小，故數值驗證確可証明構想的可靠度。
李忠潘教授： 1. 請考慮與水工實驗比較。 2. 花蓮港附近海岸存在 edge waves 的可能為何？ 3. 波長與水深比甚大的淺水波，未必是線性波，故未	1. 若下一年度的數值計算顯示，花蓮港的港形或入口方位只需稍加修改(否則恐難實施)，即可大幅降低港內共振現象，則我們將配合其他計畫，進行水工實驗。 2. 由修改後的第一章第一段說明以及新增加的第二段文字可瞭解，花蓮港附近海岸在颱風來襲時，確可能有明顯的 edge waves。 3. 當波長甚長時，即使共振現象發生，振幅與波長比仍甚小，故在

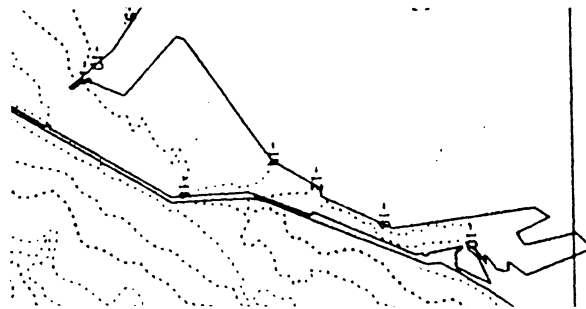
來似可考慮擴展至非線性波理論。 4. 請將入射波(edge waves)的給定條件及方程式列於文內。	大部份地區仍屬線性波。然而明顯非線性效應確可發生於局部地區，故未來若有需要將擴展至非線性波理論。 4. 有關做為入射波的 edge waves 之方程式及數值解，已在徐(2003)中有詳盡的說明，故為了避免重複，且因數值解無法用一個明白的公式表示，因此目前未將其列於文內，但未來不排除在全程計畫結束後，將所有的內容列入最後的報告內。目前的報告，若一併參考其相關文獻，仍應具有完整性。
陳陽益教授： 1. 不規則形狀的港域(如花蓮港與蘇澳港)，其如何做有規則性的分區方式，以利日後的方便使用與驗證！ 2. 以 edge waves 本身是已是長波者做為進入花蓮港造成其港池共振的入射波條件，但是否可考量由入射的短波經花蓮港池的港域形狀與水深，經某長度的時間後自動會產生如 edge wave 之長波般而生如今的共振現象般。	1. 當人們要針對某一個港進行數值模擬時，其分區方式並非唯一，且皆可獲得準確之結果。而要確定這一點，可檢驗其數值解的穩定性，後者亦可經由比較不同分區方式所獲得的解來達成。 2. 由入射的短波在港內經由非線性效應產生長波，由於後者並非 edge waves，且因本計畫之主要構想是經由阻擋大部份入射的 edge waves 能量來降低港內共振現象，故上述非線性效應並非目前計畫的研究主題，但它可能和不同時間所發生的共振現象有關，故可另案研究。
李兆芳教授： 1. 本計畫利用可能造成港池共振原因，或利用現有程式作延伸，就研究而言，為具有研究性的動機。 2. 所發展程式在測試上或許	1. 感謝肯定。 2. 已在前言及結論兩章中，對以往

ok，但在有效性和計算效率上可以進一步討論。 3. 在計算結果上建議可把緣岸波存在的波浪加以研究，以突顯本計畫的獨特性。 4. 緣岸波存在於岸邊斜坡地形，但東海岸地形可能和此條件差別較大，在因素的考慮上可以討論。	的和目前的數值方法之計算效率，新增加了一些說明。 3. 有關緣岸波存在的條件，及其相關的理論和現場證據，已在第一章前言裡補充說明，並新列入一些參考文獻。 4. 由於緣岸波可存在於坡度沿垂直海岸線方向做各種變化的情況下(僅 modes 的數目和波形將依情況而改變)，此點已在第一章前言裡補充說明。另外需強調的是，若海底地形沿海岸線方向變化，則一部份緣岸波的能量將行進到外海，因此代表一種非理想的情況，但此時仍有一部份能量繼續被 trapped 在岸邊。
---	--

臺灣東岸港口共振現象改善方案研究 (3/4)

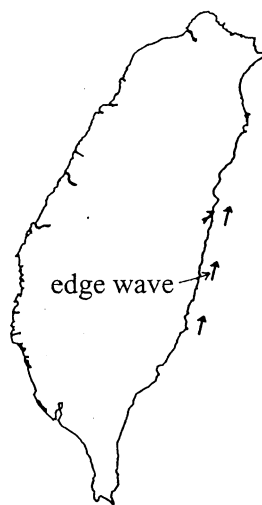


港內的原因：



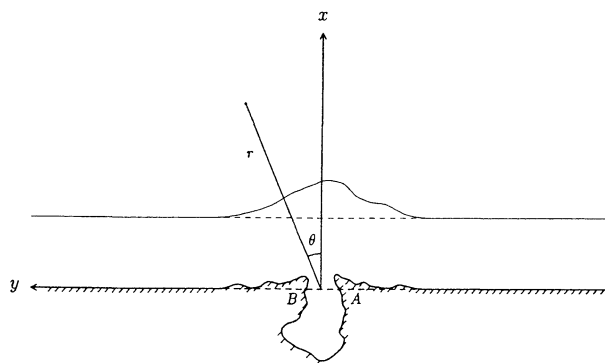
狹長的港池及不利的入口方位？

港外的原因：



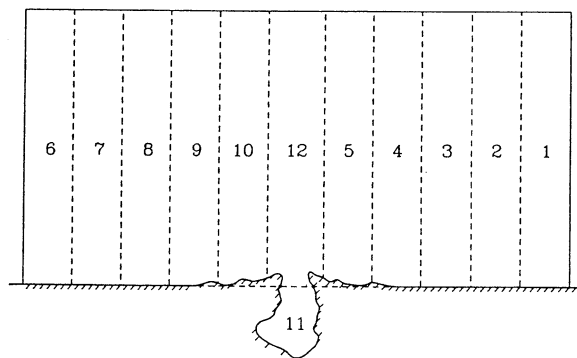
不連續的海底坡度及筆直的海岸線？

考慮edge wave $\Rightarrow$ 數值模式須適用於有岸邊斜坡存在的情況



故發展新的數值方法！

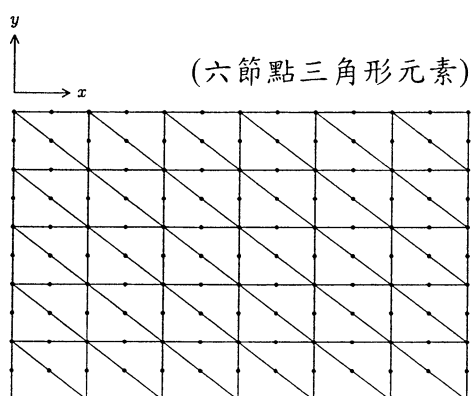
多區域邊界元素法及連續壓縮過程：



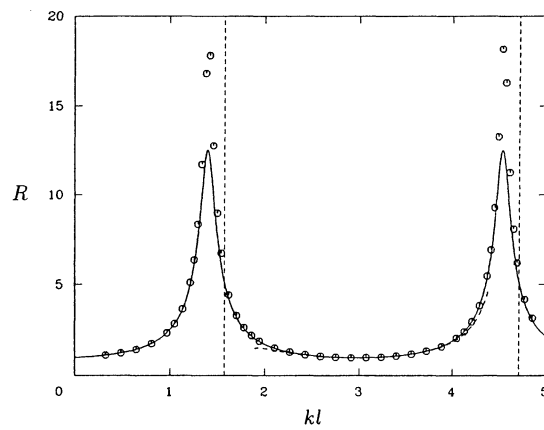
依序獲得 $\{\partial\phi/\partial n\}_1 = [E]_1^{-1}[F]_1\{\phi\}_1$, $\{\partial\phi/\partial n\}_2 = [E]_2^{-1}[F]_2\{\phi\}_2$, etc.

可節省大量電腦記憶體！

矩形港池之網格： (徐 2003)

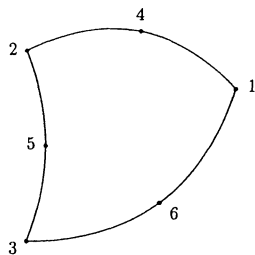


矩形港池之振幅放大率：(徐 2003)

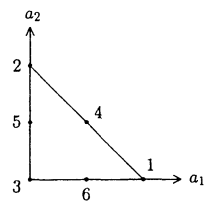


曲線：Mei (1983) 之解析解，○：目前的數值解

不規則地形之三角形元素：

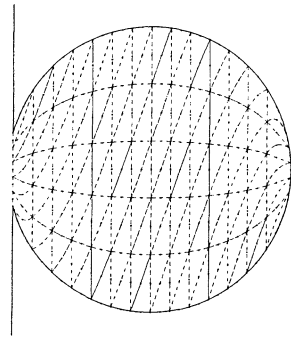


真實元素

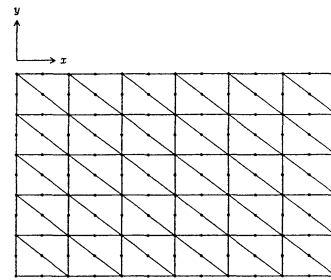


本質元素

圓形港池之網格：

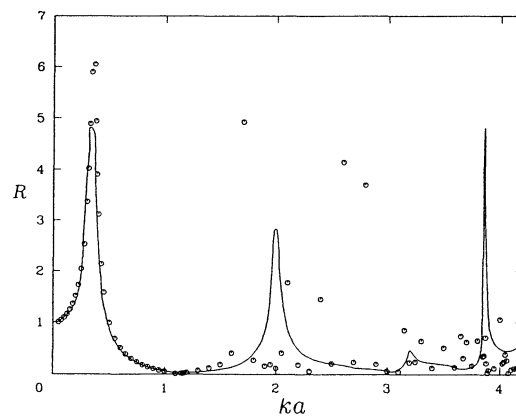


真實網格



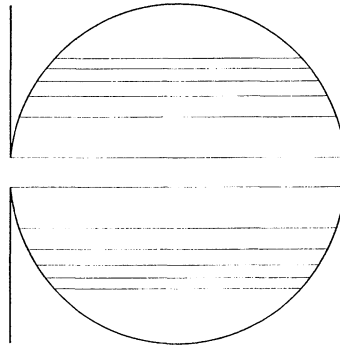
本質網格

圓形港池之振幅放大率：

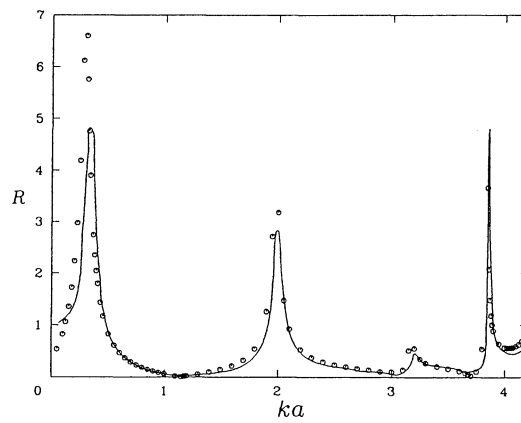


曲線：Lee (1971) 之數值解 ○：目前的數值解
 (ka 變大，節點未增加 $\Rightarrow$ 誤差變大)

故將港內分為13個分區，並進行連續壓縮！

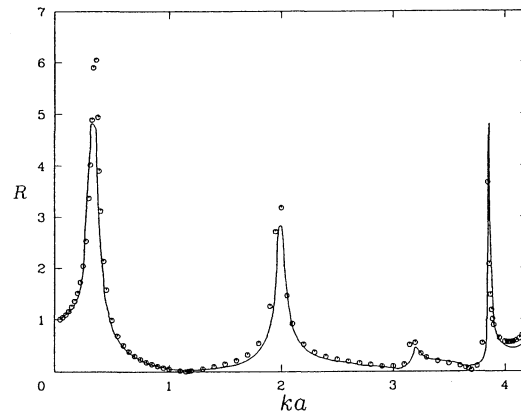


圓形港池之振幅放大率：(港內分區)



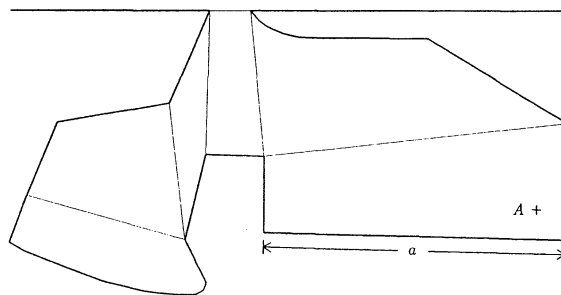
($ka \rightarrow 0$ 時，產生新的誤差)

圓形港池之振幅放大率：(分區與不分區合用)

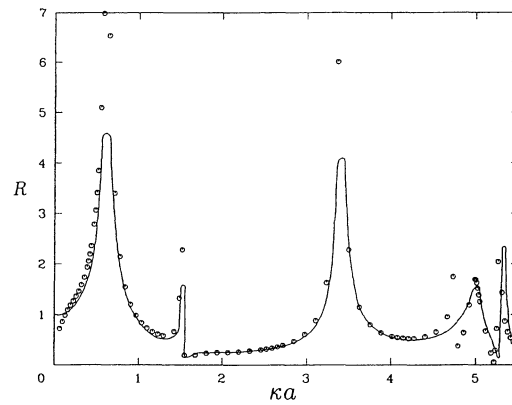


註：合用方式有判斷準則做為依據！

Long Beach Harbor內之分區狀況：

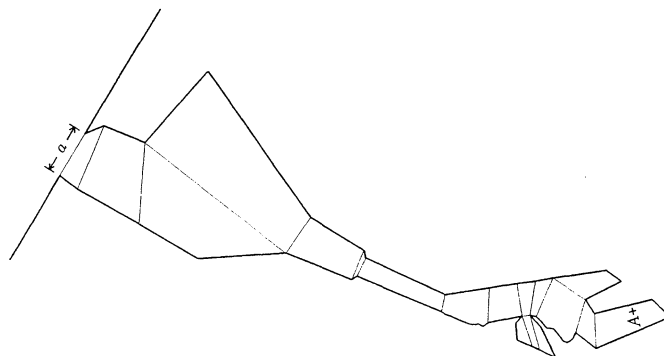


Long Beach Harbor之振幅放大率：

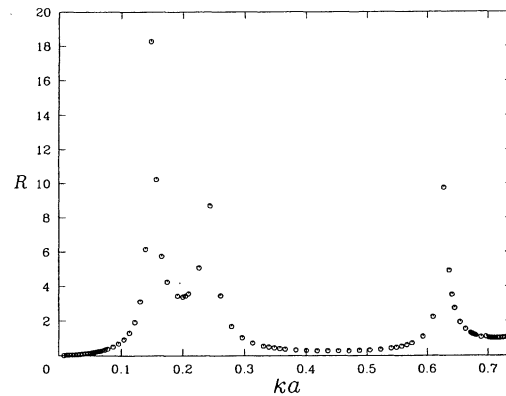


(ka 太小與太大時，分區數目過與不及，但其餘者十分準確！)

花蓮港內分區狀況：



花蓮港之振幅放大率：



註：未來須檢驗其收斂性及穩定性！

結論

1. 完成一應用多區域邊界元素法及連續壓縮過程所設計之電腦程式，此一程式可應用在十分廣泛的情況下。
2. 應用上述程式，可獲得與Lee (1971)和Mei (1983)的解十分接近之數值解，且已針對花蓮港加以計算。
3. 找出兩種判斷數值解是否準確之準則，但其正確性仍需進一步測試。
4. 應用上述程式，未來可針對花蓮港和蘇澳港，獲得十分準確之數值解，且可考慮 edge waves，故有利於解決兩港之共振問題。