

98-78-7425
MOTC-IOT-97-H2DA003

(訊號分析函基之基核特性相位函數與熵值表現暨其於共關協振之關聯)

仔波最佳離散函基 — 基核特性相位函數與熵值表現



交通部運輸研究所
中華民國 98 年 6 月

98-78-7425
MOTC-IOT-97-H2DA003

(訊號分析函基之基核特性相位函數與熵值表現暨其於共關協振之關聯)

仔波最佳離散函基 — 基核特性相位函數與熵值表現

著 者：李勇榮

交通部運輸研究所
中華民國 98 年 6 月

98

(訊號分析函基之基核特性相位函數與熵值表現暨其於共關協振之關聯)
仔波最佳離散函基——基核特性相位函數與熵值表現

交通部運輸研究所

GPN: 1009801393

定價 200 元

國家圖書館出版品預行編目資料

仔波最佳離散函基:基核特性相位函數與熵值

表現 / 李勇榮著. -- 初版. - 臺北市:交通部運輸研究所, 民 98.06

面; 公分

參考書面:面

ISBN 978-986-01-8761-8(平裝)

1. 波動 2. 數值分析

332.654

98009778

(訊號分析函基之基核特性相位函數與熵值表現暨其於共關協振之關聯)

仔波最佳離散函基 - 基核特性相位函數與熵值表現

著 者: 李勇榮

出版機關: 交通部運輸研究所

地 址: 10548 台北市敦化北路 240 號

網 址: www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電 話: (04) 26587176

出版年月: 中華民國 98 年 6 月

印 刷 者: 良機事務機器有限公司

版(刷)次冊數: 初版一刷 110 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所網站

定 價: 200 元

展 售 處:

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話: (02)23496880

國家書店松江門市: 10485 臺北市中山區松江路 209 號 F1•電話: (02) 25180207

五南文化廣場: 40042 台中市中山路 6 號•電話: (04)22260330

GPN: 1009801393

ISBN: 978-986-01-8761-8 (平裝)

著作財產權人: 中華民國(代表機關: 交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利, 欲利用本著作全部或部分內容者, 須徵求交通部運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：(訊號分析函基之基核特性相位函數與熵值表現暨其於共關協振之關聯) 仔波最佳離散函基 - 基核特性相位函數與熵值表現			
國際標準書號 (或叢刊號) ISBN 978-986-01-8761-8 (平裝)	政府出版品統一編號 1009801393	運輸研究所出版品編號 98-78-7425	計畫編號 97-H2DA003
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計劃主持人：李勇榮 研究人員：李勇榮 聯絡電話：04-26587183 傳真號碼：04-26587183, 04-26571329			研究期間 自 97 年 01 月 至 97 年 12 月
關鍵詞：水波模擬最佳仔波函基、廣泛離散仔波類屬、基核特性相位函數、熵值			
摘要： 此處鑑取得水波應用分析之最佳仔波離散函基是為半正交之樞點順適仔波。我們從統計與數理雙方面，標本共進，進行嚴謹之檢核與交互驗證。其統計方面取用多種熵值規範及探討轉換係數之累積機率密度函數，而學理方面則係研究函基特性函數之相位函數分佈。此處所含蓋離散仔波函基類屬相當廣泛，另吾人亦由諸結論証述其完整性或全面性，此外並將富立葉函基亦加入比較考慮。而由基核特性函數相位分佈之探討，吾人數理驗證得，為此一最適離散仔波函基帶來相關最佳物理模擬的解析因子是為：基核特性函數相位之非更易性，即其零相位數值，亦或基核特性函數其在頻率領域上之全正性。而交互參照、綜合比較熵值統計行為與特性函數相位分佈兩者之數值與數理表現，由其諸多相似性、一致性、與推衍性，吾人可以肯定地表示：我們對此一鑑定有其論定性的把握，而對所提各項結果、論點、演繹亦有其非常之信心。			
出版日期	頁數	定價	本 出 版 品 取 得 方 式
98 年 6 月	100	200	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 (解密條件： ☐ 年 ☐ 月 ☐ 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密) ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: The Wavelet Optimal Basis — the Transform Entropies and the Phase Distributions of the Characteristic Functions of Wavelet Basis Kernels			
ISBN(OR ISSN) ISBN978-986-01-8761-8(pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1009801393	IOT SERIAL NUMBER 98-78-7425	PROJECT NUMBER 97-H2DA003
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Yung-Fang Chiu PRINCIPAL INVESTIGATOR: Yueon-ron Lee PROJECT STAFF: Yueon-ron Lee PHONE: 886-4-26587183 FAX: 886-4-26587183, 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2008 TO December 2008
KEY WORDS: The wavelet optimal basis, Comprehensive discrete wavelet categories, Transform entropies, Phase distributions of wavelet basis kernels			
ABSTRACT: It is rigorously shown that the best discrete wavelet basis for water wave modeling is the semi-orthogonal cardinal spline wavelet. Here both statistics and analytical factors are used to mutually confirm the results. Statistically, various entropy criteria are tested and the cumulative probability distributions of transform coefficients are investigated. Analytically, we study the phase distribution function of the characteristic function of each individual wavelet kernel. Comprehensive categories of discrete wavelets are incorporated here, and the comparisons with the performances of the Fourier basis are also made. We further proof the completeness for our deductions. And our analytical study shows that the theoretical reason for the usefulness of the identified best basis is the invariability of the phase of the characteristic function of the basis kernel. That is to say it is the zero phase distribution and the total positivity of the characteristic function in the frequency domain. Additionally, relevant characterizations and intrinsic properties are illustrated, and physical counterparts of analytical aspects are provided when possible.			
DATE OF PUBLICATION June 2009	NUMBER OF PAGES 100	PRICE 200	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

訊號分析函基之基核特性相位函數與熵值表現暨其於共關協振之關聯:

仔波最佳離散函基 — 基核特性相位函數與熵值表現

The Wavelet Optimal Basis – the Transform Entropies and the Phase Distributions of the Characteristic Functions of Wavelet Basis Kernels

李 勇 榮

交通部運輸研究所港灣技術研究中心

Email: ronlee@ms4.hinet.net

Revision: 1.2, April 3, 2009, 15:01:29

Printed: May 26, 2009

目錄

圖目錄	iii
表目錄	v
摘要	vii
ABSTRACT	ix
1 前言與研究背景	1
1.1 前言	1
1.2 變動或非穩定形態效應	3
1.3 加窗之轉換	4
1.4 研究標的與方向	6
2 仔波函基類屬及其特性	11
2.1 引言	11
2.2 程式與工作平台開發	12
2.3 測試之仔波類屬	13
2.4 正交仔波 (ONxxA, ONxxS, ONxxC, ME, and B&L)	15
2.4.1 Daubechies 最精減支撐仔波 (ONxxA)	15
2.4.2 Daubechies 最小非對稱仔波 (ONxxS)	16
2.4.3 Coiflets (ONxxC)	16
2.4.4 Meyer 仔波 (ME)	17
2.4.5 Battle and Lemarié 仔波 (B&L)	18
2.5 半正交仔波 (SOxO and SOxD)	18
2.6 交正交仔波 (BOxyO and BOxyD)	19
2.7 仔波包 (WP)	27
2.8 仔波爆展與破裂自似性	28
3 熵值與最佳函基	53
3.1 引言	53
3.2 各式熵值規範	55
3.3 熵值結果與討論	57
3.4 熵值與累積機率分佈曲線	59
3.5 結語	61
4 基核特性函數相位分佈	69
4.1 引言	69

4.2	基核特性函數	69
4.3	線性相位波濾	71
4.4	相位之分佈暨結果與討論	72
4.5	結語	74
5	結論	83
	參考文獻	85

圖目錄

1.1 仔波包轉換時頻窗相位分佈圖（上圖），此處仔波包是相應於 Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為 30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號（下圖），其頻率分佈由 0 至 100 Hz。	7
1.2 仔波包轉換時頻窗相位分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖。	8
2.1 仔波移位變數之效應。圖中仔波尺度係屬階位 3。	21
2.2 仔波比尺縮放變數效應。圖示比尺階位由 0 到 7，所用仔波為 BO22O，而各波形所對應之移位點則標於圖中。	22
2.3 仔波比尺縮放變數效應。所用仔波為上圖之匹配仔波 BO22D。	23
2.4 仔波比尺縮放變數效應。所用仔波為 BO31D。	24
2.5 仔波比尺縮放變數效應。所用仔波為 BO370。	25
2.6 仔波比尺縮放變數效應。所用仔波為 ON66A。	26
2.7 ON _{xx} A 類屬之母仔波波形。源起點為 12，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）小於或等於 3。	30
2.8 ON _{xx} A 類屬之父仔波波形。源起點為 6，階位大於 3。	31
2.9 ON _{xx} S 類屬之母仔波波形。源起點為 12，階位小於或等於 3。	32
2.10 ON _{xx} S 類屬之父仔波波形。源起點為 6，階位大於 3。	33
2.11 ON _{xx} C 類屬之母仔波波形。源起點為 12，階位小於或等於 3。	34
2.12 ON _{xx} C 類屬之父仔波波形。源起點為 6，階位大於 3。	35
2.13 Meyer 母仔波（上子圖）與父仔波（下子圖）波形。源起點分別為 12 與 6，區隔階位等於 3。此圖與下一圖比較，具有重要義涵。	36
2.14 Battle and Lemarié 母仔波（上子圖）與父仔波（下子圖）波形。比較此圖與上一圖，解析特性可以是南轅北轍，但目視性狀可以無甚差別。	37
2.15 半正交仔波其母仔波（上左子圖）、父仔波（下左子圖）、各匹配仔波（右兩子圖）之波形。源起點分別為 12 與 6，區隔階位等於 3。	38
2.16 交正交仔波類屬 BO _{xx} O 其母仔波之波形。源起點為 12，階位小於或等於 3。	39
2.17 交正交仔波類屬 BO _{xx} D 其母仔波之波形。源起點為 12，階位小於或等於 3。	40
2.18 交正交仔波類屬 BO _{xx} O 其父仔波之波形。源起點為 6，階位大於 3。	41
2.19 交正交仔波類屬 BO _{xx} D 其父仔波之波形。源起點為 6，階位大於 3。	42
2.20 仔波包轉換分解之樹狀分支結構示意圖。圖中之 S（或文中之 V）與 D 分別表 smooth information 與 detail information。U 之上標若大於 1 則表以仔波包進一步分解。U 之下標代表尺度階位；而 U 之上標則示該係數所發生的位置，另其位置尚依尺度下標而定。	43

2.21 相關於Daubechies ON22A 之一個仔波包波形。此圖示階位 2，邊界點 8，排序在點 100 處之源起單位係數，其所對應之仔波包波形。	44
2.22 相關於Daubechies ON22A 之一個仔波包波形。此圖示階位 5，邊界點 64，同樣排序在點 100 處之源起單位係數，其所對應之仔波包波形。 .	44
2.23 一些 $BO2xO$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展曲線之尺度間隔是為 2^3 。	45
2.24 一些 $BO3xO$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展曲線之尺度間隔是為 2^3 。仔波函數之源起點及爆展位置點皆示於各子圖中。實線乃表示未平移之原仔波，其餘各曲線係平移至水平軸之中心點者。	46
2.25 一些 $BO2xD$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展曲線之尺度間隔是為 2^3 。	47
2.26 一些 $BOxyD$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展曲線之尺度間隔是為 2^3 。	48
2.27 一些 $ONxxA$ 及 $ONxxS$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展曲線之尺度間隔是為 2^3 。仔波函數之源起點及爆展位置點皆示於各子圖中。	49
2.28 一些以 $ONxxA$ 及 $ONxxS$ 為源頭仔波之仔波包爆展圖。相鄰爆展曲線之尺度間隔是為 2^3 。仔波包之源起點及爆展位置點皆示於各子圖中。 .	50
2.29 $BO31O$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展圖之尺度間隔是為 2^6 。各爆展曲線之表示已平移至水平軸之中心點。	51
2.30 $BO35O$ 仔波之爆展圖。相鄰爆展圖之尺度間隔是為 2^6 。此處應留意其爆展點曲線斜率之更易。	52
3.1 轉換係數之累積機率密度分佈曲線圖。此處包含有四種函基轉換類型：仔波函基、匹配仔波函基、仔波包函基、富立葉函基。所用各函基母仔波如圖所標示。	65
3.2 以部分轉換係數所得之重建訊號與原始訊號比較圖。其重建訊號係取用 35% 的最大轉換係數行反轉換而得。上子圖示原始訊號；中子圖示以波譜係數所得；下子圖乃是以半正交樞點順適仔波轉換係數所得。 .	66
3.3 仔波及不同仔波包轉換係數累積機率密度分佈曲線。其係以 L^2 -norm，即能量，大小排序後之累積機率密度分佈曲線。這些函基有：仔波包最適函基、仔波包最適階位函基、仔波包不同階位函基、仔波正規函基。	67
4.1 Meyer 仔波基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈	75
4.2 Battle and Lemarié 仔波基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈。	75
4.3 半正交樞點順適仔波及其匹配仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈 . . .	76
4.4 Daubechies 最不對稱正交仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈	77
4.5 Daubechies 最為對稱（即最小非對稱性）正交仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈	78
4.6 Coiflet 仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈	79
4.7 交正交仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈	80
4.8 交正交仔波其匹配仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈	81

表目錄

3.1 正交與半正交仔波類屬其轉換係數之各類熵值，另外亦包含富立葉函 基之轉換係數相應熵值。	63
3.2 交正交仔波類屬其轉換係數之各類熵值。	64

摘要

此處鑑取得水波應用分析之最佳仔波離散函基是為半正交之樞點順適仔波。我們從統計與數理雙方面，標本共進，進行嚴謹之檢核與交互驗證。其統計方面取用多種熵值規範及探討轉換係數之累積機率密度函數，而學理方面則係研究函基特性函數之相位函數分佈。此處所含蓋離散仔波函基類屬相當廣泛，另吾人亦由諸結論証述其完整性或全面性，此外並將富立葉函基亦加入比較考慮。而由基核特性函數相位分佈之探討，吾人數理驗證得，為此一最適離散仔波函基帶來相關最佳物理模擬的解析因子是為：基核特性函數相位之非更易性，即其零相位數值，亦或基核特性函數其在頻率領域上之全正性。而交互參照、綜合比較熵值統計行為與特性函數相位分佈兩者之數值與數理表現，由其諸多相似性、一致性、與推衍性，吾人可以肯定地表示：我們對此一鑑定有其論定性的把握，而對所提各項結果、論點、演繹亦有其非常之信心。

ABSTRACT

It is rigorously shown that the best discrete wavelet basis for water wave modeling is the semi-orthogonal cardinal spline wavelet. Here both statistics and analytical factors are used to mutually confirm the results. Statistically, various entropy criteria are tested and the cumulative probability distributions of transform coefficients are investigated. Analytically, we study the phase distribution function of the characteristic function of each individual wavelet kernel. Comprehensive categories of discrete wavelets are incorporated here, and the comparisons with the performances of the Fourier basis are also made. We further proof the completeness for our deductions. And our analytical study shows that the theoretical reason for the usefulness of the identified best basis is the invariability of the phase of the characteristic function of the basis kernel. That is to say it is the zero phase distribution and the total positivity of the characteristic function in the frequency domain. Additionally, relevant characterizations and intrinsic properties are illustrated, and physical counterparts of analytical aspects are provided when possible.

前言與研究背景

1.1 前言

不同數據分析方法有其不同專善，不論是在學理本身或技法特性上，所謂一體適用、全能含蓋之解析與技法是不存在的。不同研究標的或探討內容，首先所面對的問題就是分析方法之擇取。就某些範疇而言，我們大致是知道該使用何種分析法，但就那些函基多元化之分析類型，則基本的函基選取往往就是一個大問題。數據分析的本質基本上是只需數學、不需物理，因其可以不用牽涉任何物理量。可是應用上或工程上，人們所要的是實質存在的物理量。也因此任何分析的重要課題，無不在於賦予分析之圓滿或恰適的物理解說，產生合於吾人理念與順乎邏輯的大小值與單位量。

就水波現象研究而言，從最早期的越零位統計法以迄近期的仔波法，大致有下列不同分析法：

- 示性波法（significant wave method）
- 富立葉波譜法（Fourier transform）
- 短時富立葉分析或加窗波譜法（short time Fourier transform or windowed Fourier transform）
- 蓋博解析訊號法（Gabor's analytical signal procedure）
- 希伯轉換相關分析法（Hilbert transform）

- 基於各類不同設計基核之各種時頻分析法（time-frequency transforms associated with various kernels [5]）
- 連續仔波轉換法（continuous wavelet transform or the integral wavelet transform）
- 離散仔波轉換法（discrete wavelet transform）

這裡說明的是，此處把連續與離散仔波轉換區別為兩型。這是因為不像連續或離散富立葉轉換，其所涉函基或公式數值推演流程大底都具一致性，離散仔波轉換與連續仔波轉換其函基是可以完全不相關的，而它們的技法與公式推演流程也基本上可說具有獨立性的。

在以下的說明中，我們以一個一維的時序列為說明例，簡要述說前述分析方法的用途或一般特性或相互差別。

富立葉分析將一時序列轉換為一頻率序列，其轉換將一獨立變數轉為另一獨立變數。而短時富立葉分析則是欲取得某一局部時間區間上的頻率內容，它的主要額外動作就是在時序列上罩上一個濾窗，而把這罩窗隨著時間軸移動就可以得到不同時刻下的不同波譜內容，這種轉換將一個時變序列轉換成一組含時間與頻率變數的時變波譜分佈。

蓋博解析訊號法則可將一個時序列訊號表示為一種隨時間分佈的瞬時頻率，此外它可以同時求算出一個隨時間而變動的波動振幅包絡線。此一轉換其對應領域的獨立變數都是時間，且其瞬時頻率與包絡線也非互不相關的。

至於基於各種基核設計之時頻轉換，其概念上與短時富立葉分析有些相似，只是它們所取用的分析基核是完全不同於富立葉函基，而往往具有個自顯著特性，而其罩窗也是不像短時富立葉分析那樣可以輕易分開。

至於離散仔波轉換則一個一維的時序列將產生一個一維的轉換係數序列，每一個係數則同時代表著兩個獨立變數，其一為時變數，另一為尺度變數。基本上離散仔波轉換其函基設計也是可以無窮多的。

至於連續仔波轉換則將一維的時序列轉換成一個二維的轉換係數序列，這二維的轉換係數序列其獨立變數一為時間、一為尺度，每一個時間都有其尺度（或

說是代表頻率)分佈，而每一尺度值則可扮演其在每一時刻之個別角色。此一轉換其處理流程亦類似於短時富立葉分析之概念，有時候他們的主要差別可視為罩窗之改變(即需符合俾波入允條件)。

1.2 變動或非穩定形態效應

富立葉轉換適於穩定形態之訊號，而對局部多變動現象則有其明顯的局限性，下述解說可作為其特性考慮之延伸。

- 任何函數都無法同時滿足「有限時分佈」暨「有限頻分佈」，若一函數在一領域其分佈是有限的(即局部存在)則其對應領域之分佈函數必然是無限延伸。而在自然界的狀況，或是實際取得的訊號，亦或是部分取用於分析之數據，必然是有其時間或空間的局限性。此外，接受訊號的硬體設備也必然是有其反應感受區間、或頻帶感應範圍。綜此，我們大致瞭解到理論與實際是無法完全符合的，也就是說富立葉分析之實質上已引入了一些虛擬的狀況。而短時富立葉分析強調局部訊號而將兩側遠端訊號權重遞降為零，然而對短時富立葉分析而言，這種有限時與頻的互斥拘限性乃是存在的，這現象可以 Balian-Low 定理說明：若罩窗函數為 $g(t)$ ，蓋博型態架構函數為

$$g_{m,n}(t) = e^{-2\pi i m t} g(t - n), \quad (1.1)$$

式中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。若設罩窗函數具有優良的局部分佈性，則架構函數的富立葉轉換之局部分佈性則不佳。這裡的說明也許有些抽象，但它的實質可以說是下述現象的一種表徵。

- Gibbs 現象指出，若一訊號有不連續的突變，則富立葉反轉換所得之訊號必然是無法與原訊號一致的，它會在斷點兩側產生一些起伏，而且這種起伏的幅度是不會隨使用項目數而改變的，這種現象其實也就是說一個尖銳多變的形狀需要非常多的波譜分量來模擬，或則說是越局部之現象其波譜分佈區間就越廣，這一狀況的極端表徵就是 delta 函數(或稱 delta 分佈)，

delta 函數其相應富立葉轉換之頻率俱是等值而向正負無限延伸。

- 富立葉轉換其函基函數是週期分佈而向兩側無限延伸。因此它的研究對象最好也是具有週期性，而且最好也是可以無限取樣，如果不能滿足這些要求，就有一些如下的副作用：頻漏現象、邊端效應、折誤作用、滑濾誤差、解析誤差等。圖 1.1 所示為一取樣率在一半 Nyquist 頻率下之狀況，原始模擬訊號為一線性頻率分佈之漸高頻訊號，由圖亦可見此些效應進一步亦對離散仔波轉換所帶來的一些影響。

整體而言，上述情形都與非穩定型態衍生效應有所關聯。

1.3 加窗之轉換

為彌補富立葉函基其描述非穩態局部變化現象之不足，短時富立葉轉換及仔波轉換可說都是將一訊號隨時間而局部化，如此形成一個由各時間點上的局部訊號所形成的集合，再以此集合進行個自轉換。就短時富立葉分析而言，其執行方式就是變動式 1.1 中的 m 、 n ；就仔波而言，以典型的莫利仔波為例，其是藉由移位及縮放母仔波之波形為之。這兩種轉換所得到的局部時間段的波譜或尺度資料，就短時富立葉分析而言，用頻率、Hz、或頻譜是可以名正言順，但對仔波而言，正確的描述應是尺度或尺度譜。基於前述Balian-Low定理，短時富立葉分析實際上是無法在時間分佈上設為真正局部，因為數據處理上的離散富立葉轉換其頻軸分佈是有限的，然而仔波轉換在這一方面就可符合完全局部之要求，或則至少可說仔波之分佈其向正負兩側之延伸波形必然是要衰減，以致於不存在有零頻率的成分，以下再進一步說明個別轉換之特性或差異：

- 基本上短時富立葉分析與仔波分析都可視為加罩窗之轉換，就短時富立葉分析而言，它包含兩個區別十分明顯的步驟，第一個步驟就是在原訊號加予一形狀不隨時間改變的罩窗，接下來就是將這一加窗的訊號行富立葉轉換，此一轉換其相對應的反轉換（或是訊號重建）也很自然地牽連上一頻軸罩窗，而其數值處理也類似正轉換包含有兩個可以明顯區隔的步驟。因

此，短時富立葉分析，罩窗明顯可視，而函基亦是所熟悉的弦性函數。然而對仔波轉換而言，這兩個步驟就非明顯可見，其罩窗與其函數可說是一種合成體，既無法體會該罩窗形狀，亦無法將罩窗由函基函數分離出，事實上這種情形可以由下述的比較參照明顯看出：若把式 1.1 之Gabor型構架的罩窗取為高斯分佈，則這一罩窗與莫利仔波函基函數之綜合輪廓是相似的。綜此可見，這兩個轉換的用意是一致的，亦即提供一種投射機制，以便分離出調變或振盪更易的成分。

- 對短時富立葉分析而言其時頻罩窗之形狀與大小，在不同時頻下都維持不變，這是因為式1.1中的 $g(t)$ 只與 n 而與 m 無關，也就是說任何時間與任何頻率下所用的時頻窗它的寬與高都維持不變，因而在二維的時頻座標裡有一個固定形狀不隨時頻而變的罩窗。至於仔波的時頻窗則是隨尺度而變化，但這些變化只是形狀上的，其面積大小還是不變的，也就是說時頻窗它的寬度與高度成反比，而乘積則固定，另這一特性對離散或連續仔波轉換都是適用的。圖 1.1 與 1.2 可以用來說明這一情形，圖中所取之仔波類別係取正交離散仔波包，兩圖中之源始母仔波相同，但轉換函基函數係取不同階位，一個相關於最適函基（best basis），另一個則相關於最適階位（best level），所用訊號則如圖 1.1 之下半圖，其係為一漸增頻訊號。此處因函基是屬正交類型，故所有的時頻窗都不重疊，也因此每個時頻窗所代表範疇，其時尺位置可以說是相對地精準明確，而非謹是代表示意之區塊而已（相對地，非正交函基其時頻窗謹可示性表達之）。至於連續仔波轉換其不同時頻之時頻窗可謂糾纏在一起，重重疊疊，此時通常不用具有尺寸與形狀的時頻窗表示，而是以在個別特定時頻點上給予一假定的解析大小作為代表，再由這些解析分佈以灰階圖或色彩圖表現，如果所用解析度很細，就狀似連續分佈之時頻圖。
- 短時富立葉分析其函基由正交之弦性函數所組成，其乃獨特唯一，而對仔波轉換而言，其函基之選取可以是非常鬆散或非常廣泛，這鬆散的條件，就連續仔波轉換而言就僅僅是能滿足入允條件（the admissibility condition）

即可（即不含有零頻率週期之函數），而就離散仔波轉換而言，也僅僅是需符合穩定收斂之條件（stability condition）而已。

- 短時富立葉分析轉換係數所代表的是局部頻譜，它含有與頻率完全一致的義涵，但仔波轉換係數所表徵的是尺度而非頻率，也因此仔波轉換所遭遇的難題尚有數點。第一，因解析函基之設計甚多，且函基函數間可以互是獨立或互有相關；第二，所謂的尺度基本上是沒有單位的，只有大小值，也因此我們實際上對每一轉換係數所代表的波形範圍或確切尺寸，可說完全沒有具體認知；第三，仔波轉換的數值處理或理論架構存在各種型式與調適性，諸如多音型態（multi-voice）[8]、多仔波混合（multi-wavelet）[6, 7, 14]、非以兩倍為基底之轉換（different dilation factors）[1]、調適化時頻窗之連續仔波轉換[9]、等等，一般說來，這些變化在某些針對數值演算的應用或許困擾不大，然而在水波研究時，物理義涵遠在數值演算功能之上，因而這些因子往往就形成諸多困擾，或難以使用。
- 在基本的物理應用上， $L^2(\mathbb{B})$ Banach 空間，亦或希伯空間，可說已最具有實際之用途，雖然仔波數學尚存在一些非針對 $L^2(\mathbb{B})$ 空間之研究 [8, 12]，但就水波物理而言，我們所探討的大底不離能量現象，也因此 L^2 空間可說已很恰適。原則上不同空間上的研究，往往顯現的差別只在解析上的嚴謹度，如可微分性、多階解析分析（multiresolution analysis）存在性、規則度等，這些於水波物理，基本上可說看不出任何關聯，也因此，針對希伯空間上的研究已充分滿足我們的需求，此亦為本文所及者。

1.4 研究標的與方向

局部化之轉換在水波研究應用上的立足點，事實上可以簡單而直覺地加以解說如下：如果一個訊號是由一些有限生命期與有限空間分佈的成分波所合成，或者說是成分波亦隨時空而演化，那用那些有生命期也含蓋有限分佈空間的仔波來加以模擬，自然而然地就能比較滿足這一本質。再者我們知道即使那些狀似相當規則

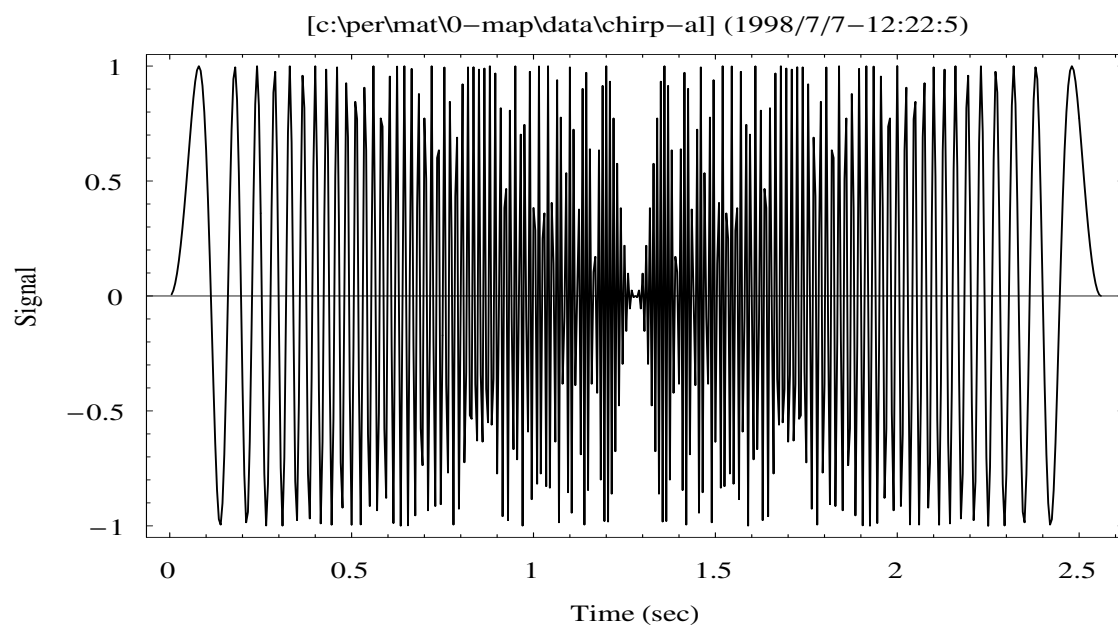
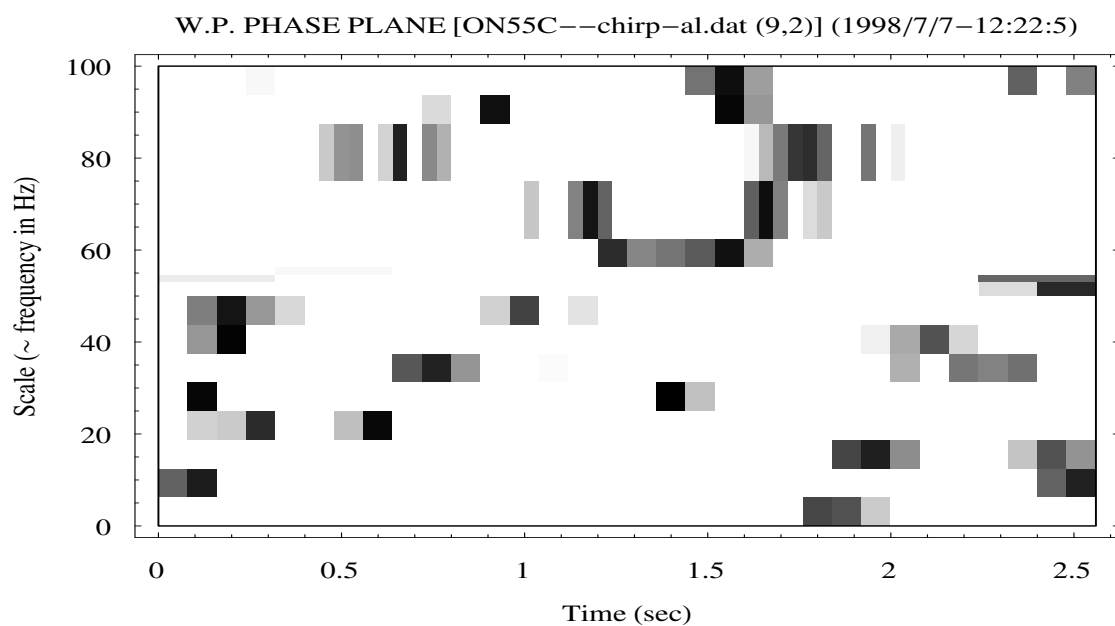


圖 1.1 仔波包轉換時頻窗相位分佈圖（上圖），此處仔波包是相應於 Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為 30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號（下圖），其頻率分佈由 0 至 100 Hz，此處因係非足頻取樣（即取樣率只為 Nyquist rate 一半），故有折誤現象。此外當注意此時頻窗之非對稱分佈及多重頻帶分散性所代表轉換意涵。

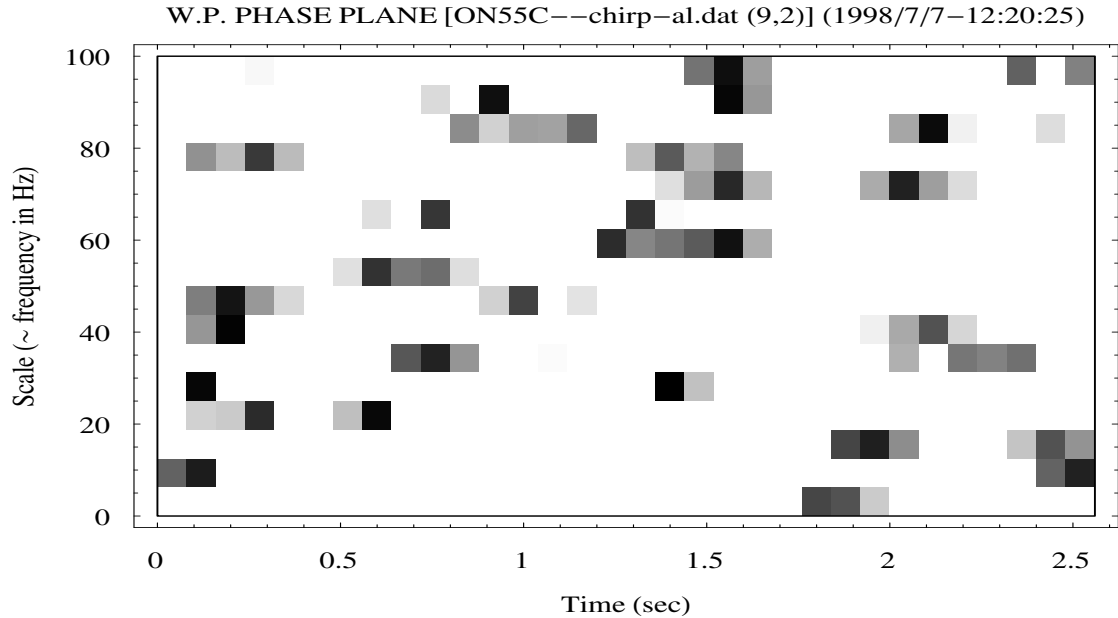
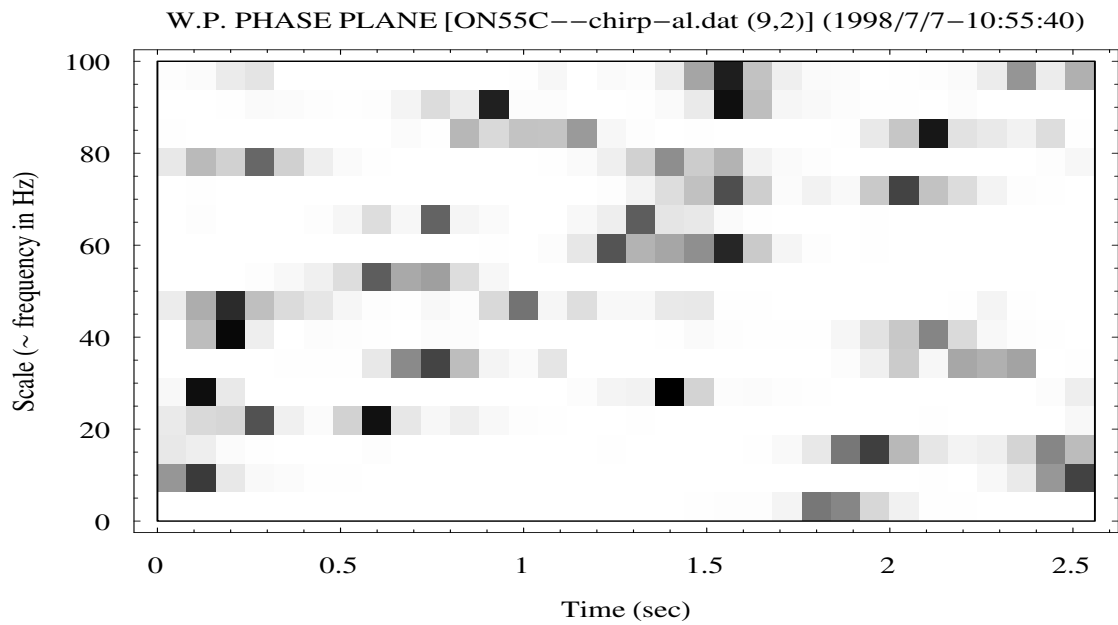


圖 1.2 仔波包轉換時頻窗相位分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖，與前圖綜合起來，我們可以體會到仔波轉換其表現方式的多樣性及其可能帶來的困擾。諸如諸多類屬函基、諸多組合型態、不同最適規範、不同圖示方法、等等。

的水波，它們往往存在一些調變行為，亦且存在一些非線性亦或不穩定（wave instability）性質，甚或干擾或邊界效應等等，也因為這些存在的變動本質，使得我們可以期待以變動而具生命期的成分波來分析模擬其所可帶來之不同訊息，或其所可能產生之另一番物理描述。此外，仔波分析尚存在一些設計上的彈性、多樣性、針對性、調適性，這些可以配合我們的物理需求，增進其有義化。

以下為本研究主要內容及未來預期工作項目：

- 首先針對諸多不同類屬之離散仔波函基加以特性比較，此處所含蓋之仔波函基類屬將相當廣泛，基本上可說已包容所有仔波設計之極端解析特性，換句話說，任何所可能設計出之個別仔波，不是可以把它歸類到這當中的某一類屬。不然就是可以認定為它的特性必然介乎於這些所含蓋之類屬之間，況且它的可能用途或使用性也必然介乎，或必不超出，我們所含蓋之類屬之特性與使用性。有關各種類屬之仔波，我們以母仔波與父仔波之相關特性與函基本質加以說明，另展現各種移位、縮放、爆展、時頻窗分佈、等特性。
- 嘗試找出一針對水波應用與分析研究之最適離散仔波函基，並且拿來與富立葉函基加以比較。這一鑑定工作我們將以各類熵值規範為之，我們將取一風浪水槽之風生水波訊號作為測試樣本訊號。
- 探討仔波函基其何種數學解析本質是操控不同仔波函基在水波應用上表現的關鍵因子，亦即鑑取出何種仔波學理因子造成水波應用上最佳模擬，亦或說是，仔波函基其熵值的不同表現是相關於何種數理解析因子，這一方面我們是從研究仔波之基核特性函數的相位分佈情形著手。
- 探討何種連續仔波是對應於所鑑取得的最適離散仔波函基，這裡我們亦說明何以需要引進連續的仔波轉換，亦即指出水波應用分析時，離散與連轉換之個別優缺點何在，與及它們與共關頻振研究之相關性如何。
- 此外我們亦將探討如何增進所鑑取函基函數與我們水波訊號之組成成分波之間實際之物理相近性，這些相關細節主要是利用連續仔波轉換所具有的調

適自由度，以及不定性定理關係（the uncertainty relationship），經由變動時頻窗之大小與形狀爲之，此外將驗證其是否符合連續轉換之入允條件。

綜而言之，此處針對水波訊號最佳模擬之研究，我們標本共進，一方面嚴謹鑑取最佳仔波函基，一方面將探討增進分析有義化，或最適化之相關分析與處理流程，整體而言，含蓋了數項水波分析上所涉之優化工程。 ❖

仔波函基類屬及其特性

2.1 引言

在絕大部分的模擬或試驗研究下，諸多的模擬因子與尺度定律是無法全然含蓋滿足的。特別是當所涉過程是一多尺度、多維向、多元素的互作用系統，這些不滿足性就更複雜化。在前一章中我們所提到之瞬時變化或劇變行為，就是代表典型之多尺度、多維向行為。連帶地，水波試驗中，無可避免的是一些機制扭曲現象，比如在一水槽試驗裡，其有限的水槽尺寸與受限邊界往往就是產生諸多扭曲的因子，一方面某些該有的尺度行為無法產生，另一方面卻反而引生一些不該有的尺度現象，亦或是因為尺度單調，無法形成該有的多元互作用，是故抑制了一些作用機制之顯現，或對某些演化帶來未知的影響。此外，再加上各不同分析方法先天上或學理上的特性、亦或拘限性，我們不難體會到，要能很真切地模擬與解說一些物理現象是相當不容易的。沒有多種嘗試、廣泛比較，是可能造成以管窺天，甚而是以偏概全之誤謬。基此，隨著分析函基與技法之創新與多元化，尋找最適分析函基，便成為水波分析之重大要務。另一方面，可以進行的是：改良分析函基、或設計新函基、或綜合應用相關技法。

此處我們主要的工作是鑑取出水波分析上的最適仔波函基，因此我們希望所探討之函基範疇能盡可能的廣泛。我們取用了諸多經典的離散仔波類屬，這些幾乎是含蓋了作者所認知之所有的離散仔波類屬。而由後兩章之探討結果，吾人亦得以對此最適函基研究所涉類屬完整性有堅實把握。

在這一章中，我們將系統化的羅列及簡介各種離散仔波轉換類屬，並說明其基本解析特性，另對相關實質行為如移位、縮放、爆展等現象加以具體描述。依據此處研究之最後各項結論，茲先強調說明如下：

本研究基本上可說已延伸包容所有仔波設計之極端解析特性，換句話說，任何所可能設計出之個別仔波，不是可以把它歸類到這當中的某一類屬。不然就是可以認定為，它的特性必然介乎於我們這些所含蓋之類屬之間，況且它的可能用途或使用性，也必然介乎這些類屬，或必不超出我們所含蓋之類屬的表現趨勢。之所以這麼說，或如此認定，是根據我們的逆行驗證結果，因為我們所得熵值統計數值現象暨基核特性函數相位數理解析行為，其兩者之綜合性、趨勢性、一致性、推論性、肯定性，都具有強力反方向驗證、或交互驗證之能力。

2.2 程式與工作平台開發

此處所用主力程式語言是為 ASYST，幾乎所有學理分析、數據處理、結果呈現、圖表制作都與其有直接關聯。我們由源頭起，根本化的開發各類仔波分析程式，並撰寫、整合各相關數據分析之程式。所有解析結果與絕大多數數據圖表顯示均由程式直接自動化呈現，而所念茲在茲的是：避免使用現成應用軟體，非自動化的輸入要最少，人為中間過程作為要消失、數據流轉要不經人手，註記要自動而完備。另一方面追求程式之功能性、可塑性、多元性、親和性、診誤性等功能，流程要零干擾、零人為誤差，由輸入至輸出具以一貫自動為主臬。而配合這些要求，我們亦整合一些附件程式，加入了一些不同程式語言之使用。

- Postfix 程式語言：此一語言之主要功能是自動化制作高品質之 EPS（encapsulated postscript）數據分析圖。經由這一整合，由原始資料以迄最終圖示可以完全自動化一以貫之。這一功能的幫助可謂極其重大，特別是在檢驗參數眾多、嘗試條件紛紜、組合牽涉多元、類屬廣泛龐雜、數據量大類多、調適變動無窮、等等。因這些性狀下無不涉有巨量圖表之顯示及診斷判別，需要有完全系統化、無誤化制作手法。
- 數據分析結果於螢幕上之即時化 PCX 圖形顯示：前述之 EPS 分析圖主要提

供非常高品質之紙張列印輸出，其雖亦可於螢幕上顯示，但其即時性與自動化性較差。而此處PCX圖形是以螢幕即時化成果呈現為目的，兩者形成一套互補的完密系統，前者在背景下產生，而後者則在前景即時產生，同步完成。此一功能讓診誤的效益大大提升，對於撰寫複雜而及巨大的程式可說完全必要，同時也大大改善了程式之親和性、維護性、互動性、及彈適性、等。

- 報表介面之整合：前述兩者為圖示功能，若有數據資料需要輸出至工作報表，亦或再從工作報表輸入一些數據時，這一整合即可發揮其功能，比如若有需要繪製一些綜合數據、或特殊狀況、或複雜比較、或單一性圖形制作、或非重覆性處理、或中間數據再利用等，即可利用此一功能。
- 與 MMA 程式語言之整合：此處我們亦用 Mathematica 語言撰寫二維時頻相位分佈圖之呈現，此乃經由前述以 ASYST 分析之結果，將離散與連續仔波轉換之結果，直接傳入 MMA 程式中，形成一自動化連貫之二維時頻分析圖示流程。
- WinEdt 巨集程式語言之整合：我們應用這一巨集語言開發一工作平台，以供撰寫 ASYST 程式之用。它提供優良的程式撰寫開發環境，如果缺少了這一順適的工作平台，那開發包含如此大量的主程式與子程式必然是一種極端的痛苦，沒有這一工作平台，對於遠超過成千上萬行的系統程式運作，也必定是緣木求魚。一套程式系統其組織性、系統性、排誤性、一致性、可變性、互動性、多元性、宜人性、自動性、等所在多有，而所涉細節可說治絲愈紊，良好工作平台是為必需。

2.3 測試之仔波類屬

此處所含蓋之仔波類屬，是為萊斯離散函基（Riesz wavelet bases），基本上可以分類為四大類屬：正交類屬（orthonormal, ON）、半正交類屬（semi-orthogonal, SO）、交正交類屬（bi-orthogonal, BO）、仔波包類屬（wavelet packet basis,

WP)。就正交類屬而言，又區分了下述種類：Daubechies 最不對稱類型、Daubechies 最小非對稱類型、Coiffllets、Meyer 仔波、及 Battle-Lemarié 仔波。

離散仔波轉換，其母仔波與父仔波之公式表示，大底均無法以單一公式顯現，亦即無法以具體而微的封閉型態展示。它們的來龍去脈複雜抽象，且牽涉數個乘積合成序列，也因此我們無法從其數學式而連想到其具體波形與性狀，此外，各類屬所涉數學公式難以用簡短篇幅加以記述說明，所以此處我們只簡單介紹各類屬之主要解析特性、顯著表徵，並將所開發程式其結果顯現與功能驗證行一些例示與說明。

茲將為描述這些不同類屬仔波及其性狀所必需用到的公式與符號說明如下：設若一函數或一訊號為 $f(t)$ ，而萊斯仔波函基之 2-比尺量度函數（2-scale scaling function）為 $\phi(t)$ ，此函數亦或稱為父仔波，相應之母仔波函數為 $\psi(t)$ ，而衍生關聯仔波為 $\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ ，式中 $j, k \in \mathbb{Z}$ ，而 k 代表移位變數， j 代表縮放變數。圖 2.1 迄 2.6 示一些仔波的移位與縮放效應。

對某一 j 階位而言，一多階解析度階架（multiresolution ladder）之空間 V_j ，其系由 $\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}$ 所形成，並以下述包含性關係存在 $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots$ 。設若一 1024 點之訊號，則其最細與最粗之尺度空間則分別為 V_{10} 與 V_0 ；另設若相關之仔波若為有限支撐長度，其波濾係數（filter coefficients）或旋移乘積權重（convolution weights）之數目為 N ，則其支撐分佈之長度（support length）是為 $N - 1$ ；若匹配（dual）仔波或匹配父仔波存在，則分別記為 $\tilde{\psi}(t)$ 與 $\tilde{\phi}(t)$ ；而內積是為 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ；另 Kronecker delta 為 $\delta_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}$ ，其中若 $j \neq k$ 則該式為 0，若 $j = k$ 則該式為 1。

迄今，所有具有實用效益的離散仔波轉換，都可謂與多階解析度分析法（multiresolution analysis, MRA）[8, 10] 有所關聯。對萊斯仔波而言，除了正交類屬之仔波其匹配仔波是自匹配（self dual）以外，各類離散仔波都存在另一不同之匹配仔波，而任何離散仔波轉換，必然都是包含兩個旋移乘積（convolution）運作過程，其一過程生成細部資料（detail information），另一過程則生成較平順之大體資料（smooth information）[13]。如果仔波函基其關聯之波濾係數是為有限支撐長度分佈者，則旋移乘積之運作可以在時間領域直接進

行，亦可在頻率領域間接求算。以下列出所探討之各仔波類屬，並說明前述諸變量或函數的屬性。

2.4 正交仔波（ON_{xx}A, ON_{xx}S, ON_{xx}C, ME, and B&L）

此處所含蓋之正交仔波類型計有：Daubechies 最精減支撐仔波，（即為最為非對稱者，記為 ON_{xx}A）、Daubechies 最小非對稱仔波（ON_{xx}S）、Coiflets（ON_{xx}C）、Meyer 仔波（Meyer）、Battle 與 Lemarié 仔波（B&L），文中之 x 符號代表一整數，其乃表示仔波支撐分佈之長度，或是代表母仔波形含蓋範圍，亦或是表示旋移乘積權重係數之數目。各正交仔波具有如下之通性：

$$\psi = \tilde{\psi}, \quad (2.1)$$

$$\phi = \tilde{\phi}, \quad (2.2)$$

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad (2.3)$$

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (2.4)$$

一個 MRA 階架，單一組架框極限值（One MRA ladder, single set of frame bounds），

一對波濾（One filter pair, one smooth and one detail）。

而各子類屬各有其另外特性如下。

2.4.1 Daubechies 最精減支撐仔波 (ON_{xx}A)

就一固定支撐分佈長度而言，此一類型之仔波具有最高數目之消失偶距（即零偶距）；換個角度而言，就一定數目之消失偶距來論，這一類型之仔波具有最短或最精減之支撐長度。最為出名的一個最短支撐長度仔波，即為僅需四個波濾係數的 Daubechies 正交仔波。這類仔波之非對稱性非常顯著（因此 ON_{xx}A 之 A 即代表 asymmetric）。圖 2.7 與 2.8 示這一類型之母仔波與父仔波，其母仔波波形

係取源出點為第 12 點，相應源出層位或區分邊界點（區分 smooth information 與 detail information 之邊界點）為第 2 階；其父仔波形係取源出點為第 6 點，相應源出層位與區分邊界點相關層階為第 3 階。此類屬之消失偶距數目與波濾係數個數分別為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0, \quad l = 0, 1, \dots, x, \quad (2.5)$$

$$N = 2x, x \geq 2 \quad (2.6)$$

式中之 x 為出現於 ON_{xx}A 之整數，而最小的 x 值是 2.

2.4.2 Daubechies 最小非對稱仔波 (ON_{xx}S)

就一固定支撐長度而言，相較於最不對稱的 ON_{xx}A 來看，這類型之仔波是為最接近對稱分佈者（因此 ON_{xx}S 之 S 以代表之），不過它們仍是非對稱的。這類型之仔波其消失偶距數目與波濾係數個數相同於 ON_{xx}A 者，然而其最小 x 是為 4。

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0, \quad l = 0, 1, \dots, x, \quad (2.7)$$

$$N = 2x, x \geq 4 \quad (2.8)$$

圖 2.9 與 2.10 分別示這一類屬之母仔波與父仔波形，其各相關源始點同於圖 2.7 與 2.8。

2.4.3 Coiflets (ON_{xx}C)

上述兩子類型之仔波其零偶距只對應於母仔波，而 Coiflets 之特色則在於其母仔波與父仔波都存在有消失偶距，也因為這一特性，我們可以由泰勒級數展開的觀點來推論，這一函基之使用將可在細部小尺度訊息上產生高效率訊息壓縮作用，也就是說，一個訊號以這一類仔波之函基函數來分解時，將有一大部分之小尺度仔波轉換係數會是相對的小，而比較可以略去。也因此，其計算較小尺度大體滑順訊息（small scale smooth information）有簡易之配對規則（simple quadrature rule），亦即一個函數與小尺度父仔波之內積求算時會具有較高數值效率。而正

如前述所言，任何離散仔波轉換必然都是包含兩個旋移乘積運作過程，其一過程生成細部資料，另一過程則生成大體而較平順之資料，如果能將兩種消失偶距同時應用，則在某些應用上其效率可大為提升，諸如那些不強調完美重建之數值處理、或可損壓縮系統。此類型之消失偶距數目、父仔波積分值、與波濾係數個數分別為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0, \quad l = 0, 1, \dots, x, \quad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, \quad (2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \phi(t) dt = 0, \quad l = 1, \dots, x, \quad (2.11)$$

$$N = 6x, x \geq 1 \quad (2.12)$$

圖 2.11 與 2.12 分別示這一類型之母仔波與父仔波波形。圖中各參數亦取同於前些圖。

2.4.4 Meyer 仔波 (ME)

前述之仔波我們所談論之支撐長度都是針對時間領域，而 Meyer 則設計出一個 Meyer 仔波（圖中記為 ME 或 Meyer），它所強調的支撐長度則是針對頻率領域而論，也就是說這一仔波其頻率支撐分佈是現今所知之最簡短者，因而相應時支撐長度則相對最長（本文中，若無特別說明，則支撐長度即表針對時間領域）。而基於富立葉轉換相對應領域之對比特性，我們知道這一類型之仔波其波形是無限可微分的，再者，其 Lipschitz 規則度（regularity）是為無窮大，另一方面，此亦表示其仔波函數分佈之衰減無法滿足指數減衰（exponential decay），而其支撐長度之 N 值是為無窮盡者。圖 2.13 示其母仔波與父仔波波形，各相關係數亦取同於前些圖。

2.4.5 Battle and Lemarié 仔波 (B&L)

Battle 與 Lemarié 仔波（記為B&L 或 LE），是以樞點順適函數（cardinal B -spline） N_m [2, 3] 來架構其父仔波，其乃應用標準的正交化技巧於第 m 階樞點順適函數以形成正交之父仔波函數，再以這些父仔波函數構築形成母仔波。當 $m = 1$ 時，它的母仔波即為 Haar 仔波（亦即Haar函數），而此一 Haar 仔波是這一類屬中唯一具有限支撐長度者，另外，其亦是連續仔波中之最短支撐分佈仔波。再則，此一 Haar 仔波恰恰同於下述中之交正交仔波中之 BO11O=BO11D。這一類屬之其它仔波其支撐長度是無限分佈，不過它們具有指數衰減，且具有 C^{m-2} 規則度，圖 2.14 示其母仔波與父仔波形。與 Meyer 仔波比較起來，它們的諸多目視性狀都非常近似，然而我們從這兩種仔波之描述，可以體會到它們的函數構築、理倫設定、公式推演都是相當不一致的。精簡表示是：解析特性可以是南轅北轍，但目視性狀可以無甚差別。

2.5 半正交仔波 (SOxO and SOxD)

半正交仔波（記為 SOxO，其匹配仔波則記為 SOxD）其仔波函基函數在不同尺度下是互為正交，但其同尺度之不同移位函數則不正交。這一類屬之仔波其父仔波（或量度函數）是為樞點順適函數 N_m ，另其係由有限個數之 2-比尺關係式（2-scale relation）所形成。這一類屬之仔波具有兩組獨立之波濾係數群，一組相關於分解用途，一組則相關於訊號重建用途。雖然波濾係數群是有兩組，但其多階解析度分析架構（MRA V_j -ladder）則只有一組。這一類屬之仔波係為 Chui [3, 4] 所提，並將之稱為樞點順適仔波，另其研究亦指出， $m \geq 3$ 之樞點順適仔波都幾乎等同於調變高斯波形（不過，調變高斯函數並非是仔波），是故，此處我們只顯示第四階（ $m = 4$ 或 $x = 4$ ）之三次方樞點順適（cubic spline）仔波所相關之母仔波與父仔波，如圖 2.15 所示，另圖中諸參數亦同前。這一類屬之仔波有如下解析特性：

$$\psi \neq \tilde{\psi}, \quad (2.13)$$

$$\phi = \tilde{\phi}, \quad (2.14)$$

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \langle \tilde{\psi}_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l}, \quad (2.15)$$

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (2.16)$$

$$N = 3x - 1 \quad \text{for SOxD}, \quad (2.17)$$

$$N \rightarrow \infty \quad \text{for SOxO}. \quad (2.18)$$

一個 MRA 階架（One MRA ladder）,

兩對波濾（Two filter pairs）.

2.6 交正交仔波 (BO_xyO and BO_xyD)

此類屬之仔波亦係由 Daubechies 所建構，實質上它們是屬於非正交之類型。對所有的實數類並且是有限支撐長度之正交仔波而論，沒有一個是具對稱性的（Haar 仔波僅可視為部分符合對稱性）。然而從訊號重建的觀點而言，若吾人希望僅用部分之轉換係數為之，那轉換之波濾係數之分佈性狀，在實証上，是一個重要的因子，因為經驗告訴我們，對稱性的波濾係數分佈，對轉換結果可以在視覺上帶來一種柔順、漸進、不突兀的變化。亦即使用非對稱性的函基函數，則一個微小的波形改變或局部更動，那前後兩個轉換結果比較起來，其廣大範圍之尺度訊息就會有差異極大的變異，這往往讓人失去對趨勢的掌握與尋跡性。換句話說，數據分析之結果若欲對其物理解說不致造成重大衝擊，容易理出來龍去脈，那訊號稍微改變時，轉換係數也最好是稍微變化就好。若非如此，則考慮到資料量測難免有各式各樣的誤差、糙音、污染、等未知因子影響，如果這些非可控因子就已經給我們的轉換結果帶來莫大的衝擊，那就遑論我們能對所研究因子之變易能有任何追蹤能力了。綜此言之，函基函數之對稱性分佈，在物理研究上是一個非常重要的因子。而如前所述，有限支撐正交函基函數沒有是具對稱性的。那如果犧牲了正交性而可取得一些對稱性，應是值得的。也如是

乎，交正交仔波或許可在物理探討發揮一些作用。交正交仔波函基存在有兩對母仔波與父仔波，亦即存在一組匹配仔波。綜合比較起來，我們可以體會到，半正交仔波其存在條件較正交仔波者來的普通；而交正交仔波之存在條件則又比半正交仔波者來的鬆散。這些可以由交正交仔波記號中所出現的兩個參數 x 、 y 看出。雖然這一類屬之仔波是有兩組母仔波與匹配仔波，而其所涉之多階解析度分析（MRA）亦有兩組，但它們所涉之波濾係數卻只有唯一組，這一點與半正交仔波函基者恰相反。半正交仔波下其多梯階解析分析（MRA）只有一組，但有兩組波濾係數群。圖 2.16 迄 2.19 示此類屬之母仔波與父仔波，暨相應之匹配母仔波與父仔波。其相應解析特性為：

$$\psi \neq \tilde{\psi}, \quad (2.19)$$

$$\phi \neq \tilde{\phi}, \quad (2.20)$$

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \langle \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad (2.21)$$

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (2.22)$$

$$N = 2y + x - 1 \quad \text{for BOxyO and } x \text{ odd}, \quad (2.23)$$

$$N = 2y + x - 2 \quad \text{for BOxyO and } x \text{ even}, \quad (2.24)$$

$$N = 2y + x - 1 \quad \text{for BOxyD and } y \text{ odd}, \quad (2.25)$$

$$N = 2y + x - 2 \quad \text{for BOxyD and } y \text{ even}. \quad (2.26)$$

兩個 MRA 階架（Two MRA ladders），

一對波濾（One filter pair）。

2.7 仔波包 (WP)

以正交仔波函基轉換所得之係數，是可以再次被轉換分解的，甚至是多層次、多局部的再次分解。這類的分解與轉換即稱之為仔波包轉換。而所涉再次分解之函基可以是原始的正交函基亦或是任何其它正交函基。也因此仔波包轉換其分解結果可說變化無窮。此類轉換之接續分解難以用簡易公式表示出，但它的流程可以用一淺顯，逐層逐步增加之分割，示意如圖 2.20。其乃類如樹狀分支之延伸作業。仔波包轉換係數與原初始轉換係數比較起來，就是它的轉換係數所代表的頻帶解析，或尺度帶解析，更為細密，而相對地其所代表的時支撐長度也就增長了。這一比較細密頻帶的物理表徵是有些類似群波合成效應，也就是說，它們在波形顯現上有一種成包、亦或成群的性狀，此亦是仔波包命名的源出。

一組仔波包轉換係數之擇取雖然有很大的彈性，但也必需遵守一些規則。就以樹狀圖解說為例，每一垂直行上必須僅有一次、或一個格子出現機會，而每一水平列其格子，不論寬或窄，雖可有多格出現，但必需符合垂直行上不重覆之條件。也由於這種樹狀分支的彈性流程，相關的數值計算工作量就增加不少。而如何擇取一組所要的係數也就有不同的考量。一般較常見的有兩種選擇規範，一者稱之為最適函基仔波包（best basis wavelet packet），一者稱之為最適階仔波包（best level wavelet packet）。現在就以一個以 1024 點的訊號來說明：此時轉換係數有 1024 個，其最細尺度階位是發生於 $j = \log_2 1024 = 10$ ，最大尺度階位發生於 $j = 1$ ，經過樹狀分解後所形成的係數群組選擇彈性有 2^{10} 種，而在這 2^{10} 選擇中，其所造成之熵值是為最小的即稱之為對應於最適仔波包函基之係數：而如果所有的係數只從同一階位、或同一水平列來擇取，此時我們有 0 到 9 階位，共 10 種取法，其中熵值來的最小的，即稱之為最適階位仔波包轉換係數。仔波包轉換係數其排序指標，即圖中 U 之上下標，是代表了該係數之時間發生位置，同時亦代表該係數所對應之尺度或頻率，另一方面亦及於波形分佈支撐與性狀，或亦可說是二維時頻窗分佈圖中，不同係數所出現的性狀及位置。不過，實際上，這樣的二維圖示僅是代表性落點位置，與真實分佈與性狀是不同的。有關仔波包轉換之時頻窗分佈概念可見圖 1.1。圖中亦示仔波包轉換是相應於非對稱

性波濾，此外亦示仔波包轉換係數其所代表的時頻窗之面積大小都是相等的。圖 2.21 與圖 2.22 示相關於 Daubechies ON22A 之兩個仔波包波形。與時頻窗之分佈圖比較起來，我們可以瞭解時頻窗所代表的是僅僅為一種不完美的表意方式。

2.8 仔波爆展與破裂自似性

仔波實質上是具有碎裂自似性的（fractal nature），也就是說，無論我們任何地放大它的局部，較細尺度之波形與較粗尺度之波形是一樣的。另一方面則可說為，不同爆展比例下的曲線其性狀是一樣的，諸如曲線的可微分性、規則度、衰減特性等，是不變的。

此處所開發的程式可以針對任何仔波之各式建構加以爆展顯示，諸如，母仔波、父仔波、仔波函基、仔波包函基、各個階位、任意點位等。圖 2.23 迄 2.30 示一些仔波類屬之曲線爆展性狀。由這些圖可見，那些具有比較特殊，亦或是具有相對引人入勝之數學特性的仔波，其波形一般皆較突兀，而性狀怪異。事實上我們可以很直覺地說，對我們研究水波現象者而言，重要的是在求得物理解說，而這些怪異的形狀，其與弦性波的莫大差別，在在暗示著，求取物理解析無異是緣木求魚。也如是，這些特殊性狀的仔波根本不可能是我們所該選擇的對象。另外還有一點可以加強這種論調，那就是從這些爆展曲線的收斂穩定性來看（此外，亦可從後頭章節中對熵值之探討結論中証得）。由圖可見，那些具有突出數學解析特性的仔波，其數值穩定性往往很差，甚至是發散的。再者，由這些爆展圖我們可以看到一些數值行為或與理論特性，如終端兩側效應、有限解析之影響、誤差傳遞擴散現象、變化性或規則度等。

圖 2.29 及 2.30 分別示交正交仔波 BO31O 與 BO35O 之爆展。就 BO31O 而言，相關參數為：仔波曲線對應源頭點是為階位 2、點位 12（亦即圖 2.20 中之單元 U_2^{12} ），爆展中心位置點位 150，據數或爆展長度 512 點，相鄰圖之爆展尺度比為 2^6 。就這一仔波而言，其爆展結果迅速發散，因而仔波在更細尺度下失去了其應有之碎裂自似性。就 BO35O 而言，相關參數為：仔波曲線對應源頭點是為階位 2、點位 12（亦即圖 2.20 中之單元 U_2^{12} ），爆展中心位置點位 225，

據數或爆展長度 512 點，相鄰爆展尺度比為 2^6 。就這一仔波而言，其爆展結果雖不發散，但仔波在更細尺度下失去了其曲線形狀傾斜之固定性。圖亦可見，與原仔波比較起來，何以仔波包之所以稱之為包，因為一個仔波包波形與它的源起仔波的波形比較起來，是有更多的波動起伏，並有類似一種聚群而成包的特性，但這種聚群成包現象不似富立葉弦性群波所具有的重現性，那樣的重現性乃因為富立葉函基之週期行為而生。❖

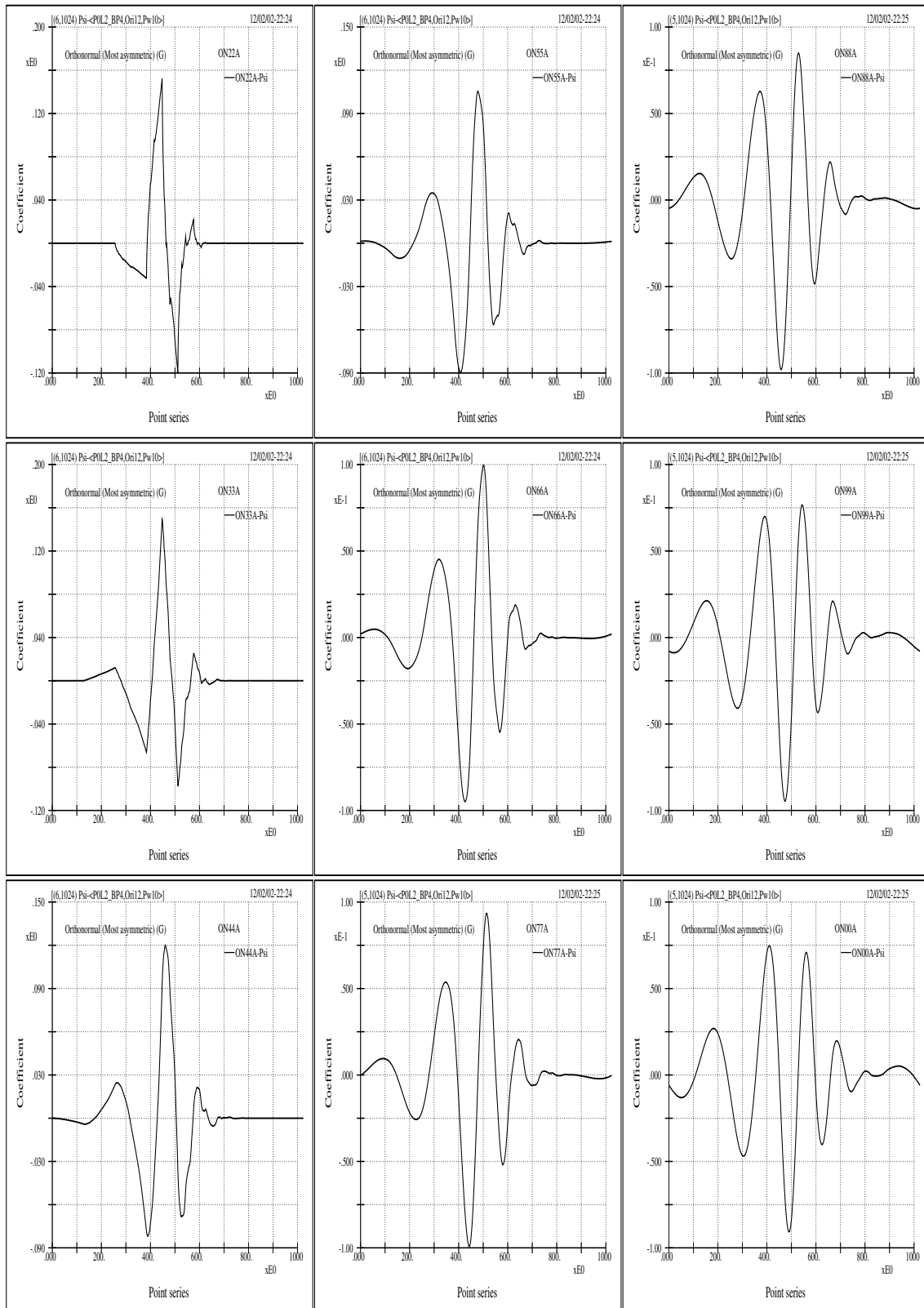


圖 2.7 ONxxA 類屬之母仔波波形。源起點為 12，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）小於或等於 3。

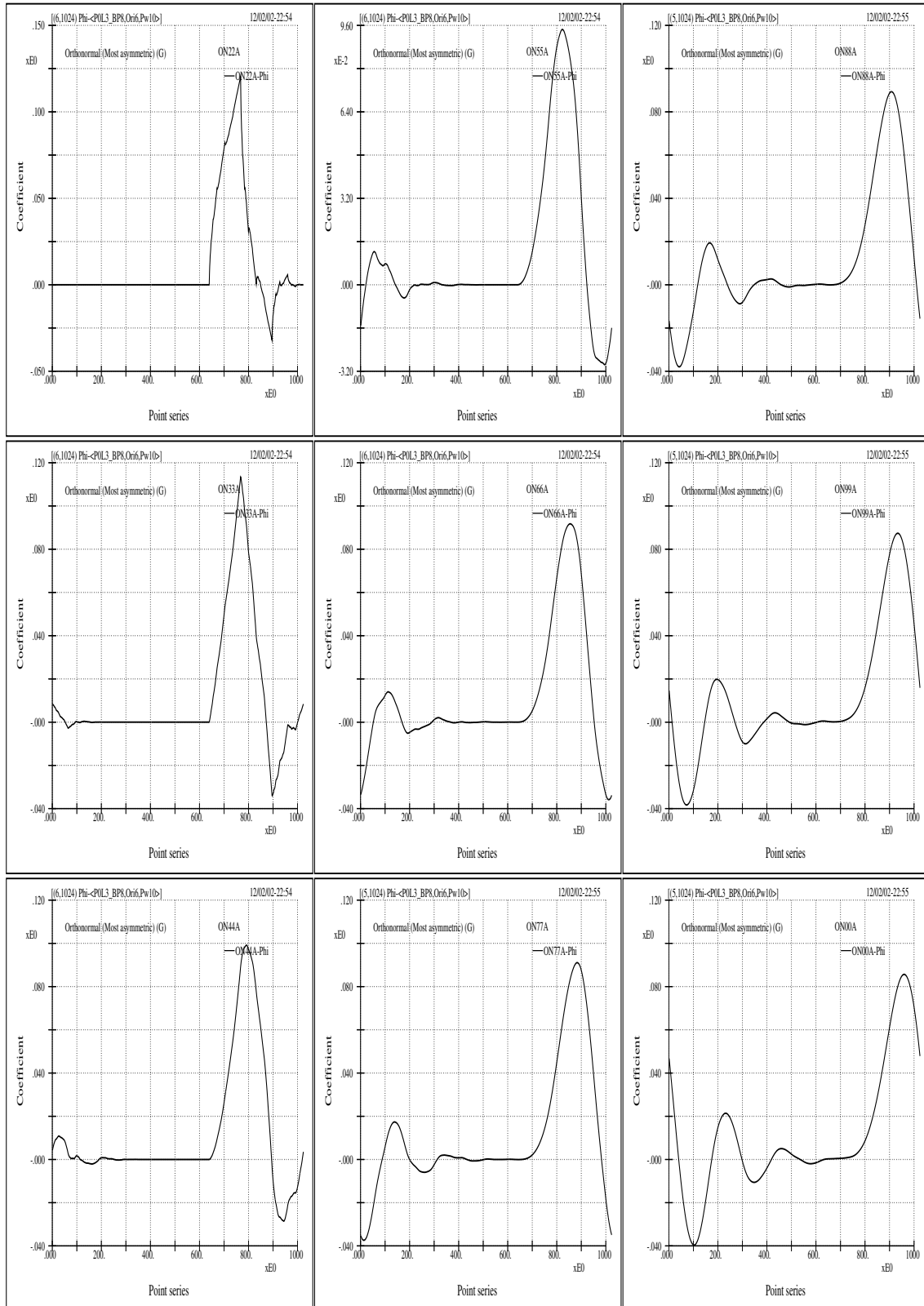


圖 2.8 ONxxA 類屬之父子波波形。源起點為 6，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）大於 3。

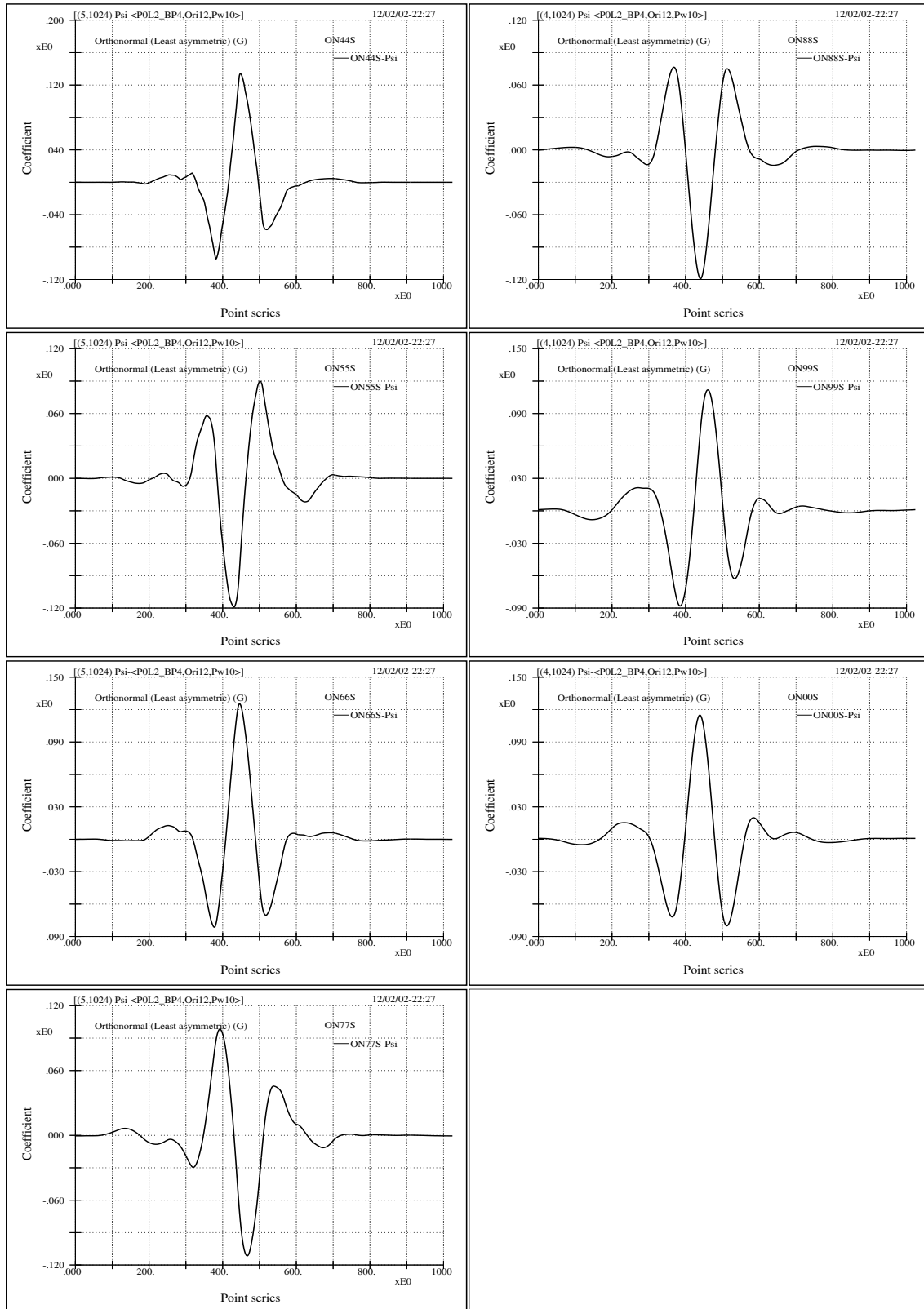


圖 2.9 ONxxS 類屬之母仔波波形。源起點為 12，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）小於或等於 3。

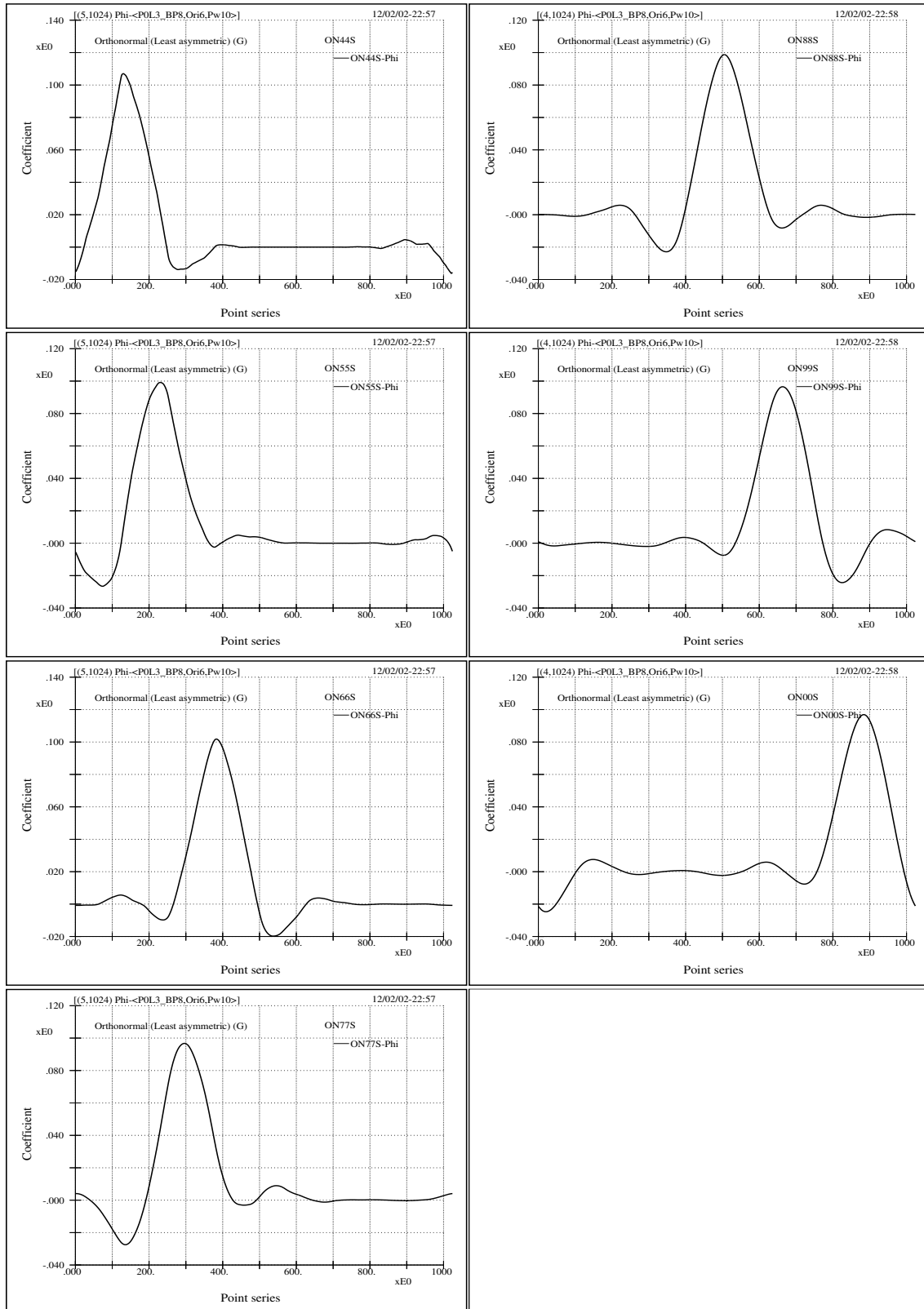


圖 2.10 ONxxS 類屬之父子波波形。源起點為 6，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）大於 3。

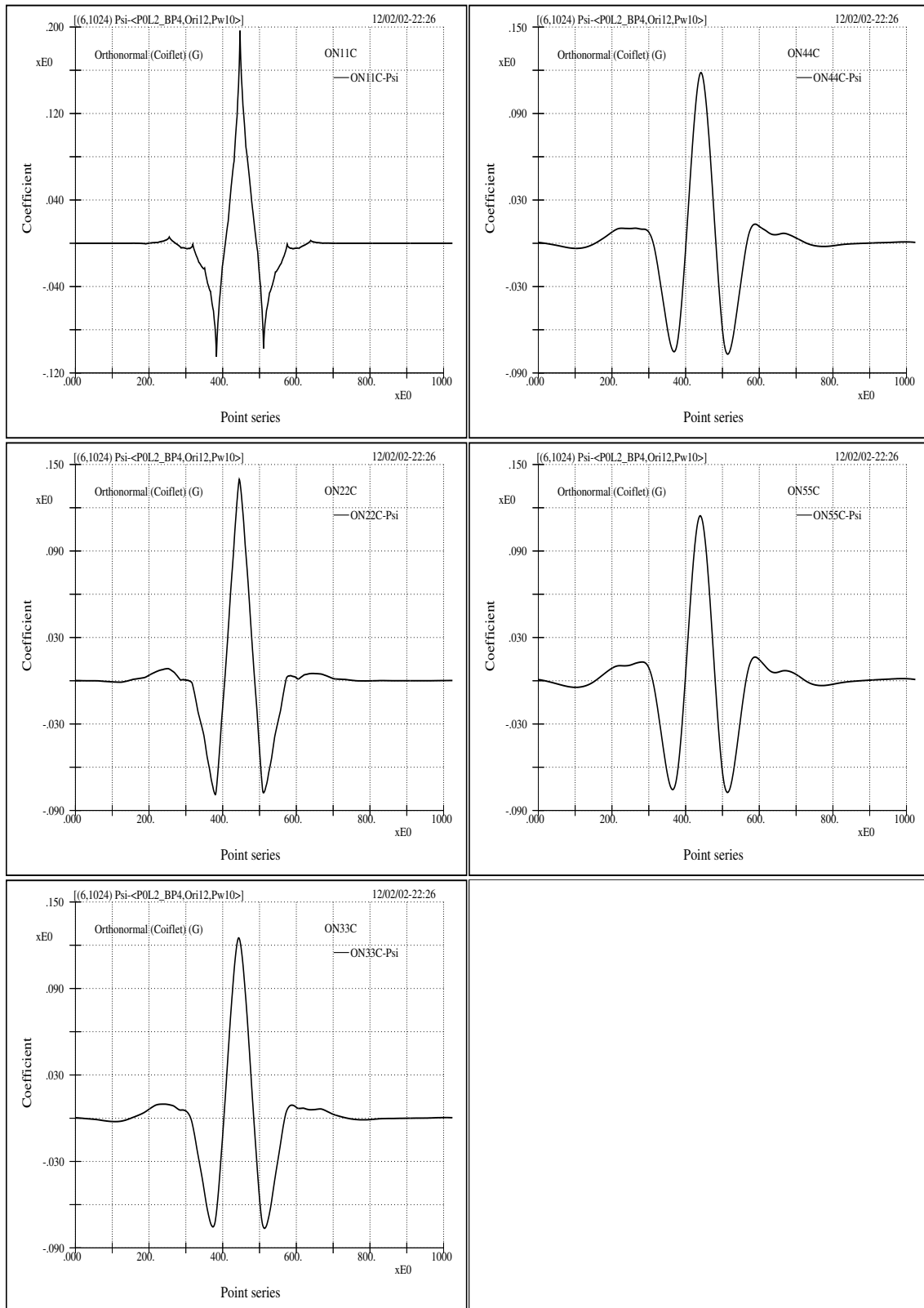


圖 2.11 ONxxC 類屬之母仔波波形。源起點為 12，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）小於或等於 3。

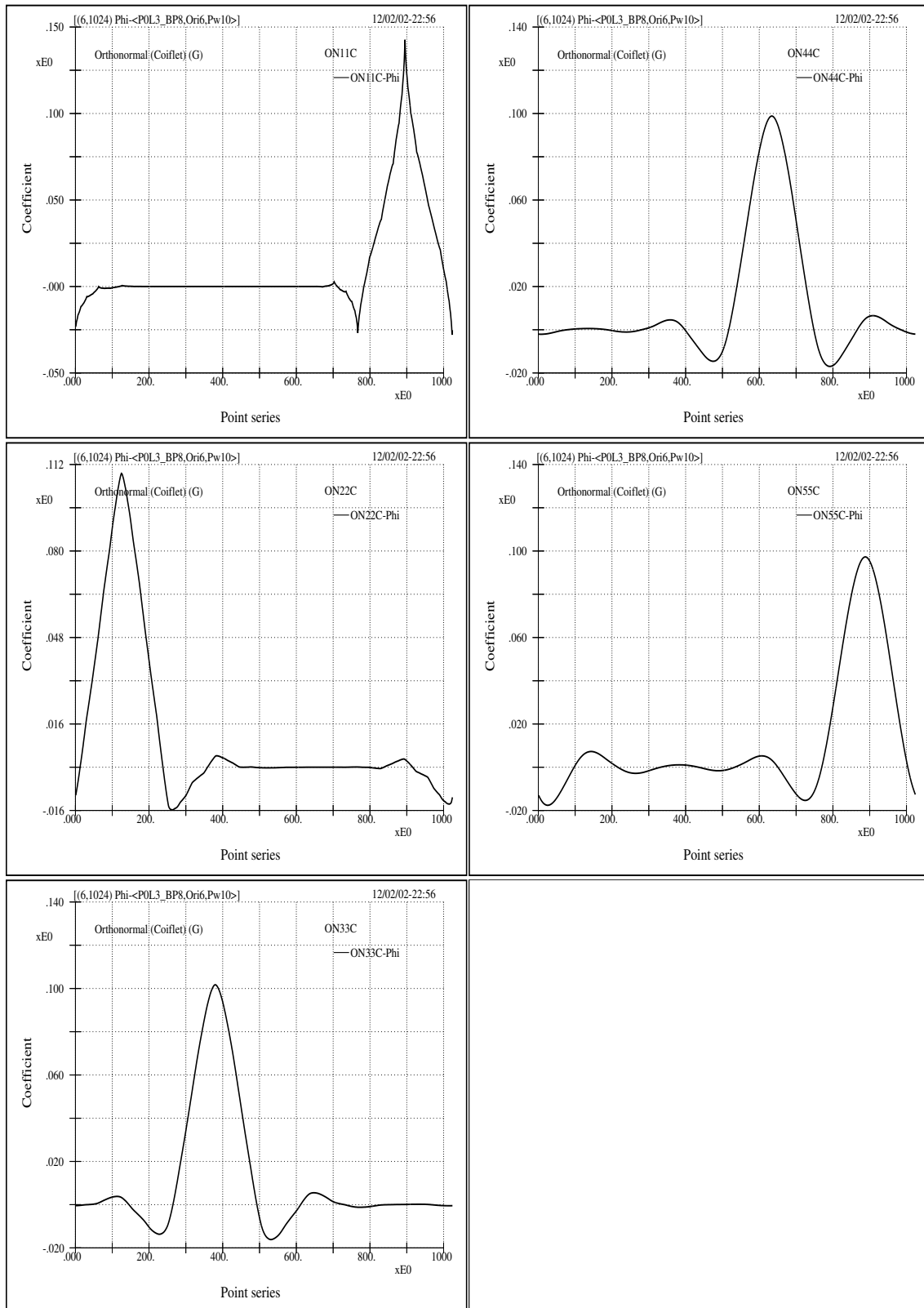


圖 2.12 ON xx C 類屬之父仔波波形。源起點為 6，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）大於 3。

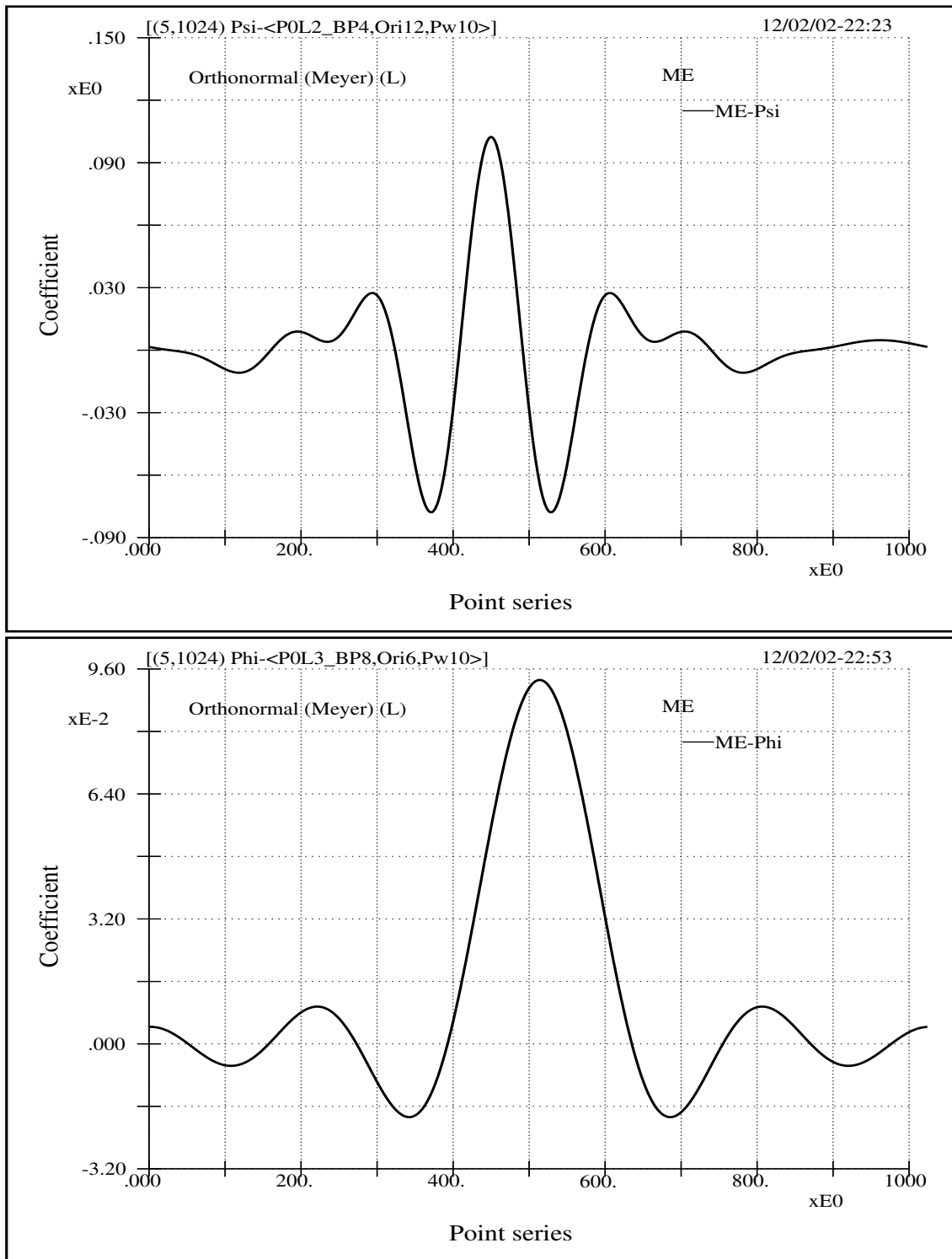


圖 2.13 Meyer 母仔波（上子圖）與父仔波（下子圖）波形。源起點分別為 12 與 6，區隔階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）等於 3。此圖與下一圖比較，具有重要義涵。

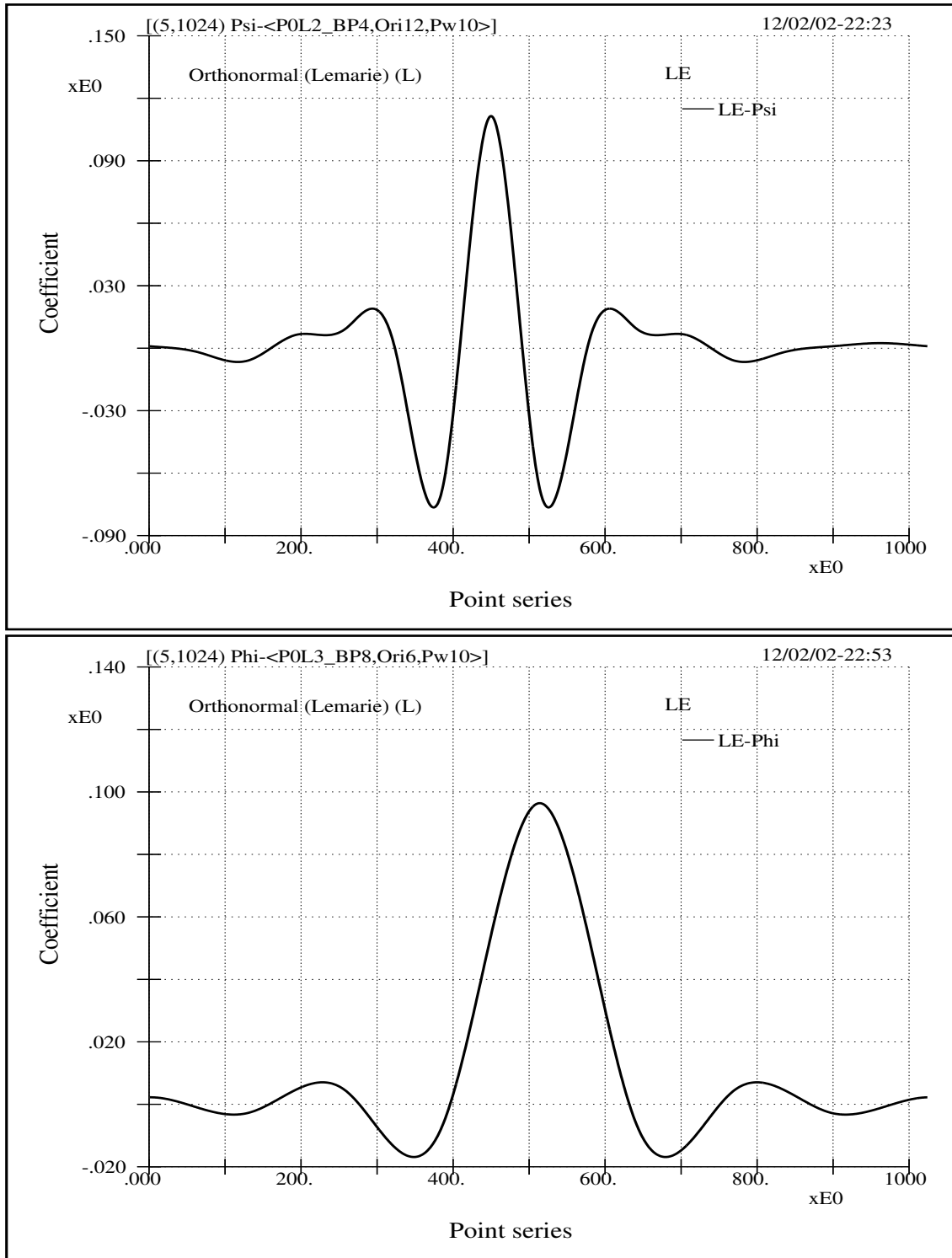


圖 2.14 Battle and Lemarié 母仔波（上子圖）與父仔波（下子圖）波形。源起點分別為 12 與 6，區隔階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）等於 3。比較此圖與上一圖，其目視性狀可說非常近似，然而這兩種仔波之函基構築、理倫設定、公式推演都是相當不一致的，另其諸解析特性（如規則度、可微性、衰減率、支撐長度等）亦甚不同。如是，解析特性可以是南轅北轍，但目視性狀可以無甚差別。

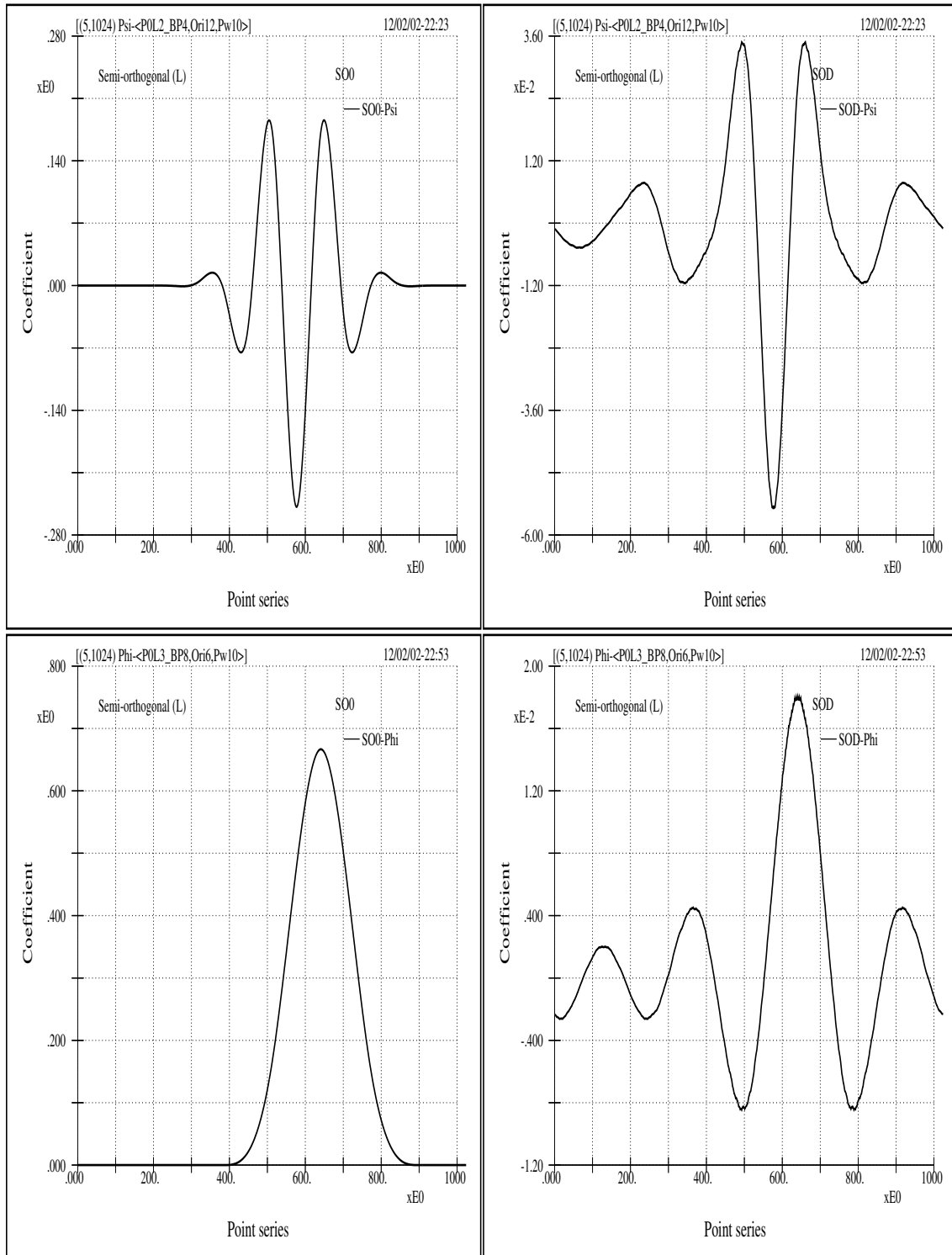


圖 2.15 半正交仔波其母仔波（上左子圖）、父仔波（下左子圖）、各匹配仔波（右兩子圖）之波形。源起點分別為 12 與 6，區隔階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）等於 3。

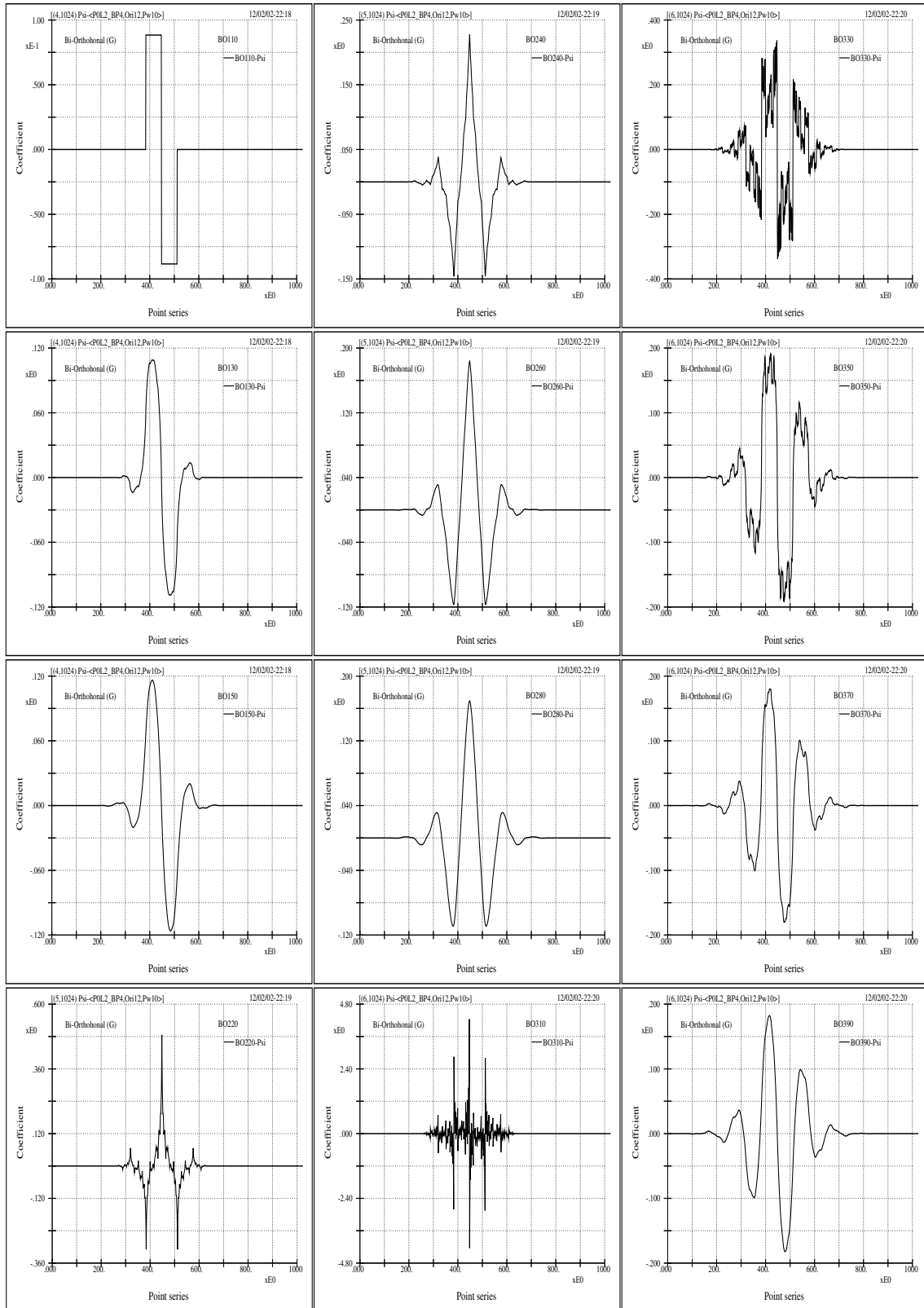


圖 2.16 交正交仔波類屬 $BO_{xx}O$ 其母仔波之波形。源起點為 12，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）小於或等於 3。

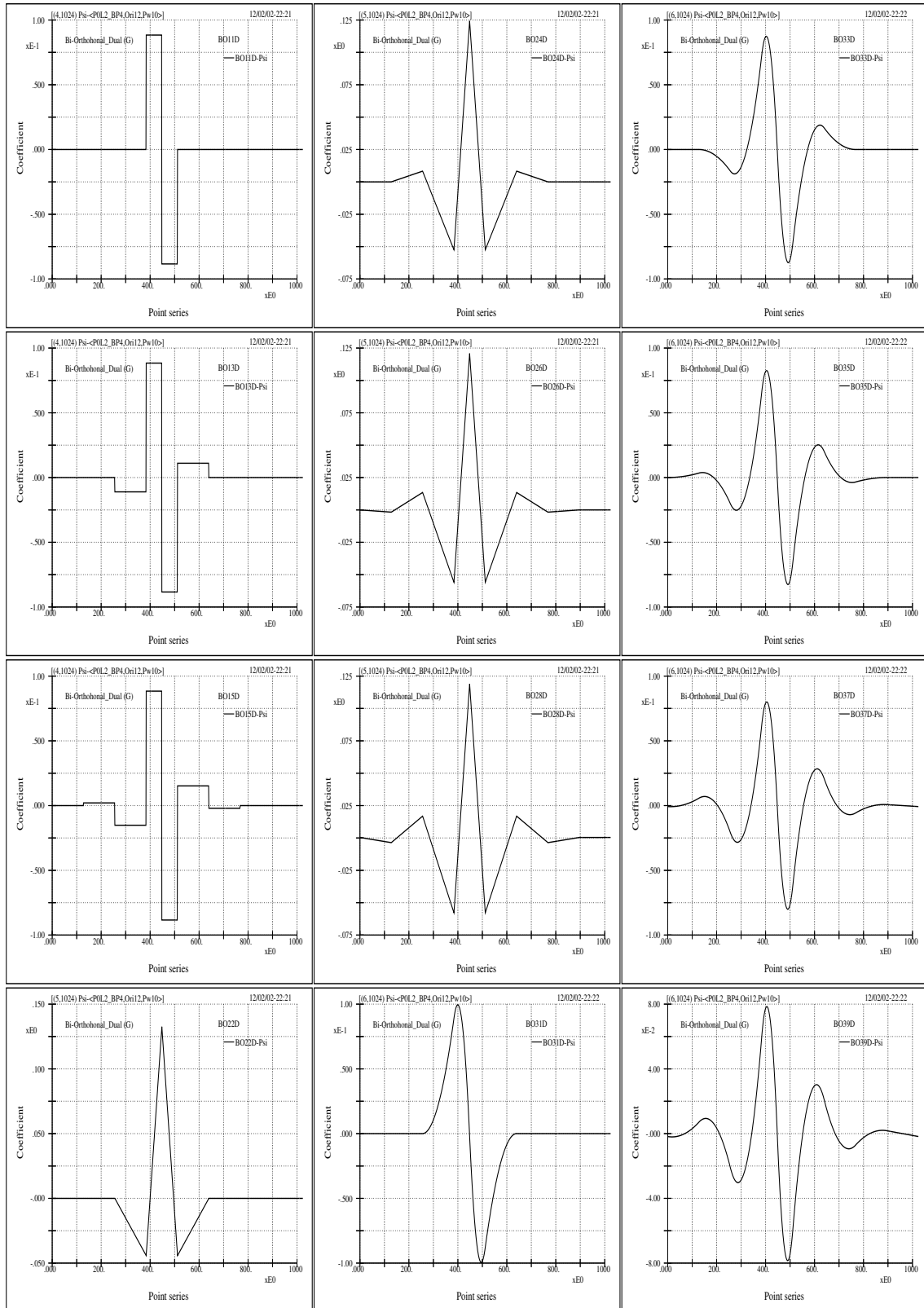


圖 2.17 交正交仔波類屬 $BO_{xx}D$ 其母仔波之波形。源起點為 12，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）小於或等於 3。

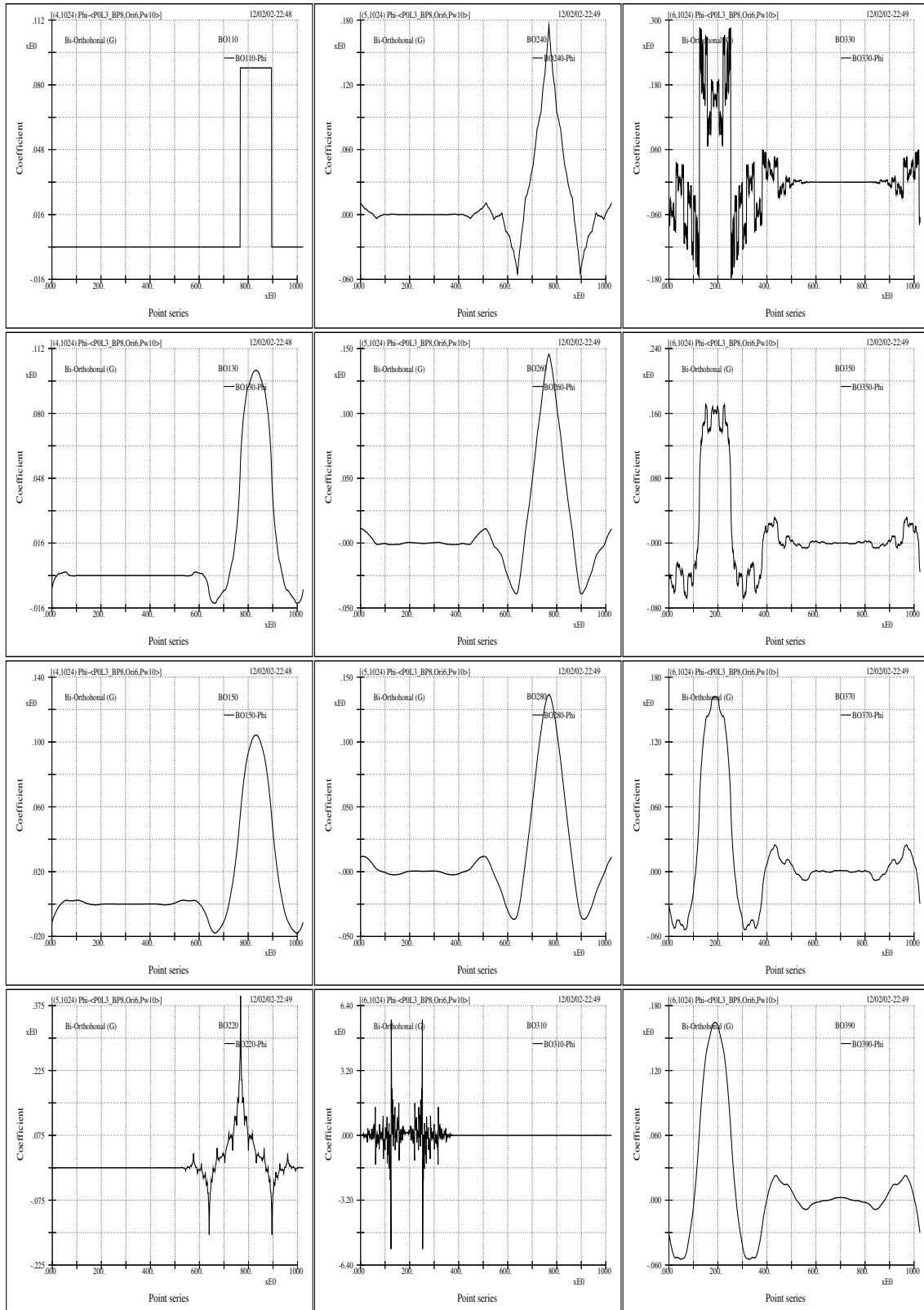


圖 2.18 交正交仔波類屬 $BO_{xx}O$ 其父仔波之波形。源起點為 6，階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）大於 3。

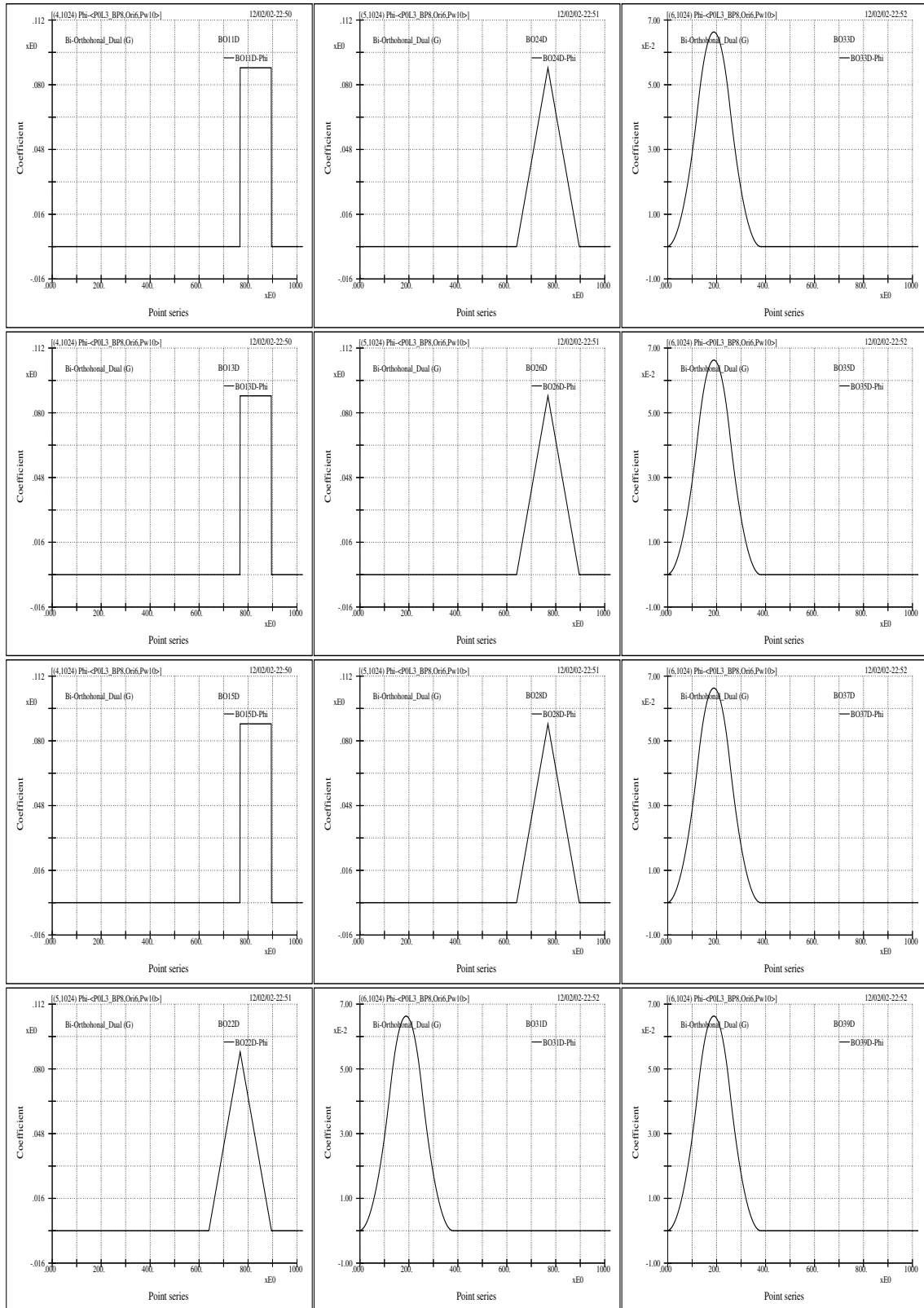


圖 2.19 交正交仔波類屬 $BO_{xx}D$ 其父仔波之波形。源起點為 6，邊界點階位（即區隔 smooth information 與 detail information 之邊界點階位）大於 3。

Original data (say, 1024 data points) $D_{10}=V_{10}$															
$S_9=V_9$								$U_9^1=D_9$							
$S_8=V_8$				$U_8^1=D_8$				U_8^2				U_8^3			
S_7	$U_7^1=D_7$		U_7^2		U_7^3		U_7^4		U_7^5		U_7^6		U_7^7		
S_6	D_6														

• • •

• • •

• • •

S_1		$U_1^1=D_1$		U_1^2		U_1^3		U_1^4							
S_0	D_0														

圖 2.20 仔波包轉換分解之樹狀分支結構示意圖。圖中之 S （或文中之 V ）與 D 分別表 smooth information 與 detail information。 U 之上標若大於 1 則表以仔波包進一步分解。 U 之下標代表尺度階位；而 U 之上標則示該係數所發生的位置，另其位置尚依尺度下標而定。

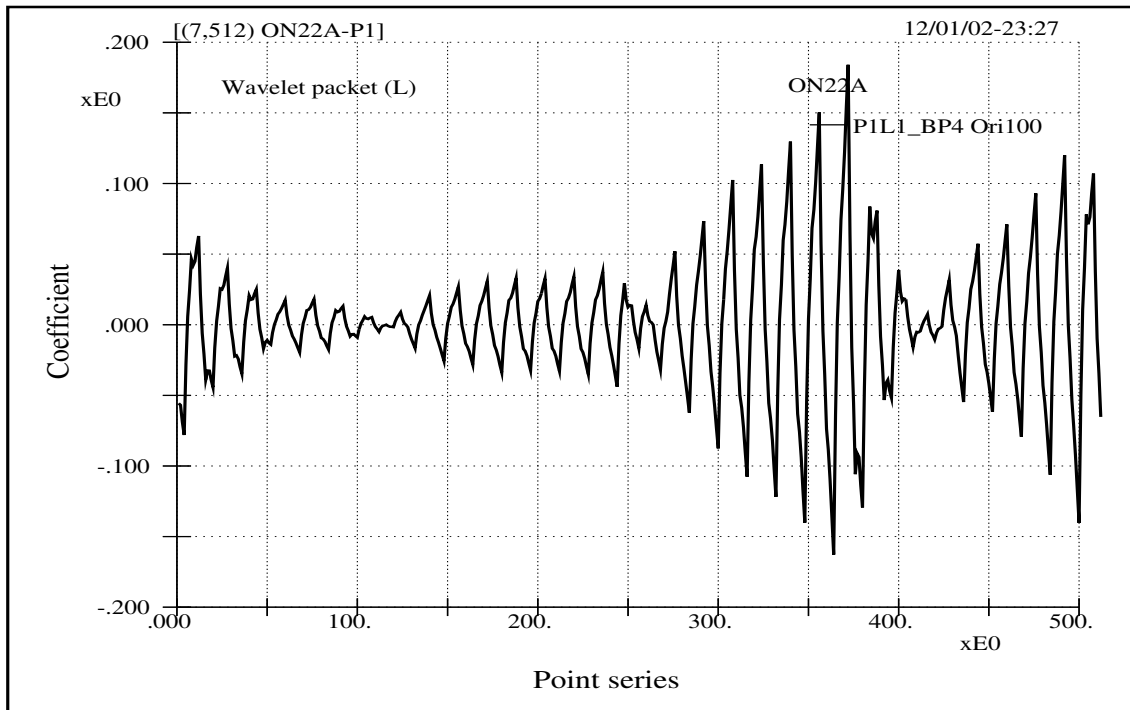


圖 2.21 相關於Daubechies ON22A 之一個仔波包波形。此圖示階位 2，邊界點 8，排序在點 100 處之源起單位係數，其所對應之仔波包波形。

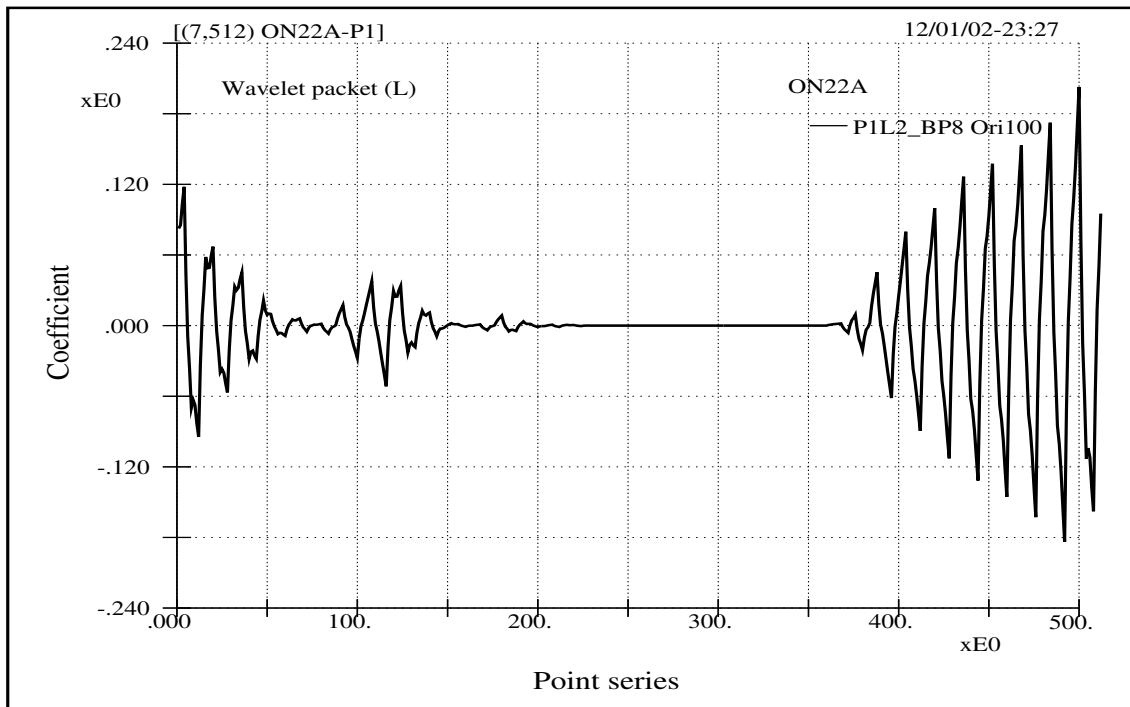


圖 2.22 相關於Daubechies ON22A 之一個仔波包波形。此圖示階位 5，邊界點 64，同樣排序在點 100 處之源起單位係數，其所對應之仔波包波形。

熵值與最佳函基

3.1 引言

以仔波來研究水波現象，最擾人、亦是最根本的問題，就在仔波之選擇基本上是無窮多的。這種問題衍生的也就是物理解說之確適性問題。每一種仔波函基都可以得到組一數據分析結果、或者各式之曲線分佈，但是如何附予義涵、或將其有義化，應是仔波分析在應用上最迫切也是最重要的核心。事實上，不解決這一關鍵，則研究不免陷於投機式分析，這些分析，說的輕一點是根基淺薄、立論薄弱、避重就輕，說的重一點是指鹿為馬、顛倒是非。它們衍生的問題可能遠高於解決問題。因為一個研究分析，最重要的科學精神就是在於「其可預期性」，決不能落於「人話鬼話」之譏；再者賭博行為與統計行為也完全是兩碼事，缺乏廣泛性、歸納性的分析即不符科學要義。

正如前述，物理解說的適切性是我們的核心問題，而解說的運作，對水波研究而言，是屬不明確的手法及目的，因為解說之成敗難以絕對。這一情形與一些著重數理因子或數值過程的研究課題相較而言，它們的研究重心是有極大差異。後者的物理解說要求常不明顯，然而目標則相當明確而直接，比如在資料儲存、訊號傳送、影音處理、等研究上，往往所在乎的就是，高速的分解與重組效益、最大的壓縮與儲存容量、最少的扭曲與流程步驟、等，此時研究對象其資料與各類仔波函基之間的問題，基本上是數學內涵遠超過物理要義。

從上述之觀點而言，數學內涵與物理要義其不同需求似乎是很大的差別，而事實上對水波研究與應用來說，我們所看重的也決不是所謂的「精簡」、「效率」，我們所看重的是「性狀描述」、「物理特徵」。也如是乎，「精簡」、「效率」與「性狀描述」、「物理特徵」似乎是可以不相牽連；不過，話說回來，數學上而言，轉換之效率與精簡，卻在實質上與解析上，代表著訊號其組成成分與解析函基函數之間的相似性高低。再者，一個模擬波形如果看來就不似我們的成分波，那我們如何期待它所產生的現象能與我們的直覺認知會產生共鳴，進而帶來令人折服的物理解說呢？也如是乎，前述所言，訊號表示或模擬其數學轉換的效率與濟經性，卻也跟我們在這一不同領域上，所強調、所追尋的物理訴求有異曲同工、不謀而合之妙。亦正因如此，此處首先點明了熵值研究相關於最適函基探討之礎石階位。

所謂的熵值探討，在概念上可以視為一種「距離量測」。這種距離是指訊號與函基之間的歧異程度。雖然此處我們並未構築任何新仔波函基，亦未對已知之仔波類型，在其參數範圍上加以延伸建構。但一者，此處所含蓋之萊斯仔波函基類屬不可不謂相當廣泛完整，再者，考量章末之各種結論，與及下一章之結果，我們可以很肯定地說：這些新建構與延伸建構是沒有必要的。另外我們亦可很明確地指出：那些具破裂自似性 [11]，或解析特性突出，或性狀新穎奇異的仔波，在水波物理應用上必然是發揮不了作用。

此處所驗證之仔波是為前一章中所列之所有仔波及仔波包，這些雙元參數仔波（dyadic wavelets），其數學取樣率為 1，對訊號取樣之離散本質而言，可說在應用上最具實際用途或物理義涵。另外我們亦將富立葉轉換函基之結果加以比較。而為增加我們論述之肯確性，我們採用多類熵值規範，探討轉換係數其累積機率密度函數之分佈，及其熵值表現。另所取水波訊號係為實驗室水槽中之風生水波。

3.2 各式熵值規範

熵值是統計物理的一個術語，因此它所給的是一種不帶保證的指標。熵值其比較淺顯實際的解說或相關義涵，可以視為一個原始訊號與其重建而成的近似訊號之間的可能差異程度，這一重建訊號是以部分的轉換係數行反轉換為之。

此處為了避免一些研究中所帶來的那種神祕而難以瞭解的熵值意象，我們採取一種逆向處理方式，即是，首先直接說明熵值其數值求取的流程及求算公式，再回過頭來解說這樣的流程與求算公式是有那些統計與物理涵意。

設若我們有一記錄得之資料，其長度為 1024 點，則其仔波轉換亦存在有一由 1024 個係數組成之集合 $C = \{c_i\}$ ，今將這些係數取其絕對值或平方值，再依其值大小排序，由 0 值以迄最大係數值，然後又將這一排序依其係數分佈範圍，劃分為 M 個等間距轉換值之子集合，因此我們得以得知每一等區間內有多少轉換係數，即該區間之發生機率，並進而取得其正規化下之發生機率，此一機率分佈一般即稱為「概率密度分佈」或「機率密度函數」（probability density distribution or probability density function, pdf），其是為 $\{p_1, p_2, \dots, p_{M-1}, p_M\}$ 。而熵值即是：

$$H(p) = - \sum_i p_i \log p_i. \quad (3.1)$$

式中當 $p_i = 0$ 則設為 $0 \log 0 = 0$ ，此乃實質上我們可以假定在這 i 區間內其發生機率為幾乎接近於零但不完全等於零，因而其 $\log$ 存在，而乘積可視為零，且整個合成因係有限序列，可不受影響。再者，這整個過程的結果亦只是一種統計指標，這樣的修正對所有常規化數值也可說是完全沒有實質影響。

今若取轉換係數 c_i 之絕對值為之， $H(p)$ 則是為 L^1 -norm 熵值，而若取轉換係數之平方值為之，則是為 L^2 -norm 熵值。當然其它之幕次也可以取之研究，但最具代表性的還是一、二次方的熵值， L^1 -norm 一次方者具幅度義涵， L^2 -norm 二次方者具能量義涵，這兩者可說已含蓋了絕大多數物理解說對象。

以上說明了熵值求算是為機率密度分佈之統計參數，接下來，就來說明這一參數定義有何實際表徵或物理含意。

設若兩個機率密度分佈函數為 p 與 q ，而其轉換係數排序為由大而小降減者，則若 p 之降減現象較 q 之降減來得快，則 $H(p) \leq H(q)$ [15]。上式熵值不等式之成立是為單向正確，反向論述則未必成立。這也就是我們說，熵值是一不帶保證之統計指標之由來之一。而所謂的指標即是：較小之熵值代表著更多能量是儲存在更少數目的轉換係數當中。也如是乎，設若我們只保留某一固定百分比之較大轉換係數，而捨去其餘較小係數，則如此產生的捨去誤差，即表示其與全部轉換係數總合成之距離。而就關聯於此之熵值表現而言，較小熵值也就代表著這種捨去誤差所映射的距離是較為縮小。

另外還有一種熵值統計表示法，或被稱為幾何概念法 [15]。實際上，這一表示法是前一方法的一體兩面，可謂換湯不換藥。同樣地，此處先說明實際數值作業流程，再回過頭來加以物理解說。今設若我們將排序後之間距區隔數目取相同於轉換係數之數目，並將機率密度分佈函數定義為仔波轉換係數之平方值，並以所有全部能量為據，加以正規化之，亦即全部能量為 $\|C\|^2 = \sum_i |c_i|^2$ ，而個別機率密度為 $p_i = |c_i|^2 / \|C\|^2$ 。此時將 p_i 代入方程式 3.1 中可得熵值為：

$$H(p) = \log \|C\|^2 - \frac{\sum_i |c_i|^2 \log |c_i|^2}{\|C\|^2} \quad (3.2)$$

這裡的概念其實是很簡單的：如果把對低能量係數給予更多的權重，而高能量係數給更小權重，則此一加權的能量是可為熵值的一種指標，因為將一個數值取對數是為一種加權的動作（所有的係數已正規化處理，故均小於 1），且因整體能量是為固定值，是故較小熵值代表著那些能量高而顯著的轉換係數之數目數較少，也就是說，更多的能量是集中於較少的轉換係數群中。與上一種定義之說明比較，得見兩者之近似含義。

另一熵值指標可以下式表示

$$D(p) = e^{H(p)} = \prod_i \left(p_i^{-p_i} \right). \quad (3.3)$$

此 $D(p)$ 一般稱之為理論維度 [15]。其乃將 3.1 式直接置於指數之冪次而得，式中 $\prod_i$ 為連乘運作。

雖然熵值是一種數值統計指標，其推論是基於對式中因與果之反向運作，因而有其不確定性，但由我們所得諸多數值結果的表現行為與明顯趨勢，我們可以肯定地表示，我們對所下之判定有充足的信心。

3.3 熵值結果與討論

為了增進比較之明確性與肯定度，我們計算數種設定下的熵值：以基於式 3.3 並取 L^2 -norm 之直接係數熵值（表 3.1 與 3.2 中之第一欄）；以 L^2 -norm 為計價值，並劃分成 300 個區隔之 pdf 熵值（第二欄）；以 L^1 -norm 為計價值，並劃分成 300 個區隔之 pdf 熵值（第三欄）；以 L^2 -norm 為計價值，並劃分成 200 個區隔之 pdf 熵值（第四欄）；最後一欄（第五欄）是為理論維度熵值。這裡我們所用的水波訊號係為實驗室水槽風生水波。此處補充說明的是，如果選用不同訊號，而其主頻（或主要能量尺度）有明顯不同，則為讓熵值比較有較一致性條件，則所分析之訊號長度及其取樣頻率應該依據其主頻或尺主度作適當調整。這是因為仔波轉換下我們需要對移位大小有實質概念，才得以對仔波波形大小有較真切的體會，另一方面，也因為不像富立葉轉換下，其單位很容易具體化成頻率，仔波轉換下，其縮放尺度則無因次而造成相當模糊。

表 3.1 示所有正交仔波（含 B&L、Meyer、ONxxA、ONxxS、ONxxC），半正交仔波（含 SO3O、SO3D），以及富立葉波譜之結果，表 3.2 則示所有交正交仔波之結果。由這些數據，我們可以取得一些非常明確的特徵，並作一些相當肯定的推論，茲列述如下：

- 若匹配仔波存在，則匹配仔波與相對應之原仔波比較起來，以匹配仔波為轉換函基（原仔波出現於內積中，即表中 SOO 與 BOxyO）所得之熵值必然是明顯大於以原仔波為轉換函基（匹配仔波出現於內積中，即表中 SOD 與

BOxyD) 所得之熵值。換句話說，對水波浪研究而言，使用如下的方程式

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (3.4)$$

其效率性與近似性是必然優於下面另一解構方式

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} \quad (3.5)$$

也因此我們可以很明確地指出：針對存在有匹配仔波之半正交類屬及交正交類屬，無論是要探討物理、亦或針對數值計算效率、或者是水波訊號之解構或重建，我們的選擇函基必然是原仔波，而其而其轉換係數求算之投射機制則以匹配仔波運作。

- 檢視那些 x 、 y 值較小的交正交仔波（BOxyO 與 BOxyD），可以發現它們的熵值皆比 x 、 y 值較大下之熵值來得大，再審視這些仔波形狀之特異性（圖 2.29 與 2.30），得以實質上說明的是，這些具明顯破裂自似性之仔波是非常難以真實的。
- 就交正交仔波而言，可以由其熵值表現看的出來，完全沒有必要再擴展或延伸其仔波建構之支撐長度，亦即針對 x 、 y 加以擴充是無法帶來改善的。這一點可以下面三個因子加以論定。其一，若 x 不變，增加 y 時，因 y 越大它所對應的匹配仔波形可說幾無影響，或則是見不到改變性；其二，無論解構或重建，都是要以匹配仔波作為內積運作函數才得有較小熵值，也如是乎，此一延伸必然沒有多少助益；其三，交正交仔波其函基函數之構築基核係以樞點順適函數為之，而樞點順適函數其樞點數增加到某些數值時，我們也就很難看出那些樞點順適函數在形狀上有何差別。綜此，可以肯定地說，對此類函基之延伸建構是沒必要的。
- 所有正交類屬及其子類屬之熵值行為，都無法降到非正交類屬及其子類屬之較小熵值表現。此外，正交類屬其仔波支撐長度之大小對熵值表現也幾

無明顯效應，雖然似乎較長支撐長度者較短支撐長度者其熵值有些微統計改善，但其影響卻可忽略。再者，這一類屬之所有熵值都分佈於狹小區間，因而我們實在難以預期這一類屬在水波應用上會有任何特出表現。此外在下一章裡，我們將說明線性相位濾波與這一熵值表現之關聯。

- 所有正交類屬之仔波中，沒有一個具有突出之表現，此外，在任一子類屬中也看不出有任何熵值表現趨勢。這些說明了，很多數學上不同的解析特性，在理論上雖有絕大之差異或重要性，但對於我們水波模擬上之有義化或物理實用性，則可說是難有些許作用。比如說，Meyer 仔波在解析上是無窮可微或無限光滑，而 B&L 仔波則是二階可微，而其它仔波亦存在有各自的可微性與規則度，但各種熵值表現都難以區別。
- 最突出的結果，也是最令人驚奇的是，最小的熵值表現是出現在樞點順適仔波之轉換函基（即以其匹配仔波行內積運作之係數求取），其各種熵值明顯遠較其它函基之各種熵值為小。再者，令人訝異的是，其熵值也都比用富立葉波譜函基所得熵值來得小。此一結果，實際上已指出：應用半正交仔波求取得之轉換係數，較諸用富立葉函基所得之轉換係數，不論在訊號模擬、物理解說、應用探討、等等，必有其潛能及優越性。

3.4 熵值與累積機率分佈曲線

此處我們再對一些函基其轉換係數累積機率分佈曲線加以比較，這些比較得以進一步說明樞點順適仔波所存在的優越性，另一方面得以對仔波包之熵值結果與預期表現，加以確切論定。圖 3.1 係多種仔波其累積機率分佈曲線比較圖。而前節中，所謂讓人訝異的結果，正是反應在代表樞點順適匹配仔波之曲線走勢。這一走勢，在大部分的範圍，都是平坦（或水平）的，可說是幾達百分之九十之範圍是平的，此後才揚升，且其平坦性亦較波譜函基所得者明顯，而在能量比達百分之九十六時與代表波譜函基所得之曲線交會。此一結果說明了，用最少的轉換係數即能代表水波訊號。

接著，為實際領受樞點順適仔波之優異行為，我們以實際重建訊號來比較，此處取熵值表現最佳、亦最接近之兩者，即樞點順適仔波及富立葉函基為之。圖 3.2 示一段重建訊號與原訊號之比較。圖中之上子圖係原訊號，中子圖係相關於富立葉函基之重建訊號，下子圖則相關於樞點順適仔波者，而重建反轉換所用的轉換係數量係保留總量之百分之三十五。由圖可見，樞點順適仔波所重建之波形更接近於原波形，特別在是微小局部之曲線，大底均較真切。

針對樞點順適仔波所表現的優異性，其相應於水波特性和表現所相關的現象因子，我們可以從 Chui [3] 對此一仔波之詳細研究中發掘。此處指出，其乃樞點順適仔波所特別具有的二個特性，即「全振性」與「全正性」。所謂的「全振性」是指母仔波函基函數具有完整的擺盪性，而沒有一些沒必要的中間起伏波動，或者說是所有波動都是越零位之波動；而所謂的「全正性」，則是指其父仔波的曲線分佈都是正值分佈而沒負的。而此處我們要指出的是，這兩種特性，在物理義涵與實際應用上，在在表明我們的試驗水波其時變性對絕大多數之仔波而言，其變動都是相對非常柔順的。此外，其亦提示著，適當支撐長度、或者是適當生命週期的函基函數，是比較可能產生有義化之物理解說。

至於仔波包轉換係數之類屬，主要的兩種取法是為：最適函基與最適階位函基。事實上我們很容易地可以推論到，任何組合之仔波包函基，其熵值表現都不可能有人滿意之結果，也必然跟樞點順適仔波之表現有相當大的差距。這一推論的立足點是明顯淺易的。因為仔波包轉換是僅能相關於正交仔波，它的初始使用函基是正交，而後續分解所用函基亦是正交，基於前述正交類屬函基之表現，我們所能期待的自是不多。這些推論我們亦可以累積機率分佈曲線之性狀驗證之。圖 3.1 之下子圖示以 B&L 及 Meyer 仔波為仔波包轉換之累積機率分佈曲線，其轉換之起始與後續轉換函基均係使用相同函基。與上子圖比較起來，這兩曲線都與樞點順適仔波者或富立葉函基者有明顯差距，不過，我們亦可看得，它們與 B&L 及 Meyer 之正規仔波轉換所得之曲線比起來，其走勢是比較平坦一些。

圖 3.3 再示相關於 ON77S 之累積機率分佈曲線，包含正規轉換、仔波包最適函基、仔波包最佳階位函基、不同階位函基轉換者。由圖可見，仔波包最適函

基之曲線其表現最佳，而最佳階位之曲線其走勢稍高，而原仔波函基之曲線則又高於此兩曲線。再者，吾人亦可從前圖中，明顯比較出，此圖所有曲線之表現與前圖樞點順適仔波之表現仍有相當大的差距。

就有限支撐長度之正交仔波而言，其函基函數不存在對稱的波形，但不同子類屬有不同的對稱性（亦或非對稱性），不過，我們對其熵值表現實在難以看出有何差異、或任何趨勢。至於那些具有對稱或反對稱的仔波函數，如半正交與交正交仔波者，其所得熵值（針對以匹配仔波函數用於內積之轉換係數求取）則相對明顯來的小。此一特性，再加上前述之「全振性」與「全正性」說明，給予我們強烈的數理與物理義涵。在數理解析上，它所關聯的是波濾係數所涉之線性相位濾波；在物理含義上，它對我們於水波模擬所生視覺、亦或自覺性的障礙有絕大關係。圖 1.1 實際上是可說明了這一狀況，圖中原訊號之頻率分佈是一直線漸高頻，在一半 Nyquist 取樣頻率下，折誤成對稱山字形，而其仔波包轉換所得係數所代表時頻窗之分佈情況是為上子圖，此圖所生之視覺障礙，應足以令人體會此處所言之數理與物理相關性。此外可以說明的是，雖然對稱性是重要條件，但仍然還有一些必需考慮的因子，如支撐長度、規則度、全振性、全正性等。如 B&L 及 Meyer 仔波都是對稱的，但它們的熵值跟正交類屬者幾無差異。

3.5 結語

針對相當廣泛完整之離散仔波類屬，我們使用各種不同熵值計算規範，求算比較仔波轉換係數之統計熵值，並探討相關之機率密度分佈曲線性狀；此外，並對富立葉函基轉換係數之結果加以比較。由這些數據我們明確鑑取得水波訊號分析之最適離散函基，這一最適函基乃為半正交樞點順適仔波，再者，其模擬表現亦較以富立葉函基模擬者來的優越，而其它任何離散仔波函基之熵值表現與前此兩者都有非常大差距。整體而言，在眾多仔波類屬裡，絕大多數對水波研究而言，可說是有數學、無物理。再者，我們由諸熵值表現，明確推論此處所含蓋之仔波類屬具有廣泛完整性，亦無拓展延伸建構之需求性，亦即指出我們的鑑取結果可謂無出其右、一已定之。下一章中我們將進一步探尋相關的解析因子與物

理性應用義涵。 ❖

Table 3.1 正交與半正交子波類屬其轉換係數之各類熵值，另外亦包含富立葉函基之轉換係數相應熵值。

Wavelet	L^2 coefficient entropy (0 division)	L^2 probability entropy (300 divisions)	L^1 probability entropy (300 divisions)	L^2 probability entropy (200 divisions)	Theoretical dimension (L^2 300 divisions)
B&L	4.691	1.330	3.417	1.179	3.782
Meyer	4.647	1.294	3.365	1.132	3.646
SO3O	4.833	1.669	3.756	1.488	5.307
SO3D	1.823	0.219	1.306	0.172	1.245
Spectrum	2.809	0.270	3.044	0.244	1.310
ON22A	4.993	1.761	3.891	1.516	5.815
ON33A	4.773	1.384	3.499	1.225	3.975
ON44A	4.790	1.517	3.596	1.363	4.559
ON55A	4.819	1.553	3.631	1.367	4.727
ON66A	4.790	1.373	3.456	1.203	3.946
ON77A	4.675	1.355	3.461	1.203	3.877
ON88A	4.645	1.229	3.283	1.082	3.418
ON99A	4.719	1.412	3.501	1.252	4.106
ON00A	4.787	1.423	3.511	1.244	4.149
ON44S	4.835	1.461	3.557	1.281	4.311
ON55S	4.758	1.492	3.576	1.298	4.426
ON66S	4.754	1.402	3.501	1.225	4.065
ON77S	4.751	1.336	3.331	1.188	3.804
ON88S	4.714	1.366	3.481	1.224	3.918
ON99S	4.755	1.469	3.570	1.288	4.345
ON00S	4.635	1.278	3.378	1.134	3.591
ON11C	4.938	1.696	3.832	1.457	5.452
ON22C	4.827	1.468	3.520	1.284	4.342
ON33C	4.756	1.488	3.573	1.333	4.427
ON44C	4.690	1.297	3.337	1.157	3.658
ON55C	4.644	1.309	3.405	1.154	3.703

Table 3.2 交正交仔波類屬其轉換係數之各類熵值。

Wavelet	<u>L**2 coefficient</u> entropy (0 division)	<u>L**2 probability</u> entropy (300 divisions)	<u>L**1 probability</u> entropy (300 divisions)	<u>L**2 probability</u> entropy (200 divisions)	<u>Theoretical</u> <u>dimension</u> (L**2 300 divisions)
BO11O	5.395	2.623	4.502	2.299	13.777
BO11D	5.395	2.623	4.502	2.299	13.777
BO13O	4.943	1.806	3.883	1.627	6.084
BO13D	5.266	2.371	4.373	2.053	10.708
BO15O	4.866	1.678	3.755	1.495	5.357
BO15D	5.227	2.291	4.327	1.987	9.882
BO22O	5.282	2.362	4.363	2.083	10.609
BO22D	4.434	1.181	3.284	1.034	3.257
BO24O	4.963	1.862	3.985	1.634	6.438
BO24D	4.359	1.090	3.220	0.962	2.975
BO26O	4.881	1.703	3.835	1.492	5.490
BO26D	4.332	1.064	3.174	0.940	2.899
BO28O	4.857	1.624	3.782	1.452	5.073
BO28D	4.318	1.069	3.157	0.941	2.914
BO31O	5.824	3.174	4.741	2.835	23.894
BO31D	4.377	1.058	2.655	0.936	2.880
BO33O	5.084	2.001	4.062	1.756	7.393
BO33D	4.205	1.102	2.827	0.965	3.011
BO35O	4.850	1.697	3.847	1.506	5.457
BO35D	4.125	1.026	2.776	0.908	2.789
BO37O	4.790	1.658	3.821	1.442	5.247
BO37D	4.106	0.986	2.737	0.873	2.679
BO39O	4.776	1.660	3.835	1.432	5.258
BO39D	4.098	0.967	2.713	0.866	2.629

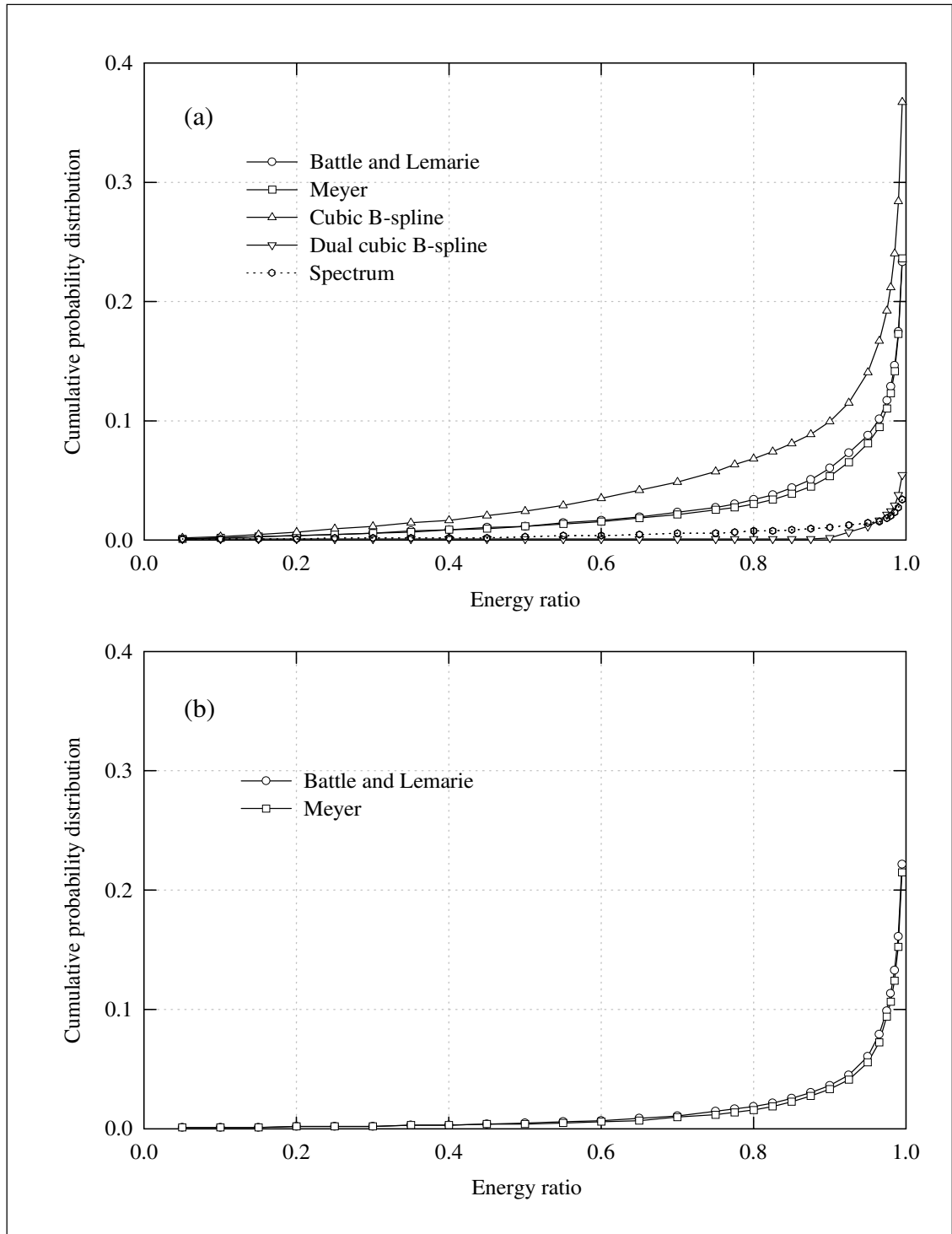


圖 3.1 轉換係數之累積機率密度分佈曲線圖。此處包含有四種函基轉換類型：仔波函基、匹配仔波函基、仔波包函基、富立葉函基。所用各函基母仔波如圖所標示。上子圖示仔波函基、匹配仔波函基及富立葉函基分佈曲線；下子圖示仔波包函基分佈曲線，其轉換係數規範係取用仔波包最適函基。

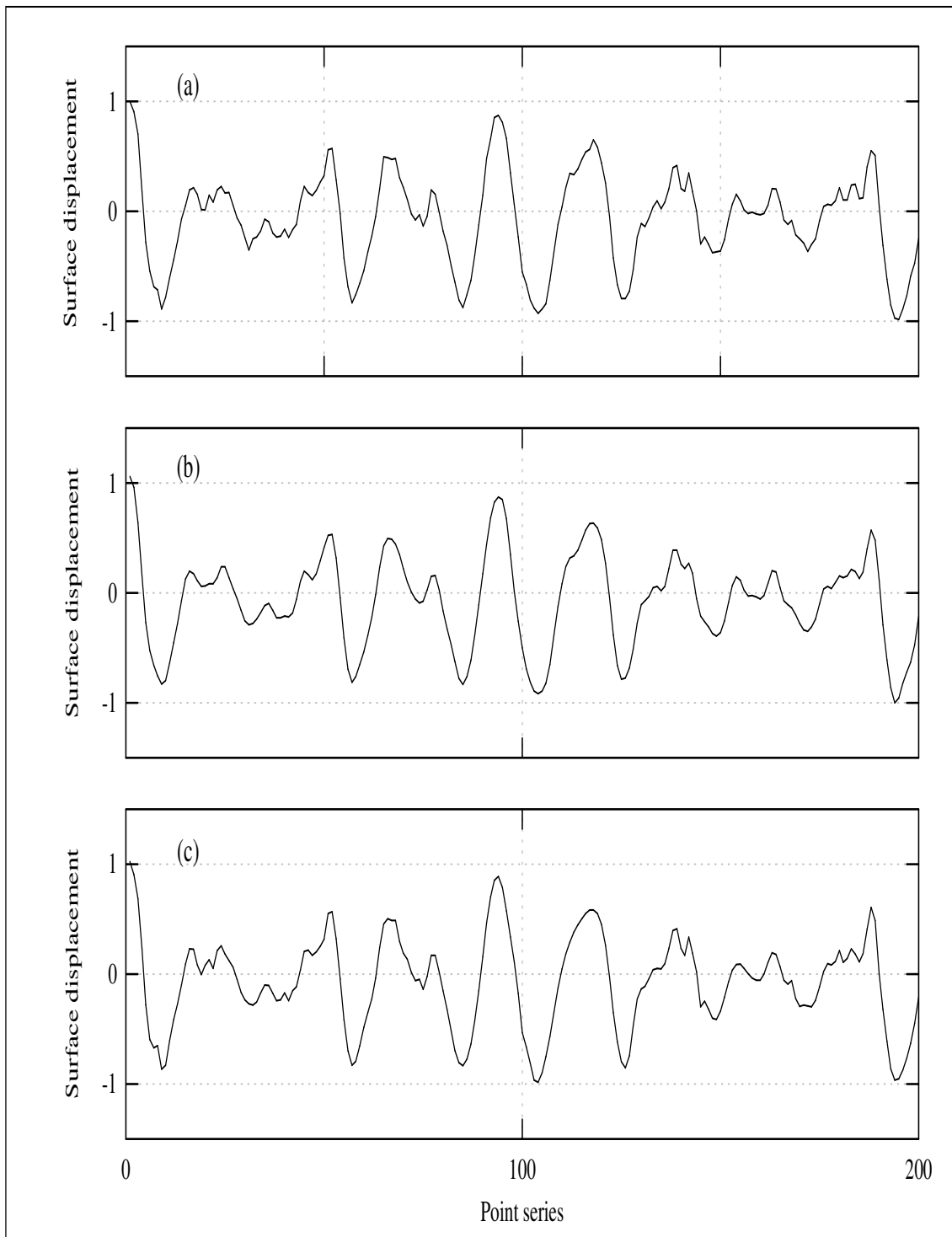


圖 3.2 以部分轉換係數所得之重建訊號與原始訊號比較圖。其重建訊號係取用 35% 的最大轉換係數行反轉換而得。上子圖示原始訊號；中子圖示以波譜係數所得；下子圖乃是以半正交樞點順適仔波轉換係數所得。由圖可見半正交樞點順適仔波提供整體最佳近似，特別是在小尺度之模擬。

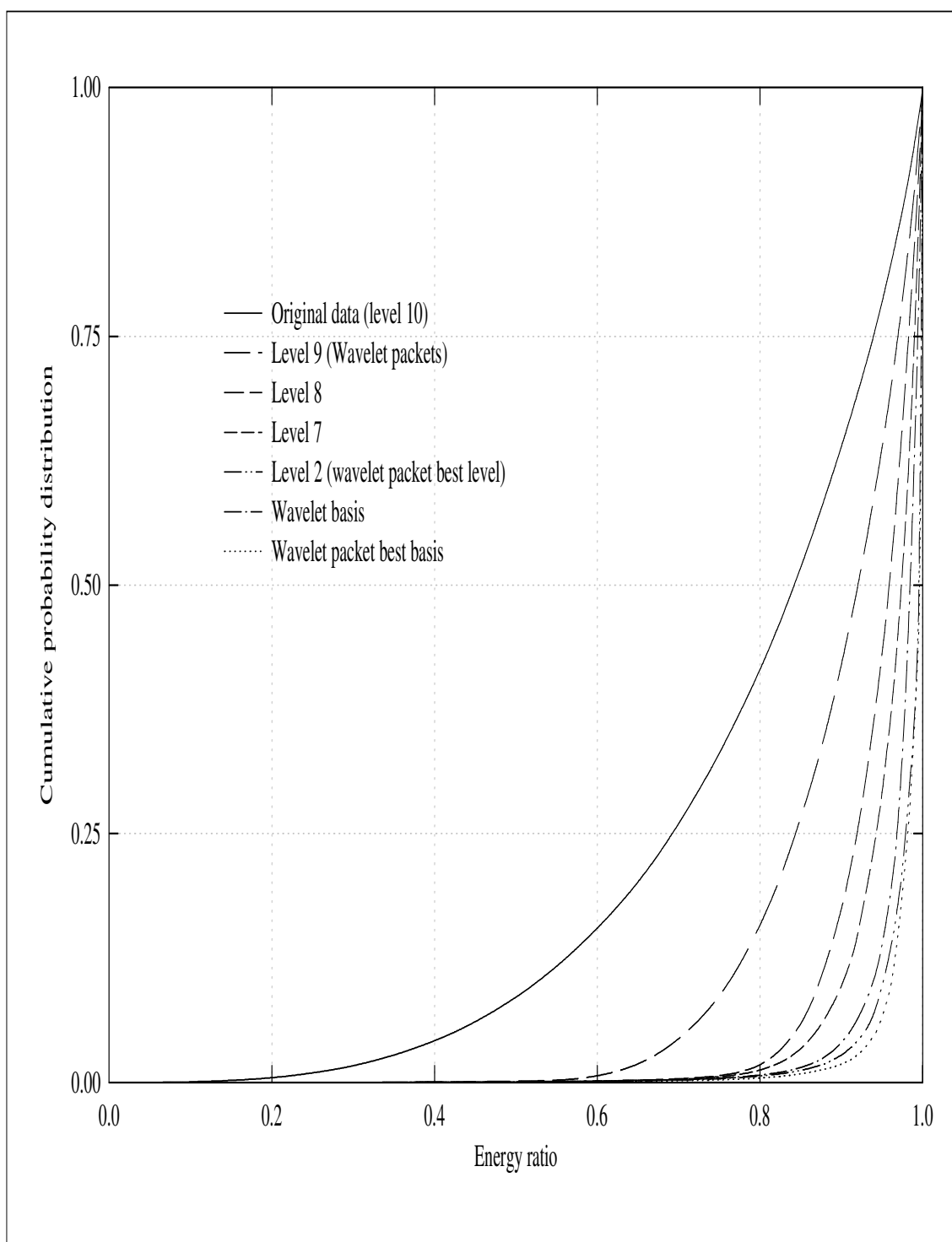


圖 3.3 仔波及不同仔波包轉換係數累積機率密度分佈曲線。其係以 L^2 -norm，即能量，大小排序後之累積機率密度分佈曲線。這些函基有：仔波包最適函基、仔波包最適階位函基、仔波包不同階位函基、仔波正規函基。而所有轉換函基都源自於同一母仔波 ON77S。

基核特性函數相位分佈

4.1 引言

在上一章中，我們經由轉換係數之熵值表現，由諸多的仔波類屬函基暨富立葉函基中，鑑取得水波訊號模擬之最適函基是為半正交類型之樞點順適仔波。然而熵值現象是統計手法，基本上，它在模擬近似上是有明顯的物理義涵，但它完全未直接觸及函基之數學內涵或解析本質。也就是說，熵值是函基函數與訊號成分波相似性的一種指標，然而這種相似性之良劣顯然也應該跟某些數學解析因子有所關聯。在前些章裡，我們基本上所指出或明顯看得出來的，大底是負面相關的解析因子，亦即是那些為對熵值帶來不利表現之因子，在這一章中，我們所尋求的，將是何種解析因子是正面效應的產生者。此處將藉由對仔波函基設計所相關的基核特性函數加以探討，尋求相關於水波實際應用性上，所必需具有的基核解析要素。

4.2 基核特性函數

為研究這一解析要素，需先說明這一基核特性函數，並指出一些定義、符號標記、公式或方程式。此處依循 Daubechies 的用法及推演，將這一基核特性函數記為 $m_0(\xi)$ ，而其相關數學內涵如下：

一個多階解析度分析（multiresolution analysis, MRA）其組成是為一如下具包含性之封閉序列之子空間 V_j 集

$$\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots, \quad (4.1)$$

其中

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (4.2)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}. \quad (4.3)$$

此外，子空間存在有如下之關係：

$$f \in V_j \iff f(2^j \cdot) \in V_0. \quad (4.4)$$

而子空間之整數移位效應所存在不變性是為：

$$f \in V_0 \implies f(\cdot - n) \in V_0 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

至此所引生之相關的主論述是為：存在有 $\phi \in V_0$ ，並使得

$$\{\phi_{0,n}; n \in \mathbb{Z}\} \text{ 是為一在子空間 } V_0 \text{ 裡的正交函基或萊斯函基} \quad (4.6)$$

式中對所有 $j, n \in \mathbb{Z}$ 存在有 $\phi_{j,n}(x) = \sqrt{2^{-j}} \phi(2^{-j}x - n)$. 此處的 ϕ 習稱為父仔波函數亦或稱為 MRA 之 2-比例縮放量尺函數（2-scale scaling function）。再者針對 $\{\phi_{j,n}; j, n \in \mathbb{Z}\}$ 存在有對應仔波函基為 $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$, $\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^{-j}} \psi(2^{-j}x - k)$ ，並使得

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (4.7)$$

式中 P_j 代表函數 f 於 V_j 子空間之投影，而因 $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ ，且 $\phi_{-1,n}$ 是為 V_{-1} 裡之函基函數，此時得以將 ϕ 表為

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n}, \quad (4.8)$$

式中

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle. \quad (4.9)$$

是故

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n). \quad (4.10)$$

上式若以頻率領域表示，則如下：

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi/2} \hat{\phi}(\xi/2). \quad (4.11)$$

將上式表為基核特性函數 $m_0(\xi)$ ，則其方程式是為

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), \quad (4.12)$$

式中

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}. \quad (4.13)$$

即為此處所欲探討的基核特性函數。基本上 $m_0(\xi)$ 可以視為建構母仔波與父仔波所用波濾係數之相關合成函數。

4.3 線性相位波濾

在電子工程學上，一般稱具對稱分佈之波濾為線性相位波濾，若一波濾並非對稱，則其偏離對稱之程度，通常即以其波濾係數所組成之特性函數的相位性狀來衡量，而此一衡量係以其偏離某一線性函數之狀況來界定。今將此一特性函數式

之定義說明如下：設若一波濾其濾波係數為 $\{a_n\}$ ，而由這些係數所形成之方程式

$$a_\xi = \sum_n a_n e^{-in\xi/2} \quad (4.14)$$

是為該波濾特性函數，若此一函數可以表成爲一個線性相位分佈的函數，則我們稱該波濾爲線性相位波濾。也就是說，此時 a_ξ 可以表爲

$$a_\xi = |a_\xi| e^{-il\xi/2}, \quad (4.15)$$

式中 $l \in \mathbb{Z}$ ，而此式亦表示 $\{a_n\}$ 之分佈是以 l 爲對稱中心之分佈，其 $a_n = a_{2l-n}$ 。就對稱性而言，通常此一線性相位可以推廣到非連續之狀況，只要是其線性坡度不變，而非連續點是發生於 $|a_\xi| = 0$ 。今將 $m_0(\xi)$ 與此處所引介之 a_ξ 交互參照，得以求算基核特性函數之相位分佈曲線，圖 4.1 迄 4.8 示所有全部仔波之基核特性函數之相位分佈。

4.4 相位之分佈暨結果與討論

- 就正交仔波而言，延伸其支撐長度，基核特性函數相位分佈所產生之變化性狀，可說具甚相似，且有不規則化之趨勢，這一點與前一章中熵值表現行爲是一致的。同時此亦說明，我們無法藉由拓展延伸這些正交仔波以獲得水波模擬上任何效益。至此，我們可以很肯定地說，任何正交仔波類屬或子類屬都不適合吾人水波研究之物理探討。
- 圖 4.4 示正交仔波其最不對稱子類屬之相位分佈曲線，而圖 4.5 則示其最接近對稱分佈之子類屬，圖中得見其最不對稱性子類屬所產生之相位偏離非線性情形。而其最接近對稱之子類屬，雖然我們仍然可以很明顯地看出其仔波形之不對稱性，但其特性函數相位分佈曲線在視覺上是非常接近線性分佈的。是故，由這兩者之表現，我們亦可很肯定地補充說，任何新構築，已知的、未知的有限支撐正交仔波，都不可能帶來顯著、甚或是些許

的改善。因爲，它們的特性函數相位分佈曲線之性狀必然落於這兩種極端正交仔波子類屬之間。再者，我們的熵值研究結果亦爲這一切提供充分的驗證。

- 就交正交仔波而言，無論是原始仔波或匹配仔波，亦無論是針對自己的子類屬之間或不同子類屬之間之比較，其特性函數相位分佈情形都非常近似，這一點亦十足說明，增加任何此類子群組之構建亦或是延伸其支撐長度，也是難以爲熵值表現帶來任何差異。再者，此類屬之相位分佈都具有相對規則性的線性相位分佈，而我們亦可將其線性表現性狀與正交仔波類屬中之最爲對稱性互爲參照，同時再參照這些類屬或子類屬的熵值現象，也如是乎，吾人可以再進一步明確的指出：正交與交正交類屬都不是水波物理研究的選擇。
- 在前述幾點裏我們已看到，曲線形狀上差異非常大的諸多仔波，是可以有相似的特性函數相位分佈形態或性狀，然而我們也可以看到，形狀非常近似的仔波，其相位表現特性或數值行爲可以甚爲不同。圖 4.1 與圖 4.2 分別示 Meyer 仔波與 B&L 仔波之特性函數相位分佈情形，而這兩者的仔波曲線分佈則如圖 2.13 與圖 2.14 所示，此處吾人可見其仔波波形之近似，但亦可見其基核特性函數相位數值表現之重大差異。前一仔波在頻率領域上有最短支撐長度，因而其波形爲無限可微且具無窮大之規則度，而後一仔波其父仔波建基於樞點順適函數，而其仔波波形具指數衰減及有限的整數規則度，因此我們可以查覺，規則度高低與特性函數相位之數值行爲之可預期性是不具相稱性的。再者，由前述幾點及此點所示，我們也可以很容易地了解，很多仔波數學特性，雖然在解析意境特立突出，然在水波物理實際應用上則難以找到關聯。
- 比較前一章中所有函基之熵值表現，再檢視此處所有之基核特性函數相位表現，我們可以得知，線性相位分佈之特性是完全不足用於相關於水波模擬之用途，亦即其波濾係數所形成之函基在物理解說上必然是非常薄弱。

- 在這所有的相位分佈曲線當中，其最為特出的分佈，當為樞點順適仔波的基核特性函數所顯示之水平分佈，如圖 4.3 所示，而此一仔波即為前一章中鑑取所得之最佳仔波。此處我們所得到的重大信息是：這一仔波之基核特性函數不具相位變化之特性，即其相位值為零，且其數值俱為正數。這一點說明了，成就樞點順適仔波之最適化之數理因子，乃是基核特性函數其頻率領域分佈之全正性。此一特性暨其所帶來之結果必然是可對照於樞點順適仔波其時間領域上母仔波之全振性與父仔波之全正性。
- 綜合上述諸點，並綜合參照熵值與特性函數相位表現，我們得以充分得証下述論點：就仔波之觀點而言，水波是極其規則而變化簡單之波形，而它的模擬最適仔波函基是一個相對單純、形狀規則的仔波，其是為半正交之樞點順適仔波，且這一仔波函基在水槽風生水波之模擬表現亦比富立葉函基是來得優越。

4.5 結語

此處我們尋求為最適仔波函基帶來最佳物理模擬的數理解析因子。我們証得這一因子是為：基核特性函數相位之非更易性，即其零相位數值，亦或基核特性函數其在頻率領域上之全正性。此外，綜合參照、亦或比較熵值與特性函數相位之諸多表現，我們得以充分論證其極度相似性，也因此我們對所提諸多論點的信心是十分肯定的，而對我們的鑑取結果也有十足把握。 ❖

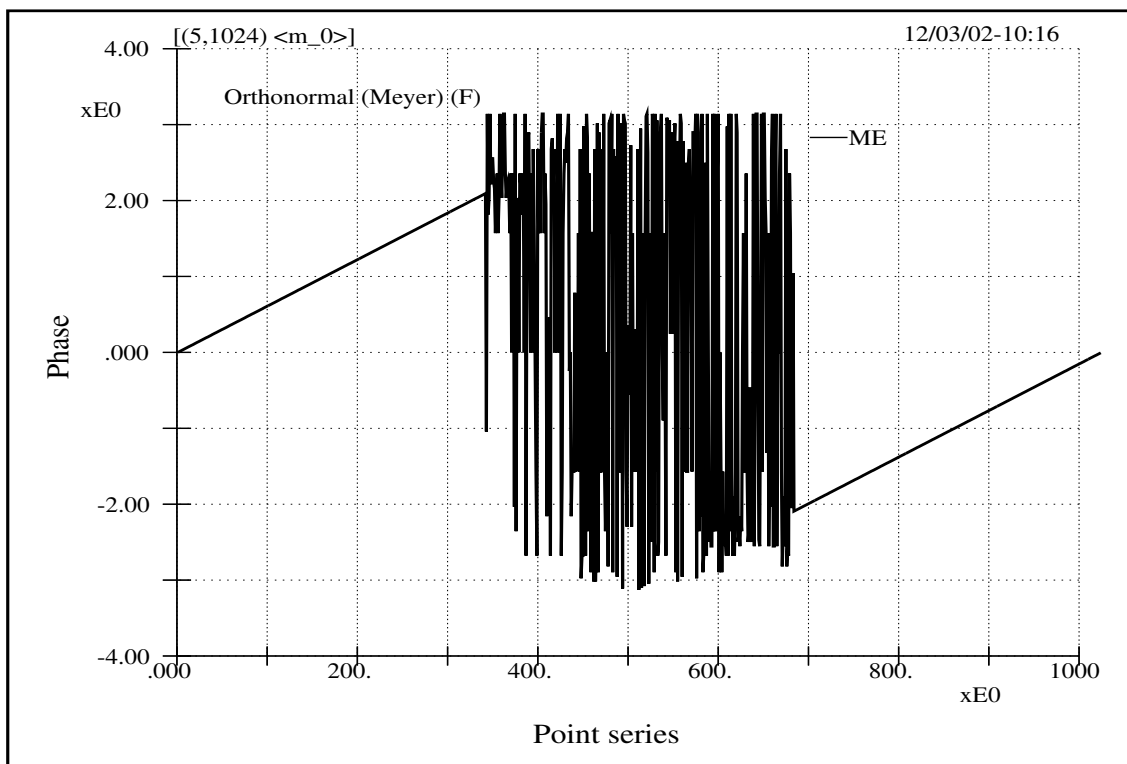


圖 4.1 Meyer 仔波基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈

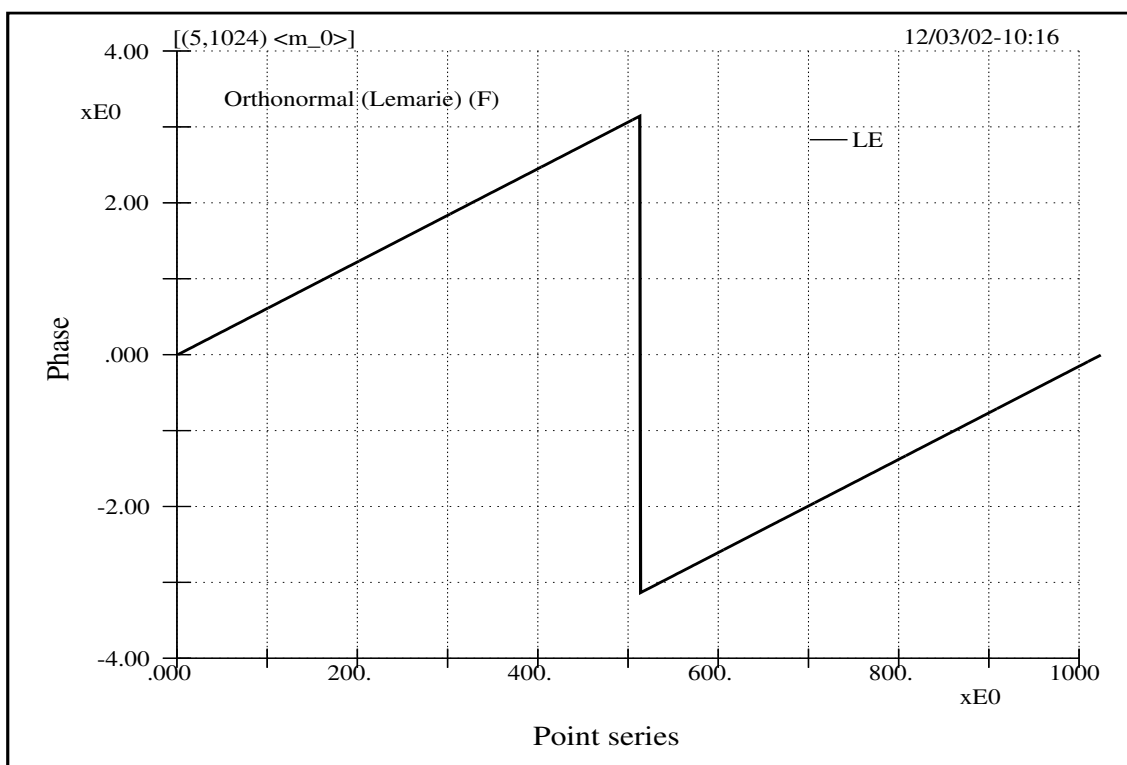


圖 4.2 Battle and Lemarié 仔波基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈。與上一圖比較起來，可以得知：形狀非常近似的仔波，其相位表現特性或數值行為可以甚為不同。

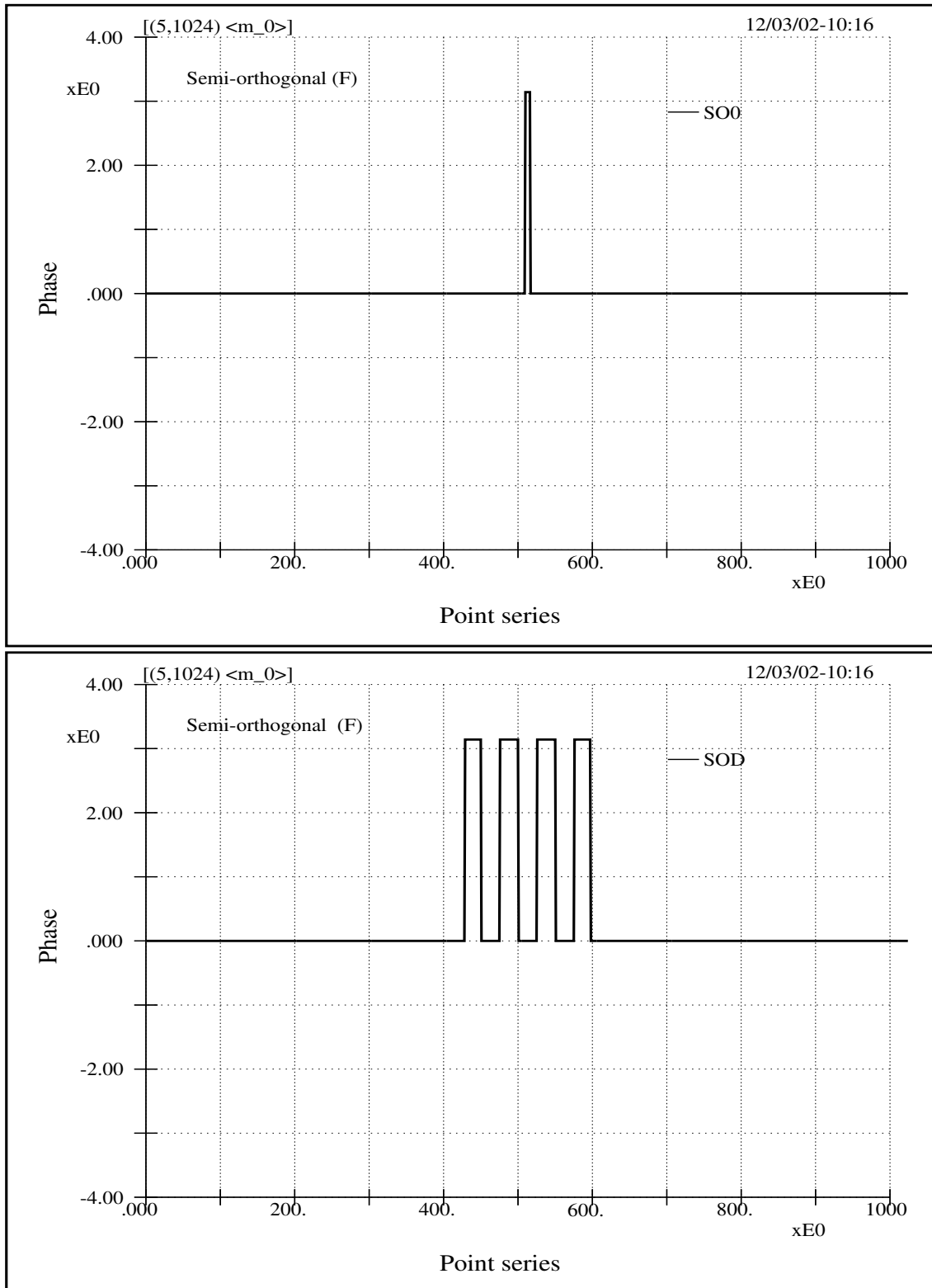


圖 4.3 半正交樞點順適仔波及其匹配仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈

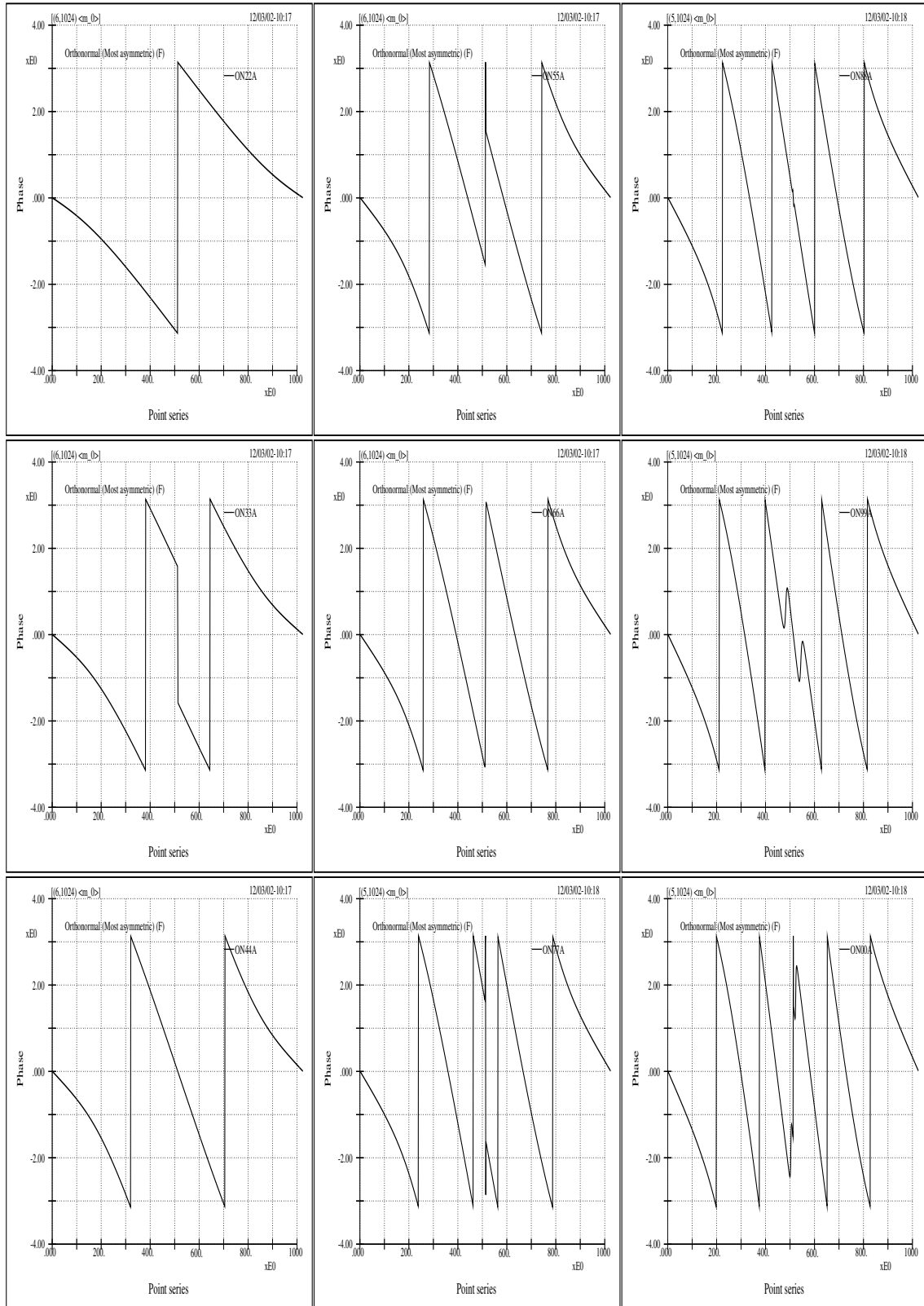


圖 4.4 Daubechies 最不對稱正交仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈

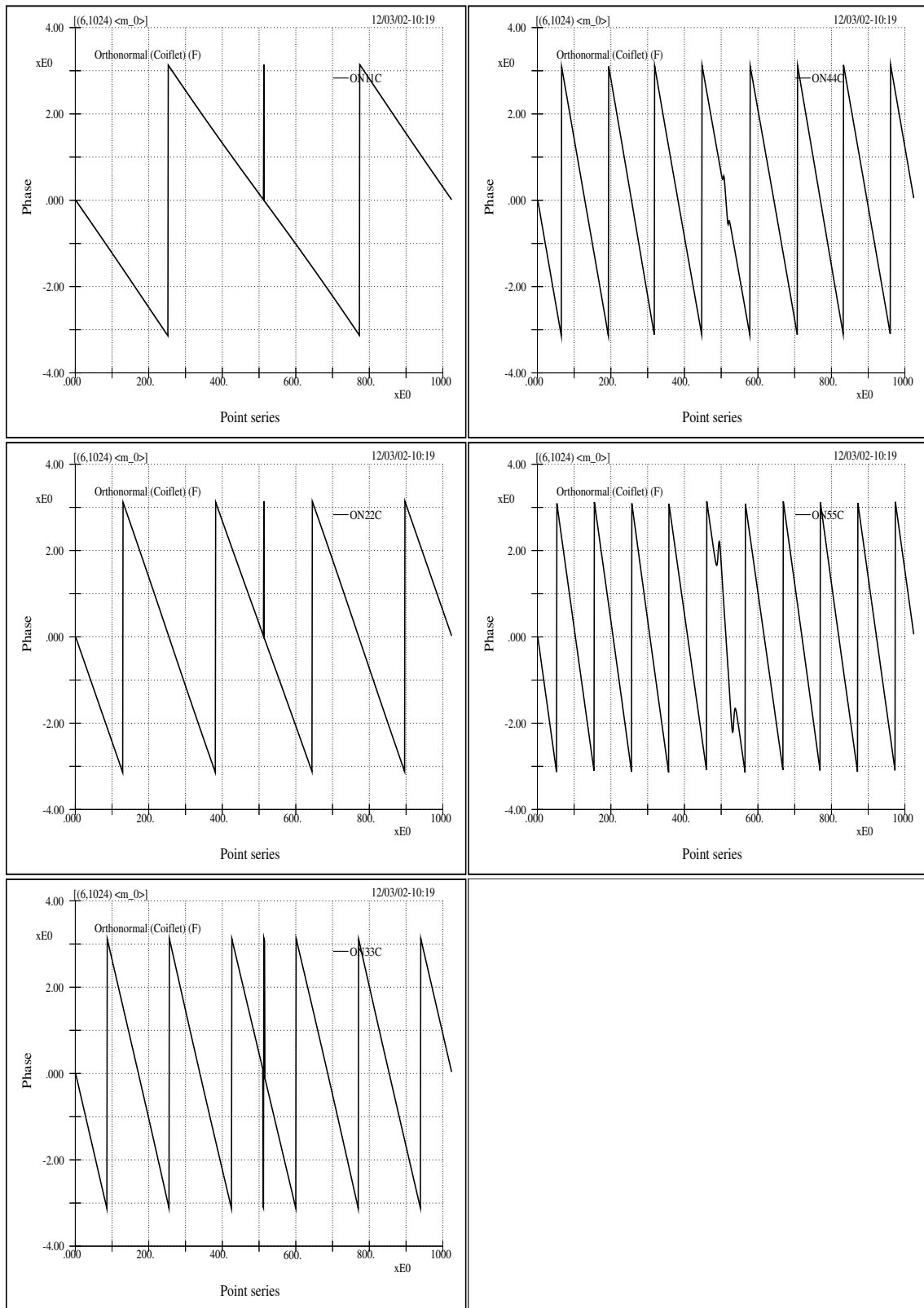


圖 4.6 Coiflet 仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈

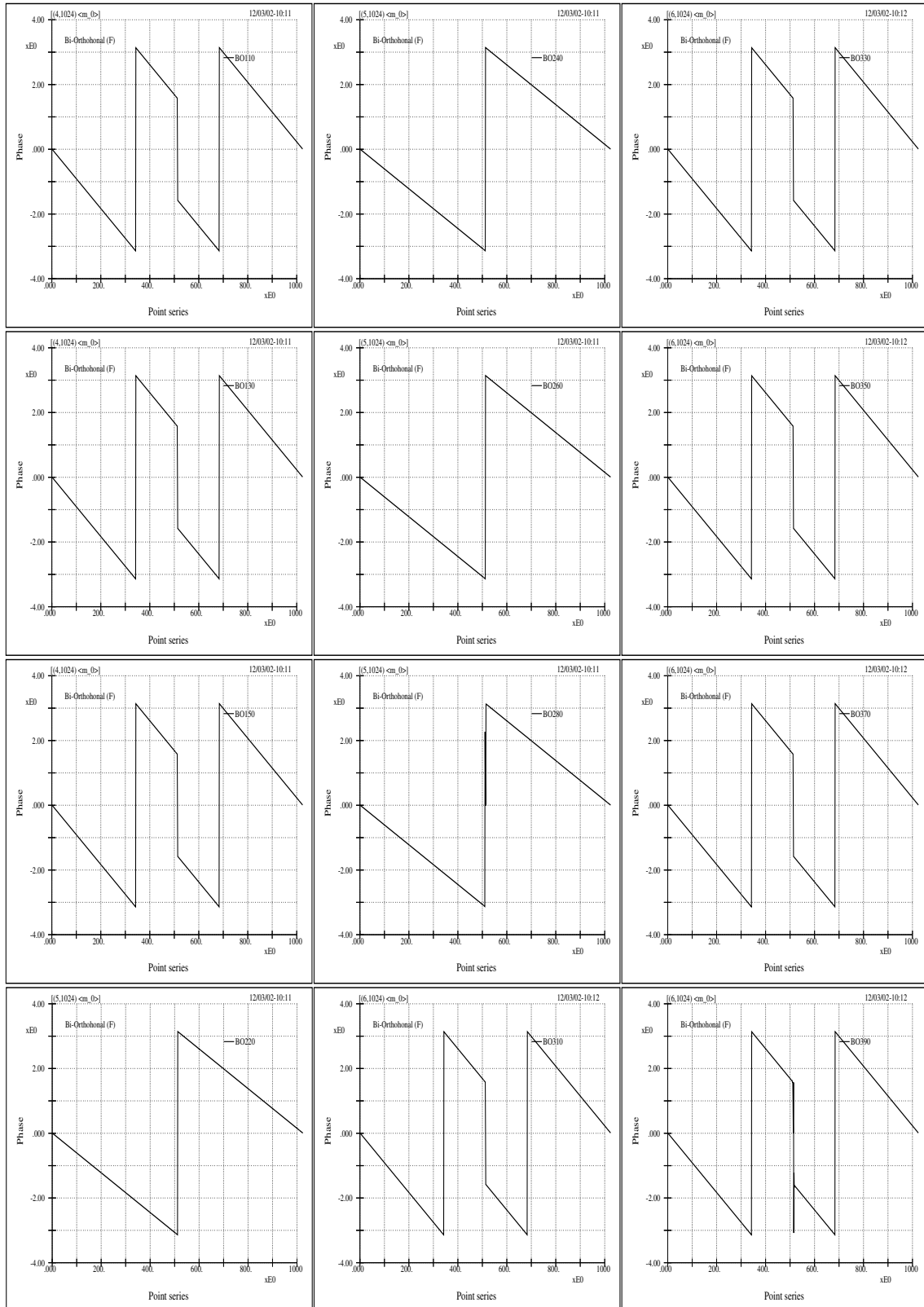


圖 4.7 交正交子波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈

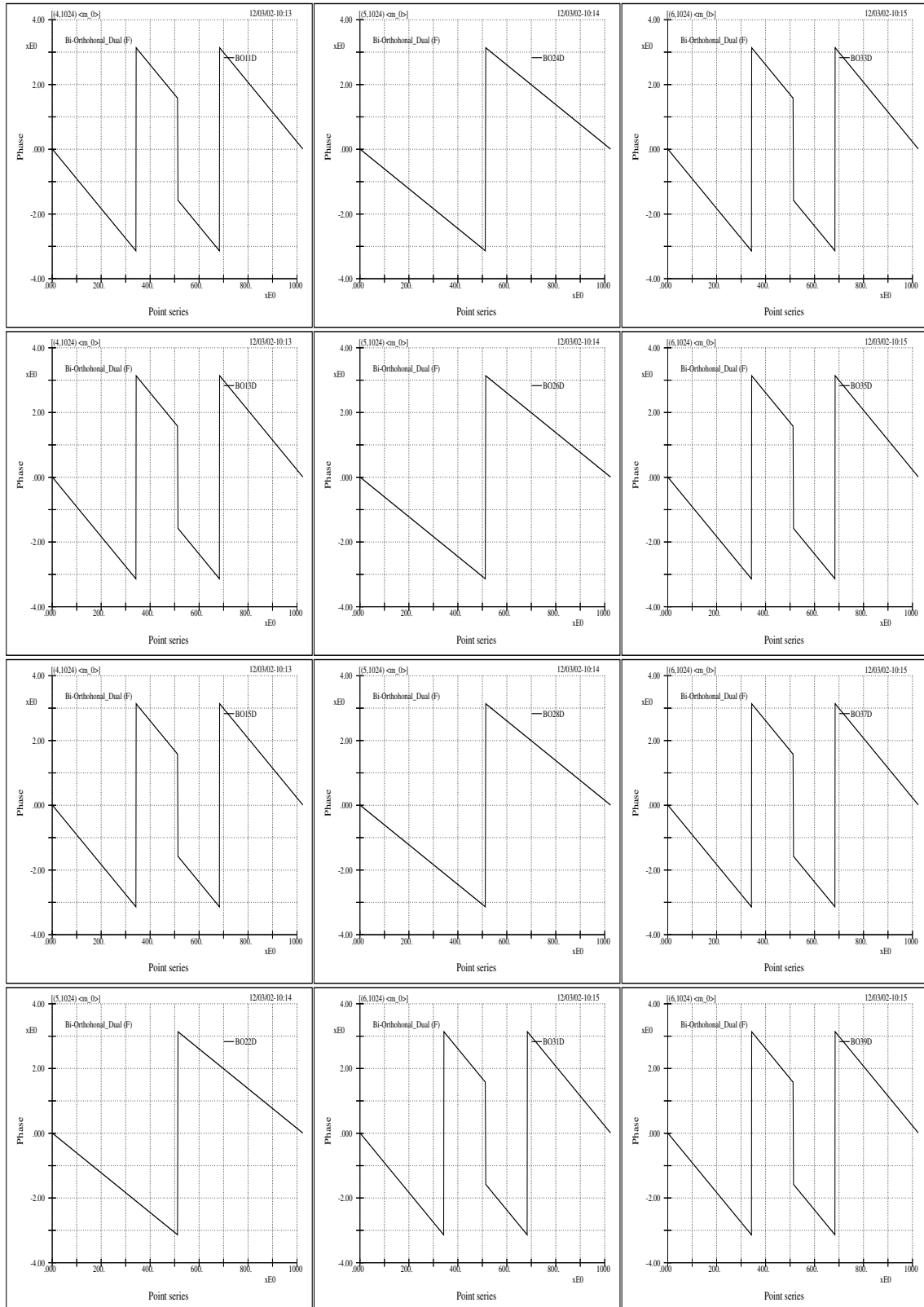


圖 4.8 交正交仔波其匹配仔波之基核特性函數 $m_0(\xi)$ 相位分佈

結論

當我們想要應用仔波函基，亦或是任何類型之函基，來研究某種物理現象時，其最爲基本，也最爲困擾的問題，就在於最適函數的選取。這當中的一個重要關鍵即在於如何將數學要義與物理探尋作最大程度之契合。數學源於定義，一點也不含糊，可是物理基於解說，而解說依人而論。解說之所以成立，其理得以接受之，必然是人們主、客觀所認定。把主觀最小化、客觀最大化，是爲此處探討水波應用分析之最適仔波函基之所依歸，亦唯如此，穩當妥善的物理解說根基庶幾建立。此處我們從統計與數理雙方面，進行嚴謹之模擬鑑取檢核。以熵值統計爲「標」，函基特性函數之相位函數分佈爲「本」，標本共進，証得水波物理應用上之最適離散仔波函基，其主要之工作及成果有如下：

- 研究對象含蓋相當廣泛亦或完整的各類離散仔波函基類屬，並將富立葉函基亦加入比較。此外，研究之諸多結果與論述可充分說明此處函基之完整代表性，亦或說是任何已知或未知函基其表現之可預期性將不脫本文論定。
- 使用多種熵值計算規範，求算所有仔波之轉換係數熵值，同時亦比較其諸多累積機率密度函數之曲線分佈，並及於富立葉函基轉換係數熵值與累積機率密度函數分佈。
- 由熵值之統計指標，明確肯定鑑取出，水波訊號分析之最適函基是爲半正交樞點順適仔波，而其模擬表現，對風生水槽波浪而言，亦較富立葉函基

模擬者來的優越。此外，亦指出，在眾多仔波類屬裡，絕大多數對水波研究而言，可說是有數學、無物理。

- 由基核特性函數相位分佈行數理驗證，探討為最適函基帶來相關最佳物理模擬的數理解析因子。此處得証這一因子是為：基核特性函數相位之非更易性，即其零相位數值，亦或基核特性函數其在頻率領域上之全正性。
- 將熵值統計行為與特性函數相位分析之數理表現，交互參照、綜合比較，由其諸多相似性、一致性、與推衍性，我們可以肯定地表示：我們對所提各項結果、論點、演繹是非常有信心的。❖

參考文獻

- [1] Auscher, P. Wavelet bases for $L^2(\mathbb{R})$ with rational dilation factor. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 439–452. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [2] Battle, G. Cardinal spline interpolation and the block spin construction of wavelets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, pages 73–90. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [3] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [4] Chui, C.K. On cardinal spline-wavelets. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 439–452. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [5] Cohen, L. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [6] Coifman, R., Y. Meyer, and M.V. Wickerhauser. Size properties of wavelet packets. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 453–470. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [7] Coifman, R., Y. Meyer, and M.V. Wickerhauser. Wavelet analysis and signal processing. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 153–178. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.

- [8] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 1992.
- [9] Lee, Y.R. *Interaction Scales in a Wind, Wave, and Rain Coupling System*. Ph.D. Dissertation, University of Delaware, Newark, Delaware, Nov. 1999.
- [10] Mallat, S. Multiresolution approximation and wavelets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69–88, 1989.
- [11] Massopust, P.R. *Fractal Runctions, Fractal Surfaces, and Wavelets*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1994.
- [12] Meyer, Y. *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- [13] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flennerly. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, New York, USA, second edition, 1992.
- [14] Wickerhauser, M.V. Acoustic signal compression with wavelet packets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, pages 679–700. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [15] Wickerhauser, M.V. Comparison of picture compression methords: wavelet, wavelet packet, and local cosine. In C. K. Chui, editor, *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, pages 585–621. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1994.