

99-33-7449

MOTC-IOT-98-H2DA002

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性 理論及可預測性研究(1/4)



交通部運輸研究所

中華民國 99 年 4 月

99-33-7449

MOTC-IOT-98-H2DA002

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性 理論及可預測性研究(1/4)

著 者：徐進華

交通部運輸研究所

中華民國 99 年 4 月

國家圖書館出版品預行編目資料

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究.
(1/4) /徐進華著.-- 初版.-- 臺北市:交通部
運輸研究所, 民 99.04

面; 公分

參考書目:面

ISBN 978-986-02-3150-2(平裝)

1. 波動 2. 數值分析

351.941

99007331

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究(1/4)

著 者:徐進華

出版機關:交通部運輸研究所

地 址:10548 臺北市敦化北路 240 號

網 址:www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電 話:(04) 26587176

出版年月:中華民國 99 年 4 月

印 刷 者:良機事務機器有限公司

版(刷)次冊數:初版一刷 100 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所港灣技術研究中心網站

定 價:100 元

展 售 處:

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話:(02)23496880

國家書店松江門市:10485 臺北市中山區松江路 209 號 F1•電話:(02)25180207

五南文化廣場:10012 臺中市中山路 6 號•電話:(04)22260330

GPN:1009901367

ISBN:978-986-02-3150-2 (平裝)

著作財產權人:中華民國(代表機關:交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利,欲利用本著作全部或部份內容者,須徵求交通部
運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究 (1/4)			
國際標準書號 (或叢刊號) ISBN 978-986-02-3150-2 (平裝)	政府出版品統一編號 1009901367	運輸研究所出版品編號 99-33-7449	計畫編號 98-H2DA002
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計劃主持人：徐進華 聯絡電話：04-26587182 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 98 年 01 月 至 98 年 12 月
關鍵詞：線性深水重力波、垂直剪流、作用守恆方程式、波能量方程式、焦線、瘋狗浪			
摘要： 本研究首先探討線性深水重力波行進在一穩定、三維、且垂直剪應變十分強大之大尺度流上發生緩慢變化的現象，因而導出其振幅緩變方程式。此一方程式與 Voronovich (1976) 針對更複雜情況所導出之 action conservation equation 不一致，其原因已加以澄清，故目前可確定，當流中有強大垂直剪應變時，若此剪應變在垂直方向變化迅速，則 wave action 將守恆，但因波之 local solution 無法明白解出，故 action conservation equation 實際無法應用。相反的，若此剪應變如我們目前所假設在垂直方向為緩慢變化時，則 wave action 一般無法守恆，但波之 local solution 及振幅緩變方程式皆可明白導出。 目前所獲得的振幅緩變方程式可轉換成一個新的波能量方程式，此一方程式除包含以往波能量方程式之輻射應力項及由流速和群速度所產生的能量通量之輻合項外，另外增加了兩項，使由群速度所產生的能量通量，只有在波本身的性質在水平方向有變化時方輻合或輻散，否則由流的剪應變之水平方向變化率亦可導致由群速度所產生的能量通量輻合或輻散，因此新的波能量方程式較符合物理原理。但此一方程式仍預測波之振幅在焦線上變為無窮大，而非緩慢變化，故接下來我們亦另導出一可均勻適用於焦線附近的解析解。此解顯示，即使流中有強大垂直剪應變，波在焦線上仍會被反射為不同長度的波，此一現象未來將證明與深海瘋狗浪有關。 成果效益： 本計畫所獲得的解析解可改善人們對 action conservation principle 及波能量方程式的瞭解，故對受強大海流影響之波浪場的預報有幫助。另外，目前所獲得的線性波被旋性流阻塞及反射現象之解析解，可在未來針對完全非線性波進行數值計算時，做為其初解，故對與其有關之深海瘋狗浪的研究有幫助。 後續應用： 本計畫未來兩年將應用目前的解析解做為初解，針對完全非線性波來進行數值計算，以瞭解深海瘋狗浪是否因波被流阻塞及反射而引發。			
出版日期	頁數	定價	本出版品取得方式
99 年 4 月	55	100	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 (解密條件： ☐ 年 ☐ 月 ☐ 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密) ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: Rotational Nonlinear Theory and the Predictability of the Freak Waves in Deep Water near Taiwan (1/4)			
ISBN (ORISSN) ISBN978-986-02-3150-2 (pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1009901367	IOT SERIAL NUMBER 99-33-7449	PROJECT NUMBER 98-H2DA002
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Chiu Yung-fang PRINCIPAL INVESTIGATOR: Shyu Jinn-hwa PHONE: 886-4-26587182 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2009 TO December 2009
KEY WORDS: Linear deep-water gravity waves; Vertical shear; Action conservation equation; Wave energy equation; Caustics; Freak waves.			
ABSTRACT: Linear deep-water gravity waves propagating on a steady, three-dimensional and large-scale current with a strong vertical shear are studied in the first year of the project, resulting in the modulation equation of the wave amplitude. This equation is inconsistent with the action conservation equation derived by Voronovich (1976) in an even more complicated situation, the reason of which is clarified. All of these indicate that if the strong vertical shears itself varies rapidly in the vertical direction, the wave action is conserved, but without the local solution of the wave train being solved explicitly, the action conservation equation cannot be applied in practice. Contrarily, if the vertical shear, though it is large, varies slowly in the vertical direction, the wave action is generally not conserved, but the local solution of the wave train can be derived explicitly and the modulation equation can be applied in practice. The modulation equation can be reconciled with a wave energy equation by adding two new terms to the latter, which can make it certain that the divergence of the wave energy flux due to the group velocity will vanish if the properties of the wave train are horizontally uniform but the vertical shear of the current are not. This new wave energy equation still predicts a singularity of the amplitude at the caustic so that another effort has been made to derive a uniformly valid solution. This uniform solution clearly indicates that even if there exists a strong vertical shear in the current, the waves can still be reflected at the caustic. This phenomenon will later be proved to have a close relation to the occurrences of the freak waves in deep water. BENEFITS: From this study, we understand better the action conservation principle and the wave energy equation, which can benefit the future forecasting of the waves that are under the influence of a strongly sheared current. Also, the analytical solution of the reflection of linear waves by a strongly sheared current derived here can serve as an initial guess in the numerical computations for fully nonlinear waves, which can clarify the mechanism for generation of the freak waves in deep water. APPLICATIONS: In the coming two years, the analytical solution of the reflection of linear waves by a strongly sheared current derived here will be utilized as an initial guess in the numerical computations for fully nonlinear waves to clarify whether or not the freak waves occurred in deep water are due to the reflection of waves by currents.			
DATE OF PUBLICATION April 2010	NUMBER OF PAGES 55	PRICE 100	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

目 錄

中文摘要表	I
英文摘要表	II
圖目錄	IV
第一章 前言	1
第二章 未緩變時的旋性線性波之解析解	3
第三章 緩變但未阻塞時的旋性線性波之解析解	6
第四章 與波作用守恆方程式比較	14
第五章 修改波能量方程式	17
第六章 焦線附近之解析解	20
第七章 焦線附近之數值解	27
第八章 結論與建議	31
參考文獻	33
附錄一 審查意見回覆	39
附錄二 簡報內容	42

圖 目 錄

圖1、線性波被非旋流阻塞及反射現象之解析解。實線表阻塞及反射現象發生時的水面位移, 短虛線爲此一位移之 WKBJ 解, 長虛線則爲後者之入射波分量。此一結果原爲 Shyu & Tung (1999) 所獲得。.....	35
圖2、示意圖。考慮自由表面上之動力邊界條件時所定義之座標系統。.....	36
圖3、示意圖。導焦線附近之解析解所採用之正交曲線座標。.....	37
圖4、焦線附近解析解和數值解之比較。實曲線表解析解, 虛曲線表數值解。.....	38

第一章 前言

波高超過30米的深海瘋狗浪 (rogue waves or freak waves) 目前已由鑽油平台、海洋研究船及人造衛星上的儀器, 甚至浮球式波浪儀實際測得, 此種巨浪可使一大型船舶嚴重受損或沈沒, 但因這些巨浪乃突然出現在周遭波高僅為十幾米或更小的海面上 (此一現象即為本文所定義之瘋狗浪), 故不易及時被人們用科學儀器來加以觀測, 僅最近10年, 方因密集的測量, 使人們確定其存在, 但其引發的機制仍不明。

深海瘋狗浪不僅波高大, 其坡度亦陡, 故基於碎波效應, 此種巨浪無法直接由風的應力產生, 但由波本身的非線性能量轉換, 卻可能使一個水面位移的時間序列, 在某一個時間點出現一個極突出的 peak。另外, 由成份波之線性隨機疊加, 亦可能偶而產生一個極不尋常的巨浪。

上述兩種機制雖無法完全排除其可能性, 但皆無法解釋為何大多數的瘋狗浪是發生在有強大海流存在的區域, 而非風速較大的區域。為解釋此一現象, Peregrine (1976) 和 Smith (1976) 建議, 深海瘋狗浪乃由波被流阻塞及反射過程所引發, 而根據 Smith (1976) 的非線性理論及 Shyu & Tung (1999) 之線性波的解, 當阻塞及反射現象發生時, 在焦線 (caustics) 附近可產生一個波高為原來入射波波高四倍的巨浪 (見圖1), 且此一巨浪乃單獨發生, 故與深海瘋狗浪的觀測相吻合。

需注意的是, 在一個穩定的海流上, 即使波被流阻塞現象亦穩定發生, 但只有在入射的波列偶而在適當位置近似於一個單一正弦波或 Stokes wave, 其能量才會在該位置上全部被反射 (否則僅有其成份波被反射), 因而形成一個巨浪, 故由波被流阻塞過程所產生的瘋狗浪仍具有突發的性質。另外需強調的是, 即使深海瘋狗浪亦曾出現在無常態海流通過的區域, 但因這些區域皆屬暴風區, 故仍可能具有相當顯著的風吹流, 且其流向可能和來自於另一個暴風區的湧浪之行進方向不同, 因此波被流阻塞過程仍發生, 且偶而形成一個瘋狗浪。

波浪在焦線附近的變化, 以往已由 Smith (1975) 導出線性及非旋性的理論, Shyu & Tung (1999) 且導出其更詳細的解, 而 Smith (1976) 則進一步考慮波的非線性效應, 但他所考慮的非線性波乃為弱非線性, 故它與屬於完全非線性波的瘋狗浪無法劃上等號, 因而使人們對後者是否確由波被流阻塞及反射過程所引發仍有疑問。為解決此一問題, 本計畫將改用數值方法求完全非線性波在焦線附近的變化, 但在此之前, 由於考慮暴風區內的海流在垂直方向往往具有一強大剪應變 (shear), 使流和波兩者皆為旋性, 故為獲得與實際更接近的解, 本計畫第一年先導出線性波行進在一個三維剪流上, 被後者阻塞及反射時的解析解。此解除可顯示當流中具有強大剪應變時, 波被流阻塞及反射現象仍發生外, 並可在未來做為非線性數值計算的初解。

爲獲得焦線附近的解，需先導出遠離焦線區的解，再將其延伸至焦線附近，故在第二章至第五章我們將先導出遠離焦線區的解，並澄清其物理意義，然後再於第六章導出焦線附近的解析解，但因在導出過程中須假設在遠離焦線區內所導出之新的波能量方程式亦可適用於焦線附近，而此一假設在目前流中具有強大剪應變情況，又無法應用解析方法來證明，故我們在第七章另外應用數值方法來驗證在焦線附近所導出的解析解。

第二章 未緩變時的旋性線性波之解析解

本章將考慮一系列線性深水重力波斜行在一穩定流上的情況，此一穩定流在水平方向不改變（故波的性質亦不改變），僅在垂直方向具有一強大剪應變，且此剪應變的大小在垂直方向亦不改變，故此種旋性流（表為 $U\{U(z), V(z), 0\}$ ）之旋度乃為定值。在此一情況下所獲得的解將與下一章之線性緩變解有密切的關連，故先加以討論。

當流為旋性時，由於其渦旋線（vortex-lines）可能因波浪通過而被旋轉及拉長，因而引發旋性周期性運動，故目前的周期性波浪運動將為旋性，而要解這種旋性波浪運動場（速度表為 $u\{u, v, w\}$ ，壓力表為 p ），必須考慮 Euler equation，而非 Laplace equation，故目前我們求解

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 ρ 為水的密度， g 表重力加速度。

上面方程式之 x 和 y 座標軸的方向可在水平面上任意選擇，但為了方便起見，我們在下面選擇 y 軸與波峰線平行，故所有變數皆不隨 y 座標改變，因此 (2.1) 可化減為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \Omega_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2a)$$

及

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} - w \Omega_x = 0 \quad (2.2b)$$

其中 $\Omega\{\Omega_x, \Omega_y, 0\}$ 表流的旋度，且在目前的情況下， $\Omega_x = -dV/dz$ ， $\Omega_y = dU/dz$ 。

需注意的是，由於 (2.2a) 中不含 V 及其剪應變 Ω_x ，亦不含未知函數 v ，故若其邊界條件亦如此，則我們僅由 (2.2a) 中的三個方程式即可決定三個未知函數 u ， w 和 p 。另一方面，由 (2.2b) 可知，若 $\Omega_x \neq 0$ （且 $w \neq 0$ ），則在 y 方向亦將產生周期性運動 v ，此一分量對我們未來導波的緩變理論十分重要。

由於線性波在自由表面（定為 $z = \eta(x, y, t)$ ）上的邊界條件，經轉換為適用於平均水面 $z = 0$ 上的條件後，可表為

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad p = \rho g \eta, \quad (2.3)$$

(後者參見 Shrira 1993)。上式確不含 v , V 和 Ω_x , 故我們可先求解 (2.2a) 和 (2.3) 來獲得 u , w 和 p , 再由 (2.2b) 以及已獲得的 w 決定 v 。

首先我們將 (2.2a) 之第一和第二個方程式分別對 z 和 x 微分, 然後將它們結合成一個方程式以消去 p , 最後再應用 (2.2a) 的第三式將它化減為

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + U \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

其中 $\omega_y \equiv \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$ 表波浪運動之旋度在 y 方向的分量。由 (2.4) 可知, 若 ω_y 原本在各處皆為零, 則將始終為零, 因此我們可定義一個二維流勢函數 (velocity potential) $\phi(x, z, t)$, 使 $u = \partial \phi / \partial x$, $w = \partial \phi / \partial z$ 。代入 (2.2a) 的第三式可得二維之 Laplace equation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.5)$$

上式之滿足深水底部邊界條件的解為

$$\phi = A e^{kz} e^{i(kx - n_0 t)}, \quad (2.6)$$

其中 A 為一個常數, k 表所考慮的成份波之波數, n_0 則表其觀測頻率 (observed frequency)。將 (2.6) 代入 (2.3), 並令

$$\eta = a e^{i(kx - n_0 t)}, \quad (2.7)$$

可得

$$A = -i \frac{\sigma}{k} a \quad (2.8)$$

及

$$p|_{z=0} = \rho g a e^{i(kx - n_0 t)},$$

其中

$$\sigma \equiv n_0 - U_0 k \quad (2.9)$$

乃為在一個隨平均水面上的 x 方向流速分量 (記為 U_0) 移動之座標系統中所觀測到的頻率, 故為實質頻率 (intrinsic frequency)。

將上述結果代入 (2.2a) 的第一式和第二式, 可分別得到離散關係式 (dispersion relation)

$$gk = \sigma^2 + \sigma \Omega_y \quad (2.10)$$

及壓力分佈

$$p = -\rho g z + \rho g a e^{kz} e^{i(kx - n_0 t)} - \rho \sigma \Omega_y a z e^{kz} e^{i(kx - n_0 t)}. \quad (2.11)$$

上式中的最後一項乃前所未見，但它在未來的數值計算中必須加以考慮。

當獲得了 w (以及 u 和 p) 的解以後，由 (2.2b) 即可得到

$$v = \frac{\sigma \Omega_x}{n_0 - Uk} a e^{kz} e^{i(kx - n_0 t)}. \quad (2.12)$$

此一結果顯示，當波斜行在一垂直剪流上時，一個橫向的旋性擾動速度 v 將產生，且若 Ω_x 和 σ 的量級相同，則 v 的量級和非旋性速度分量 u 及 w 的量級相同。另外，若 Ω_y 和 σ 的量級相同，則在離散關係式 (2.10) 之等號右邊的兩項亦量級相同。因此，在以下的討論中，為使各主要的項量級一致，我們假設 Ω_x 和 Ω_y 的量級與 σ 的量級相同，表平均流中的剪應變十分強大並無法忽略，另外我們亦假設 U_0 和 σ/k 之量級相同。

第三章 緩變但未阻塞時的旋性線性波之解析解

在上一章所獲得的解，雖較流不存在時複雜，但仍代表一個均勻分佈的波列。接下來我們令旋性流 U 在 x 和 y 方向緩慢變化（表其長度尺度 L 比波長 l 大一個量級），且令其旋度 Ω_x 和 Ω_y 在 x, y 和 z 方向皆緩慢變化（故 U 在垂直方向的分佈近乎線性）。在此種情況下，波的性質亦將隨之緩慢變化，其中 k 的方向和大小兩者皆會隨空間位置而改變，但即使如此，我們仍可在我們所考慮的位置，選擇一組rectangular coordinates（而非curvilinear coordinates），使其 x 軸和當地的 k 同方向，故 y 軸和當地的波峰線相切。在此種情況下，由以往的緩變理論可知，上一章的解，包括其控制方程式，實際將與 perturbation expansion (in powers of l/L) 中所獲得的第一階近似，形式完全相同，僅上一章的解之參數如今不為定值，而將緩慢變化，但其變化情況仍有待決定。

若 Ω_x 和 Ω_y 在 z 方向的變化迅速（表 U 在垂直方向的分佈並非近乎線性），Voronovich (1976) 曾應用 perturbation scheme 證明，波在水平方向之緩慢變化可滿足 action conservation principle，但此時 u, v, w 和 p 的解及離散關係式皆無法明白獲得。而當 Ω_x 和 Ω_y 在 z 方向亦如在水平方向般緩慢變化時，由於傳統的 perturbation scheme 此時無法應用（其原因將在下一章說明），故我們無法將上一章所獲得的 u, v, w 和 p 解，直接代入 Voronovich (1976) 應用此法所獲得的 action conservation equation 內，並消去其較小的項（因 Ω_x 和 Ω_y 如今在 z 方向僅緩慢變化），來決定波高的變化，因此目前有必要採用一種新的方法來導出一可正確描述波高緩慢變化的方程式。

目前使用的方法，因不需要如傳統的 perturbation scheme 般，由第二階控制方程式之 secular condition 決定第一階解之描述波高緩慢變化的方程式，且不要求出第二階解，故目前我們不需要將各未知變數表為一正式的漸近展開式 (asymptotic expansion)，但此一省略之所以可行之另一個原因是，即使未將各變數無因次化並展開，我們仍可輕易決定每一個方程式中那些項可忽略，那些項需保留，其方法如下。

由於目前對任何一個緩慢變化的參數或變數微分一次，將增加其量級一階，因此當我們欲導出第一階的緩變理論時，我們可將所有緩慢變化的參數和變數之第二階導函數項及其兩個第一階導函數之相乘的項，加以忽略。另一方面，由於緩慢變化的參數或變數之第一階導函數需加以考慮，故當流發生緩慢變化時，某些物理量在第二章雖為零，但目前應不為零，且其量雖不大，但與上述之第一階導函數的量級相同，因此必須加以考慮。然而這些新列入考慮的物理量之第一階導函數將更小，因此其第一階導函數項和其第二階導函數項一樣，皆可忽略。此點與第二章內所出現的物理量不同，故為了要將這些新列入考慮的物理量和第二章所出現的物理量加以區分，我們特將前者之符號加一個帽子。例

如由連續方程式可知

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

故當 $\partial U/\partial x \neq 0$ 及 $\partial V/\partial y \neq 0$ 時，即使在平均水面處之垂直流速分量 $\widehat{W} = 0$ ，但在水面下， $\widehat{W} \neq 0$ (因 $\partial \widehat{W}/\partial z \neq 0$)，且在水面以下一個波長深度內 (在此深度內的流可影響水面波)， $\widehat{W}$ 應小於 U 和 V 一個量級，因此 $\widehat{W}$ 一般不可忽略，但 $\partial \widehat{W}/\partial x$ 和 $\partial \widehat{W}/\partial y$ 可忽略，故目前 $\Omega_x \approx -\partial V/\partial z$ ， $\Omega_y \approx \partial U/\partial z$ 。

當流在水平方向緩慢變化時，流的旋度在 z 方向之分量 $\widehat{\Omega}_z \equiv \partial V/\partial x - \partial U/\partial y$ 雖較 Ω_x 和 Ω_y 小一個量級，但可不為零。此一狀況以及目前假設流的垂直變化不為線性，皆會使波浪運動產生 y 方向之旋度分量 $\widehat{\omega}_y \equiv \partial \widehat{u}/\partial z - \partial \widehat{w}/\partial x$ ，其中 $\widehat{u}$ 和 $\widehat{w}$ 分別代表波浪場在 x 和 z 方向之旋性速度分量。此兩個分量在第二章中皆為零，但目前不為零，然而因 $\widehat{u}$ 和 $\widehat{w}$ 量較小，再加上它們在 y 方向僅緩慢變化，故在目前的情況下， $\omega_x \approx -\partial v/\partial z$ ， $\omega_z \approx \partial v/\partial x$ (故與第二章者近似相同)。但無論如何，目前的波浪運動不僅具有非旋性速度分量 $\{\partial \phi/\partial x, \partial \phi/\partial y, \partial \phi/\partial z\}$ ，亦具有旋性速度分量 $\{\widehat{u}, v, \widehat{w}\}$ 。

將上述新增加的物理量列入考慮，即可進行以下的運動及動力分析，但一開始我們可先決定

$$\widehat{w} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (3.2)$$

此一決定之所以可行，乃因 $\widehat{w}$ 在水平方向的變化在當地仍可近似表為 $\exp[i(kx - n_0 t)]$ (其振幅之緩慢變化則可忽略)，故若在平均水面上原本 $\widehat{w} \neq 0$ ，則我們可定義一個 $\widehat{\phi}$ ，使 $\partial \widehat{\phi}/\partial z$ 和 $\widehat{w}$ 在平均水面上值相等，然後用 $\widehat{w} - \partial \widehat{\phi}/\partial z$ 取代原來的 $\widehat{w}$ ，用 $\widehat{u} - \partial \widehat{\phi}/\partial x$ 取代原來的 $\widehat{u}$ ，再用 $\widehat{\phi} + \phi$ 取代原來的 ϕ ，如此即可使新的 $\widehat{w}$ 滿足 (3.2) 式，而新的 ϕ 之漸近展開式中的第一階項仍和原來者相同，僅其第二階項有所改變，但目前不需要將它明白顯示，且當我們在最後獲得第一階解之緩變方程式後，此第二階項即可完全忽略。

儘管 $\widehat{w}$ 的振幅在水平方向之緩慢變化可以忽略，但 ϕ 因其量較大，故此種變化仍需考慮，因此為描述 ϕ 之快速以及緩慢兩種變化，我們令

$$\phi = A(x, y) \exp \left[\int_0^z l(x, y, z) dz \right] e^{i\chi(x, y, t)} \quad (3.3)$$

及

$$\mathbf{k} = \nabla_h \chi, \quad n_0 = -\partial \chi / \partial t, \quad (3.4)$$

其中 $A(x, y)$ 表在水平方向緩慢變化的振幅， $\nabla_h \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 表水平方向之梯度運算， $\mathbf{k}\{k_x, k_y\}$ 表波數向量， $l(x, y, z)$ 則為一隨空間位置緩慢變化的函數。由於在目前所

選擇的座標系統中及在目前所考慮的位置上, $k_y = 0$, 且由下面所導出的 (3.9) 式可知 $l|_{z=0} \approx k$, 故當消去 A , k 和 l 等參數之漸近展開式中的高階項, 且忽略其第一階項之緩慢變化的性質時, 上面兩式實與 (2.6) 式形式相同。

由於目前需考慮各參數之緩慢變化性質, 故由 (3.4) 之第一式可立即獲得

$$\frac{\partial k_y}{\partial x} = \frac{\partial k_x}{\partial y}. \quad (3.5)$$

且由 (3.4) 可得運動守恆方程式 (kinematical conservation equation)

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla_h n_0 = 0.$$

但由於目前所考慮的流乃為一穩定流, 故 $\partial \mathbf{k} / \partial t = 0$, 因此由上式可知 n_0 的值在各處皆相同。

將 (3.3) 和 (3.4) 代入三維 Laplace equation, 並忽略二階導函數項 $(1/A) \partial^2 A / \partial x^2$ 和 $(1/A) \partial^2 A / \partial y^2$, 再因 $k_y = 0$, 故最後可得

$$-k_x^2 + i \frac{\partial k_x}{\partial x} + 2ik_x \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial k_y}{\partial y} + l^2 + \frac{\partial l}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0. \quad (3.6)$$

另外, 由於在目前所考慮的位置上, 流勢函數 ϕ 在 y 方向之變化僅為緩慢, 故二階導函數 $(\partial^2 \phi / \partial y^2)_{z=0} = i(\partial k_y / \partial y) A e^{ix} + (\partial^2 A / \partial y^2) e^{ix} \approx i(\partial k_y / \partial y) A e^{ix}$ 應可忽略, 表在目前所考慮的近似中

$$\partial k_y / \partial y = 0. \quad (3.7)$$

在 (3.6) 之剩餘項中, 由於 l 和 $\partial l / \partial z$ 皆存在, 故我們無法僅由此式將 $l|_{z=0}$ 表為其他參數的函數。為解決此一問題, Shyu & Tung (1999) 先考慮一完全二維的情況 (此時波峰線乃為直線), 由 Laplace equation 及深水波條件導出

$$\left. \frac{\partial l}{\partial z} \right|_{z=0} = -i \frac{\partial k}{\partial x}.$$

由於上式中各項皆含緩慢變化參數之一階導函數, 故當波浪場變為三維, 使波峰線由直線變為曲線時, 由於此一變化亦緩慢, 故上式中新增的項應較一階導函數項更小, 因而可忽略, 表上式此時仍適用。故由上式, 且因 $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, $k_y = 0$, 我們可進一步得到

$$\left. \frac{\partial l}{\partial z} \right|_{z=0} \approx -i \frac{\partial k}{\partial x} = -i \left(\frac{k_x}{k} \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{k_y}{k} \frac{\partial k_y}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial k_x}{\partial x}. \quad (3.8)$$

將 (3.7) 和 (3.8) 代入 (3.6) 可得

$$l^2|_{z=0} = k_x^2 - 2ik_x \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

再取其平方根, 並忽略高階項, 最後得到

$$l|_{z=0} = k - i \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3.9)$$

上式代表由 Laplace equation 及深水波條件所獲得的一個關係式。接下來我們考慮自由表面上的運動邊界條件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{u} + U \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + v + V \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \hat{w} + \widehat{W} \quad \text{at } z = \eta.$$

將上式中的各函數及導函數對平均水面 $z = 0$ 做泰勒級數展開, 再忽略波的非線性項, 且應用 (3.1) 和 (3.2), 可得

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \eta \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad \text{at } z = 0 \quad (3.10)$$

因此當水面位移定為

$$\eta = a(x, y) \exp[i\chi(x, y, t)], \quad (3.11)$$

將 (3.3), (3.4), (3.7), (3.9) 和 (3.11) 代入 (3.10), 並應用 (2.9) 式, 可得

$$\frac{A}{a} = -i \frac{\sigma}{k} + \frac{1}{ak} \left(U \frac{\partial a}{\partial x} + V \frac{\partial a}{\partial y} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + i \frac{1}{ak} \frac{\partial A}{\partial x} \quad \text{at } z = 0 \quad (3.12)$$

由 (3.12), 若暫忽略其第一階導函數項 (因它們在下面的 (3.14) 式中將產生更高階的項), 則

$$\frac{A}{a} \approx -i \frac{\sigma}{k}. \quad (3.13)$$

將上式對 x 微分, 且因 $\partial k / \partial x = \partial k_x / \partial x$ (見 (3.8)), 可得

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -i \frac{\sigma}{k} \frac{\partial a}{\partial x} - i \frac{a}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + i a \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial x} \quad (3.14)$$

將 (3.14) 代入 (3.12) 以取代 $\partial A / \partial x$, 即可將 A 表為其他參數或變數的函數如下:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a} = & -i \frac{\sigma}{k} + \frac{1}{ak} \left(U \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\sigma}{k} \frac{\partial a}{\partial x} + V \frac{\partial a}{\partial y} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{1}{k^2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial k_x}{\partial x} \quad \text{at } z = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

在上述分析中, 旋性波浪場 $\{\hat{u}, v, \hat{w}\}$ 的存在並未影響其結果, 但此一情況在接下來考慮自由表面上的動力邊界條件時將改變。由於此一邊界條件乃為在自由表面上的壓力需為定值, 故若我們考慮運動方程式在切於自由表面且與當地波峰線垂直的方向 (亦即圖2中的 ξ 方向) 之分量, 則式中的壓力梯度項將為零, 而其餘各項雖原本包含一些物理量之 ξ , y 和 ν 方向 (見圖2) 的分量, 但因在線性波近似中 $\cos \alpha \approx 1$ 及 $\sin \alpha \approx \partial \eta / \partial x$, 故這些分量可輕易轉換為 x , y 和 z 方向的分量。另外我們也可以將原本應用於自由表面上的方程式, 對平均水面 $z = 0$ 做泰勒級數展開, 故在忽略波浪運動之非線性項以及忽略漸近展開式中的高階項 $\hat{\Omega}_z \partial \phi / \partial y$, $\hat{u} \partial U / \partial x$, $(\partial V / \partial x) \partial \phi / \partial y$ 和 $V \partial \hat{u} / \partial y$ 後, 得到

$$\begin{aligned} & \left\{ g' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right\} + \left\{ g' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + U \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right. \\ & + V \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + U \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \eta + U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \eta + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & \left. + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} \eta + V \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \eta + V \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} v \right\} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (3.16) \end{aligned}$$

其中 $\bar{\zeta}$ 如圖2所示為平均水面的高度, $g' = g \cos \theta$ 表將平均水面坡度考慮在內之 effective gravitational acceleration (Phillips 1981)。

值得注意的是, 上式亦可由 (2.3) 之第二式, 將其代入運動方程式在 x 方向之分量後, 直接獲得。此一做法雖簡單, 但因在有強大剪應變存在情況下, (2.3) 之第二式能否成立並非立即清楚, 故應用上面的方式導出 (3.16) 式較理想, 且附帶證明 (2.3) 之第二式在目前的情況下仍成立, 故未來將在第七章數值計算時, 應用它做為邊界條件。

由於在上式中兩個大括弧內的項分別為非周期函數和周期函數, 故它們的總和需可自為零, 因此由後一個大括弧內的項可得

$$\begin{aligned} & g' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + U \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + U \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right) \eta = R \quad \text{at } z = 0, \quad (3.17) \end{aligned}$$

其中

$$R = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - v \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{at } z = 0. \quad (3.18)$$

在 (3.17) 中我們已將含波浪運動之旋性速度分量的項移至等號右邊, 並用符號 R 來代表它們的總和, 接下來我們將求 R 和 ϕ 之間的關係式。為達到此目的, 我們考慮包括流

場和波浪場兩者在內之 vorticity equation 在 y 方向的分量, 並應用連續方程式

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0, \quad (3.19)$$

且採用和前面一樣的近似, 得到

$$\left\{ U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + V \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right\} = 0. \quad (3.20)$$

上式中包含周期運動的項和未包含者仍被分開, 故由後者得到

$$U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + V \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3.21)$$

由前者則可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (3.22)$$

上式之小括弧內的項和 (3.18) 內由 R 所代表的項完全相同, 而由 (3.3), (3.4) 和 (3.9) 以及在目前所考慮的位置上 $k_y = 0$ 的情況可知

$$-\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - v \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} \hat{w} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} (i\phi) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \phi + \frac{\partial V}{\partial z} \left(i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (3.23)$$

可近似滿足 (3.22) 至與前面相同的準確度, 而其唯一性 (uniqueness) 亦可由下面的討論獲得瞭解。

首先, 在 (3.23) 之等號右邊, 若我們不選擇 $(\partial^2 U / \partial z^2) \phi$, 而選擇 $(\partial U / \partial z) \partial \phi / \partial z$, 則將後者對 z 微分後, 除產生 (3.22) 內之 $(\partial^2 U / \partial z^2) \partial \phi / \partial z$ 外, 亦產生 $(\partial U / \partial z) \partial^2 \phi / \partial z^2$, 後者且較前者大一個量級, 因此應不可能。接下來, 在 (3.23) 之等號右邊, 若我們不選擇 $(\partial^2 U / \partial x \partial z) (i\phi)$ 及 $(\partial V / \partial z) (i \partial \phi / \partial y)$, 而分別選擇 $(\partial U / \partial x) \partial \phi / \partial x$ 及 $V \partial^2 \phi / \partial x \partial y$, 則對 z 微分後, 亦分別產生額外的項, 且這些項的量級和 (3.22) 等號右邊的項之量級相同, 故無法忽略, 而更嚴重的是, 當流變為非旋性, 因而使 $\hat{u}$, v 和 $\hat{w}$ 皆消失時, 這些額外的項仍存在, 因此亦不可能。最後, 若我們選擇 $U \partial \hat{w} / \partial z$, 而不選擇 (3.23) 中

的 $(\partial U/\partial z)\hat{w}$ 時，則前者對 z 微分亦將產生兩個量級相同的項，但其中只有一項真正出現在 (3.22) 內，故此一可能性亦可被排除。另外我們也強調，由我們選擇的 $(\partial U/\partial z)\hat{w}$ ，在對 z 微分後，除產生 (3.22) 式中的 $(\partial U/\partial z)\partial\hat{w}/\partial z$ 外，亦產生 $(\partial^2 U/\partial z^2)\hat{w}$ ，後者亦出現在原來的 vorticity equation 內，但因其較小故在 (3.20) 中被忽略。由於此項乃為所有在 (3.20) 中被忽略的項裡，唯一可由一個較大的項對 z 微分而產生的項，故考慮這些被忽略的項並不會使 (3.23) 增加一些項。另一方面，其他所有可能在 (3.23) 中增加的項，對 z 微分皆會產生額外的（亦即在 (3.22) 中不存在的）量級相同的項（因它們皆含 e^{kz} ），故其可能性應可被排除，因此 (3.23) 確屬唯一。

由於 $\hat{w}|_{z=0} = 0$ ，故由 (3.23) 可得

$$R = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} (i\phi) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \phi + \frac{\partial V}{\partial z} \left(i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (3.24)$$

上式之等號右邊僅含 ϕ ，不含波的旋性速度，故將 (3.24) 代入 (3.17) 後可得一僅含 η 和 ϕ 此兩個未知函數的方程式，因此接下來我們將 (3.3) 和 (3.11) 代入此一方程式，並應用 (3.15) 以取代 A ，且依前面的方式忽略其高階項，最後得到

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(g' + 2\sigma U + U \frac{\partial U}{\partial z} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + \left(2\sigma V + V \frac{\partial U}{\partial z} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right. \\ & + 2\sigma \frac{\partial U}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + V \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ & \left. - \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) \frac{\partial V}{\partial z} \right\} + i \left\{ g'k - \sigma^2 - \sigma \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} = 0 \\ & \quad \text{at} \quad z = 0. \quad (3.25) \end{aligned}$$

在 (3.11) 中所定義的振幅 $a(x, y)$ 可定為一個實數函數而不會影響其適用範圍（此時 k 需漸近展開，使其高階項能描述相位之緩慢變化，但此一展開式目前不需要明白顯示），故由上式之實部和虛部，我們分別得到振幅緩變方程式

$$\begin{aligned} & [g' + 2\sigma U_0 + (\Omega_y)_0 U_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + [2\sigma + (\Omega_y)_0] V_0 \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ & + 2\sigma \frac{\partial U_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) (\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \\ & + \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) (\Omega_x)_0 = 0 \quad (3.26) \end{aligned}$$

及離散關係式

$$g'k = \sigma^2 + \sigma(\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \quad (3.27)$$

其中 U_0 , V_0 , $(\Omega_x)_0$ 和 $(\Omega_y)_0$ 分別代表 U , V , Ω_x 和 Ω_y 在平均水面上的值。

在 (3.27) 中其最後一項乃較其他項小一個量級, 而且若將 (3.27) 代入 (3.26), 由最後一項所產生者將較其他項小一個量級, 故在應用 (3.26) 時, (3.27) 之最後一項可以忽略 (同理 g' 亦可用 g 取代), 因此做為 WKBJ 解的一部份, 在 (3.27) 中我們僅需考慮

$$gk = \sigma^2 + \sigma(\Omega_y)_0. \quad (3.28)$$

當忽略了 (3.27) 之最後一項, 在 (3.26) 和 (3.28) 中的 a 和 k 之漸近展開式中, 除其第一階項外, 其餘各項亦可忽略, 因此當我們未來應用 (3.26) 和 (3.28) 時, 式中的 a 和 k 實際乃為其漸近展開式中的第一階項。此一近似之準確度和以往的波作用守恆方程式 (action conservation equation) 完全相同, 而為獲得此一結果, 我們在前面確實不需要將各未知參數表為一正式的漸近展開式, 而且在上面導公式的過程中, 任何該保留的項皆不可能被忽略。

第四章 與波作用守恆方程式比較

在本章中我們將振幅緩變方程式 (3.26) 與 Voronovich (1976) 同樣針對一旋性流所導出之波作用守恆方程式相比較, 但因 Voronovich (1976) 不僅考慮流中有一強大垂直剪應變, 且允許此剪應變在垂直方向的變化率可很大, 另外他亦允許水中密度分佈可不均勻 (故其理論亦適用於內波), 因此為進行上述比較, 須將 Voronovich (1976) 的方程式加以簡化。

Voronovich (1976) 應用傳統的 perturbation scheme 所獲得的波作用守恆方程式, 若用張量 (tensor) 符號來表示, 可寫為

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(C_{gr})_\alpha I] = 0, \quad (4.1)$$

其中 I 表波作用密度 (wave action density), $(C_{gr})_\alpha I$ 則代表由平均水面流速 U_0 及波的群速度 $C_g \equiv \partial\sigma/\partial\mathbf{k}$ 兩者所產生的波作用通量 (wave action flux), 因此 $C_{gr} \equiv U_0 + C_g$ 。

有關 I 和 $(C_{gr})_\alpha I$ 的表式可參考 Voronovich (1976), 這些表式皆以波的垂直速度分量之漸近展開式中的第一項之平均平方值來代表波的當地性質, 而此一平均平方值在目前的情況下, 由 (3.3), (3.9) 和 (3.13) 可知應為 $(\sigma^2 a^2/2)e^{2kz}$ (但在 Voronovich (1976) 所考慮的較複雜的情況, 則無法獲得一明白的表式), 故將其代入 Voronovich (1976) 之 (17) 和 (18) 式, 並將原式中的密度梯度項以及剪應變在垂直方向的梯度項忽略 (後者在目前的情況下, 將在 (4.1) 中產生較主要的項高一階的項, 故可忽略), 產生

$$I = \frac{\rho}{2} \left(\frac{g}{\sigma} - \frac{k_\alpha}{2k^2} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) a^2 = \frac{\rho}{2k} \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) a^2 \quad (4.2)$$

及

$$\begin{aligned} (C_{gr})_\alpha I = & \left[(U_0)_\alpha + \left(\frac{\sigma^2 k_\alpha}{k} + 2 \frac{\sigma k_\alpha k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) / 2 \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} \right) \right] \\ & \cdot \frac{\rho}{2k} \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} \right) a^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

在上面兩式及接下來的討論中, 所有對 z 的微分皆解在平均水面上, 故為了簡化符號, 我們不特別註明此點。另外需強調的是, 為得到 (4.2) 和 (4.3) 式, 我們曾應用離散關係式 (3.28), 但它目前需改為

$$gk = \sigma^2 + \sigma \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \quad (4.4)$$

上式中最後一項乃爲一零階張量，故其大小和前面兩項一樣，皆與座標軸方向的選擇無關。將 (4.4) 對 k_α 微分，亦可獲得群速度

$$(C_g)_\alpha = \left(\frac{\sigma^2}{k} \frac{k_\alpha}{k} + 2 \frac{\sigma}{k} \frac{k_\alpha}{k} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) / 2 \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} \right), \quad (4.5)$$

其形式確與 (4.3) 所暗示者相同，表 (4.1) 確實代表一守恆方程式。另外，由上式中的 $-(\sigma/k)\partial U_\alpha/\partial z$ 可知，當流具有一強大垂直剪應變時，群速度的方向和波數的方向（亦即相位速度的方向）可不相同。此一現象如 Phillips (1977) 所指出，乃因離散關係式 (4.4) 不僅與 k 的量有關，亦與 k 的方向有關。

當獲得了 I 和 $(C_{gr})_\alpha I$ 之表式後，即可將其代入 (4.1) 並展開，其中 $\partial I/\partial t$ 因目前考慮一穩定流，故可直接消去，因此目前僅需對 x_α 微分。微分後我們選擇上一章之座標系統 (x, y, z) ，因而使所有包含 k_y 和 $\partial k_y/\partial y$ 的項消去（參看 (3.7)）。另外應用 (3.21) 以及對 (4.4) 和運動守恆方程式 $n_0 = \sigma + U_\alpha k_\alpha = \text{const}$ 微分所獲得的方程式，可將原式進一步簡化，最後得到

$$\begin{aligned} & [g + 2\sigma U_0 + (\Omega_y)_0 U_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + [2\sigma + (\Omega_y)_0] V_0 \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ & + 2\sigma \frac{\partial U_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) (\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \\ & + \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) (\Omega_x)_0 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ & + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

將上式與 (3.26) 比較可發現，兩者之等號左邊完全相同，故上式等號右邊的三項即代表波作用守恆方程式與目前所導出之振幅緩變方程式 (3.26) 之間的差異。造成此種差異的原因乃爲，在目前所考慮的情況下（即流的垂直剪應變在垂直方向僅緩慢變化，而非急劇變化），當應用傳統的 perturbation scheme，將未知函數及控制方程式漸近展開後，在其第二階控制方程式中，其未知函數（在 Voronovich (1976) 的理論中乃爲波的垂直速度分量）包含波之旋性與非旋性速度兩者，而在其第一階控制方程式中則僅有非旋性速度（在 Voronovich (1976) 所考慮的情況，則亦包含旋性與非旋性速度兩者），

故為正確應用第二階方程式之 secular (or solvable) condition 來決定第一階解之緩變方程式, 需將第二階速度之旋性與非旋性部份分開, 然後和導出 (3.23) 的過程類似, 求出第二階旋性速度與第一階解之間的關係式, 再將其代入第二階控制方程式內, 並將這些已知的項移到等號右邊, 使第二階控制方程式中的未知函數亦和第一階控制方程式一樣僅含非旋性速度。然而由於此時第二階控制方程式之等號右邊新增加了一些項, 故由其 secular condition 所獲得的緩變方程式應與旋性和非旋性速度未分開時所獲得的 action conservation equation 不一樣, 因此在目前的情況下, wave action 應無法守恆。

由於在目前所考慮的情況, 第二階旋性速度與第一階解之間的關係式一般無法明白導出 (僅一些特殊的表式, 如 (3.23) 式, 可獲得), 故即使將旋性與非旋性速度分開, 實際仍無法應用新的第二階控制方程式之 secular condition 來決定第一階解之緩變方程式, 因此必須改用第三章的方法來導出 (3.26)。然而在一些特殊的情況, 儘管平均流仍具有一強大剪應變, 但上述移到等號右邊的項或為零, 或互相抵消, 故 action conservation equation 應仍可適用於這些特殊的情況, 而此時 (4.6) 之等號右邊的項亦完全消失 (參看徐 (2007)), 此一結果可某種程度地證明 (3.26) 之正確性。

上述將傳統的 perturbation scheme 修改, 使波之旋性與非旋性速度分開的作法, 在 McWilliams, Restrepo & Lane (2004) 中確曾被採用, 但他們所考慮的流之垂直剪應變較目前所考慮者小一個量級, 故其第二階旋性速度與第一階解之間的關係式可明白導出, 但這些關係式代入第二階控制方程式後, 當考慮新的方程式之 secular condition 時, 僅影響第一階解之相位的緩變, 而不影響振幅的緩變, 因此 wave action 仍守恆, 表 (3.26) 和 (4.6) 此時應一致, 此點可由 (4.6) 之等號右邊三項在流之垂直剪應變改為 weak 時可忽略獲得印證。

第五章 修改波能量方程式

當波行進在一個水平方向緩慢變化的流上時，即使流為非旋性，波的能量亦無法守恆，表波和流之間能量有轉換，此一轉換乃經由輻射應力 (radiation stress) $S_{\alpha\beta}$ 來達成 (參看 Longuet-Higgins & Stewart (1960, 1961), Whitham (1962) 及 Phillips (1977)), 故當流為非旋性時，波的能量方程式在 steady 情況可表為

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{[(U_0)_\alpha + (C_g)_\alpha]E\} + S_{\alpha\beta} \frac{\partial (U_0)_\beta}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (5.1)$$

其中 E 表波的能量密度。此一方程式在流中具有強大剪應變時，只有在一些特殊情況，方可應用積分法獲得 (參看 Jonsson, Brink-Kjær & Thomas (1978) 及徐 (2007)), 故目前我們嘗試將徐 (2007) 針對特殊情況所導出的能量方程式加以修改，使它在一般情況可和 (3.26) 一致，其結果將可顯示 (3.26) 之物理意義。

在徐 (2007) 應用積分法所獲得的能量方程式中，且在第三章所選擇的座標系統內，

$$E = \frac{1}{4} \rho a^2 \left(2g - \Omega_y \frac{\sigma}{k} \right) = \frac{\rho}{2k} a^2 \sigma \left(\sigma + \frac{\Omega_y}{2} \right) \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\rho}{4} g a^2 \\ S_{22} &= \frac{\rho}{4k} \sigma \Omega_y a^2 \\ S_{12} &= S_{21} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

將 (5.2) 和 (5.3) 代入 (5.1)，並應用先前導出 (4.6) 時的過程，得到

$$\begin{aligned} & [g + 2\sigma U_0 + (\Omega_y)_0 U_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + [2\sigma + (\Omega_y)_0] V_0 \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ & + 2\sigma \frac{\partial U_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) (\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \\ & + \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) (\Omega_x)_0 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

上式之等號左邊的項亦和 (3.26) 及 (4.6) 完全相同，但其等號右邊的項則和後兩者皆不同。由於徐 (2007) 是針對等號右邊的兩項皆為零 (且 $v = 0$) 的情況導出 (5.1)-(5.3)，故此一結果實與 (3.26) 一致。另一方面，徐 (2007) 亦發現有一種情況 (即其第四節中 case (4)) 會使上一章倒數第二段所描述的現象發生，故此時雖 $v \neq 0$ ，但波作用守恆方

程式 (4.1) 連同 (4.2) 和 (4.3) 仍適用, 而更重要的是這些方程式可改寫為能量方程式 (5.1), 且其中的能量密度及輻射應力仍如 (5.2) 和 (5.3) 所定義, 表即使波的橫向旋性速度 v 不等於零, 且其量級和 $\partial\phi/\partial x$ 及 $\partial\phi/\partial z$ 者相同, v 仍不應包含在波能量密度及輻射應力定義內。此一論點可由比較 (4.2) 和 (5.2) 所獲得的 $I = E/\sigma$ 此一為人們所熟知的關係式, 更加確定, 再加上 (5.2) 和 (5.3) 中已包含流的旋度 Ω_y , 故 (5.2) 和 (5.3) 雖是在一特殊情況下所導出, 但應可適用一般情況, 僅能量方程式 (5.1) 在一般情況須增加一些額外的項, 以抵消 (5.4) 之等號右邊的兩項, 使新的能量方程式能在此兩項不為零, 且無法忽略的情況下, 仍與 (3.26) 一致。

為達到上述目的, 我們先將 (5.2) 和 (5.3) 亦如 (5.1), 表為張量的形式:

$$E = \frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sigma}{k} \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right), \quad (5.5)$$

$$S_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} S'_{\gamma\delta}, \quad (5.6)$$

其中矩陣

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1/k & -k_2/k \\ k_2/k & k_1/k \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

而 $S'_{\gamma\delta}$ 即為 (5.3) 中的輻射應力分量, 但如今為與在不特定方向之座標系統內的輻射應力分量 $S_{\alpha\beta}$ 區別, 我們特將前者之符號上加一撇, 故 (5.6) 連同 (5.7) 實際代表座標軸旋轉時張量之轉換公式, 其中 k_1 和 k_2 表 $\mathbf{k}$ 在新座標系統中的分量。

另一方面, 在 (5.4) 之等號右邊的兩項, 若採用張量的符號, 可表為

$$-\frac{\sigma}{k} \frac{k_\alpha}{k} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\alpha \partial z}, \quad (5.8)$$

故為抵消此兩項, 並考慮原先導出 (5.4) 時所消去的共同因子 $\rho\sigma a^2/2k$, 波的能量方程式應修改為

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{ [(U_0)_\alpha + (C_g)_\alpha] E \} - \frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sigma^2}{k^2} \left(\frac{k_\alpha}{k} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\alpha \partial z} \right) + S_{\alpha\beta} \frac{\partial (U_0)_\beta}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (5.9)$$

上式可與 (3.26) 一致, 且因它表為張量的形式, 故可適用於任何卡氏座標系統內。

為澄清上式中新增加的項之物理意義, 我們先由 (4.5) 和 (5.5) 得到

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(C_g)_\alpha E] = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sigma^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} \sigma \frac{k_\alpha}{k} + \frac{k_\alpha}{k} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) \right]. \quad (5.10)$$

故當流中有垂直剪應變時，由波之群速度所產生的能量通量（即中括弧內的項）將受此剪應變的影響，然而由於 (5.9) 中新增加的項，此剪應變在水平方向的變化並不會導致此能量通量輻合或輻散，換句話說，唯有波本身的性質（如振幅，周期或波長）在水平方向有變化，方可使由群速度所產生的能量通量輻合或輻散。此一結果使群速度在流中有剪應變時，仍僅代表波浪本身的物理性質，故在一般情況，(5.9) 較 (5.1) 符合物理原理，且可和 (3.26) 完全一致。

第六章 焦線附近之解析解

上述解析解無法適用於焦線附近 (後者乃為由群速度和在平均水面上的流速相平衡各點所連成的線), 其原因乃為即使 wave action 目前不守恆, 但由新的波能量方程式 (5.9), 在下面我們仍可證明波的振幅 a 在焦線上將變為無窮大, 此一結果使我們在前面所做 a 在水平方向緩慢變化的假設無法成立, 表波浪在焦線附近實際將不會如 (3.11) 所描述, 為一緩慢變化的正弦波, 但其實際波形, 特別是當流中具有一強大剪應變時, 仍有待澄清。

當流為非旋性時, Smith (1975) 曾應用 perturbation scheme, 求出 field equation 為 Laplace equation 之邊界值問題的可均勻適用於焦線附近的解。此解顯示波浪在焦線上將被反射, 而非變為無窮大, 且其波形在此亦非正弦波。此一狀況是否亦發生在流中具有一強大剪應變時, 原本可以應用 Smith (1975) 的方法解 Euler equation 來獲得瞭解, 但基於 (4.6) 式下面所述的原因, Smith (1975) 的方法 (仍屬傳統之 perturbation scheme) 亦無法應用於目前的情況, 故目前我們採用 Shyu & Tung (1999) 的方法來獲得焦線附近之解析解。

需強調的是, 在 Shyu & Tung (1999) 的方法中曾應用 Smith (1975) 所獲得的 wave action 在焦線附近仍守恆的結果, 但目前 wave action 即使在遠離焦線區一般也不守恆, 故目前我們將改用新的波能量方程式 (5.9) 來達到相同的目的, 但此一方程式是否可應用於焦線附近則無法應用第三章的方法來證明 (因在此區域內的波並非正弦波), 亦無法應用 Smith (1975) 的方法 (因 (4.6) 式下面所說的原因), 因此在下一章我們將另外用數值方法來驗證本章所獲得的解析解。

當平均流為三維流場時, 焦線乃為曲線, 故為獲得焦線附近的解, 本章採用正交曲線座標, 並令其中的 x 軸垂直於焦線, 且令 $x = \text{const}$ 線皆為平行的曲線, 其中 $x = 0$ 的線 (亦即 y 軸) 即為焦線 (參看圖3)。在此一座標系統中, 在 x 方向的 scale factor h_x 可維持各點皆相同, 而在 y 方向之 scale factor h_y , 若定焦線上之 h_y 為1, 則 h_y 在 x 方向之變化為

$$h_y = 1 - \frac{x}{R(y, t)}, \quad (6.1)$$

其中 R 表焦線之曲率半徑。此一變化將使方程式變為較複雜, 但因流在水平方向變化之長度尺度較波長大一個量級, 故 R 亦較波長大一個量級, 因此可採用第三章的漸近近似來消去高階項。另外需強調的是, 目前所採用的曲線座標系統, 將使微分方程式在遠離焦線的某些點上形成奇異點 (singularity), 但因本章的目的乃為獲得焦線附近之解析解, 且此一解析解在導出後可輕易和第三章所獲得的 WKBJ 解相接, 故上述座標系統

可滿足目前的需要。

在此一曲線座標系統中，當入射波尚未十分接近焦線，故前面所獲得的解仍適用時，其水面位移仍可表為

$$\eta = a(x, y) \exp[i\chi(x, y, t)], \quad (6.2)$$

但因波數分量及觀測頻率目前需表為

$$k_x = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad k_y = \frac{1}{h_y} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad n_0 = -\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (6.3)$$

故 (6.2) 之 $\chi(x, y, t)$ 以及 $a(x, y)$ 兩函數的形式將與 (3.11) 者不同。由 (6.2) 和 (6.3) 我們可獲得

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - i[k_x + T]\eta = 0, \quad (6.4)$$

其中 $T = -i(1/a)\partial a/\partial x$ 。同理，若此一入射波在焦線上被反射，則當反射波離開焦線約一個波長的距離以外時，反射波的解亦可表為 (6.2)–(6.4) 的形式，故為區分入射波和反射波，我們將 (6.2)–(6.4) 內之 a , χ , k_x , k_y 及 T 加上一個下註標 1 或 2，其中 1 表入射波，2 表反射波，但 n_0 則不需要區分入射波和反射波（因兩者之 n_0 相等）。因此目前我們共有兩個一階微分方程式：

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - i[k_{x1} + T_1]\eta = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - i[k_{x2} + T_2]\eta = 0. \quad (6.6)$$

但要同時描述入射波和反射波兩者，直覺上我們先將 (6.5) 和 (6.6) 結合為

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i[k_{x2} + T_2] \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i[k_{x1} + T_1] \right\} \eta = 0, \quad (6.7)$$

但因 k_{x1} 並非常數 (T_1 因較小，故對 x 微分將產生更小的項，因此可被視為常數)，故上式僅能正確描述入射波。

將 (6.7) 展開可得

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - [i(k_{x1} + k_{x2}) + i(T_1 + T_2)] \frac{\partial \eta}{\partial x} - [k_{x1}k_{x2} + (k_{x2}T_1 + k_{x1}T_2) + i\frac{\partial k_{x1}}{\partial x}] \eta = 0, \quad (6.8)$$

其中 k_{x1} 和 k_{x2} 並非對稱，因此上式確無法同時描述入射波和反射波兩者。為解決此一不對稱問題，我們先由 (6.5) 得到

$$\frac{\partial k_{x1}/\partial x - \partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}} \frac{\partial \eta}{\partial x} - i k_{x1} \frac{\partial k_{x1}/\partial x - \partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}} \eta = 0, \quad (6.9)$$

其中兩個緩變參數之一階導函數的乘積已加以忽略。將上式和 (6.8) 相加可得

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + [-i(k_{x1} + k_{x2}) + Q] \frac{\partial \eta}{\partial x} + [-k_{x1}k_{x2} + P]\eta = 0, \quad (6.10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P &= -(k_{x2}T_1 + k_{x1}T_2) - i \frac{k_{x2}\partial k_{x1}/\partial x - k_{x1}\partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}}, \\ Q &= -i(T_1 + T_2) + \frac{\partial k_{x1}/\partial x - \partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

由於 (6.8) 和 (6.9) 兩者皆可被入射波之 WKB 解滿足，故此解應亦滿足 (6.10)，再加上 (6.10) 和 (6.11) 中之 k_{x1} 和 k_{x2} 乃完全對稱，因此二階微分方程 (6.10) 可同時描述入射波和反射波兩者。

由於 k_{x1}, k_{x2}, a_1 和 a_2 在焦線上皆為 singular，故它們在焦線附近的變化並非緩慢，再加上 (6.2) 之有關正弦波的假設亦無法適用於焦線附近，因此上面的討論僅能適用於離焦線一段距離以外的區域。然而若 (6.10) 和 (6.11) 中原本存在於 k_{x1}, k_{x2}, a_1 和 a_2 中的 singularities 互相抵消，表 (6.10) 連同 (6.11) 在焦線上亦為 regular，則我們有理由（參看 Shyu & Tung (1999) 之 (6.22) 式下面的文字）相信 (6.10) 亦可適用於焦線上及其附近（但在此區域內，各別的 k_{x1}, k_{x2}, a_1 和 a_2 沒有意義，僅它們的組合有意義）。因此接下來我們將證明，當 k_{x1}, k_{x2}, a_1 和 a_2 滿足離散關係式 (4.4) 及波能量方程式 (5.9) 時，其 singularities 將在 (6.10) 及其解析解中完全抵消，故此一解析解應可均勻適用於包括焦線在內每一點上。

為獲得 (6.10) 之解析解，首先我們令

$$\eta = v(x, y) \exp \left\{ \frac{i}{2}(\chi_1 + \chi_2) - \int_0^x \frac{Q}{2} dx \right\}. \quad (6.12)$$

代入 (6.10)，並忽略高階項 $\partial Q/\partial x$ 和 Q^2 （因未來將證明 Q 在焦線上為 regular，故可採用第三章的近似），可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (H + G)v = 0, \quad (6.13)$$

其中

$$H = \frac{1}{4}(k_{x2} - k_{x1})^2, \quad (6.14)$$

$$G = P + \frac{i}{2}(k_{x1} + k_{x2})Q + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial k_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial k_{x2}}{\partial x} \right). \quad (6.15)$$

由 Smith (1975), 上式之可均勻適用於焦線附近的近似解可表為

$$v(x, y) \approx A_0 \text{Ai}(-r) - C_0 (\text{dAi}(x)/\text{d}x)_{x=-r}, \quad (6.16)$$

其中 $\text{Ai}(x)$ 表 Airy function,

$$\frac{2}{3}r^{3/2} = - \int_0^x H^{1/2} \text{d}x, \quad (6.17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \left(\frac{r}{H}\right)^{1/4} \cos\left(-\int_0^x \frac{1}{2}G/H^{1/2} \text{d}x\right), \\ C_0 &= r^{-1/4}H^{-1/4} \sin\left(-\int_0^x \frac{1}{2}G/H^{1/2} \text{d}x\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

為證明 (6.16)–(6.18) 確近似滿足 (6.13) 式, 可將它們代入 (6.13), 並應用 Airy differential equation 將 $(\text{d}^2 \text{Ai}/\text{d}x^2)_{x=-r}$ 用 $-r \text{Ai}(-r)$ 取代 (參看 Abramowitz & Stegun 1972), 得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (H + G)v = \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} \text{Ai}(-r) - \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} \frac{\text{dAi}}{\text{d}x} \Big|_{x=-r}. \quad (6.19)$$

上式雖與 (6.13) 不完全相同, 但若 A_0 和 C_0 在焦線上為 regular, 則它們在此點上會和其他各點上一樣皆緩慢變化, 故它們的二階導函數可忽略, 表上式之等號右邊兩項可不計, 因此 (6.13) 和 (6.19) 的差異不重要, 表 (6.16)–(6.18) 確為 (6.13) 之近似解。

接下來我們要證明方程式 (6.10) 及其解析解在焦線上確為 regular, 而為達到此目的, 我們仍採用 Shyu & Tung (1999) 的方法。首先由離散關係式的解, 以及在焦線上 $(U_0)_x + (C_g)_x = 0$ 的狀況可知, k_{x1} 和 k_{x2} 乃為一 double-valued function 之兩個 branches, 且其 branch point 即位在焦線 $x = 0$ 上。因此入射波之 phase function χ_1 可表為

$$\chi_1 = [d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots] + \frac{2}{3} \left[(-\psi_1)^{1/3} (-x) + O(x^2) \right]^{3/2}. \quad (6.20)$$

上式中兩個中括弧內之無窮級數乃為針對 $x = 0$ 位置所做的泰勒級數展開, 其係數則為 y 和 t 之函數。故將 (6.20) 代入 (6.3) 可得

$$\left. \begin{aligned} k_{x1} &= [d_1 + 2d_2 x + O(x^2)] - [\psi_1 x + O(x^2)]^{1/2}, \\ h_y k_{y1} &= \left[\frac{\partial d_0}{\partial y} + \frac{\partial d_1}{\partial y} x + O(x^2) \right] - \frac{1}{3} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} [(-\psi_1)^{-1} (-x)^3 + O(x^4)]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

而由 (6.20) 和 (6.21) 之另一個 branch, 我們亦可得反射波之 phase function 及波數分量

$$\chi_2 = [d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots] - \frac{2}{3} \left[(-\psi_1)^{1/3}(-x) + O(x^2) \right]^{3/2}. \quad (6.22)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{x2} &= [d_1 + 2d_2x + O(x^2)] + [\psi_1x + O(x^2)]^{1/2}, \\ h_y k_{y2} &= \left[\frac{\partial d_0}{\partial y} + \frac{\partial d_1}{\partial y}x + O(x^2) \right] + \frac{1}{3} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \left[(-\psi_1)^{-1}(-x)^3 + O(x^4) \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

故由 (6.20) 和 (6.22) 可知, 在 (6.12) 中的 $\chi_1 + \chi_2$ 在焦線上乃爲 regular。另一方面, 由 (6.21) 和 (6.23) 可得

$$H = \frac{1}{4}(k_{x2} - k_{x1})^2 = \psi_1x + O(x^2). \quad (6.24)$$

故 (6.13) 中的 H 亦爲 regular。由上式, 且先假設 G 在焦線上爲 regular (其證明在後), 並令 $G_0 \equiv G(x=0)$, 可得到

$$-\int_0^x H^{1/2} dx = \frac{2}{3}(-\psi_1)^{1/2}(-x)^{3/2}[1 + O(x)] \quad (6.25)$$

及

$$-\int_0^x \frac{1}{2}G/H^{1/2} dx = G_0(-\psi_1)^{-1/2}(-x)^{1/2}[1 + O(x)]. \quad (6.26)$$

將 (6.25) 代入 (6.17) 可得

$$r = (-\psi_1)^{1/3}(-x)[1 + O(x)]. \quad (6.27)$$

故 r 在焦線上亦爲 regular。另外, 將 (6.24), (6.26) 和 (6.27) 代入 (6.18) 亦獲得

$$A_0 = (-\psi_1)^{-1/6}[1 + O(x)], \quad C_0 = G_0(-\psi_1)^{-5/6}[1 + O(x)]. \quad (6.28)$$

表 A_0 和 C_0 在焦線上確爲 regular。由於 (6.15) 中的 $k_{x1} + k_{x2}$ 以及 (6.10) 中的 $k_{x1}k_{x2}$ 亦明顯爲 regular, 故由上面的討論我們可確定, 若 G 和 Q 在焦線上爲 regular, 則二階微分 (6.10) 及其解析解 (6.12) 在焦線上亦爲 regular, 故如今我們僅需證明 G 和 Q 在焦線上爲 regular。

爲達到上述目的, 我們將解析解 (6.12) 及 (6.16) 表爲適用於 r 較大時的漸近近似

$$\text{Ai}(-r) \approx \pi^{-1/2} r^{-1/4} \sin \left(\frac{2}{3} r^{3/2} + \frac{1}{4} \pi \right), \quad (6.29)$$

$$(\text{dAi}/\text{d}x)_{x=-r} \approx -\pi^{-1/2} r^{1/4} \cos \left(\frac{2}{3} r^{3/2} + \frac{1}{4} \pi \right). \quad (6.30)$$

故由 (6.12) 和 (6.16)-(6.18), 並考慮 (6.3) 和 (6.14), 可得

$$\eta = a_1 \exp i \left(\chi_1 - \frac{1}{4} \pi \right) + a_2 \exp i \left(\chi_2 + \frac{1}{4} \pi \right), \quad (6.31)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \pi^{-1/2} H^{-1/4} \exp \left[\int_0^x \frac{1}{2} (-Q - iG/H^{1/2}) \text{d}x \right], \\ a_2 &= \frac{1}{2} \pi^{-1/2} H^{-1/4} \exp \left[\int_0^x \frac{1}{2} (-Q + iG/H^{1/2}) \text{d}x \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

在 (6.31) 中的兩項即分別爲入射波和反射波之 WKB 解, 但此一表式僅能適用於離焦線較遠處, 而在焦線附近則無法如 (6.31) 式表爲正弦波的形式。但即使如此, 且即使 a_1 和 a_2 在焦線上變爲無窮大 (參看 (6.24) 及 (6.32)), 我們仍可應用 (6.32) 及波能量方程式 (5.9) 來證明 G 和 Q 在焦線上爲 regular, 其方法如下。

首先將 (6.32) 對 x 微分, 並應用 (6.14), 產生

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{1}{2} (-Q - iG/H^{1/2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial k_{x2}/\partial x - \partial k_{x1}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}}, \quad (6.33a)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{1}{2} (-Q + iG/H^{1/2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial k_{x2}/\partial x - \partial k_{x1}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}}. \quad (6.33b)$$

而由 (6.21) 及 (6.23) 可知, 在焦線附近

$$\frac{1}{2} \frac{\partial k_{x2}/\partial x - \partial k_{x1}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}} = \frac{1}{4x} [1 + O(x)]. \quad (6.34)$$

另一方面, 在圖3之座標系統內, 由波能量方程式 (5.9) 以及 (5.5) 可以得到入射波或反射波之振幅變化率

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} = & - \frac{1}{2 [(U_0)_x + (C_g)_x] \frac{\rho \sigma}{2k} \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [(U_0)_x + (C_g)_x] \frac{\rho \sigma}{2k} \right. \\ & \left. \cdot \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) \right\} + F + \frac{1}{2R} \frac{1}{1 - x/R}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

上式之最後一項乃因目前採用圖3之正交曲線座標而產生, F 則包含由 (5.9) 中對 y 微分的項、輻射應力項以及修正項所產生的項, 這些項若將它們在焦線位置上做泰勒級數展開, 則不論是個別的項或其總和, 皆可表為以下的形式:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_1 x}} [\zeta_0 + \zeta_1 x + \cdots] + [\xi_0 + \xi_1 x + \cdots]. \quad (6.36)$$

此乃因這些項之分母皆含 $(U_0)_x + (C_g)_x$, 而在焦線附近

$$(U_0)_x + (C_g)_x = \sqrt{\psi_1 x} [d_0 + d_1 x + \cdots] + [e_1 x + e_2 x^2 + \cdots] \quad (6.37)$$

(上式中為確保在焦線上 $(U_0)_x + (C_g)_x = 0$, 必須 $e_0 = 0$)。由 (6.37) 且可得

$$- \frac{1}{2 [(U_0)_x + (C_g)_x] \frac{\rho \sigma}{2k} \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [(U_0)_x + (C_g)_x] \frac{\rho \sigma}{2k} \left(\sigma + \frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) \right\} = -\frac{1}{4x} [1 + \alpha_1 x + \cdots] + \frac{1}{\sqrt{\psi_1 x}} [\beta_0 + \beta_1 x + \cdots]. \quad (6.38)$$

故由 (6.35), (6.36) 和 (6.38), 在極靠近焦線位置可得

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x} \approx \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x} \approx -\frac{1}{4x}$$

此一結果和 (6.32)-(6.34) 一致, 表在極接近焦線位置

$$a_1 \approx a_2 \approx \frac{1}{2} \pi^{-1/2} H^{-1/4}. \quad (6.39)$$

接下來由 (6.36) 之 $\zeta_0/\sqrt{\psi_1 x}$ 及 (6.38) 之 $\beta_0/\sqrt{\psi_1 x}$, 並考慮 (6.24), 可發現若 $-iG_0 = 2(\beta_0 + \zeta_0)$, 其中 G_0 表 G 之泰勒級數中的第一項, 則 (6.33) 和 (6.35) 亦吻合, 表由波能量方程式可決定 G_0 (並因而顯示 G 在焦線上為 regular)。另一方面, 由 (6.36) 之 ξ_0 , (6.38) 之 $-\alpha_1/4$, (6.35) 之最後一項展開後之第一階項 $1/2R$, 再扣掉 (6.34) 之第二項 (亦為常數項), 即可決定 Q_0 。此一過程可繼續以決定 G 和 Q 之泰勒級數中的所有係數, 表若 (6.32) 中的 a_1 和 a_2 之變化率在焦線上及其附近仍可由新的波能量方程式決定, 則 G 和 Q 在焦線處將為 regular, 而由 (6.15), P 在焦線處亦為 regular, 因此微分方程式 (6.10) 及其解析解 (6.12) 和 (6.16)-(6.18) 可適用於焦線上及其附近。

第七章 焦線附近之數值解

在上一章中我們已證明, 若 a_1 和 a_2 之變化在焦線附近亦滿足新的波能量方程式 (5.9), 則波在旋性流上亦可被後者反射, 且此一現象之解析解亦可獲得。然而 (5.9) 在焦線附近是否能正確描述 a_1 和 a_2 的變化 (即使在此區域內, 波已非正弦波, 故 a_1 和 a_2 已不代表振幅, 而僅以組合方式出現在上述解析解內), 目前無法證明, 故在本章中我們將求出焦線附近的數值解, 並和解析解比較, 以證明在上一章所獲得的解析解確可在焦線附近, 近似滿足目前的邊界值問題。

為簡化問題 (其目的之一乃為節省電腦記憶體), 但仍考慮流中具有一強大剪應變, 使 wave action 無法守恆, 目前我們假設重力波斜行在一個二維剪流上。在此情況下, 焦線乃為一與流的方向垂直的直線, 故當我們仍如上一章令 x 軸 (如今亦為直線) 垂直於焦線, 則流的速度分佈可表為 $\mathbf{U}\{U(x, z), 0, W(z)\}$ (W 在 x 方向的變化不考慮的原因可參考 (3.1) 下面的說明), 而波浪場則可表為流速 $\mathbf{u}\{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}$ 和壓力 $p(x, y, z, t)$ 。故若我們僅考慮線性波, 則欲求解的 field equations 為

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + W \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + W \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7.1) \\ (7.2) \\ (7.3) \\ (7.4) \end{array}$$

上式中包含剪應變 $\partial U/\partial z$, 但為了進一步簡化問題, 我們假設此一剪應變在各點均相等 (因流為二維, 故此一假設可滿足 vorticity equation)。在此一情況下, (4.6) 之等號右邊的第一和第二項皆為零, 但第三項不為零 (注意: 本章所採用的座標系統與第四章所採用者不同), 故 wave action 目前不守恆。

流為二維尚有另一個好處, 即不僅 n_0 在各點皆相等, k_y 亦為定值 (見 (3.5)), 故目前我們令 $n_0 = 2.587 \text{ rads}^{-1}$, $k_y = -0.94 \text{ radm}^{-1}$, 且令 $\partial U/\partial x = -0.0077 \text{ s}^{-1}$, $\partial U/\partial z = 2.5 \text{ s}^{-1}$ 。在此一情況, 由離散關係式可決定, 當 $U_0 = -0.6712 \text{ ms}^{-1}$ 時, $U_0 + (C_g)_x = 0$, 表焦線在此發生 (此時 $k_{x1} = k_{x2} = 4.894 \text{ radm}^{-1}$), 因此若定焦線處 $x = 0$, 則

$$U(x, z) = -0.6712 - 0.0077x + 2.5z \text{ ms}^{-1}$$

而為滿足連續方程式, 必須

$$W(z) = 0.0077z \text{ ms}^{-1}$$

接下來我們將決定解(7.1)-(7.4) 所需之邊界條件。首先，在自由表面上之運動邊界條件此時可由 (3.10) 簡化為

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial U}{\partial x} = w, \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (7.5)$$

其動力邊界條件則可直接採用

$$p = \rho g \eta \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (7.6)$$

(見 (3.16) 下面一個段落內的說明)。故將 (7.6) 代入 (7.5)，並考慮 $\partial p / \partial t = -i n_0 p$ ，可得

$$-i n_0 \frac{p}{\rho g} + \frac{U}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\rho g} \frac{\partial U}{\partial x} = w, \quad \text{at} \quad z = 0. \quad (7.7)$$

另一方面，由於我們目前考慮深水波，故在 $z = 0.92 \text{ m}$ 處(約0.73個波長之深度)，令 $u = 0$, $p = 0$ ，表底部之邊界條件。

由於在目前流為二維且穩定的情況下，各變數隨 y 和 t 變化的情況可由 $\exp i(k_y y - n_0 t)$ 完全決定，因此目前不需要考慮 $y = \text{const}$ 面上之邊界條件以及起始條件。而另一方面，在 $x = \text{const}$ 面上，我們先定 $x = -1 \text{ m}$ 處之邊界條件。由於此一位置離焦線約0.8個波長的距離，故由 Shyu & Tung (1999) 之 figure 15 可知，在此邊界上 WKBJ 解 (6.31) 和 (6.32) 已可適用，但因 x 仍不大，故 (6.32) 可用 (6.39) 取代，因此由 (6.31)、(6.39)、(3.3)、(3.13)、(2.11) 以及 (2.12)，並考慮本章所採用的座標系統與第二、三章所採用者之間的差異，在 $x = -1 \text{ m}$ 處之邊界條件可定為

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{\sigma_1}{k_1} k_{x1} - \frac{k_y \sigma_1 (\partial U / \partial z) (k_y / k_1)}{n_0 - U k_{x1}} \right] e^{k_1 z} \exp i(\chi_1 - \frac{1}{4} \pi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{\sigma_2}{k_2} k_{x2} - \frac{k_y \sigma_2 (\partial U / \partial z) (k_y / k_2)}{n_0 - U k_{x2}} \right] e^{k_2 z} \exp i(\chi_2 + \frac{1}{4} \pi), \\ v &= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{\sigma_1}{k_1} k_y + \frac{k_{x1} \sigma_1 (\partial U / \partial z) (k_y / k_1)}{n_0 - U k_{x1}} \right] e^{k_1 z} \exp i(\chi_1 - \frac{1}{4} \pi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{\sigma_2}{k_2} k_y + \frac{k_{x2} \sigma_2 (\partial U / \partial z) (k_y / k_2)}{n_0 - U k_{x2}} \right] e^{k_2 z} \exp i(\chi_2 + \frac{1}{4} \pi), \\ w &= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{4}} (-i \sigma_1) e^{k_1 z} \exp i(\chi_1 - \frac{1}{4} \pi) + \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{4}} (-i \sigma_2) e^{k_2 z} \\ &\quad \cdot \exp i(\chi_2 + \frac{1}{4} \pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} = & \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{4}}[g - \sigma_1(\partial U/\partial z)(k_{x1}/k_1)z]e^{k_1 z} \exp i(\chi_1 - \frac{1}{4}\pi) \\ & + \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{4}}[g - \sigma_2(\partial U/\partial z)(k_{x2}/k_2)z]e^{k_2 z} \exp i(\chi_2 + \frac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \int_0^{-1.0} k_{x1} dx + k_y y - n_0 t = \int_0^{-1.0} k_{x1} dx, \\ \chi_2 &= \int_0^{-1.0} k_{x2} dx + k_y y - n_0 t = \int_0^{-1.0} k_{x2} dx\end{aligned}$$

(因目前僅計算 $y = 0, t = 0$ 時的數值解)。

另外, 當 x 爲正 (故 r 爲負) 時, 與 (6.31) 相對應, 但適用於 r 較大且爲負之 WKBJ 解爲

$$\begin{aligned}\eta = & \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}(-H)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\int_0^x \frac{1}{2}(-Q + iG/H^{1/2}) dx \right] \\ & \cdot \exp i \left[\int_0^x k_{x2} dx + k_y y - n_0 t \right],\end{aligned}\quad (7.8)$$

其中 k_{x2} 之虛部爲正, 故上式代表一個隨 x 增加而指數衰減的解。由於上式中代表波性質迅速變化的項 $\exp i \left[\int_0^x k_{x2} dx + k_y y - n_0 t \right]$ 亦發生在 u, v, w 和 p 上, 故我們令目前所需之最後一個邊界條件爲, 在 $x = 1.5 m$ 處

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= ik_{x2}u, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= ik_{x2}v, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= ik_{x2}w, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= ik_{x2}p.\end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$

由於 (7.9) 中包含未知函數之一階導函數項, 故要應用它做爲邊界條件, 需將 field equations (7.1)-(7.4) 轉換爲二階微分方程式。首先因 $\partial v/\partial y = ik_y v$, 故 (7.2) 和 (7.4) 可先結合成一個二階微分方程, 並消去 v 。由於 v 在 (7.1) 和 (7.3) 中亦不存在, 故我們接下來僅需將 (7.1) 和 (7.3) 對 x 微分, 即可獲得另外兩個包含 u, w, p 三個未知函數之二階微分方程式。這些方程式當忽略 $u\partial^2 U/\partial x^2, (\partial W/\partial x)\partial u/\partial z, (\partial W/\partial x)\partial w/\partial z,$

$w\partial^2 W/\partial x\partial z$ 及 $(p/\rho)\partial^2 U/\partial x^2$ 各項後 (因流在焦線附近亦緩慢變化), 乃為

$$\left\{ \begin{array}{l} -in_0 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + U \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \end{array} \right. \quad (7.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -in_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + U \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + W \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + k_y^2 \frac{p}{\rho} = 0, \end{array} \right. \quad (7.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -in_0 \frac{\partial w}{\partial x} + U \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + W \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (7.12)$$

目前我們應用有限差分法在一個矩形領域內求解 (7.10)-(7.12), 但在自由表面上, 為滿足邊界條件 (7.7), 我們將 (7.11) 用 (7.7) 取代, 並將後者對 x 微分, 產生

$$-in_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} U \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - g \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0.$$

此時必須將 (7.12) 內對 z 微分的項用 forward difference 做為其近似, 其餘者以及在其他水深處則採用 central difference formula, 並直接應用其他邊界上之邊界條件。

當我們獲得計算領域內各節點之 u, w, p 值後, 由於在自由表面上 $p = \rho g \eta$, 故由自由表面上各節點之 p 值可求出其 η 值, 其結果可和解析解 (6.12) 比較, 因而獲得圖 4。由圖 4 我們可以看出數值解和解析解在指數衰減區差異較大, 其原因乃為, 在 $x = 1.5 m$ 處之邊界條件 (7.9) 未考慮 (7.8) 中振幅之緩慢變化, 故其誤差較大 (此點在未來將尋求改進), 但無論如何, 由圖 4 我們仍可確定, 在上一章所獲得的解析解在焦線附近可近似滿足 field equations。

第八章 結論與建議

當深水重力波行進在一穩定、三維、且垂直剪應變十分強大的流上，若流在水平方向緩慢變化，則波亦將隨之緩慢變化，並在群速度與平均水面上流速相平衡的位置（亦即焦線）上被阻塞。本研究先導出遠離焦線區之振幅緩變方程式，此一方程式與 Voronovich (1976) 針對更複雜情況所導出之 action conservation equation 不一致，其原因乃為，Voronovich (1976) 不僅考慮流的垂直剪應變可很大，且此一剪應變在垂直方向可變化迅速，因此使波的漸近展開式之第一階項和第二階項一樣在各方向的速度分量皆為旋性，故可直接應用第二階控制方程式之 secular condition 來獲得 action conservation equation，但此時第一階近似之 local solution 無法明白解出，故 action conservation equation 實際無法應用。為解決此一問題，目前我們令上述剪應變在垂直方向之變化為緩慢（如此方可明白導出第一階近似之 local solution），故此時第一階項主要為非旋性（雖仍具有相同量級之旋性橫向速度分量 v ），而第二階項則各分量皆為旋性，因此我們無法直接應用第二階控制方程式之 secular condition 來決定第一階解之緩變方程式。此一狀況使得 Voronovich (1976) 直接應用第二階方程式之 secular condition 所獲得的 action conservation equation 無法應用於目前的情況，因此 wave action 如今無法守恆。

目前所獲得的振幅緩變方程式亦被改寫為波能量方程式，此一方程式和以往的波能量方程式一樣，包含輻射應力項及由平均流所產生的能量通量輻合項（雖其詳細內容有些不同），但目前的方程式和以往的方程式最大不同是增加了兩個額外的項，這些項和原來的由群速度所產生的能量通量輻合項加在一起方可確保，唯有波本身的性質在水平方向有變化，方可使由群速度所產生的能量通量輻合或輻散，否則由流的剪應變之水平方向變化率亦可導致由群速度所產生的能量通量輻合或輻散，故目前的波能量方程式較符合物理原理。

由於新的波能量方程式仍預測波的振幅在焦線上變為無窮大（見 (6.39) 及 (6.24)），故上述 WKBJ 解無法應用於焦線上及其附近，因此我們亦應用 Shyu & Tung (1999) 的方法導出焦線附近的解析解。此一解析解顯示，即使流中有強大垂直剪應變，波在焦線上仍將被反射為不同長度的波。

上述可適用於焦線附近的解析解中包含 WKBJ 解之某些參數（如波數和振幅）的組合，這些參數在焦線上皆為 singular，但如這些參數在焦線附近的變化仍滿足新的波能量方程式，則這些參數之 singularities 在上述組合中將互相抵消，使目前所獲得之焦線附近的解析解在焦線上確為 regular，因而可適用於焦線附近。然而新的波能量方程式是否確實可應用於焦線附近，並無法證明，故我們最後應用數值方法來計算焦線附近之

波浪場，其結果顯示，在離焦線約一個波長的位置上，將數值解和解析解定為相同後，由數值計算所獲得的解，由此一位置至焦線上皆與解析解十分接近，故上述 singularities 確互相抵消，且焦線附近的解析解確近似滿足原來的控制方程式。

綜合以上所述，本計畫第一年成果之效益有三：一為增進人們對 action conservation principle 的瞭解，故對學術研究有幫助。二為本計畫所獲得之新的波能量方程式，對受強大海流影響之波浪場的預報有幫助。三為目前所獲得之線性波被旋性流阻塞及反射現象的解析解，可做為針對完全非線性波數值計算時的初解，故對與其有關之深海瘋狗浪的研究有幫助。因此本計畫第二年將應用目前的成果，求完全非線性波被一「二維」，且旋度為均勻分佈的剪流阻塞及反射時的數值解。第三年則進而針對一「三維」旋性流來數值計算（此時仍可應用目前的解析解做為初解），其結果將可澄清深海瘋狗浪是否確與波被流阻塞現象有關。若有關，則本計畫第四年將經由理論分析和模擬計算來評估未來建立一「臺灣外海瘋狗浪預報系統」之可行性。

參考文獻

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972 *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Jonsson, I. G., Brink-Kjær, O. & Thomas, G. P. 1978 Wave action and set-down for waves on a shear current. *J. Fluid Mech.* **87**, 401–416.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1960 Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J. Fluid Mech.* **8**, 565–583.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1961 The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.* **10**, 529–549.
- McWilliams, J. C., Restrepo, J. M. & Lane, E. M. 2004 An asymptotic theory for the interaction of waves and currents in coastal waters. *J. Fluid Mech.* **511**, 135–178.
- Peregrine, D. H. 1976 Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9–117.
- Phillips, O. M. 1977 *The Dynamics of the Upper Ocean*, 2nd edn. Cambridge University Press.
- Phillips, O. M. 1981 The dispersion of short wavelets in the presence of a dominant long wave. *J. Fluid Mech.* **107**, 465–485.
- Shrira, V. I. 1993 Surface waves on shear currents: solution of the boundary-value problem. *J. Fluid Mech.* **252**, 565–584.
- Shyu, J. H. & Tung, C. C. 1999 Reflection of oblique waves by currents: analytical solutions and their application to numerical computations. *J. Fluid Mech.* **396**, 143–182.
- Smith, R. 1975 The reflection of short gravity waves on a non-uniform current. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78**, 517–525.
- Smith, R. 1976 Giant waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 417–431.
- Voronovich, A. G. 1976 Propagation of internal and surface gravity waves in the approximation of geometrical optics. *Izvestia, Atmospheric and Oceanic Physics.* **12**, No. 8, 850–857.
- Whitham, G. B. 1962 Mass, momentum and energy flux in water waves. *J.*

Fluid Mech. **22**, 273–283.

徐進華 2007 臺灣東岸港口共振現象改善方案研究 (2/4), 交通部運輸研究所臺灣技術研究中心。

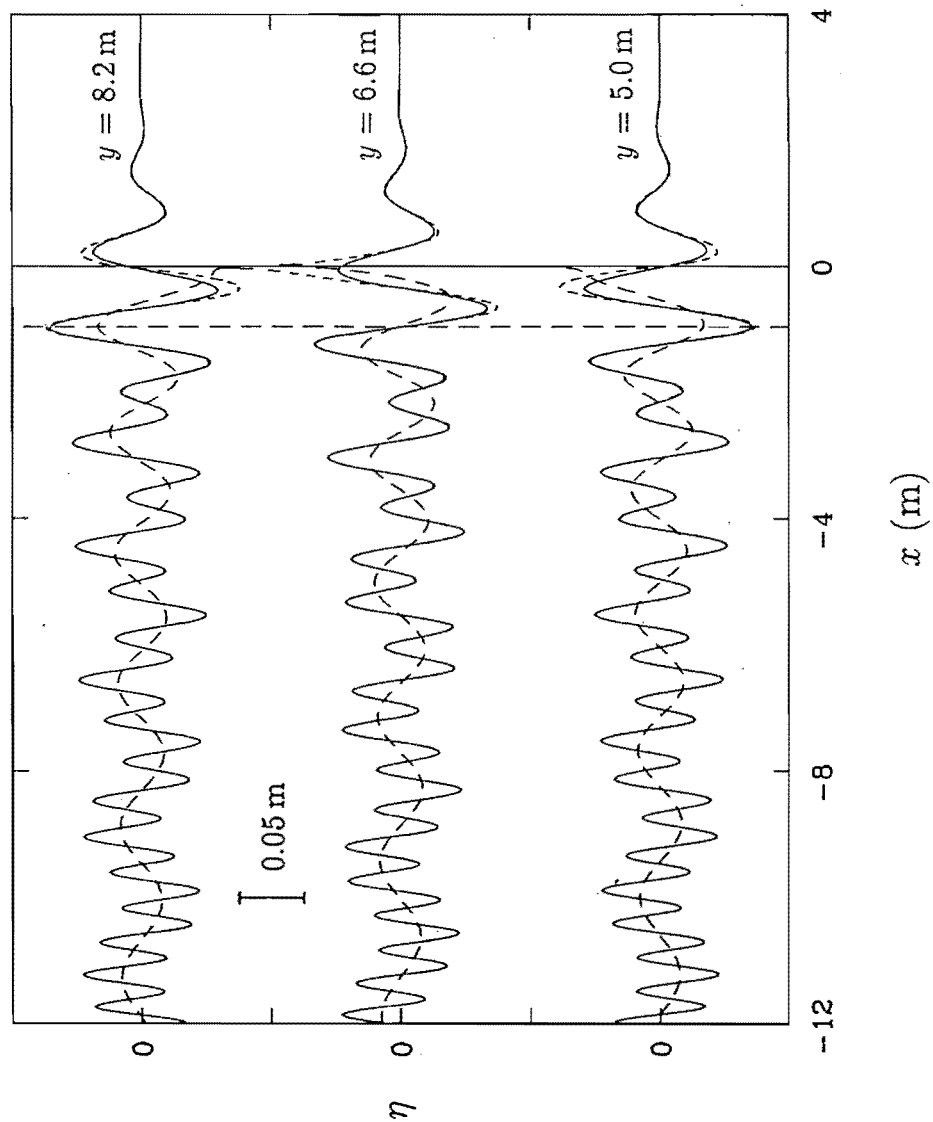


圖1、線性波被非旋流阻塞及反射現象之解析解。實線表阻塞及反射現象發生時的水面位移，短虛線為此一位移之 WKBJ 解，長虛線則為後者之入射波分量。此一結果原為 Shyu & Tung (1999) 所獲得。

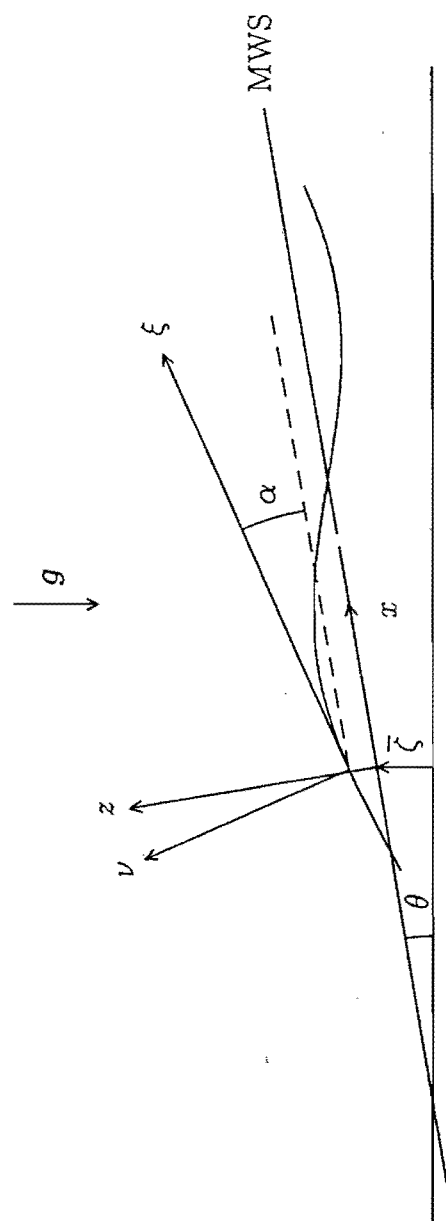


圖2、示意圖。考慮自由表面上之動力邊界條件時所定義之座標系統。

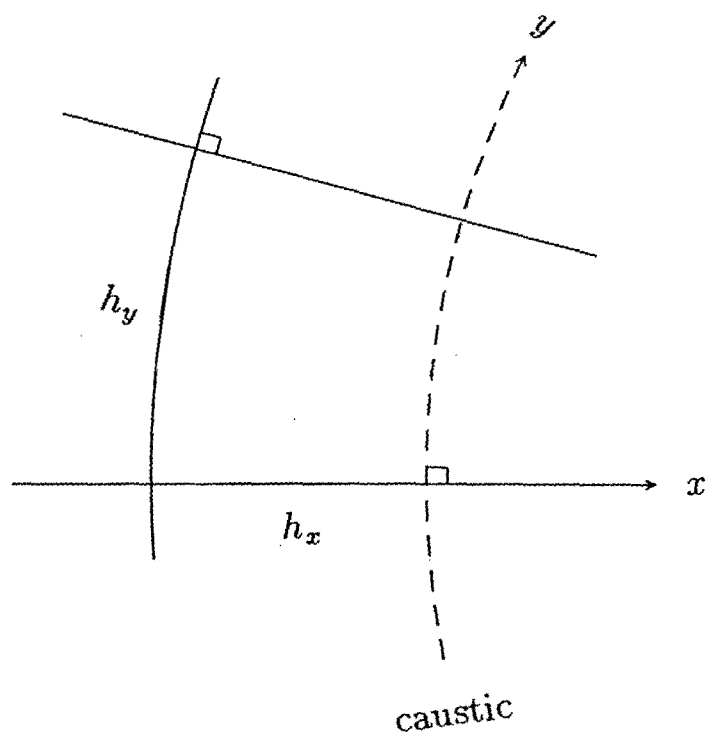


圖3、示意圖。導焦線附近之解析解所採用之正交曲線座標。

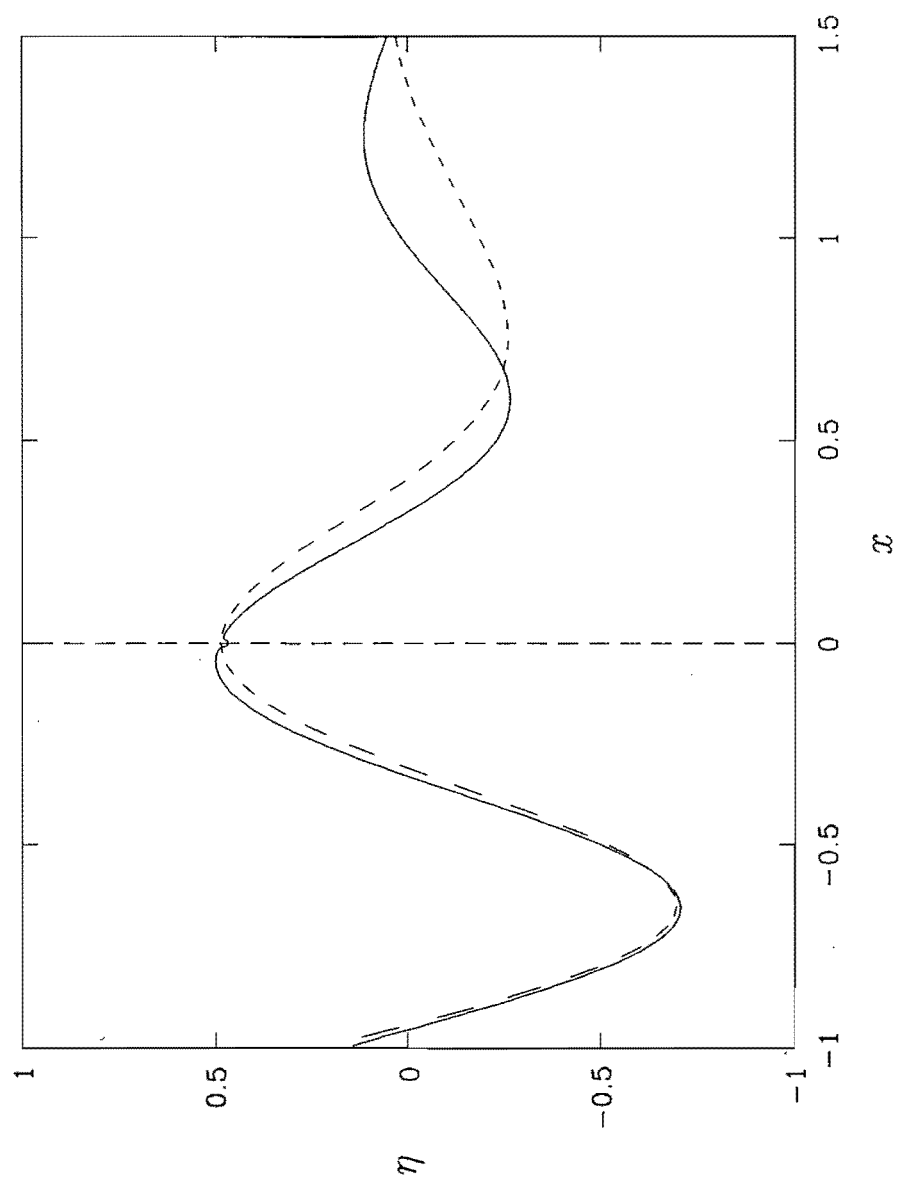


圖4、焦線附近解析和數值解之比較。實曲線表解析解，虛曲線表數值解。

交通部運輸研究所科技計畫
期末報告審查意見處理情形表

計畫名稱：臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究(1/4)

執行單位：運輸研究所港研中心

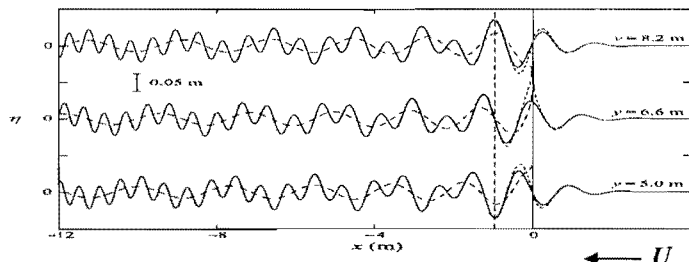
參與審查人員及其所提之意見	執行單位處理情形
一、林銘崇委員： 1. 研究以理論分析為主，條理分明，思考嚴謹。 2. 研究結論具學術創意，亦有助於巨浪(瘋狗浪)之解釋與了解。 3. 流之水平剪力分佈效應與巨浪產生亦可能有關，理論模式似亦可納入或另行列為研究課題。	1. 感謝肯定。 2. 感謝肯定。 3. 目前的理論可適用於流之水平剪應變雖較頻率小一個量級，但不為零的情況(見第七頁第二段文字之說明)。而當流之水平剪應變和頻率量級相同或更大時，目前的 WKB approach 無法適用，故需採用完全不同的方法來求解，因此較適合另行列為研究課題。
二、陳陽益委員： 1. 旋性是否可給予定量性的推估。 2. 建議可否用流函數 (stream function)來處理。 3. 非線性量(含旋性量如波流交會作用量等)如何引入。	1. 在第二章最後曾對旋度的主要分量明確指定其量級，目前為使其次要分量之量級亦十分明確，又在第七頁第二段插入一段文字說明，此一說明若配合前一段文字當可達到其目的。 2. 雖然在第二章曾導出二維 Laplace equation，但在第三章考慮波的緩變現象時，此二維 Laplace equation 須先改為三維(見第八頁第三段文字)，再於導公式的過程中取其近似(例如 $\partial\phi/\partial y$ 不可忽略，但 $\partial^2\phi/\partial y^2$ 則可忽略)，故無法直接用流函數來處理。另一方面，波的旋性速度分量亦為三維，且其連續方程式(3.19)中的三項量級皆相同，故亦無法應用流函數。 3. 非線性量乃由 Euler equations (特別是(2.2b)式)及自由表面上的邊界條件引入，另外為導出振幅緩變方程式，

	另由 vorticity equation 引入非線性量，但 vorticity equation 本身乃由 Euler equations 導出。
三、許泰文委員： 1. 研究方法具創意性，層次與條理分析分明。 2. 四年工作項目和內容建議更詳細說明。 3. 儘量能找到試驗數據來校驗理論的適用範圍。	1. 感謝肯定。 2. 已在「結論與建議」一章中補充說明未來三年的工作內容。 3. 以往有關波流交互作用的實驗，即使流中有剪應變，但皆量小而可忽略，故當波未被流阻塞時，Thomas (1981) 已用實驗數據準確驗證非旋性理論，且發現這些數據(亦為二維)並無法校驗 Jonsson <i>et al.</i> (1978) 之二維旋性理論。另外在波被流阻塞現象方面，類似的情況亦存在，且此種情況至今未改變，其原因乃為要在水面附近產生強大的剪應變，需藉由風的應力，但如此一來原來的波流交互作用變為風、波、流三者的交互作用，故無法用它的數據來校驗波流交互作用的理論。
四、蔡清標委員： 1. 本研究第一年度為解析前進波與已知旋性流之交互作用，以便釐清並探討瘋狗浪之引發機制，具研究意義，解析內容予以肯定。 2. 建議研究報告宜儘量增加現象之圖說的輔助，俾使閱讀者易理解。研究解析結果，亦建議有圖或表之結果說明，並作可能的 verification。 3. 建議相關之專有名詞，附加英譯。 4. 瘋狗浪之現象，文獻眾說紛紜，英文亦有 giant ,freak wave... 等，本文之瘋狗浪為何種現象，	1. 感謝肯定。 2. 已增加圖一來說明瘋狗浪可能和波被流阻塞現象有關。 3. 已在前言中加入瘋狗浪和剪應變之英譯，在第二章中加入流勢函數和離散關係式之英譯，在第四章中加入張量的英譯。 4. 已在前言中指出本文所討論的瘋狗浪之定義為何。另外在臺灣附近海域所發生疑似瘋狗浪事件，其地點確實和有強大海流存在的海域之地點相符，但因缺乏確切的證據，再加上本計畫第一年的研究重點尚未及於臺灣附近海域，故委員的建議將留待它年(特別是第四年)行之。

建議先定義（如波浪尖銳度、duration 等）。而所解析的瘋狗浪機制，與台灣島附近可能或已發生地點的波浪與海流物理特性之相符性，建議有所說明。 5. 未來三年的研究計畫主題為何，建議於末章有所說明。 6. 建議增列符號說明表。	5. 已在末章中補充說明未來三年的研究計畫主題。 6. 在本文中所選用的符號，若代表一個物理量，絕大部份皆與以往的慣例相符，故應很容易記憶。相反的，若它們代表一個純數學量，則即使增列一個符號說明表，其作用僅為指出其定義的位置，而不易用少許文字說明其意義。由於這些特殊的符號僅在某一章中出現，故不難找出其定義的位置，因此未增列符號說明表。
五、林昭圭委員 1. 本研究探討深水波浪斜向入射--流可能發生瘋狗浪之機制，對於深海瘋狗浪之研究與現場觀測有相當大的參考價值。 2. 焦線位置或阻塞點是否可透過本研究來評估，如此可了解波浪週期與流速及交角發生瘋狗浪之可能性。 3. 未來是否可能推廣至近海之瘋狗浪發生機制之探討。 4. 東北角海岸有波浪淺化及水流的現象，是否可能符合本研究所探討的理論。	1. 感謝肯定。 2. 由於本年度的研究僅考慮線性波，故透過本研究僅能對周遭波高尚小的焦線或阻塞點位置加以評估，而當波高增大為瘋狗浪時，焦線的位置及發生條件皆會改變，故需用數值方法解非線性波方能評估。 3. 本文第六章所獲得的解析解(此解在未來數值計算時將做為初解)可輕易延伸至有限水深波(見 Shyu & Tung (1999))，而未來的數值計算亦可輕易將深水波改為有限水深波，故未來確可能推廣至近海瘋狗浪發生機制之探討，但無法推廣至岸邊。 4. 東北角海岸外之潮流十分強勁，而根據台大海洋研究所的研究，在 2000 年神秘失蹤的「花蓮一號」即可能沉沒於此，故在此發生的瘋狗浪可能符合本研究所探討的理論。

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論 及可預測性研究(1/4)

阻塞及反射現象：（線性波）(Shyu & Tung, 1999)

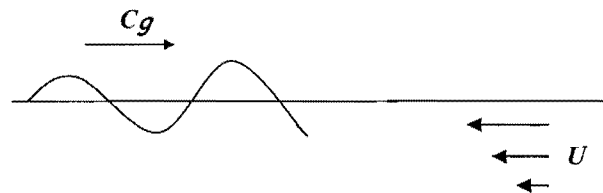


深海瘋狗浪不僅波高大，slope亦大 $\Rightarrow$ fully nonlinear waves

$\Rightarrow$ 須用數值方法求解

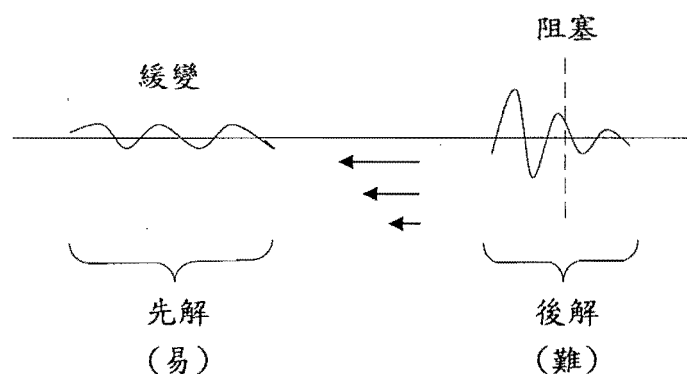
但線性波解析解仍可做為非線性數值解之initial guess！

另外亦考慮：深海瘋狗浪亦發生於風吹流上，



故第一年求線性波被旋性流阻塞現象之解析解。

方法：



緩變理論

令流的垂直剪應變和波之頻率量級相同(表剪應變強大)！

Case 1：若剪應變在垂直方向的變化亦迅速(而非近乎線性)

由傳統的perturbation scheme可得

$$\text{第一階：} \quad w^{(1)''} - \left(\frac{\omega_d''}{\omega_d} + k^2 \right) w^{(1)} = 0$$

$$\text{第二階：} \quad w^{(2)''} - \left(\frac{\omega_d''}{\omega_d} + k^2 \right) w^{(2)} = F_1$$

故由第二階方程式之secular condition可決定
第一階解之緩變方程式 (Voronovich, 1976)。

得到action conservation equation:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(C_{gr})_\alpha I] = 0 \quad (1)$$

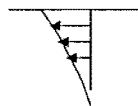
其中wave action density

$$I = - \int_{-H}^h \left(\frac{\omega_d''}{2\omega_d^2 k^2} \right) (w^{(1)})^2 dz + \left(\frac{g}{\omega_d^3} + \frac{\omega_d'}{2\omega_d^2 k^2} \right) (w^{(1)})^2 \Big|_{z=h}$$

但 $w^{(1)}$ 之 local solution 無法明白解出 $\rightarrow$ 無法獲得 I 和振幅 a 之間的關係式

故(1)式實際無法應用!

Case 2: 若剪應變在垂直方向變化緩慢(目前所考慮者)



第一階: $w^{(1)''} - \left(\frac{\omega_d'}{\omega_d} + k^2 \right) w^{(1)} = 0$ (非旋性)

第二階: $w^{(2)''} - \left(\frac{\omega_d'}{\omega_d} + k^2 \right) w^{(2)} = F_2$ (旋性)

且必須將 $w^{(2)}$ 之旋性與非旋性部份分開, 因而產生

$$w^{(2)''} - k^2 w^{(2)} = F_3 \quad (\text{此時 } w^{(2)} \text{ 僅含非旋性})$$

但 F_3 之表式實際無法獲得, 故無法應用上式之 secular condition 來獲得 $w^{(1)}$ 之緩變方程式!

目前的方法免用secular condition，但仍可導出緩變方程式

$$[g' + 2\sigma U_0 + (\Omega_y)_0 U_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + [2\sigma + (\Omega_y)_0] V_0 \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \frac{\partial U_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ + \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) (\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) (\Omega_x)_0 \\ = 0$$

缺點：物理意義不明！ 解決方法：和其他方程式比較！

由於目前 $w^{(1)}$ 之 local solution 已知，故代入Voronovich 之 action equation，得到

$$[g' + 2\sigma U_0 + (\Omega_y)_0 U_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + [2\sigma + (\Omega_y)_0] V_0 \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \frac{\partial U_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ + \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) (\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) (\Omega_x)_0 \\ = - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

多三項，表wave action目前不守恒！

另外，在一較簡單的情況(但仍有強大剪應變)，應用積分法可得波能量方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{ [(U_0)_\alpha + (C_g)_\alpha] E \} + \underset{\uparrow}{S_{\alpha\beta}} \frac{\partial (U_0)_\beta}{\partial x_\alpha} = 0$$

輻射應力

展開後

$$[g' + 2\sigma U_0 + (\Omega_y)_0 U_0] \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} + [2\sigma + (\Omega_y)_0] V_0 \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \frac{\partial U_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ + \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) (\Omega_y)_0 - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\sigma}{k} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{k^2} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) (\Omega_x)_0 \\ = - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$$

多兩項，故在目前的情況波能量方程式必須修改！

註：積分法在目前的情況無法應用！

修改後之波能量方程式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{[(U_0)_\alpha + (C_g)_\alpha]E\} - \frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sigma^2}{k^2} \left(\frac{k_\alpha}{k} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\alpha \partial z} \right) + S_{\alpha\beta} \frac{\partial (U_0)_\beta}{\partial x_\alpha} = 0.$$

為解釋新增加的項之物理意義，考慮

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(C_g)_\alpha E] = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sigma^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} \frac{k_\alpha}{k} + \frac{k_\alpha}{k} \frac{k_\beta}{k} \frac{\partial U_\beta}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} \right) \right].$$

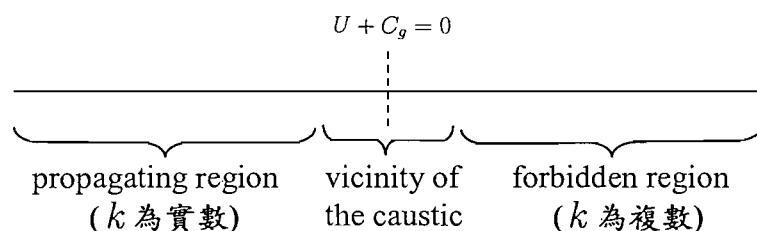
由群速度所產生之能量通量

故新增加的項可使垂直剪應變在水平方向之變化不影響
由群速度所產生的能量通量之輻合或輻散 → 較合理！

阻塞理論

由於在阻塞點上 a, k 為 singular

故緩變理論無法適用於阻塞點附近 → 必須另外求解！



但仍先考慮遠離阻塞點區域 → 導出可均勻適用之方程式

$$\eta = ae^{i\theta} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = ik_x \eta + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \eta \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} - i[k_x + T]\eta = 0$$

↑
小

$$\text{入射波: } \frac{\partial \eta}{\partial x} - i[k_{x1} + T_1]\eta = 0 \quad (1)$$

$$\text{反射波: } \frac{\partial \eta}{\partial x} - i[k_{x2} + T_2]\eta = 0$$

但要同時描述入射波和反射波兩者，可能的選擇：

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i[k_{x2} + T_2] \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i[k_{x1} + T_1] \right\} \eta = 0 \quad ?$$

展開

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - [i(k_{x1} + k_{x2}) + i(T_1 + T_2)] \frac{\partial \eta}{\partial x} - [k_{x1}k_{x2} + (k_{x2}T_1 + k_{x1}T_2) + i \frac{\partial k_{x1}}{\partial x}] \eta = 0$$

k_{x1} 和 k_{x2} 不對稱，故上式只能描述入射波！

由(1)，可得另一可描述入射波之方程式：

$$\frac{\partial k_{x1}/\partial x - \partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}} \frac{\partial \eta}{\partial x} - i k_{x1} \frac{\partial k_{x1}/\partial x - \partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}} \eta = 0$$

兩式相加得到

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + [-i(k_{x1} + k_{x2}) + Q] \frac{\partial \eta}{\partial x} + [-k_{x1}k_{x2} + P]\eta = 0,$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P &= -(k_{x2}T_1 + k_{x1}T_2) - i \frac{k_{x2}\partial k_{x1}/\partial x - k_{x1}\partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}}, \\ Q &= -i(T_1 + T_2) + \frac{\partial k_{x1}/\partial x - \partial k_{x2}/\partial x}{k_{x2} - k_{x1}}. \end{aligned} \right\}$$

➤ k_{x1} 和 k_{x2} 完全對稱，故可同時描述入射波和反射波！

➤ 即使 a_1, a_2, k_1, k_2 在阻塞點為singular，但上式中它們的組合可為regular ➡ 表上式可適用於阻塞點附近！

阻塞點附近之解析解：

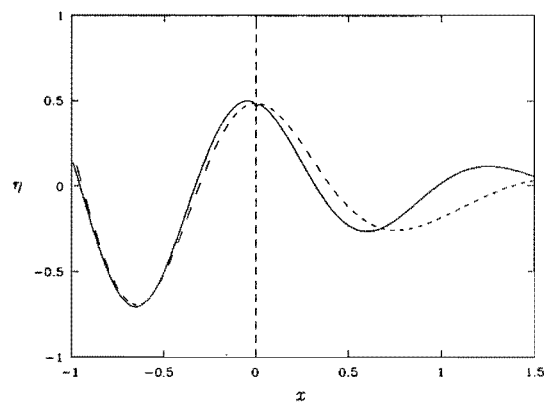
$$\eta = v(x, y) \exp \left\{ \frac{i}{2}(\chi_1 + \chi_2) - \int_0^x \frac{Q}{2} dx \right\}$$

其中

$$v(x, y) \approx A_0 \text{Ai}(-r) - C_0 (d\text{Ai}(x)/dx)_{x=-r}$$

Ai : Airy function

但要證明上述之 regularity，須假設新的波能量方程式亦可適用於阻塞點附近，後者目前無法證明，故另用數值解來驗證解析解。



實線：解析解
虛線：數值解

因此解析解在阻塞點上確近似滿足原來的Euler equations !

結論：

1. 當波行進在流上，因流的緩變而隨之緩慢變化時，wave action不一定守恆，其原因乃十分明確。
2. 當流中有強大垂直剪應變時，波能量方程式須根本上加以改變，而新的波能量方程式亦較合理。
3. 即使流中有強大垂直剪應變，線性波仍可被流阻塞及反射，且可獲得其解析解。

建議：

未來可應用目前的解析解做為初解，針對完全非線性波進行數值計算，以瞭解完全非線性波是否仍可被流阻塞及反射，且深海瘋狗浪是否由此一現象所引發。