

100-90-7559

MOTC-IOT-99-H2DA002

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性 理論及可預測性研究(2/4)



交通部運輸研究所

中華民國 100 年 5 月

100-90-7559

MOTC-IOT-99-H2DA002

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性 理論及可預測性研究(2/4)

著 者：徐進華

交通部運輸研究所

中華民國 100 年 5 月

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究(2/4)

/徐進華著.--初版.-- 臺北市：交通部運輸研究所，

民 100.05

面 ； 公分

ISBN 978-986-02-7768-5 (平裝)

1. 波動 2 數值分析

351.941

100007667

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究(2/4)

著 者：徐進華

出版機關：交通部運輸研究所

地 址：10548 臺北市敦化北路 240 號

網 址：www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電 話：(04)26587176

出版年月：中華民國 100 年 5 月

印 刷 者：良機事務機器有限公司

版(刷)次冊數：初版一刷 90 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站

定 價：100 元

展 售 處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 臺北市中山區松江路 209 號 F1•電話：(02)25180207

五南文化廣場：臺中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1010000996

ISBN：978-986-02-7768-5 (平裝)

著作財產權人：中華民國(代表機關：交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部份內容者，須徵求交通部運輸研究所書面授權。

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究
(2/4)

交通部運輸研究所

GPN : 1010000996

定價 100 元

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究 (2/4)			
國際標準書號 (或叢刊號) ISBN978-986-02-7768-5 (平裝)	政府出版品統一編號 1010000996	運輸研究所出版品編號 100-90-7559	計畫編號 99-H2DA002
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計劃主持人：徐進華 聯絡電話：04-26587182 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 99 年 01 月 至 99 年 12 月
關鍵詞：完全非線性波、波被流阻塞及反射、數值模擬、深海瘋狗浪			
摘要： 本研究應用可快速求解完全非線性波之 Clamond-Grue method，數值模擬完全非線性波行進在一與其平行但流向相反之穩定大尺度非旋流上，遭其阻塞及反射的現象。其結果顯示，由於高度非線性，故波被流反射後，在遠離阻塞點區域(而非阻塞點附近)難以形成一明顯之入射波與反射波線性疊加之波形，但甚高之波峰伴隨極深之波谷仍如線性波般，穩定出現在阻塞點附近，表深海瘋狗浪極可能因波被流阻塞及反射而引發。 由於 Clamond-Grue method 計算迅速，且可將大部份鋸齒狀不穩定現象消除而又不損失能量，故它特別適合模擬波被流阻塞及反射現象，後者需經長時間及大範圍計算方可達成。應用此種數值方法所設計之電腦程式經測試後，其計算結果可與 Stokes waves 之解析解以及線性波被流阻塞及反射現象解析解十分吻合。另外在模擬非線性波被流阻塞及反射現象時，其結果亦相當合理且一致，因此目前的數值解應十分可信。 成果效益： 本研究證實完全非線性波亦可如線性波般被流阻塞及反射，且在阻塞點附近形成一穩定之巨浪。此一成果乃澄清以往人們對波被流阻塞及反射現象在自然界是否真實發生以及瘋狗浪是否因波被流阻塞及反射而引發的疑問，故對未來建立一瘋狗浪預報系統極有幫助。 後續應用： 在本計畫第四年，我們將應用目前所獲得的結果，對臺灣附近以往所發生的海難進行案例分析，以瞭解它們是否大部份和波被流阻塞及反射現象有關。若其結果屬實，未來即可建立一有效之瘋狗浪預報系統。另外，為建立一可適用於更廣泛情況下之理論，本計畫第三年將數值模擬波行進在三維旋性流上情況，此時目前的數值方法亦可被用來從事其一部份之計算。			
出版日期	頁數	定價	本出版品取得方式
100 年 5 月	54	100	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價購買。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 (解密條件： ☐ 年 ☐ 月 ☐ 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密) ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: The rotational nonlinear theory and the predictability of the freak waves in deep water near Taiwan (2/4)			
ISBN (ORISSN) ISBN978-986-02-7768-5 (pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1010000996	IOT SERIAL NUMBER 100-90-7559	PROJECT NUMBER 99-H2DA002
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Chiu Yung-fang PRINCIPAL INVESTIGATOR: Shyu Jinn-hwa PHONE: 886-4-26587182 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2010 TO December 2010
KEY WORDS: Fully nonlinear waves; Blockage and reflection of waves by currents; Numerical simulations; Freak waves.			
ABSTRACT: The fast computational method derived by Clamond & Grue (2001) for the fully nonlinear waves is utilized to simulate the fully nonlinear waves propagating in the opposite direction upon a steady unidirectional irrotational current. The results indicate that the fully nonlinear waves, like the linear ones, can be blocked and reflected by currents, though no linear superposition of the incident and reflected waves can be seen in the regions far away from the caustics because of the high nonlinearity of the wave fields. This high nonlinearity cannot however obscure the situation that a deep trough precedes a steep forward face in the caustic regions, implying that freak waves will very likely occur in these regions. The Clamond-Grue method is computationally fast and can prevent the sawtooth instabilities without losing energy. As a consequence, this method is particularly suitable for long time simulations of wave fields with appreciable size, which are required for the study of the blockage phenomenon of waves by currents. The computer program designed by using this method is tested in two versions. Simulations of nonlinear wave fields without currents and simulations of linear wave fields with currents compare very well with the analytical solutions of the Stokes wave and the blockage phenomenon of linear waves by currents respectively. In simulation of that of the nonlinear waves by currents, the soundness and consistency of the results are also remarkable. BENEFITS: The substantiation of the situations that the fully nonlinear waves, like the linear ones, can be blocked and reflected by currents and in the caustic regions there exists a steep forward face preceded by a deep trough, can clarify the idea that the blockage and reflection phenomenon of waves by currents can actually occur in the ocean and induce freak waves in the caustic regions. This idea will significantly benefit the future development of a freak wave forecasting system. APPLICATIONS: The results given here will in the fourth year of this project be applied in a case study to decide whether or not the boat casualties occurred previously in the regions near Taiwan are mostly due to the blockage and reflection of waves by currents. If this is true, the development of a reliable freak wave forecasting system will become possible. Also, the theory developed here will in the coming year be extended to the case when the currents become three-dimensional and rotational.			
DATE OF PUBLICATION May 2011	NUMBER OF PAGES 54	PRICE 100	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

目 錄

中文摘要表	I
英文摘要表	II
圖目錄	IV
第一章 前言	1
第二章 應用Clamond-Grue method 所需之控制方程式	3
第三章 應用Clamond-Grue method 求近似解	8
第四章 化減鋸齒狀不穩定現象	10
第五章 測試電腦程式	13
第六章 非線性波被流阻塞現象數值解	15
第七章 結論與建議	17
參考文獻	18
附錄一 審查意見回覆	36
附錄二 簡報內容	39

圖 目 錄

圖1、鋸齒狀不穩定現象化減前後及不同化減法所產生的結果。.....	20
圖2、流速在水平方向變化情形。數字之單位採m.k.s. 制。.....	21
圖3、目前的數值解與線性波解析解之比較。.....	22
圖4、與圖3相同,但解析解之波長改用 Stokes waves 之第三階近似。.....	23
圖5、目前的數值解與Stokes waves 之第三階近似解比較。.....	24
圖6、線性波被流阻塞及反射現象之數值解與解析解比較。.....	25
圖7、非線性波被流阻塞及反射現象數值解($t = 2500$ s)。.....	26
圖8、非線性波被流阻塞及反射現象數值解($a = 0.05$ m)。.....	27
圖9、(延續圖8)。.....	28
圖10、(延續圖7)。.....	29
圖11、非線性波被流阻塞及反射現象數值解 ($a = 0.1$ m)。.....	30
圖12、(延續圖11)。.....	31
圖13、在圖12最下列所標示各空間位置上之水面位移隨時間的變化。.....	32
圖14、水面位移及與其相對應之水面坡度數值解 ($a = 0.1$ m, $t = 3025$ s)。.....	33
圖15、將解 (2.15) 之 iteration 上限定為500次 (曲線) 及200次 (圓圈) 所獲得之結果。.....	34
圖16、與圖15相同,但目前的圓圈符號乃為 iteration 僅1次所獲得的結果。.....	35

第一章 前言

深海瘋狗浪 (freak, rogue, or giant waves) 經常發生在波逆行在一大尺度流上情況, 最著名的例子是在南非東南海岸外之海域常有大型船隻被瘋狗浪嚴重破壞, 甚至打成兩半。Mallory (1974) 曾對在此發生之 11 件海難加以分析, 發現除 1 件外, 所有其他海難皆發生在波逆行在 Agulhas current 上情況 (參見 Smith 1976)。另外, Irvine & Tilley (1988) 分析在 Agulhas current 上, 由合成口徑雷達 (synthetic aperture radar) 所獲得的資料亦證明, 當波逆行在 Agulhas current 上, 可產生瘋狗浪 (參見 White & Fornberg 1998)。

在臺灣四周亦有黑潮、風吹流及由天文潮所引發之潮流, 故波逆行在流上情況在此亦經常發生, 此點或可解釋在臺灣附近海域為何常發生海難, 甚至發生船隻瞬間沈沒事件。然而為確定這些海難與波逆行在流上有關, 除需對以往發生在臺灣附近的海難詳加分析外, 亦需對波逆行在流上, 因而引發瘋狗浪的理論加以澄清。

當波逆行在流上, 若流的速度在空間上變化為輻合 (convergent), 亦即波在行進過程中, 其所遭遇的逆向流愈來愈強, 則根據 Longuet-Higgins & Stewart (1960; 1961) 的理論, 其波高將增大, 波長將縮短, 而更嚴重的是, 當波能量傳遞速度 (亦即群速度) 和流速相平衡時, 根據 Smith (1975) 的理論, 若波為線性, 則將被流阻塞及反射, 因而在阻塞點附近產生一高波峰伴隨一深波谷的現象 (詳細波形可參見 Shyu & Tung 1999), 此一現象與 Mallory (1974) 所描述之瘋狗浪形狀十分相似 (皆具有一個 'hole in the sea')。

上述線性波被流阻塞及反射的理論極為嚴密, 但因瘋狗浪為一完全非線性波, 故要確定在深海中出現的瘋狗浪確實主要由波被流阻塞及反射過程引發, 必須先瞭解, 若將波之非線性效應考慮在內, 波是否仍可被流阻塞及反射。為澄清此一問題, Smith (1976) 及 Peregrine & Smith (1979) 曾應用解析方法獲得近乎線性波被流阻塞及反射現象的解, 表近乎線性波仍將被流阻塞後反射。此一結果實際不令人意外, 因為當波為近乎線性時, 線性波的解仍將發揮其主要的影響。同樣的情形亦發生在 Wu (2004) 之數值解上 (參見 Mei, Stiassnie & Yue 2005), 因此為真正瞭解巨大瘋狗浪是否因波被流阻塞及反射而引發, 我們必須更進一步考慮完全非線性波, 且此時僅能應用數值方法求其解。

模擬完全非線性波的數值方法有很多種, 有關這方面的文獻介紹可參考 Tsai & Yue (1996), Dias & Kharif (1999) 及 Mei et al. (2005)。在這些方法中, 有些 (如 mixed Euler-Lagrangian method) 計算很費時, 故難以被用來模擬非線性波行進在一大尺度流上, 發生緩慢變化, 然後被阻塞再反射, 此一極為冗長的過程。另一些方法, 如 Wu (2004) 所採用的 high-order spectral method, 雖計算極快速, 但因需對平均水面做

泰勒級數展開, 故若要追求較高階近似, 將涉及較高階導函數及較高階非線性項, 因而使計算變為不穩定。

為解決上述兩個問題, Clamond & Grue (2001) 另發展出一種可快速計算完全非線性波之數值方法, 此種方法不需做泰勒級數展開, 故可避免不穩定, 又可應用複變函數理論將 Laplace equation 轉換為一特殊之積分方程式。此一方程式之積分範圍可大幅縮小而不失其準確度, 且當應用 iterative scheme 求其解時, 收斂極迅速, 因此可節省大量時間。此一方法將為目前所採用, 而為應用它, 我們假設流為非旋性, 且與波浪場共同形成一個二維流場, 因而可適用於複變函數理論。應用 Clamond-Grue method 我們將證明完全非線性波仍可被流阻塞及反射。

由於本計畫在前一年已導出線性波被三維旋性流阻塞及反射現象之解析解, 如今又證明在二維情況下, 完全非線性波亦可被非旋流阻塞及反射, 故在本計畫第三年我們將進一步模擬完全非線性波行進在一個三維旋性流上情況, 其結果將可廣泛應用於實際自然界。因此在本計畫第四年我們將應用這些結果找出波被流阻塞及反射現象發生的規律, 再與以往在臺灣附近所發生的海難相對照, 即可瞭解這些海難是否大部份和波被流阻塞及反射現象有關。若有關, 則未來將可建立一十分有效之瘋狗浪預報系統。

第二章 應用 Clamond-Grue method 所需之控制方程式

在本章中我們將 Clamond & Grue (2001) 所導出之控制方程式延伸, 使適用於一完全非線性波列行進在一個二維非旋流上, 且兩者互相平行之情況。在此一情況下, 波浪運動亦為非旋性及二維, 故其 velocity potential ϕ 及 stream function ψ 同時存在, 並滿足 Cauchy-Riemann relations

$$\phi_x = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_x \quad (-\infty \leq y \leq \eta) \quad (2.1)$$

其中 x 代表水平方向座標, y 代表垂直向上方向座標, η 則為相對於平均水位 $y = 0$ 而言之水面位移。

上述公式與 Clamond & Grue (2001) 未考慮流的存在所獲得者並無差異, 此乃因當平均流在水平方向緩慢變化時, 由此一變化所引發平均水面傾斜或彎曲的效應實際可忽略。另外, 由於我們目前僅欲瞭解波被流阻塞現象, 而非波受流影響發生緩變之現象, 故為簡化問題, 我們進一步令平均流之流速 U 在水平方向的變化不僅緩慢, 且極緩慢, 故在阻塞點附近 $|LU_x/U|$ (L 表波長) 目前約為 0.01, 因此在以下的討論中, 我們將忽略所有含 U_x 的項。此一作法亦為 Wu (2004) 所採用 (見 Mei, Stiassnie & Yue (2005)), 且不會影響阻塞現象之發生。

當考慮上述平均流之存在時, 完全非線性波在自由表面上的運動邊界條件可表為

$$\eta_t + (\phi_x + U)\eta_x = \phi_y \quad \text{at } y = \eta, \quad (2.2)$$

另一方面, 由 chain rule of differentiation

$$\tilde{\psi}_x = (\psi_x + \psi_y \eta_x)|_{y=\eta}, \quad (2.3)$$

其中有加 tilde 的符號表在 $y = \eta$ 處隨 x 和 t 變化之函數 (以下類同)。應用 (2.1) 和 (2.3), 原來的邊界條件 (2.2) 即可改寫為

$$\eta_t + U\eta_x + \tilde{\psi}_x = 0. \quad (2.4)$$

上式與 Clamond & Grue (2001) 之結果比較顯示, 當流的變化極緩慢時, 描述波浪運動的微分方程式之形式將與吾人將座標系統以當地流速之負值移動相同, 因此接下來我們先考慮沒有流情況下波在自由表面上之動力邊界條件, 然後再將座標系統以 $-U$ 的速度移動, 來獲得其最後的結果。

當流不存在時，由 Bernoulli's equation 可獲得完全非線性波在自由表面上的動力邊界條件為

$$\phi_t + g\eta + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\phi_y^2 + \frac{p}{\rho} = 0 \quad \text{at } y = \eta, \quad (2.5)$$

其中 ρ 表水的密度, p 表自由表面上的壓力 (乃為一定值或為一事先給定之函數), g 表重力加速度。上式若考慮由 chain rule of differentiation 所獲得之

$$\tilde{\phi}_t = (\phi_t + \phi_y \eta_t)|_{y=\eta}, \quad \tilde{\phi}_x = (\phi_x + \phi_y \eta_x)|_{y=\eta}$$

及 (2.3) 式, 並應用流不存在時之 (2.2) 式, 可改寫為

$$\tilde{\phi}_t + g\eta + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_x^2 - \tilde{\psi}_x^2 + 2\eta_x \tilde{\phi}_x \tilde{\psi}_x}{1 + \eta_x^2} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = 0.$$

此一方程式即為 Clamond & Grue (2001) 中之 (2.1) 式, 但如今因考慮流的存在, 需將它改寫為

$$\tilde{\phi}_t + U\tilde{\phi}_x + g\eta + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_x^2 - \tilde{\psi}_x^2 + 2\eta_x \tilde{\phi}_x \tilde{\psi}_x}{1 + \eta_x^2} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = 0 \quad (2.6)$$

(參考 (2.4) 下面一段文字的說明)。

在上式與 (2.4) 中, 所有未知變數僅為 t 和 x 的函數, 由於這些函數為單值函數, 故 (2.4) 和 (2.6) 僅能適用於 non-overtaking waves。將此兩個方程式對 t 做數值積分, 即可獲得 η 和 $\tilde{\phi}$ 隨時間變化的解 (此兩個方程式因而被稱為 evolution equations or prognostic equation), 而為達到此目的, 我們尚須應用複變函數的理論及 $\tilde{\phi}$ 和 η 來決定 $\tilde{\psi}$, 並將其代入 (2.4) 和 (2.6)。

首先, 由複變函數理論中之 Cauchy integral theorem 可知

$$\phi + i\psi = \frac{1}{\pi i} \text{PV} \oint_C \frac{dz'}{z' - z} (\phi' + i\psi'), \quad (2.7)$$

其中 PV 代表 Cauchy principle value, C 表在複數 $z = x + iy$ 平面上一封閉曲線, 而在此曲線內及其上, 複變函數 $\phi + i\psi$ 乃為一 analytic function。上式中 $\phi' = \phi(z', t)$, $\phi = \phi(z, t)$, etc, 但 z 亦位在 C 上, 故上式中的積分需為 Cauchy principle value。由於目前所考慮的波為深水波, 故可令 C 包含自由表面 C_f 及由其向下延伸至無窮遠之半圓曲線 C_∞ 兩者, 但在 C_∞ 上之積分為零, 故 (2.7) 可化簡為

$$\tilde{\phi} + i\tilde{\psi} = \frac{1}{\pi i} \text{PV} \int_{C_f} \frac{dz'}{z' - z} (\tilde{\phi}' + i\tilde{\psi}'). \quad (2.8)$$

由於沿著自由表面積分時

$$dz' = dx' + i\eta_x dx' = (1 + i\eta_x)dx', \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{1 + i\frac{\eta'_x - \eta}{x' - x}} \frac{1}{x' - x} = \frac{1 - iD}{1 + D^2} \frac{1}{x' - x} \quad (2.10)$$

其中 $D = (\eta' - \eta)/(x' - x)$, 因此將 (2.9) 和 (2.10) 代入 (2.8), 並將實部與虛部分開後, 可得

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\tilde{\phi}' - \eta'_x \tilde{\psi}') - \tilde{\psi}' - \eta'_x \tilde{\phi}'}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}' - \eta'_x \tilde{\psi}' + D(\tilde{\psi}' + \eta'_x \tilde{\phi}')}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}. \quad (2.12)$$

需注意的是, 上面兩個式子和 (2.8) 表面上相差一個符號, 但實際相同, 此乃因原來的封閉曲線 C 是逆時針方向, 而 (2.11) 和 (2.12) 之積分方向則對應到一個順時針方向之封閉曲線。

當 η 和 ϕ 已知, 由上面兩個積分式中任何一個即可決定 $\tilde{\psi}$, 但皆需應用 iteration 的方法 (因在此兩個方程式中, $\tilde{\psi}$ 皆出現在其積分符號內)。此一 iteration 所需的時間將佔求非線性波數值解之最主要的一部分, 類似的情況亦發生在任何其他求解非線性波的數值方法中, 故 Clamond & Grue (2001) 接下來發展出一種可大幅降低計算時間的方法, 此一方法應用於 (2.11) 比應用於 (2.12) 穩定, 因此 Clamond & Grue (2001) 先將 (2.11) 改寫為另一種形式。

由於當 $|x' - x| \rightarrow \infty$ 時, D 將以 $|x' - x|^{-1}$ 之速率衰減, 故應用 integration by parts 可知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\arctan(D)] \tilde{\phi}'_x dx' = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}'}{1 + D^2} \left[\frac{\eta'_x}{x' - x} - \frac{D}{x' - x} \right] dx',$$

因此 (2.11) 可改寫為

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} = & -\frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}'}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'_x \tilde{\phi}'_x}{x' - x} dx' - \frac{\eta}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}'_x}{x' - x} dx' \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\arctan(D) - D] \tilde{\phi}'_x dx' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta'_x) \tilde{\psi}'}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

上式中最後兩項乃爲 regular integrals, 前三項則爲 singular integrals, 但具有 Hilbert transform 的形式, 後者定義爲

$$\mathcal{H}\{f\} = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx', \quad \mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}.$$

故 (2.13) 又可改寫爲

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \mathcal{H}\{\tilde{\phi}\} + \eta\tilde{\phi}_x + \mathcal{H}\{\eta\mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\}\} \\ & - \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\arctan(D) - D] \tilde{\phi}'_x dx' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta'_x) \tilde{\psi}'_x}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}\right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

另外, 由於在 evolution equations (2.4) 和 (2.6) 中僅含 $\tilde{\psi}_x$, 未含 $\tilde{\psi}$ 本身, 故 Clamond & Grue (2001) 再將上式對 x 微分, 得到

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x = & \mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\} + \partial_x\{\eta\tilde{\phi}_x\} + \partial_x\{\mathcal{H}\{\eta\mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\}\}\} \\ & + \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^2(D - \eta_x) \tilde{\phi}'_x}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta_x) \tilde{\psi}'_x}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x}\right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中等號右邊第一項曾應用 integration by parts, 最後一項除應用 integration by parts 外, 亦應用關係式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D(D - \eta'_x)}{1 + D^2} \frac{1}{x' - x} \right] = - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{D(D - \eta_x)}{1 + D^2} \frac{1}{x' - x} \right]$$

在 (2.15) 中, Hilbert transforms 可應用 fast Fourier transform 獲得 (參見李 1997), 而對 x 微分的項亦可在 Fourier space 內進行, 故其計算極迅速且準確。另一方面, 在 (2.15) 中的兩個 regular integrals, 因其分母包含 $x' - x$, 分子包含 D , 故其被積分函數的大小在遠方分別以 $|x' - x|^{-3}$ 和 $|x' - x|^{-2}$ 的速率衰減, 因此在 (2.15) 中的兩個積分之積分範圍, 可由 $[-\infty, +\infty]$ 縮小爲 $[x - \lambda, x + \lambda]$, 其中 λ 的值可視需要加以調整, 但此一調整與計算領域的大小無關。

值得注意的是, 上述兩個 regular integrals 皆含 η_x , 而非 η'_x , 由於在波峰和波谷處, $\eta_x = 0$, 故在波峰與波谷處求解時, 此兩個 regular integrals 之被積分函數改以 $|x' - x|^{-4}$ 和 $|x' - x|^{-3}$ 的速率衰減, 表上述將積分範圍縮小之近似方法在波峰和波谷附近將更準確。

應用(2.15) 式之另一項優點是, 其 regular integrals 代表較高階之非線性項, 再加上

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{D}{1 + D^2} \frac{D - \eta_x}{x' - x} = \frac{1}{2} \frac{\eta_x \eta_{xx}}{1 + \eta_x^2},$$

而在深水波中, η_x 和 η_{xx} 一般為 out of phase, 故它們的乘積將更小, 因此當未知函數 $\tilde{\psi}'_x$ 亦出現在這些積分之積分符號內, 因而需應用 iteration 方法求解時, 其收斂十分迅速。

第三章 應用 Clamond-Grue method 求近似解

在第二章所介紹的三個控制方程式 (2.4), (2.6) 及 (2.15) 僅含 η , $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 三個未知變數, 且此三個變數皆僅為 x 和 t 的函數, 故由 (2.4), (2.6) 及 (2.15) 可求 η , $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 的解, 然後再應用 Cauchy's integral formula 求 ϕ 和 ψ 在水面以下的解, 但所有這些解皆無法用解析方法獲得, 故需應用數值方法求其近似。

首先, 當 η 和 $\tilde{\phi}$ 之起始值給定後, 欲應用 iteration 方法決定 (2.15) 的解 $\tilde{\psi}$, 可先選擇其 initial guess 為

$$\tilde{\psi}_{2,x} = \mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\} + \partial_x\{\eta\tilde{\phi}_x\} + \mathcal{H}\partial_x\{\eta\mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\}\}. \quad (3.1)$$

由於

$$\partial_x\{\mathcal{H}\{\eta\mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\}\}\} = \mathcal{H}\partial_x\{\eta\mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\}\}$$

故 (3.1) 實際代表 (2.15) 之二階近似。另外, Clamond & Grue (2001) 亦考慮三階近似

$$\tilde{\psi}_{3,x,\lambda} = \tilde{\psi}_{2,x} - \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{D(D-\eta_x)}{x'-x} \mathcal{H}\{\tilde{\phi}'_x\} dx'\right\}, \quad (3.2)$$

甚至四階近似

$$\tilde{\psi}_{4,x,\lambda} = \tilde{\psi}_{2,x} - \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{D(D-\eta_x)}{1+D^2} (\tilde{\psi}'_{2,x} - D\tilde{\phi}'_x) \frac{dx'}{x'-x}\right\}. \quad (3.3)$$

上述三個方程式皆屬 explicit, 故可直接求解, 而不需應用 iteration 方法, 因此可節省大量計算時間。其準確度根據 Clamond & Grue (2001) 的計算, 當 $\eta_x < 0.5$ 時, (3.2) 可十分準確地預測非線性波的變化, 而當 $\eta_x \approx 1$ 時, (3.2) 雖變為有些不準確, 但 (3.3) 仍可提供甚佳的結果。然而由於目前所模擬的現象較複雜, 且模擬的時間較長, 故為獲得更準確的解, 我們將 (3.3) 的解視為 iteration 過程中之第一個解 (記為 $\tilde{\psi}_{x,\lambda,1}$), 隨後用它來取代 (3.3) 中之 $\tilde{\psi}'_{2,x}$, 然後獲得 iteration 過程中之第二個解 $\tilde{\psi}_{x,\lambda,2}$, 並重複此一過程, 因此

$$\tilde{\psi}_{x,\lambda,j+1} = \tilde{\psi}_{2,x} - \mathcal{H}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{D(D-\eta_x)}{1+D^2} (\tilde{\psi}'_{x,\lambda,j} - D\tilde{\phi}'_x) \frac{dx'}{x'-x}\right\}. \quad (3.4)$$

上述過程將重複至每一點上的 $|\tilde{\psi}_{x,\lambda,j+1} - \tilde{\psi}_{x,\lambda,j}|$ 皆小於 1.0×10^{-15} 為止, 此一標準若獲得滿足, 應可確保所獲得的結果之準確性, 但因 λ 為有限值 (目前的選擇為 $\lambda = 2L$),

再加上各種數值誤差及不穩定現象, 故當 η_x 較大時, 此一標準有時難以達成, 因此我們另將 iteration 的次數限制為 500 次。此一限制以及 λ 大小的選擇是否適當, 我們在後面將經由與其他選擇所獲得的結果比較來加以瞭解。

當任何時間之 $\tilde{\psi}_x$ 由同時間之 η 和 $\tilde{\phi}_x$ 決定後, 即可應用數值積分法解 (2.4) 和 (2.6), 求得下一個時間點上之 η 和 $\tilde{\phi}_x$, 如此持續下去即可獲得波浪場隨時間變化的解。然而為了避免應用較不穩定之數值微分的方法, Clamond & Grue (2001) 將 (2.4) 和 (2.6) 先對 x 微分, 再進行富氏轉換 (Fourier transform), 並將所有對 x 二次微分項改在 Fourier space 內進行。此一做法, 當應用 fast Fourier transform, 可使計算準確且有效率, 因此原來的 (2.4) 和 (2.6) 又可改寫為

$$\partial_t \mathcal{F}\{\eta_x\} = -ik\mathcal{F}\{\tilde{\psi}_x\} - ik\mathcal{F}\{U\eta_x\} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{F}\{\tilde{\phi}_x\} = & -g\mathcal{F}\{\eta_x\} - \mathcal{F}\{\tilde{p}_x/\rho\} - ik\mathcal{F}\left\{\frac{\tilde{\phi}_x^2 - \tilde{\psi}_x^2 + 2\eta_x\tilde{\phi}_x\tilde{\psi}_x}{2(1+\eta_x^2)}\right\} \\ & - ik\mathcal{F}\{U\tilde{\phi}_x\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\mathcal{F}$ 表富氏轉換。

當應用FFT 將 (3.5) 和 (3.6) 之等號右邊的值決定後, 對每一個 k 可應用數值積分法 fourth-order Runge-Kutta scheme 求下一個時間點上之 $\mathcal{F}\{\eta_x\}$ 和 $\mathcal{F}\{\tilde{\phi}_x\}$ 值, 再應用逆富氏轉換獲得 η_x 和 $\tilde{\phi}_x$, 如此即完成一個時間階段之計算, 而重複此一步驟, 即可獲得後續時間點上的解。

由於 Runge-Kutta scheme 為 strongly stable, 故只要其時間間隔足夠小, 其近似解之誤差不會無限增大, 但在有非線性項存在情況, 一種鋸齒狀不穩定現象將產生極大的誤差, 故需特別加以說明及處理。

第四章 化減鋸齒狀不穩定現象

以往各種計算非線性波數值解的方法皆會產生一種鋸齒狀不穩定現象，此一現象在目前之 Clamond-Grue method 中亦存在 (見圖 1a)。為化減此種不穩定現象，以往皆採用 moving average 或與其相當之 low-pass filter 的方法，將波數極大的擾動消去，但此種做法，如 Clamond & Grue (2001) 所說，不僅使波數大的分量消去，亦使波數小的分量損失能量，故當數值模擬了很長一段時間後，波的能量將完全消失 (見圖 1b)。有鑒於此，Clamond & Grue (2001) 改用一種‘de-aliased’ computations 方法，此種方法我們在下面引用 Canuto *et al.* (1987) 第三章的內容來加以說明。

由於在 (3.1)-(3.6) 中，所有非線性項均將從事富氏轉換 (Hilbert transform 及對 x 微分亦應用 FFT 來達成)，故若以

$$w(x) = u(x)v(x) \quad (4.1)$$

為例，且假設各變數乃周期為 2π 之函數，則 $w(x)$ 之富氏轉換

$$\hat{w}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n, \quad (4.2)$$

其中

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) e^{-ikx} dx, \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{u}_m e^{imx} \\ v(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_n e^{inx} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

(4.2) 即為 convolution sum，但因 $\hat{u}_m$ 和 $\hat{v}_n$ 實際是經由在一個周期內取 N 個點來進行離散富氏轉換所獲得，故 (4.2) 改為

$$\hat{w}_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n, \quad (4.5)$$

其中 $|k| \leq N/2$ 。由 (4.5) 可看出，若直接經由 convolution sum 來獲得 $\hat{w}_k$ ，則所需之運算次數約為 $O(N^2)$ 。此一情況將使大範圍及長時間數值模擬不可行，故在 Clamond-

Grue method 中不直接用 (4.5) 求 $\hat{w}_k$, 而是先進行逆富氏轉換

$$\left. \begin{aligned} U_j &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx_j} \\ V_j &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{v}_k e^{ikx_j} \end{aligned} \right\} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.6)$$

再求

$$W_j = U_j V_j \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.7)$$

最後做富氏轉換獲得

$$\hat{W}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} W_j e^{-ikx_j} \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1, \quad (4.8)$$

其中 $x_j = 2\pi j/N$.

上述過程所需之運算次數僅為 $O(N \log N)$, 故當 N 很大時, 此一過程比直接用 (4.5) 可省大量計算時間。然而因

$$\begin{aligned} \hat{W}_k &= \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n \\ &= \hat{w}_k + \sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n \end{aligned} \quad (4.9)$$

(參見 Canuto et al. (1987)), 故此一過程將產生 aliasing error, 而為消去此一誤差, 我們將 (4.6) 和 (4.7) 改為

$$\left. \begin{aligned} U_j &= \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \check{u}_k e^{ikx_j} \\ V_j &= \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \check{v}_k e^{ikx_j} \end{aligned} \right\} \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.10)$$

$$W_j = U_j V_j \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.11)$$

其中 $M \geq 3N/2$, $x_j = 2\pi j/M$, 而

$$\check{u}_k = \begin{cases} \hat{u}_k & |k| \leq N/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.12)$$

此時再令

$$\check{W}_k = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} W_j e^{-ikx_j} \quad k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad (4.13)$$

則

$$\check{W}_k = \sum_{m+n=k} \check{u}_m \check{v}_n + \sum_{m+n=k \pm M} \check{u}_m \check{v}_n. \quad (4.14)$$

由於我們原本只對 $k \leq N/2$ 之 $\check{W}_k$ 有興趣，故對這些 $\check{W}_k$ ，當 $M \geq 3N/2$ 時，上式中最後一項乃完全消去（因 (4.12) 式），因此 (4.10)-(4.13) 代表一種‘de-aliased’ computations。

上述消去 aliasing error 方法中最主要的關鍵是將波譜 $\hat{u}_k$ 和 $\hat{v}_k$ 用零來延伸至波數較大的部份，但上述延伸 $3/2$ 倍做法僅能消去 2 次非線性項所產生的 aliasing error，而根據 Clamond & Grue (2001)，欲消去 3 次項所產生之 aliasing error，波譜需被延伸 $4/2$ 倍。然而由於在 (3.6) 中包含 $(1 + \eta_x^2)^{-1}$ ，故 (3.6) 之非線性並非有限次數，另外在 (3.4) 中亦包含 $(1 + D^2)^{-1}$ ，且需重複計算，因此目前若要考慮完全非線性波，則不論波譜被延伸多長，aliasing error 仍將發生，但目前將波譜延伸 2 倍的做法，仍可達到 partially de-aliasing 的效果，因此在下面的計算中，若計算時間不長且波高不大，鋸齒狀不穩定現象將如圖 1c 所示，幾乎無法顯現，而當計算時間很長且波高較大時，鋸齒狀振盪終將出現，但仍可獲得有意義之結果。

第五章 測試電腦程式

應用第三章和第四章的方程式及方法，即可設計目前所需之電腦程式，但仍需先決定流速 $U(x)$ 和壓力 $\tilde{p}(x, t)$ 的分佈。目前我們定 $U(x)$ 的分佈如圖2所示，圖內中間直線乃為 $U = -0.001x \text{ ms}^{-1}$ ，而其兩側直線則為使 U 在 $x = \pm 4096 \text{ m}$ 處歸於零，如此方可使 U 的富氏轉換可經由一有限積分達成。

圖2中的 $U(x)$ 乃為一奇函數，且它代表一個在原點兩邊皆朝原點方向流情況，因此當我們在原點上，自某一個時刻起，應用一氣壓造波機 (pneumatic wavemaker) 造波，則波將從原點向左右兩方行進，而根據線性波的理論，當波的頻率定為 $n_0 = 1.225 \text{ rads}^{-1}$ ，波將在 $x = \pm 2000 \text{ m}$ 處被阻塞及反射。目前儘管波為非線性，但此一波列仍可能在離此點不遠處被阻塞，故波亦和流一樣被局限於 $-4096 \leq x \leq 4096 \text{ m}$ 範圍內，因此在第三章公式內之所有富氏轉換皆可用有限富氏轉換取代(或將各函數視為一周期等於 8192 m 之周期函數)。若我們進一步令氣壓造波機為一個偶函數，則各函數將或為奇函數，或為偶函數，故上述有限積分範圍可進一步縮小為 $0 \leq x \leq 4096 \text{ m}$ ，因而可節省大量電腦計算時間及記憶容量。

目前我們亦採用和Clamond & Grue (2001) 相同之氣壓造波機，亦即當 $t < 0$ 時， $\tilde{p} = 0$ ，而當 $t \geq 0$ 時

$$\mathcal{F}\{\tilde{p}_x/\rho\} = ia \frac{g}{\omega} \sqrt{gk_0} \exp\left(\frac{k_0^2 - k^2}{2k_0^2}\right) \left(\frac{k}{k_0}\right)^{3/2} \sin(\sqrt{gk_0}t), \quad (5.1)$$

其中 a 將為其所產生的波在原點附近時之振幅， k_0 則為其 wave-number，而 $\omega^2 = g|k|$ 。上式乃為 k 之奇函數，故 $\tilde{p}_x/\rho$ 亦為 x 之奇函數，表 $\tilde{p}/\rho$ 確為偶函數。目前 a 的大小將視情況選擇不同的值，但 k_0 則固定為 $0.153125 \text{ radm}^{-1}$ ，此一wave-number 當波為線性波且 $U = 0$ 時，其頻率等於上述之 1.225 rads^{-1} 。

將(5.1) 代入 (3.6)，並應用第三章和第四章所敘述的方法即可計算非線性波行進在一個大尺度流上所產生的變化，但在完成電腦程式設計，要進行實際模擬前，為了要測試目前所設計的電腦程式是否有誤，我們先將程式中的 U 值改為零，然後加以計算，再將其結果和 Stokes waves 之解析解比較。圖3中的實曲線即為輸入不同的 a 值所獲得的數值解，而虛線則代表頻率同樣為 1.225 rads^{-1} 之線性波的解析解。比較實線與虛線可看出，當 ak_0 值愈大時，兩種解之波長相差愈大，然而當我們改用 Stokes waves 之第三階近似 $n_0^2 = gk(1 + k^2a^2)$ 來決定其 wave-number k ，則圖4顯示，在我們所選擇的 a 值中，不論 ak_0 值為何，數值解和解析解之波長皆十分接近。另外，我們用 Stokes waves

之 profile 的第三階近似

$$\eta = a \cos kx + \frac{1}{2}ka^2 \cos 2kx + \frac{3}{8}k^2a^3 \cos 3kx$$

來改善圖4中的虛線，可得圖5。由圖5可發現，其數值解和解析解在波谷處符合的程度較圖4佳（特別是在 ak_0 較大時），且當 ak_0 較大時，兩種解皆顯現波峰較尖，波谷較平此一非線性波之特徵，表目前的電腦程式在模擬波之非線性效應方面的設計應屬正確。

當測試完非線性效應之模擬後，接下來我們將測試電腦程式中模擬波流交互作用方面的設計，為達到此目的，我們將(5.1)中的 a 值定為極小，因而可將數值計算結果與 Shyu & Phillips (1990) 之線性波被流阻塞及反射現象的解析解比較。此一做法之所以可行，乃因在(3.5)和(3.6)內， U 僅出現在波之線性項中，故有關波流交互作用與非線性效應之電腦設計可分開測試。

在圖6中粗線代表應用目前的電腦程式，且令 $a = 0.000001$ m，並計算到 $t = 50$ min. 所獲得之結果，而細線則為應用 Shyu & Phillips (1990) 之解析解，並選擇其適當時間原點及一個與其絕對振幅有關之未定係數的值，來使其與數值解在阻塞點相等所獲得的結果。由圖6我們可發現數值解和解析解在阻塞點附近緊密相合，而在遠離阻塞點區域，數值解和解析解亦定性上相符（例如兩者皆明顯由兩種不同波長的波疊加而成，且疊加後之波峰與波谷位置在兩種解中完全相同），僅定量上有差異。這些差異可能和我們在(2.4)和(2.6)中忽略所有包含 U_x 的項有關，這些項在 Shyu & Phillips (1990) 之理論中皆加以考慮，且由他們的理論可知，這些項僅影響振幅的緩變，而不會影響波長的變化，故圖6的結果令我們對目前電腦程式中與 U 有關的設計有信心，且我們確定，即使在控制方程式中忽略所有包含 U_x 的項，應用這些方程式我們仍可探討波被流阻塞現象，並在阻塞點附近獲得定量之結果。

第六章 非線性波被流阻塞現象數值解

當針對有流情況應用 Clamond-Grue method 所設計之電腦程式完成後，我們即應用它來模擬各種不同入射波振幅（亦即不同 a ）情況下，波被流阻塞現象，以瞭解非線性效應對此一現象之影響。

圖 7 中，當 $a = 0.01$ m 時，其波形與圖 6 之線性波波形仍相似，但兩者發生在不同的時間，表目前的數值解在振幅較小時，在各點皆如預期以相同的頻率振盪。然而，當 a 逐漸增大時，阻塞點的位置逐漸往上游 $|U|$ 較大處移（表阻塞現象延後發生），且其波形與線性波者差異亦逐漸增大。例如當 $a = 0.05$ m 時，在離阻塞點較遠處之波形，即使仍具有一列短波行進在一列長波上之特徵，但在某些位置上會出現一些特別高的尖峰，其原因可能和波受流影響，使振幅增加，波長減小（波被反射後，波長將變為更小）所產生之高度非線性有關，故其發生並非穩定（見圖 8 和圖 9），此點與在阻塞點附近始終存在之高波峰伴隨深波谷情況不相同，後者乃穩定存在。

爲了要更增加波的非線性效應，接下來我們針對 a 更大的情況加以計算，獲得圖 10 之結果。此一結果顯示，當振幅增加時，波被流阻塞及反射現象雖延後，但仍發生，然而入射波和反射波線性疊加的情況，亦因高度非線性效應而變得不明顯。爲了要顯示圖 10 的結果仍爲波被流阻塞及反射後所造成，我們亦針對振幅最大者（亦即 $a = 0.1$ m 情況），將其不同時間之水面位移分佈繪於圖 11 和圖 12。由前者我們可看出，在波尚未被流阻塞前，波形乃十分規則（亦即無短波擾動存在），但在波被阻塞在 $x = 2120$ m 附近無法繼續前進以後，在阻塞點（此一名稱在非線性波情況，泛指在如圖 12 之 $x = 2120$ m 附近之位置）下游的波逐漸變得不規則，表有能量被反射為較短的波，然後被流帶往下游，然因波浪尖銳度顯著增加，使非線性效應極顯著，因而在遠離阻塞點區域，波形離入射波和反射波線性疊加情況更遠（與圖 9 相比），甚至先前未被完全化減之鋸齒狀不穩定現象此時亦出現，但其大小不足以掩蓋波浪被阻塞於 $x = 2120$ m 附近（此一位置超過線性波阻塞點約 120 m）之事實。

爲了要顯示圖 12 中之水面位移主要代表真實的波浪運動，而非數值誤差，我們特將 5 個 x 座標值上（其位置在圖 12 中用與圖 13 中相同的符號標示）之水面位移隨時間的變化繪於圖 13。其結果顯示，在目前的數值解中，各點之水面位移確以大約 5 秒（ $\approx 2\pi/1.225$ ）的周期做周期性振盪，其中在遠離阻塞點區域，此種周期性振盪如前面所解釋，並非持久存在，但亦非如數值誤差般不規則變化，而在阻塞點附近，此種周期性振盪則十分穩定（見圖 13 之最下列）。另外圖 13 亦顯示，在阻塞點附近由入射波和反射波疊加所形成的節點亦穩定存在，此種節點，若 U_x 不忽略，將無法存在（參見 Shyu & Tung (1999) 之 figure 17），而如今之存在則亦與 Shyu & Tung (1999) 之理論相符。

在圖13之周期性振盪中也可明顯看出波峰較尖，波谷較平此種非線性波特徵，而爲了要顯示目前的波確爲非線性波，在圖14中我們亦計算 η_x 的值（仍在 Fourier space 內進行）。圖中雖然鋸齒狀不穩定現象被放大，但仍可顯示在阻塞點附近 $|\eta_x|$ 可大至0.7，而在遠離阻塞點區域， $|\eta_x|$ 更超過0.8。必須強調的是，在圖14中，雖 $a = 0.1$ m，故與圖5中之 $a = 1.2$ m相差一個量級，但前者因有流存在，故波行進至阻塞點前，已因振幅加大（至少一倍），波長變短（約爲原來的三分之一），使其wave slope 增大至約爲圖5之二分之一（見圖11），而當它進一步被反射後，其 wave slope 更將遠大於圖5，因此在有流情況，若選用 $a > 0.1$ m之模擬條件，波被流反射後不久將破碎。

當 $a = 0.1$ m，且波行進至阻塞點附近時，解(2.15) 所需之 iteration 有時會達到目前所訂500次之上限。爲了要驗證目前所訂上限適當，我們另以200次爲上限，重新計算，再將其結果與圖12之最下列結果比較，因而獲得圖15。由於圖中兩種結果相差不大，故我們確定目前所訂上限足以滿足需要。另外，在圖16中我們亦將圖12之結果與 iteration 次數僅限於1（故與直接應用 (3.3) 相同）所獲得者相比，發現兩者在阻塞點附近僅定性上相符，故爲準確模擬完全非線性波被流阻塞及反射現象，有必要用 iteration 方法解 (2.15)。

第七章 結論與建議

爲澄清完全非線性波是否亦如線性波，可被流阻塞及反射，我們應用 Clamond & Grue (2001) 之快速計算二維完全非線性波數值解的方法，來解非線性波與二維非旋流交互作用現象。爲簡化問題，我們將流速之導函數 U_x 量定爲很小，使流 locally 可被視爲均勻流，但 U 在波行進過程中終將顯著改變，因此根據線性波理論，波仍將被流阻塞及反射，而目前的數值計算結果顯示，完全非線性波亦可被流阻塞及反射。

當 $|U_x|$ 定爲很小時， $|U|$ 從零增大至足以將波阻塞，需一段很長的距離，因此目前所模擬之空間和時間的範圍均很長，此點將使很多計算完全非線性波之數值方法，因極費時而難以應用，但 Clamond-Grue method 因將 Laplace equation 轉換爲一特殊積分式，使其積分範圍可大幅縮小而仍可獲得準確結果，且當此一積分式應用 iterative scheme 求解時，其收斂極快速，此兩點皆使 Clamond-Grue method 計算十分迅速，因此可被用來解目前的問題。

應用 Clamond-Grue method 所設計之電腦程式經測試後，其計算結果可與 Stokes waves 之解析解及線性波被流阻塞及反射現象解析解十分吻合。另外，在模擬非線性波被流阻塞及反射現象時，其結果亦與改用較小之網格大小及時間間隔所獲得的結果一致，因此目前的數值解應十分可信。

由於我們目前乃研究非線性波被流阻塞問題，而非其振幅緩變問題，故當我們忽略所有包含 U_x 的項時，在數值模擬中所獲得的振幅變化應僅爲一保守估計（因 U_x 在 action conservation equation 中可使入射波在目前的情況下，振幅緩慢增大，其量級與 action equation 中其他項的量級相同，故忽略 U_x 可能使目前所估計之振幅變化量僅大約爲真實值之一半），但即使如此，由目前的數值解我們仍可確定，在阻塞點附近之波高將顯著增大，且會持續出現一高峰伴隨一深谷，此一類似以往人們所觀察到的瘋狗浪之波形，因此瘋狗浪極可能主要在阻塞點附近生成，故要預測瘋狗浪之發生，需先估計阻塞點位置，後者在波與流的方向不一致，或流爲一垂直剪流時，皆會產生很大的變化，因此我們有必要在下一階段，亦針對此兩種情況進行數值模擬。

綜合以上所述，本研究之成果效益有二：一爲澄清以往人們對完全非線性波是否亦可被流阻塞及反射之疑問，故對學術研究有幫助。二爲證實瘋狗浪可因波被流阻塞及反射而引發，故可加以預報，以減少海難之發生。有鑒於此，本計畫後續將應用目前所獲得的結果，對臺灣附近以往所發生的海難進行案例分析，以瞭解它們是否大部份與波被流阻塞及反射現象有關。若有關，則表應用目前的理論及模式，未來可建立一十分有效之瘋狗浪預報系統。

參考文獻

- Canuto, C., Haussaini, M. Y., Quarteroni, A. & Zang, T. A. 1987 *Spectral Method in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer.
- Clamond, D. & Grue, J. 2001 A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *J. Fluid Mech.* **447**, 337–355.
- Dias, F. & Kharif, C. 1999 Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301–346.
- Irvine, D. E. & Tilley, D. G. 1988 Ocean wave directional spectra and wave-current interaction in the Agulhas from the shuttle imaging radar-B synthetic aperture radar. *J. Geophys. Res.* **93**, 15389–15401.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1960 Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J. Fluid Mech.* **8**, 565–583.
- Longuet-Higgins, M. S. & Stewart, R. W. 1961 The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.* **10**, 529–549.
- Mallory, J. K. 1974 Abnormal waves on the south east coast of South Africa. *Int. Hydrog. Rev.* **51**, 99–129.
- Mei, C. C., Stiassnie, M. & Yue, D. K.-P. 2005 *Theory and Applications of Ocean Surface Waves*. Advanced Series on Ocean Engineering, vol. 23, World Scientific.
- Peregrine, D. H. & Smith, R. 1979 Nonlinear effects upon waves near caustics. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **292**, 341–370.
- Shyu, J. H. & Phillips, O. M. 1990 The blockage of gravity and capillary waves by longer waves and currents. *J. Fluid Mech.* **217**, 115–141.
- Shyu, J. H. & Tung, C. C. 1999 Reflection of oblique waves by currents: analytical solutions and their application to numerical computations. *J. Fluid Mech.* **396**, 143–182.
- Smith, R. 1975 The reflection of short gravity waves on a non-uniform current. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78**, 517–525.
- Smith, R. 1976 Giant waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 417–431.

- Tsai, W. T. & Yue, D. K.-P. 1996 Computation of nonlinear free-surface flows. waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 249–278.
- White, B. S. & Fornberg, B. 1998 On the chance of freak waves at sea. *J. Fluid Mech.* **355**, 113–138.
- Wu, G. 2004 Direct simulation and deterministic prediction of large-scale nonlinear ocean wave-field. Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- 李勇榮 1997 波浪調變特性研究, 交通部運輸研究所港灣技術研究中心。

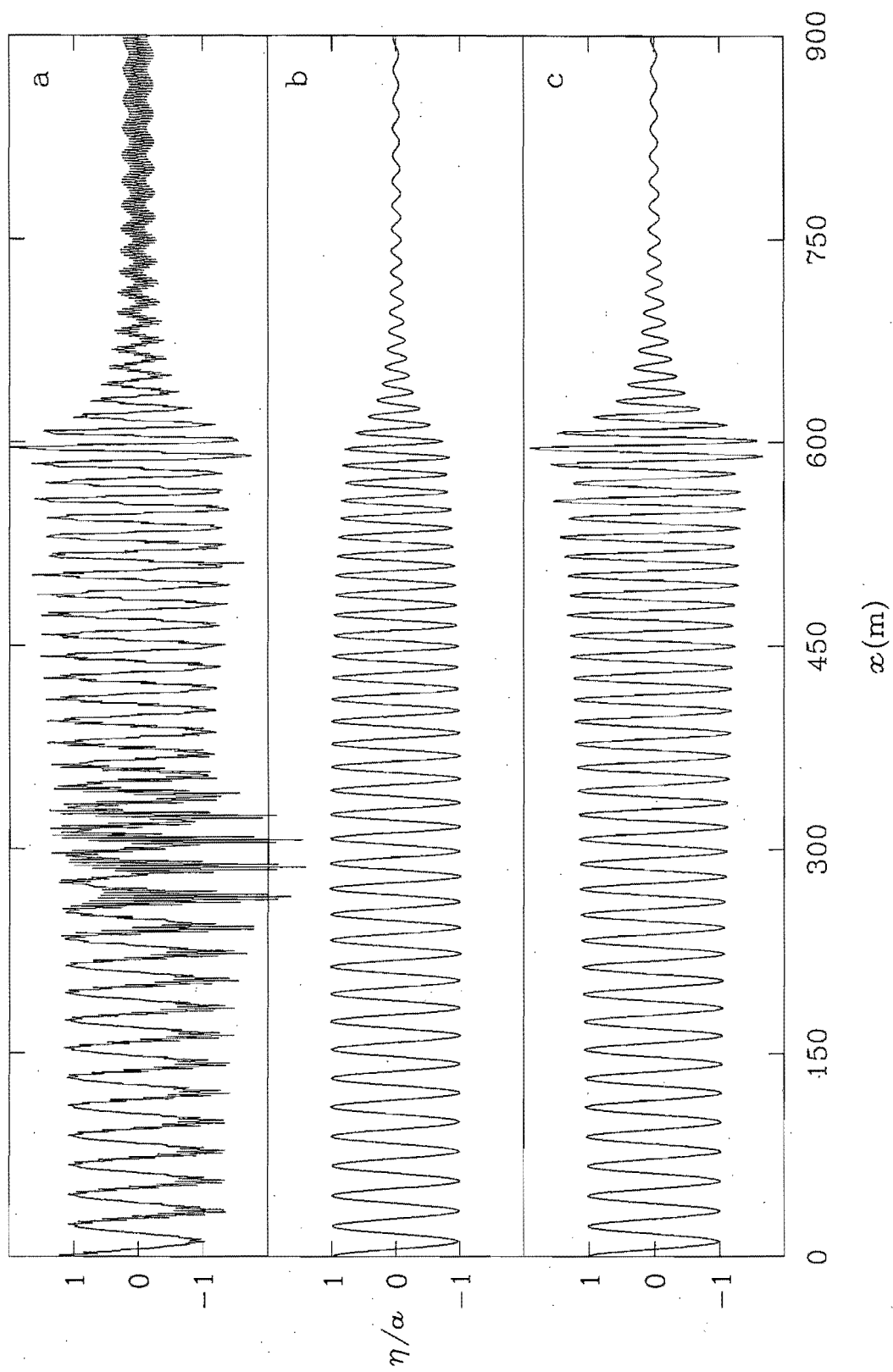


圖1、鋸齒狀不穩定現象減前及不同化減法所產生的結果。

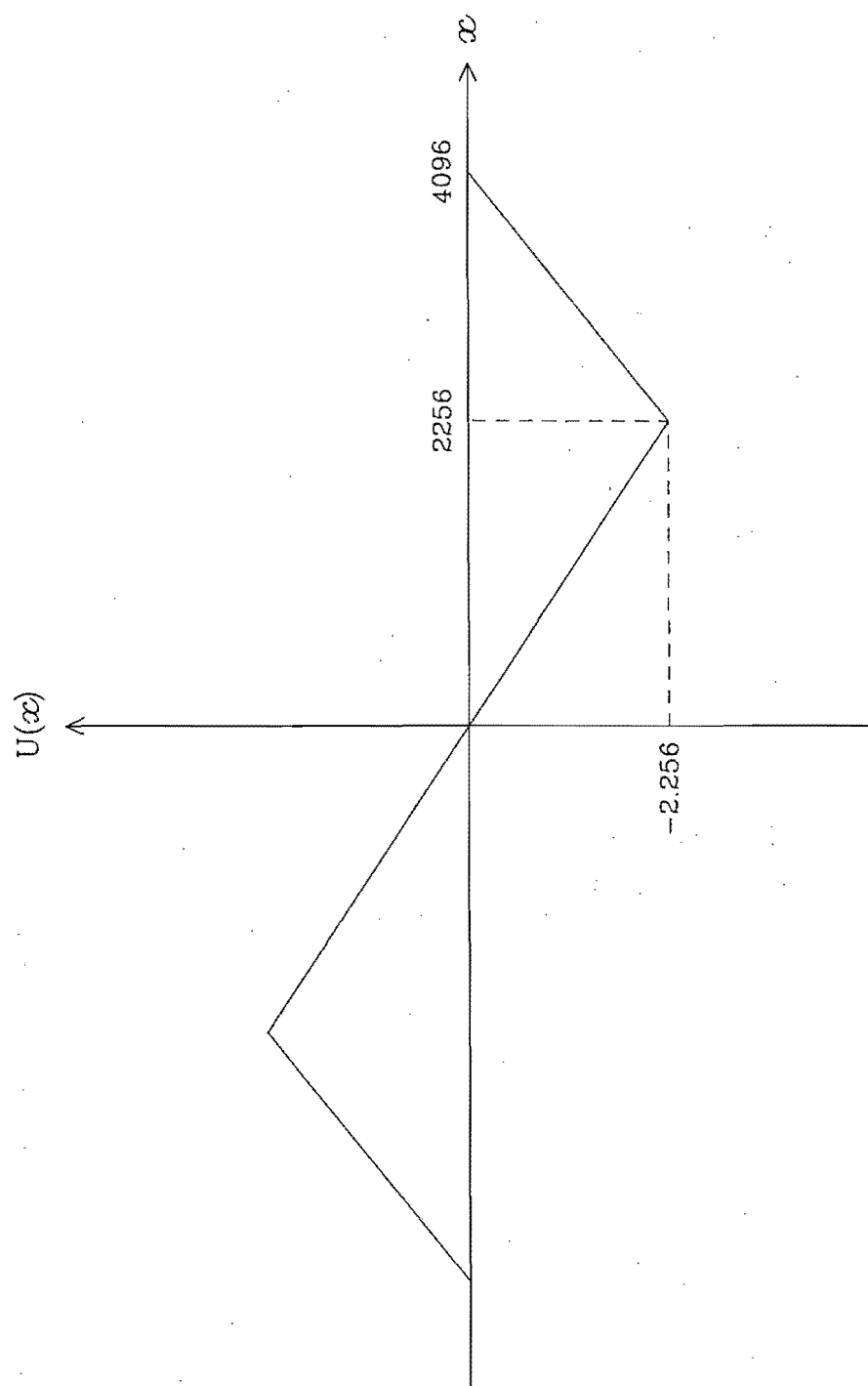


圖2、流速在水平方向變化情形。數字之單位採m.k.s. 制。

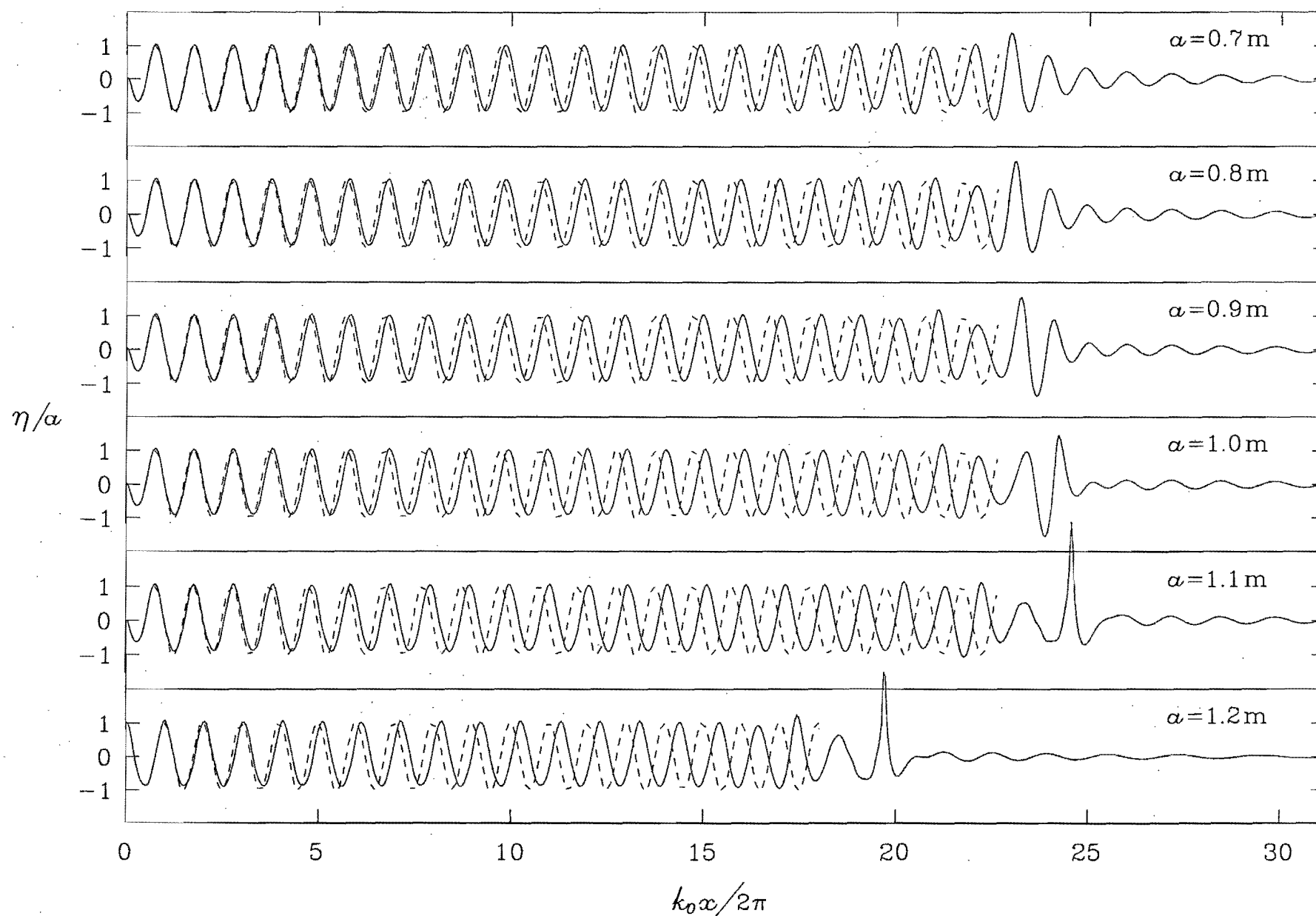


圖3、目前的數值解與線性波解析解之比較。

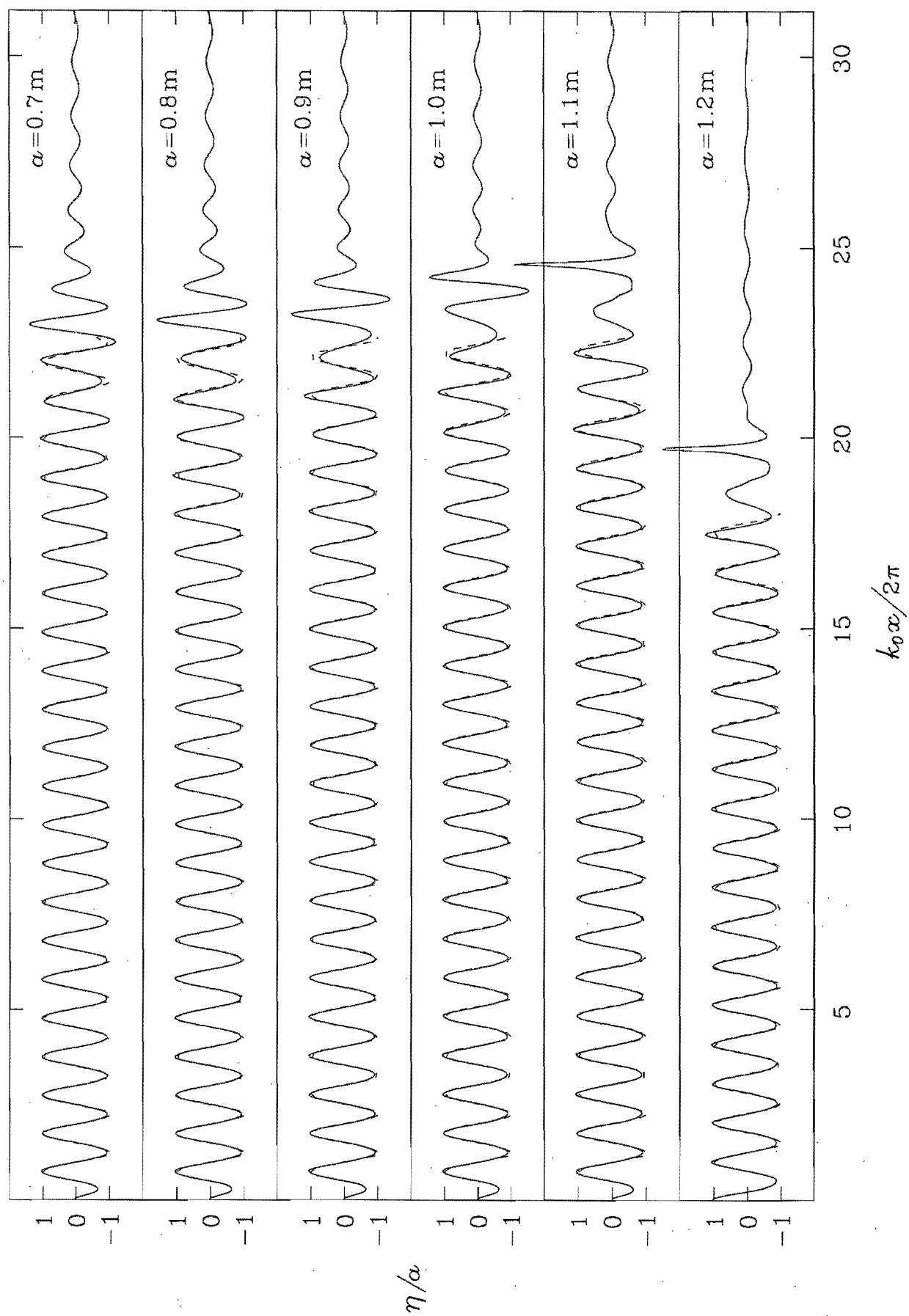


圖 4、與圖 3 相同，但解析解之波長改用 Stokes waves 之第三階近似。

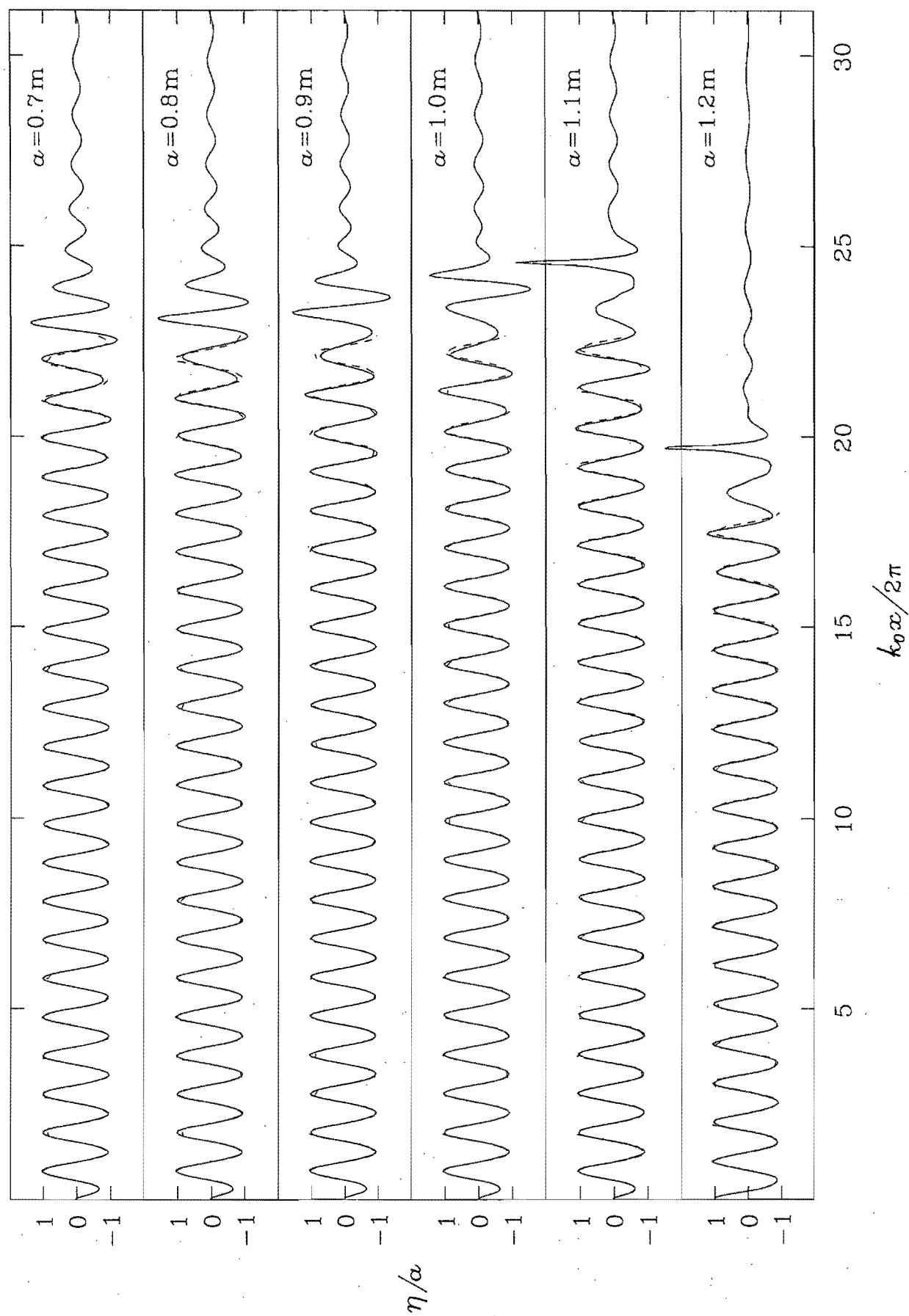


圖5、目前的數值解與Stokes waves 之第三階近似解比較。

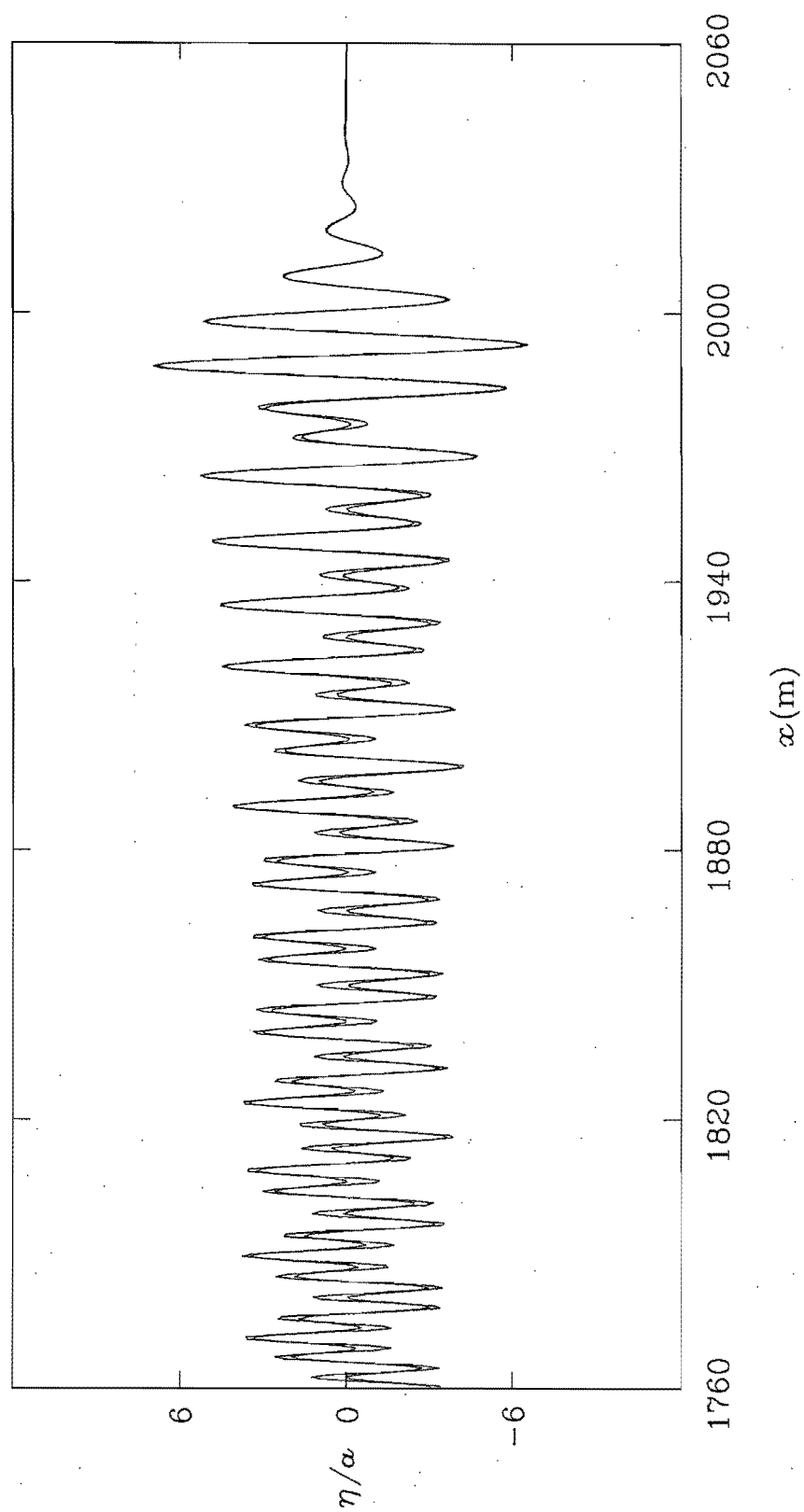


圖6、線性波被流阻塞及反射現象之數值解與解析解比較。

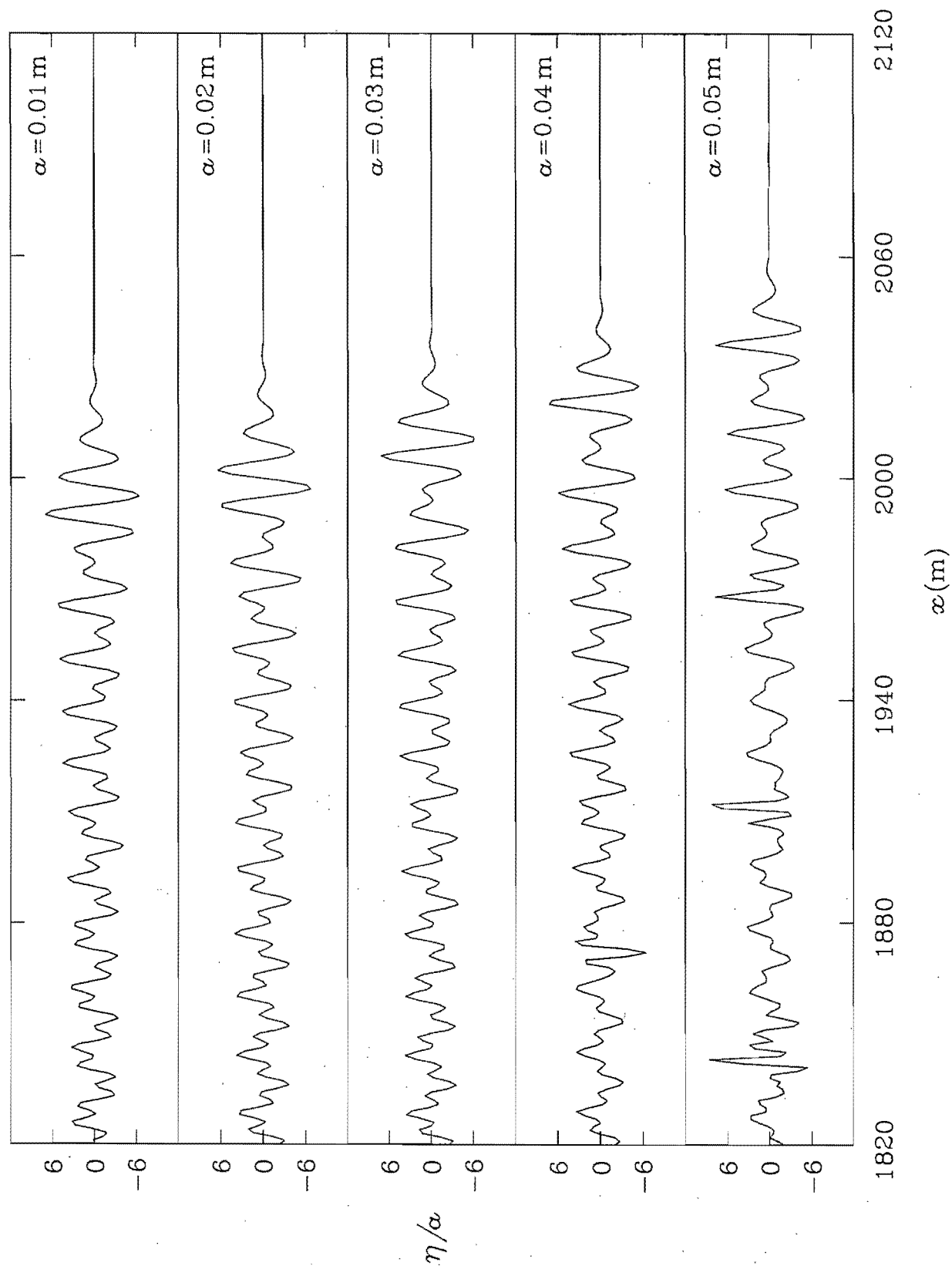


圖7、非線性波被流阻塞及反射現象數值解($t = 2500$ s)。

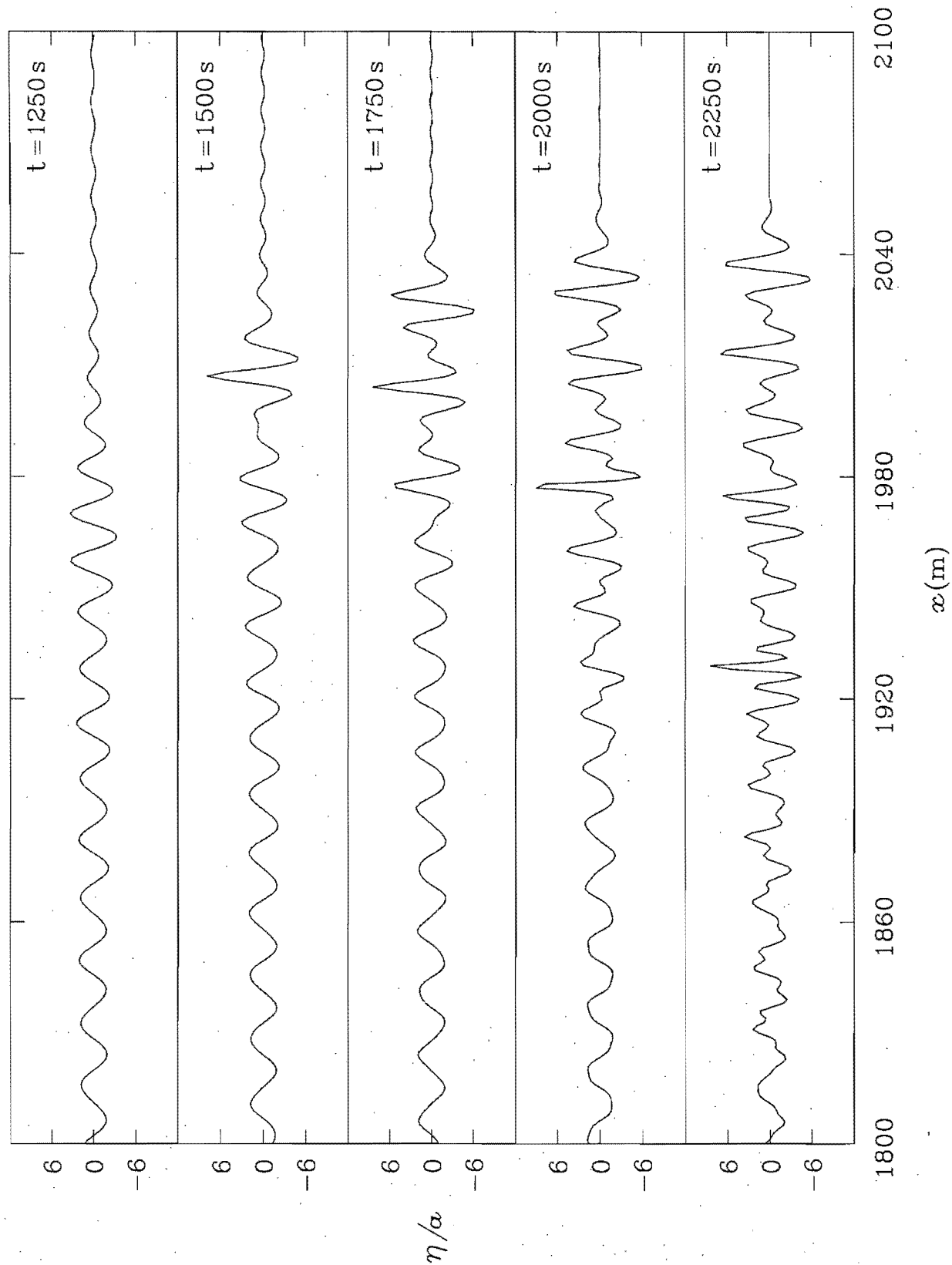


圖8、非線性波被流阻塞及反射現象數值解($a = 0.05$ m)。

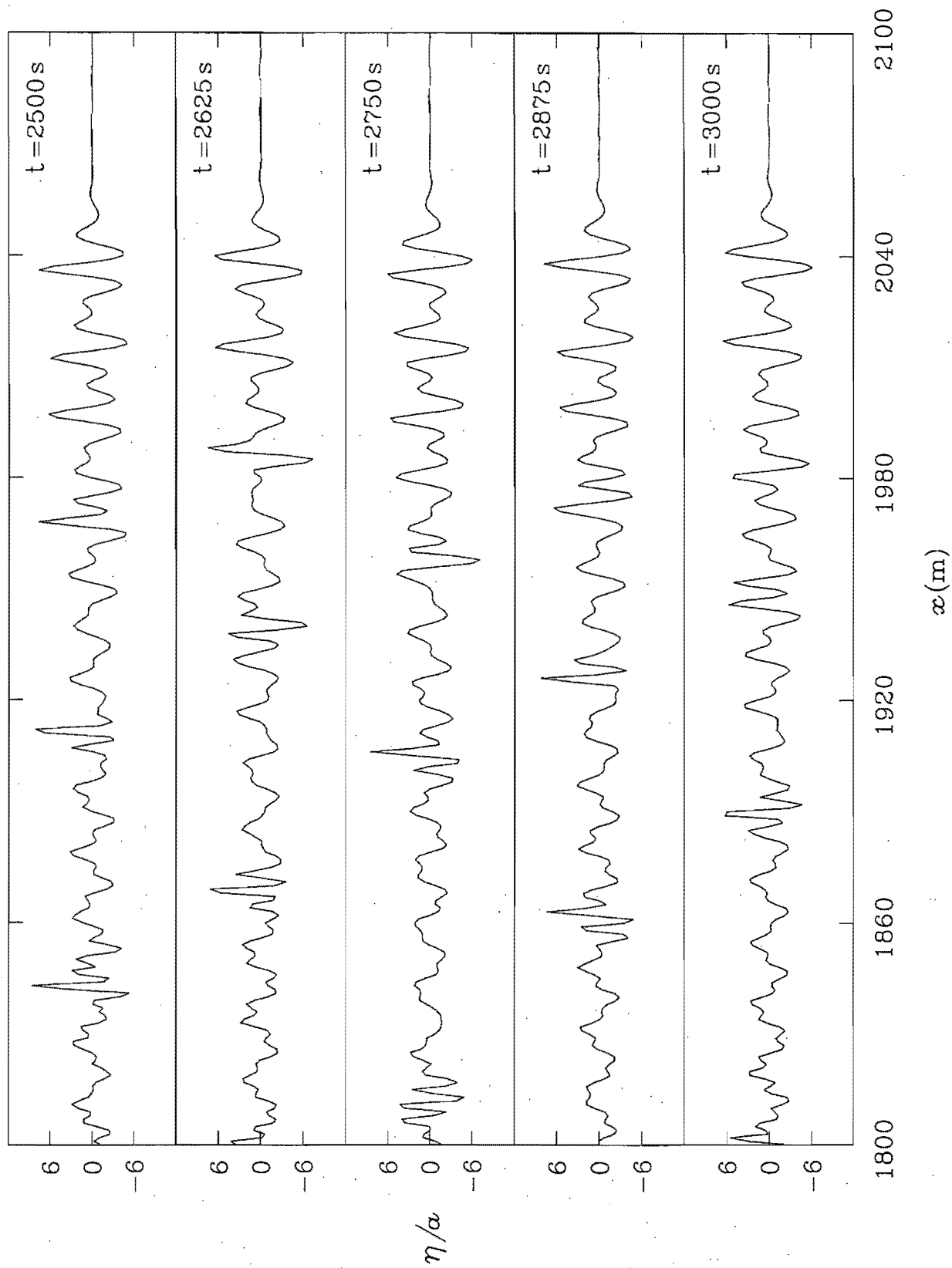
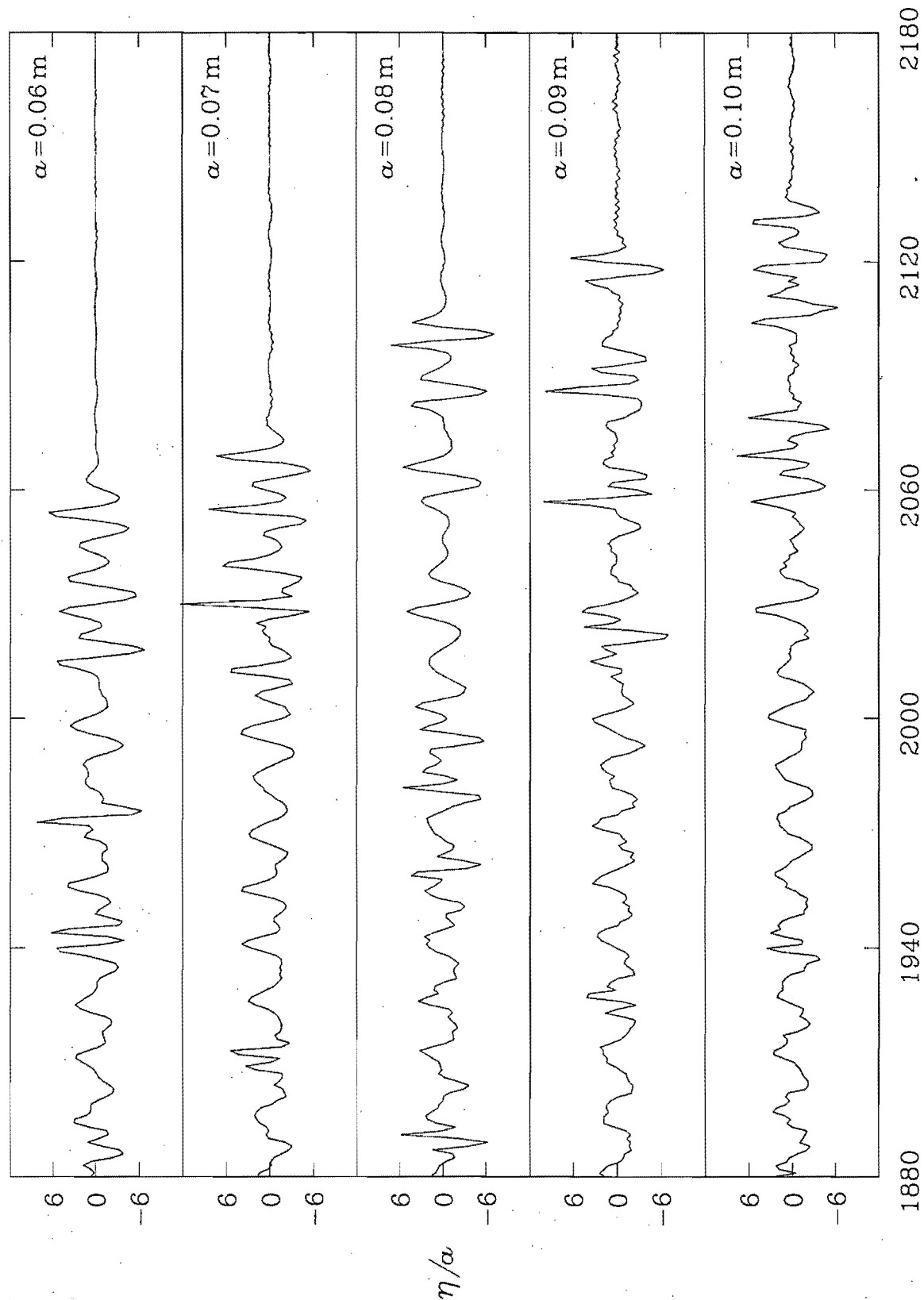


圖9、(延續圖8)。



$x(m)$
圖10、(延續圖7)。

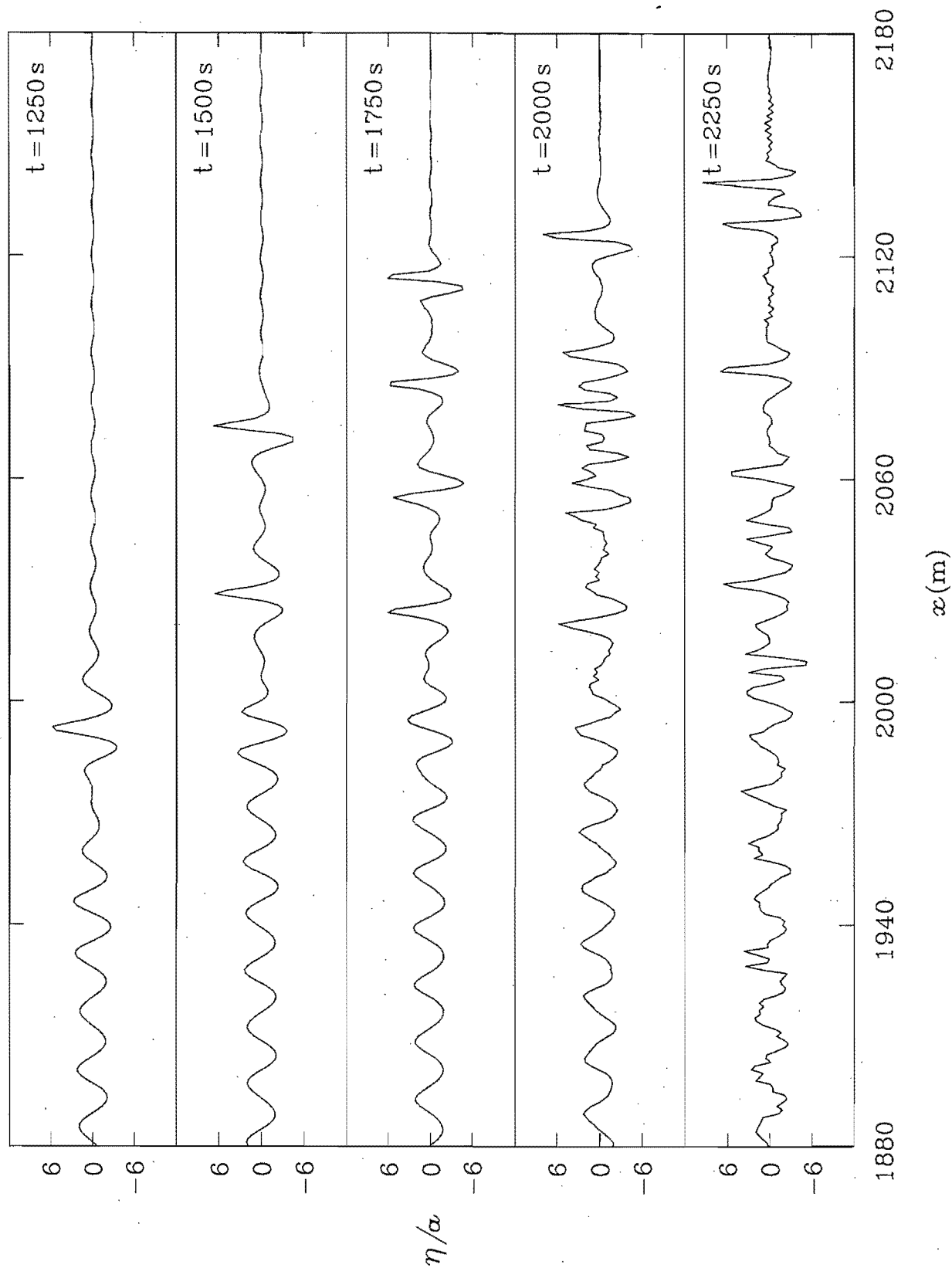
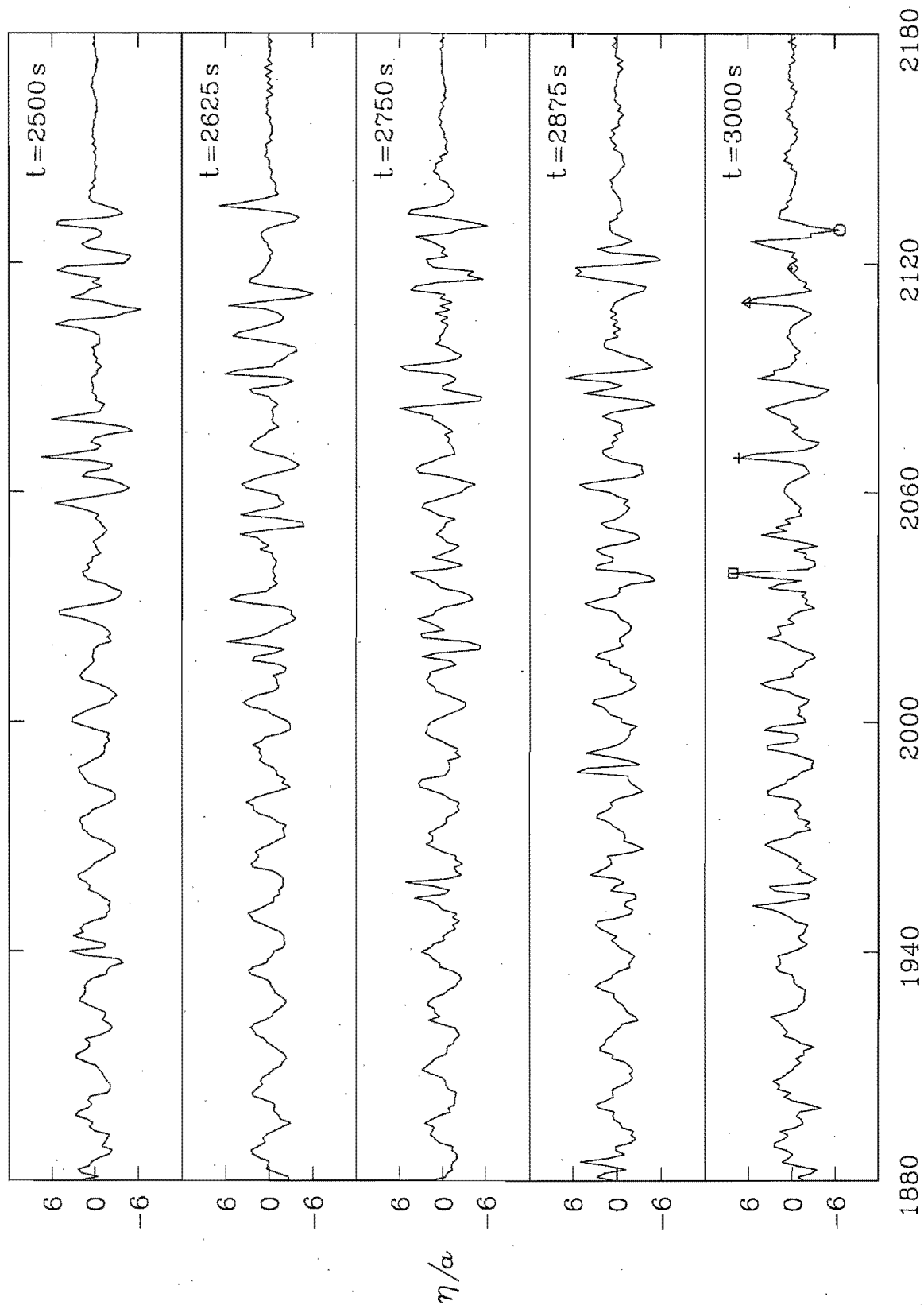


圖11、非線性波被流阻塞及反射現象數值解 ($a = 0.1$ m)。



x (m)

圖12、(延續圖11)。

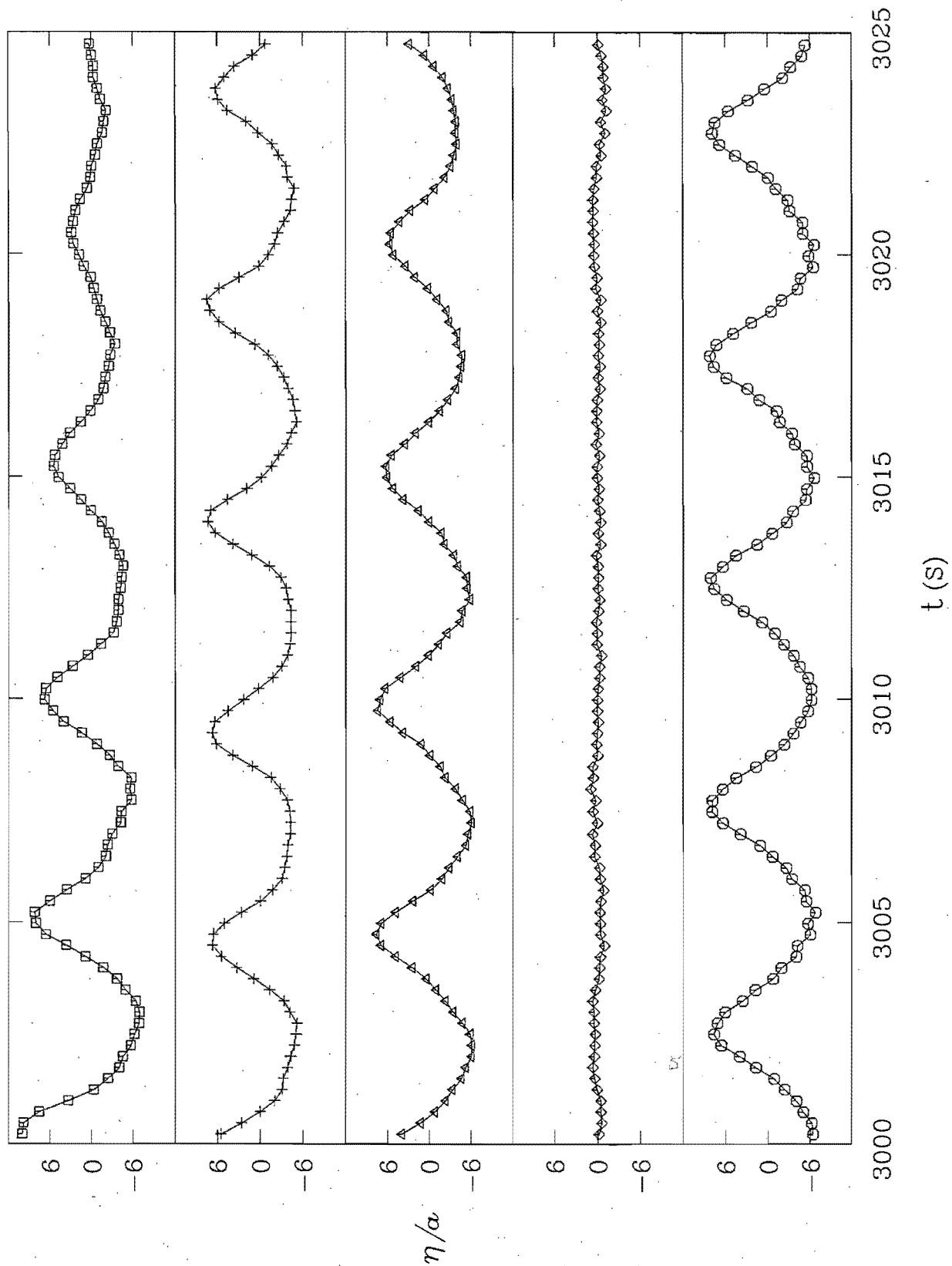


圖13、在圖12最下列所標示各空間位置上之水面位移隨時間的變化。

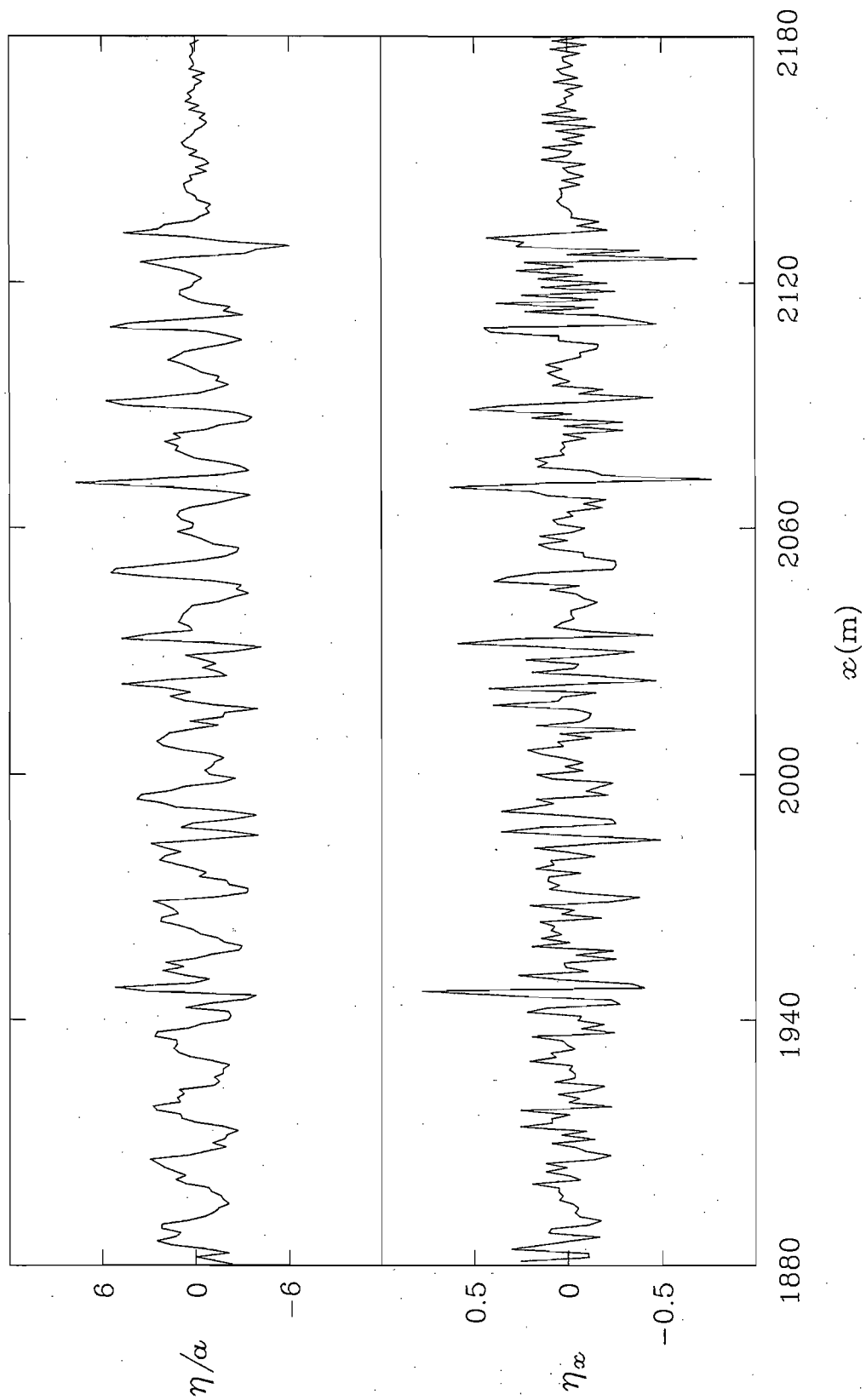


圖14、水面位移及與其相對應之水面坡度數值解 ($a = 0.1$ m, $t = 3025$ s)。

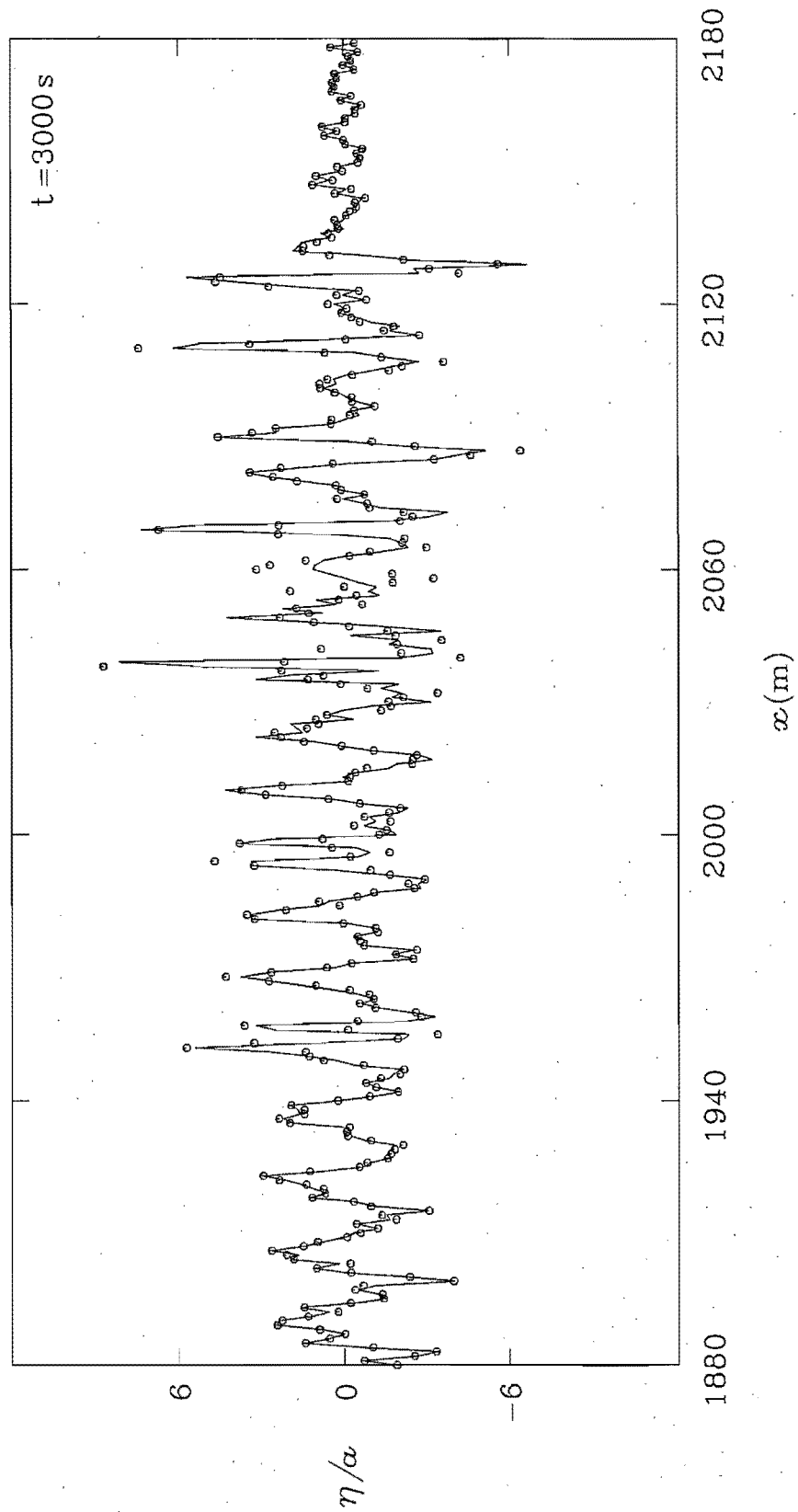


圖15、將解 (2.15) 之 iteration 上限定為500次 (曲線) 及200次 (圓圈) 所獲得之結果。

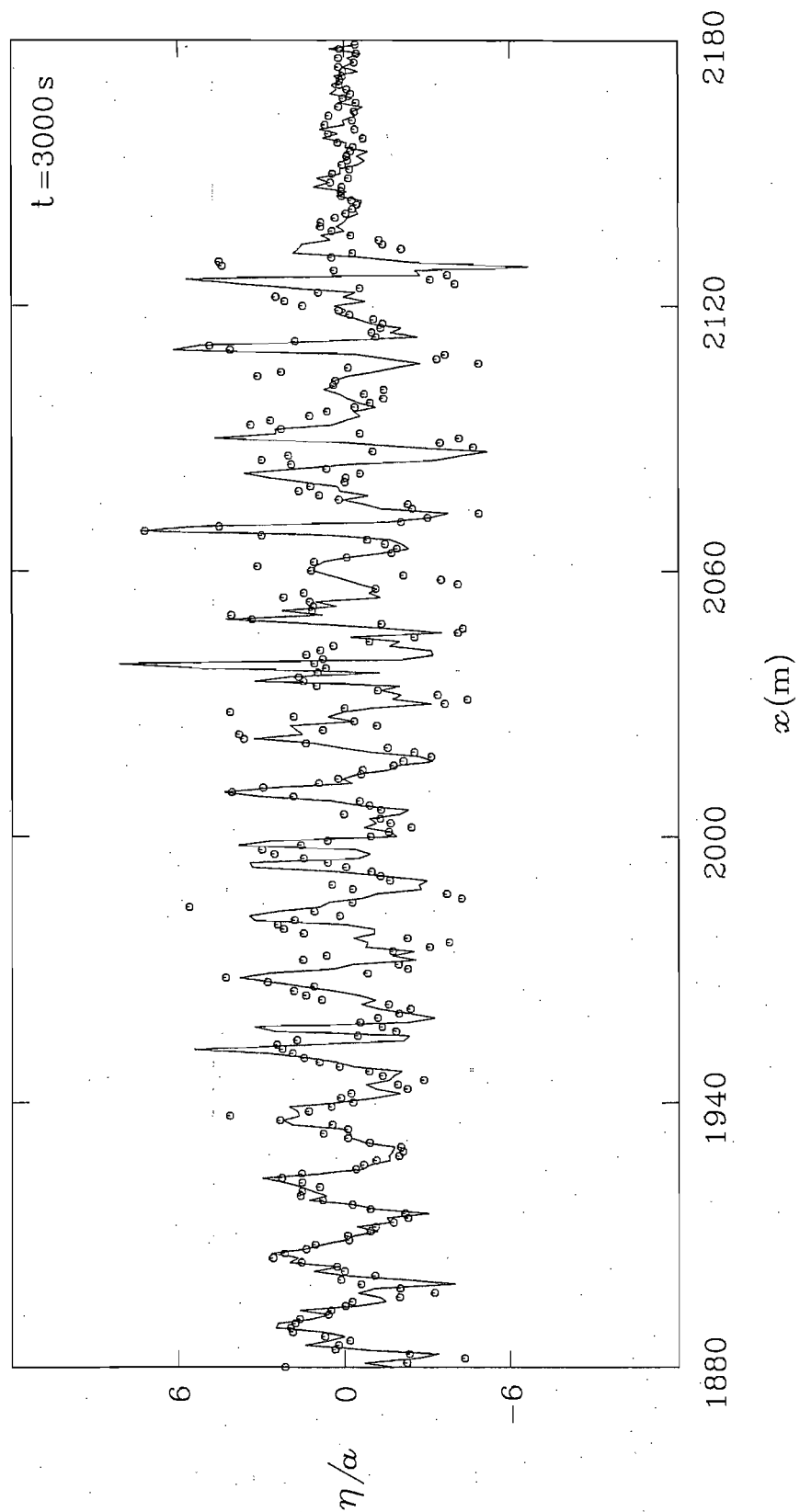


圖16、與圖 15相同,但目前的圓圈符號乃為 iteration 僅1次所獲得的結果。

交通部運輸研究所 99 年度科技計畫 期末報告審查意見處理情形表

計畫名稱：臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性研究(2/4)

執行單位：運輸研究所港研中心

參與審查人員及其所提之意見	執行單位處理情形
一、黃清哲委員 1. 研究所用方法嚴謹，研究成果可用來了解瘋狗浪形成的機制。 2. 研究中假設 $U_x \approx 0$，報告中應說明此項假設可能造成的誤差大小。 3. 一般數值計算結果，應說明其準確性或網格大小及時間間隔(time step)的相關性。 4. 本研究方法是否可模擬波浪碎波的現象，可於報告中說明。	1. 感謝肯定。 2. 本研究令 $U_x \approx 0$，因而將控制方程式中一些項省略，此一省略可能造成的誤差大小，在「結論與建議」一章中，已如委員所建議，加以補充說明。 3. 本研究在對時間積分方面採用 fourth-order Runge-Kutta scheme，此種方法乃為 strongly stable，故時間間隔愈小愈準確，但其準確度無法用數學公式來決定，只能用縮小時間間隔後，再與原來的結果比較，來觀察原來的間隔是否足以獲得準確之結果(相同的情況亦發生在網格大小的決定上)，此點在「結論與建議」中亦補充說明。 4. 在(2.6)式下面已說明本研究方法無法模擬碎波現象。
二、蔡清標委員 1. 本研究以嚴謹的數學解析，探討瘋狗浪之發生機制，研究成果學術性優。 2. 本研究為四年計畫，建議在第一章中先行述明四年計畫中分年的研究項目及重點。而前期研究結果，建	1. 感謝肯定。 2. 已如委員所建議，在第一章中說明本四年計畫之前期研究結果及未來研究項目及重點。 3. 已在第六章倒數第二段之最後，如委員所建議，補充說明圖 8~圖 14 為何

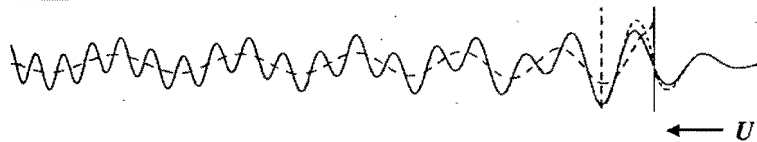
議可摘要說明於第一章中。 3. 本研究重點在非線性波被流阻塞及反射現象，於圖 5 中，$a=0.7m \sim 1.2m$，顯示非線性波模擬結果甚佳，但圖 8~圖 14 為何選用 $a=0.05m \sim a=0.1m$ 之模擬條件，建議有所說明。	選用 $a=0.05m \sim a=0.1m$ 之模擬條件。
三、張憲國委員 1. 未來可增加 U_x 及 $U(x, y)$(shear current)之研究。 2. 數值計算結果能否增加 mass conservation 之驗證。	1. 本計畫第三年將研究波行進在一 shear current 上情況，且未來若行有餘力，將如委員所建議，在控制方程式中考慮 U_x，但此一研究與「阻塞」較無關，與「緩變」較有關。 2. 由於目前的數值解滿足 Laplace equation，故只要數值解準確，則此一數值解即可滿足 mass conservation。
四、林炤圭委員 1. 圖 1 之圖說部份對各小圖補充說明。 2. Clamond & Grue 說明不穩定情形是否可能與數值計算的網格（時間或空間）解析度有關？或者與電腦數值計算之 truncation error 有關？是否嘗試改變解析度或改用倍精度運算，以測試其數值穩定性。 3. ”阻塞點”建議作一定義，以利讀者閱讀，是否可能予以量化公式？ 4. 依圖 12 如果 $t=3000$ 秒阻塞點已經穩定，再參考圖 13，是否 $t=3000$ 秒以後整個波形呈定常狀態。	1. 由於在文章內已對圖 1 之各小圖加以說明，故為避免重複，未在圖說部份另加贅述。 2. Clamond & Grue 確有說明數值解的不穩定情形與網格(時間或空間)的解析度有關(但鋸齒狀不穩定現象則與其無關)，故他們曾嘗試改變解析度來測試其數值穩定性，但除此之外，未見有關於採用倍精度運算之說明。 3. 阻塞點在波為線性時，可定義為 group velocity 和流速相平衡的位置，但 group velocity 在完全非線性波中意義

5.依圖 8 所示本研究測試之週期似乎很短(波長小於 20m)是否可能探討會產生有危害瘋狗浪之週期?	並不明確,故此時阻塞點的定義無法予以量化公式,但可如委員所建議,在第六章之第三段,給予一不精確之定義。 4.圖 12 僅顯示阻塞點位置在 $t=3000$ 秒已穩定,但無法顯示整個波形是否呈定常狀態;後者在非線性效應作用下,較難達成。而由圖 13 我們可看出,波形是否呈定常狀態須視其位置是否在阻塞點附近而定。 5.應用目前的電腦程式可測試更長的波,但其結果在無因次化後,將與目前的結果相同。
五、陳陽益委員: 1.建議考量都卜勒效應。 2.建議考量能量或能通量守衡檢核一下。 3.建議求出反射係數。	1.目前已將都卜勒效應考慮在內。 2.目前的研究因著重於「阻塞」現象,而非「振幅緩變」現象,故目前的計算結果無法正確顯示振幅緩變的量,因此也就無法用能量或能通量守衡來檢核,但此一緩變的量之量級很小(因我們令流在水平方向的變化極緩慢),因此此項誤差對波在阻塞點附近的變化影響極微。 3.由於波被流反射時,其入射波和反射波之波長不相同,且振幅與波長持續變化,故難以定義一適當之反射係數。

臺灣外海瘋狗浪之旋性與非線性理論及可預測性
研究(2/4)—初期之二維數值分析

目的：應用數值方法證明完全非線性波亦可被流阻塞及反射 → 引發深海瘋狗浪。

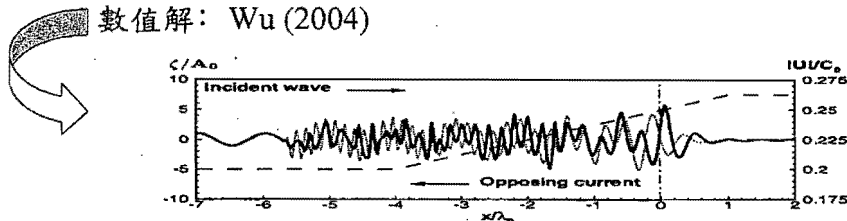
線性波解析解：



以往研究非線性波被流阻塞現象者：

解析解：Smith (1976), Peregrine & Smith (1979)

數值解：Wu (2004)



但皆僅適用於 near-linear waves

故有必要用數值方法解 fully nonlinear waves !

模擬完全非線性波之數值方法：

壹、旋性

✓貳、非旋性

一、volume-discretization

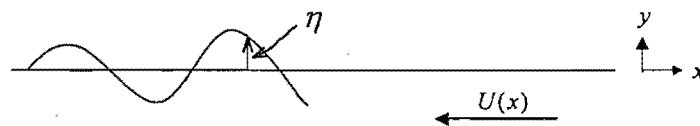
✓二、boundary-discretization

1. 對平均水面做泰勒級數展開 (快但不穩定)

✓2. 直接解積分方程式 (慢而穩定)

(但Clamond & Grue (2001) 將積分式改寫為一特殊形式 $\Rightarrow$ 計算極快速！)

將Clamond-Grue method應用於有流情況：



在平均水面上，流在垂直方向速度分量： $V = 0$

但在free surface上： $V = V_y \eta + \frac{1}{2} V_{yy} \eta^2 + \ominus$

$$= -U_x \eta - \frac{1}{2} U_{xx} \eta^2 + \ominus \quad (\nabla U_x + V_y = 0)$$

$\neq 0$

為簡化問題，令 $U(x)$ 在水平方向之變化不僅緩慢，且極緩慢

$\Rightarrow U_x$ 可忽略 $\Rightarrow V$ 可忽略！

當 ν 忽略時，在 free-surface 上

KBC: $\eta_t + U\eta_x + \tilde{\psi}_x = 0$

DBC: $\tilde{\phi}_t + U\tilde{\phi}_x + g\eta + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_x^2 - \tilde{\psi}_x^2 + 2\eta_x \tilde{\phi}_x \tilde{\psi}_x}{1 + \eta_x^2} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = 0$

其中 $\tilde{\phi}(x, t) \equiv \phi(x, y, t)|_{y=\eta}$: velocity potential (未知)

$\tilde{\psi}(x, t) \equiv \psi(x, y, t)|_{y=\eta}$: stream function (未知)

$\tilde{p}(x, t) \equiv p(x, y, t)|_{y=\eta}$: pressure (已知)

註: 為獲得上面兩式，必須應用 chain rule of differentiation :

$$\tilde{\psi}_x = (\psi_x + \psi_y \eta_x)|_{y=\eta}, \quad \tilde{\phi}_t = (\phi_t + \phi_y \eta_t)|_{y=\eta}, \quad \tilde{\phi}_x = (\phi_x + \phi_y \eta_x)|_{y=\eta}$$

應用複變函數理論可決定第三個方程式: 含未知變數 $\tilde{\psi}$, 故須用 iteration 求解!

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x = & \mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\} + \partial_x \{\eta \tilde{\phi}_x\} + \partial_x \{\mathcal{H}\{\eta \mathcal{H}\{\tilde{\phi}_x\}\}\} \\ & + \mathcal{H}\left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^2(D - \eta_x) \tilde{\phi}_x'}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(D - \eta_x) \tilde{\psi}_x'}{1 + D^2} \frac{dx'}{x' - x} \right\} \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{H}\{f\} = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' : \text{Hilbert transform}$$

$$D \equiv \frac{\eta' - \eta}{x' - x} \quad \rightarrow \quad x' \rightarrow \pm\infty \text{ 時, 趨近於零!}$$

註: (1) 上式之積分範圍可由 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 改為 $\int_{x-\lambda}^{x+\lambda}$, 其中 $\lambda = 3$ 倍波長

(2) 上式之積分項為 cubic terms $\rightarrow$ 較小 $\rightarrow$ iteration 收斂迅速!

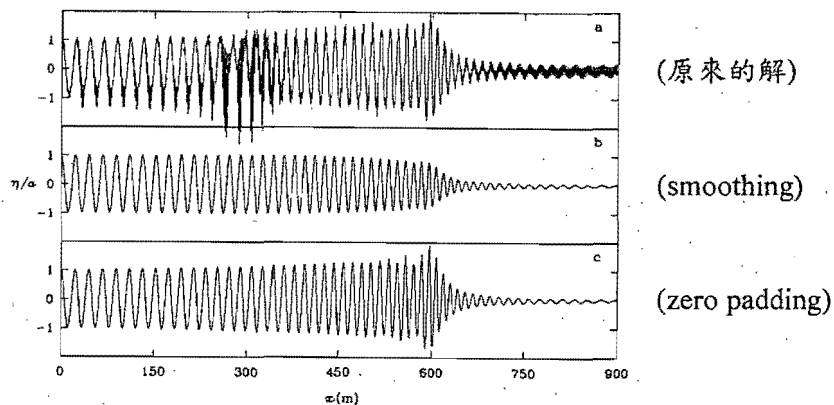
另外，Clamond & Grue又將BC先對 x 微分，再做富氏轉換：

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{F}\{\eta_x\} &= -ik\mathcal{F}\{\tilde{\psi}_x\} - ik\mathcal{F}\{U\eta_x\} \\ \partial_t \mathcal{F}\{\tilde{\phi}_x\} &= -g\mathcal{F}\{\eta_x\} - \mathcal{F}\{\tilde{p}_x / \rho\} - ik\mathcal{F}\left\{\frac{\tilde{\phi}_x^2 - \tilde{\psi}_x^2 + 2\eta_x \tilde{\phi}_x \tilde{\psi}_x}{2(1 + \eta_x^2)}\right\} \\ &\quad - ik\mathcal{F}\{U\tilde{\phi}_x\}\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{F}\{\cdot\}$ 表 Fourier transform $\rightarrow$ 可避免從事數值微分！

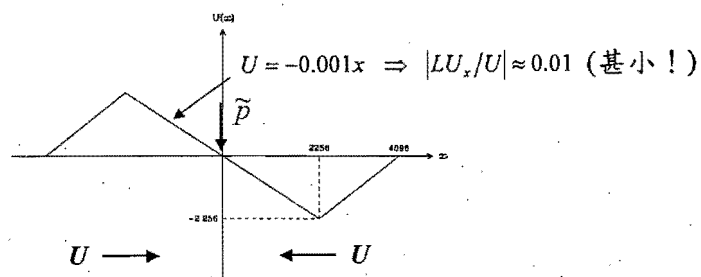
由於 Hilbert and Fourier transforms 皆可用 FFT 獲得，故目前的計算即準確又有效率。

在 Fourier spectra 後 zero padding 可消去鋸齒狀不穩定現象：



註：只有在第三種情況方可進行 long-time simulations！

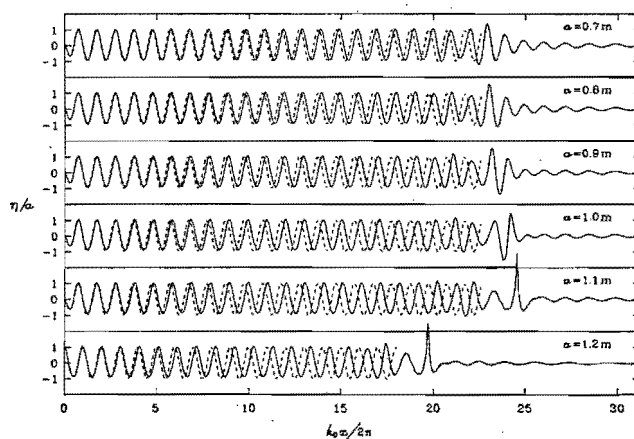
在數值模擬中， $U(x)$ 和 $\mathcal{F}\{\tilde{p}_x/\rho\}$ 為事先給定：



$$\mathcal{F}\{\tilde{p}_x/\rho\} = ia \frac{g}{\omega} \sqrt{gk_0} \exp\left(\frac{k_0^2 - k^2}{2k_0^2}\right) \left(\frac{k}{k_0}\right)^{3/2} \sin(\sqrt{gk_0}t)$$

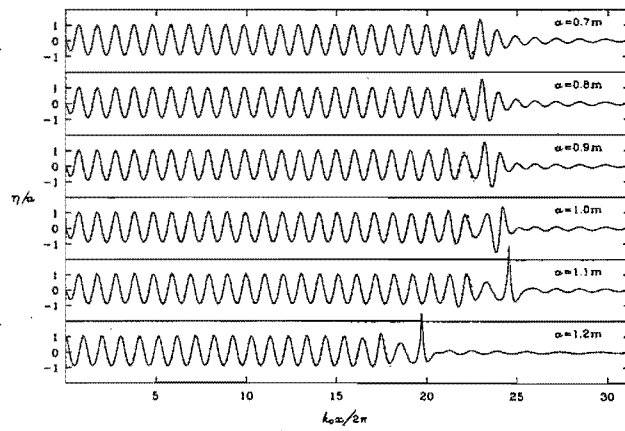
其中 a 表波之振幅， k_0 表其 wave-number (當 $U=0$ 時)。

當 $U=0$ 時之結果：



實線：數值解
虛線：解析解
(線性波)

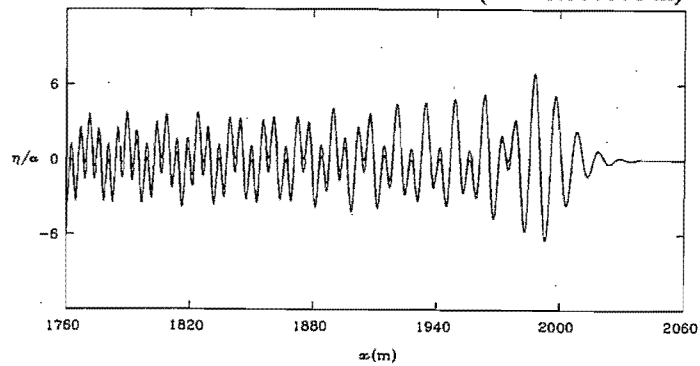
當 $U=0$ 時之結果：



實線：數值解
虛線：解析解
(非線性波)

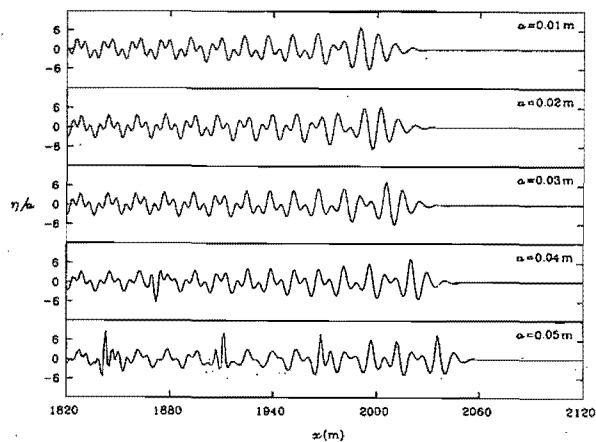
當 $U \neq 0$ 時

($a = 0.000001$ m)



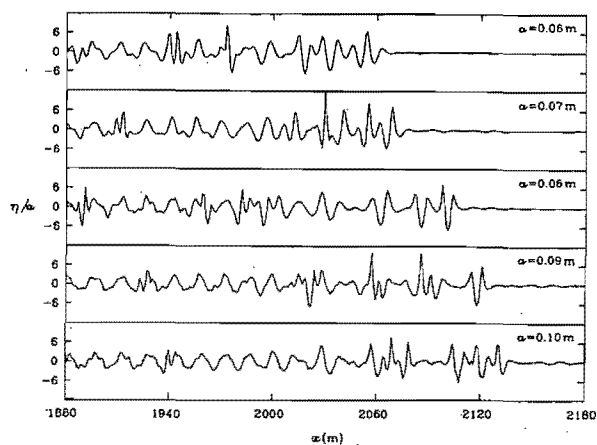
粗線：數值解
細線：解析解
(線性波)

完全非線性波被流阻塞及反射現象: ($t = 2500$ s)



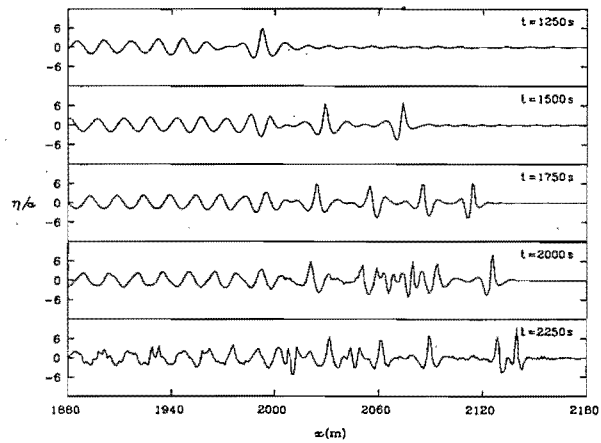
註: 1. 在遠離阻塞點亦可產生巨浪, 2. 阻塞點位置不固定。

完全非線性波被流阻塞及反射現象: ($t = 2500$ s)

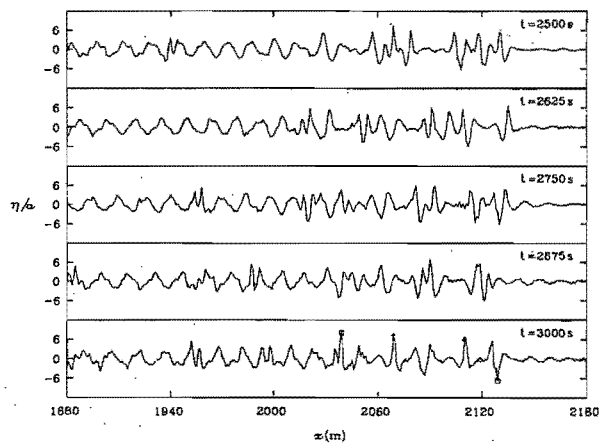


註: 1. 在遠離阻塞點亦可產生巨浪, 2. 阻塞點位置不固定。

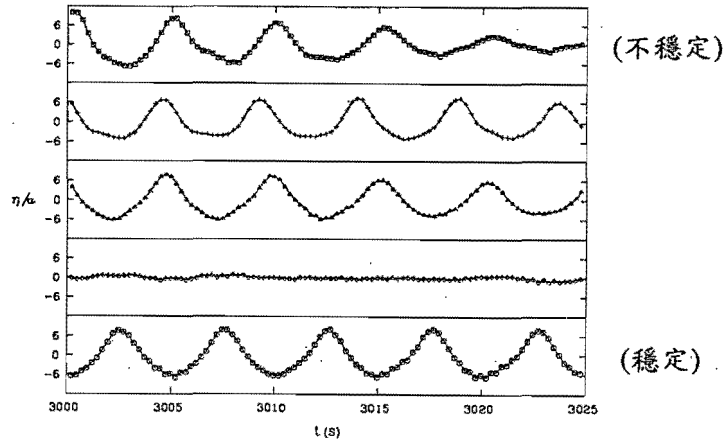
完全非線性波被流阻塞及反射過程：($a = 0.1 \text{ m}$)



完全非線性波被流阻塞及反射過程：($a = 0.1 \text{ m}$)



在固定位置上，水面位移隨時間的變化：



故在阻塞點附近可穩定產生巨浪！

結論：

1. 目前的數值計算結果顯示，完全非線性波亦可被流阻塞及反射。
2. 完全非線性波在阻塞點附近可持續引發巨浪，且不會立即破碎，故深海瘋狗浪極可能主要在阻塞點附近生成。
3. 目前的數值計算因未應用人為之smoothing來消除鋸齒狀不穩定現象，故其結果可代表實際發生的現象。