

102-78-7709
MOTC-IOT-101-H2DA003

新型類仔波特性研究與應用探討



交通部運輸研究所

中華民國 102 年 4 月

102-78-7709
MOTC-IOT-101-H2DA003

新型類仔波特性研究與應用探討

著 者：李勇榮

交通部運輸研究所

中華民國 102 年 4 月

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

新型類仔波特特性研究與應用探討/李勇榮著.-- 初版.

-- 臺北市：交通部運研所，

民 102.04 面；公分

ISBN 978-986-03-6474-3(平裝)

1.波動 2.數值分析

332.654

102005806

新型類仔波特特性研究與應用探討

著 者：李勇榮

出版機關：交通部運輸研究所

地 址：10548 台北市敦化北路 240 號

網 址：www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電 話：(04)26587176

出版年月：中華民國 102 年 4 月

印 刷 者：承亞興企業有限公司

版(刷)次冊數：初版一刷 80 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所港灣技術研究中心網站

定 價：150 元

展 售 處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 台北市中山區松江路 209 號 F1•電話：(02)25180207

五南文化廣場：40042 台中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1010200616

ISBN：978-986-03-6474-3 (平裝)

著作財產權人：中華民國（代表機關：交通部運輸研究所）

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部分內容者，須徵求交通部運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：新型類仔波特特性研究與應用探討			
國際標準書號（或叢刊號） ISBN978-986-03-6474-3（平裝）	政府出版品統一編號 1010200616	運輸研究所出版品編號 102-78-7709	計畫編號 101-H2DA003
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計畫主持人：李勇榮 研究人員：李勇榮 聯絡電話：04-26587183 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 100 年 01 月 至 101 年 12 月
關鍵詞：類仔波、瞬間頻率、基核函數、頻漏現象、模糊效應、模值與相位、莫利仔波、連續仔波轉換、數值模擬、數學驗證。			
摘要： 基於連續仔波轉換之技法，本文提出一變異型態的類仔波轉換時頻分析方式，此一類仔波為一複數函數，其模值與相位之介定與數值求取方式具有一些不同型式，但於解析訊號時頻分析瞬間頻率之擷取或能脊線分佈之檢測上，具有較莫利仔波更為明確與容易判讀之優越性。再者，其轉換係數之時尺分佈圖無論模值或相位均可直接提供有義訊息，而不似傳統技法上其相位時尺分佈所需之一些額外處理過程。文中以數種模擬訊號及水槽試驗水波訊號來驗證與比較。另亦數值上探討形成這些表現的各項相關學理因子，如函基形成條件、頻漏現象、模糊效應、相位糙訊、能脊規範等。此外解說其可能優劣表現特性，及其應用上得以突顯的一些物理表徵。最後，吾人更以數學驗證，探討數值行為的基礎根源，解析各種現象成因，更進一步了解此類仔波其模值與相位的分佈特徵，確認其判讀的簡易性。			
出版日期	頁數	定價	本 出 版 品 取 得 方 式
102 年 4 月	134	150	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 （解密條件： ☐ 年 月 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密） ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: A Wavelet Variant and Its Characterizations and Applications			
ISBN 978-986-03-6474-3 (pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1010200616	IOT SERIAL NUMBER 102-78-7709	PROJECT NUMBER 101-H2DA003
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Yung-Fang Chiu PRINCIPAL INVESTIGATOR: Yueon-Ron Lee PROJECT STAFF: Yueon-Ron Lee PHONE: 886-4-26587183 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2011 TO December 2012
KEY WORDS: Wavelet variant, Instantaneous frequencies, Kernel functions, Modulus and phase, Frequency leakages, Ambiguity effects, Morlet wavelet, Continuous wavelet transform, Numerical simulations, Water wave applications, Mathematical analyses.			
ABSTRACT: A complex wavelet variant for time-frequency analysis based on the continuous wavelet transform is proposed. And the associate numerical processes and characterizations are provided. The time-frequency plane renditions of transform coefficient, both modulus and phase, are facilitated and compared to those relevant to the Morlet wavelet. The facilitation of the extraction of instantaneous frequencies or power ridges of a signal is not completely in accord with the traditional method. But we show a few superior performances over the conventional ones. Both simulated and experimental signals are used to validate its serviceability and possible applications. A few analytical aspects of the wavelet variant, such as basis fulfillment, frequency leakage-in or leakage-out, ambiguity effect, phase noise, and the ridge criteria, are also studied numerically and compared to the corresponding counterparts of the Morlet wavelet. Furthermore, we provide the mathematical proofs for various properties of the modulus and phase distributions of the variant wavelet transform.			
DATE OF PUBLICATION April 2012	NUMBER OF PAGES 134	PRICE 150	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

新型類仔波特性研究與應用探討

A Wavelet Variant and Its Characterizations and Applications

李 勇 榮

交通部運輸研究所 臺灣技術研究中心

Email: ronlee@ms4.hinet.net

Revision: 2.0, February 7, 2013, at 17:56:08:

Printed: February 8, 2013

目錄

圖目錄	iii
表目錄	vii
摘要	ix
ABSTRACT	xi
1 前言與研究背景	1
1.1 引言	1
1.2 研究課題	2
2 類仔波	5
2.1 引言	5
2.2 類仔波	6
2.3 類仔波模值與相位	7
3 時尺分析特性	13
3.1 引言	13
3.2 仔波入允條件及轉換完整性	13
3.3 仔波全振性與解析訊號流程之關連	18
3.4 瞬間頻率與能量密度分佈	19
3.5 解析訊號與希伯轉換	24
3.6 類仔波轉換時尺鑑別特性	27
4 數值探討暨模擬與應用	37
4.1 模擬訊號與試驗水波	37
4.2 結果與討論	38
5 數學驗證	57
5.1 引言	57
5.2 數學探討	57
5.3 特性與數理	64
6 結論	67
參考文獻	68

附錄一：	Mathematica 數值程式	73
附錄二：	論 wavelet 之「仔」與「小」	87
附錄三：	簡報資料	93
附錄四：	審查意見回覆表	105

圖目錄

2.1	本文所提類仔波其實部與虛部之函數分佈圖，其實部與虛部均為偶函數。另此一函數並非解析函數（analytic signal）。	10
2.2	蓋博類型仔波（Gabor wavelet）亦或是簡化型之莫利仔波（Morlet wavelet）其實部與虛部之函數分佈圖，而實部與虛部分別為偶函數與奇函數。此一仔波有二個優良特點：其一，即其甚為近似解析函數（analytic signal），設若其載頻不是很低；其二，其時頻窗面積接近於海參堡不定性之極限值。	11
3.1	具有迷人解析特性，亦或是具有高效率的精簡數值流程的仔波，其波形往往相當怪異，而非水波物理模擬上的選用對象。此圖為一個交正交仔波其某一尺度之波形（d子圖）的局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ 。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為 4 個。	31
3.2	此圖亦示解析特性特出之仔波，難以成就水波之物理模擬。亦且對比於母仔波全振性及其父仔波之全正性所衍生之性狀。此圖為另一交正交仔波其某一尺度之波形的局部連續放大（d子圖綜合各曲線），其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ 。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為 20 個。	32
3.3	此圖示相關於式 2.5 之仔波 ψ 其近似解析函數之程度。上子圖示 $\langle f(t), A[\psi] \rangle$ 與 $\langle f(t), \psi \rangle$ 所得能量密度之差值分佈。中子圖示 $\langle f(t), A[\psi] - \psi \rangle$ 所得相位分佈。下子圖則為所分析之訊號。	33
3.4	類仔波其頻漏現象之向外渲染分佈曲線，亦或說是單元尺度類仔波對鄰近尺度之投影。當 $\omega_0 = 5$ 時此曲線之根值約為 1.0313。此一零值點及其左右之陡坡分佈得以提供時頻分佈上其瞬間頻率之方便識別。	34
3.5	蓋博型仔波其頻漏現象之向外渲染分佈曲線，亦或說是其單元尺度仔波對鄰近尺度之投影。此一曲線在 $\omega_0 = 5$ 其峰值發生於尺度 0.9622。由於峰值點左右鄰近的相互對比差甚小，故不利於瞬間頻率之方便識別。	34
3.6	類仔波其由鄰近不同尺度所洩漏而來之頻漏現象分佈曲線，亦或說是鄰近尺度對單元尺度類仔波之投影。當 $\omega_0 = 5$ 時此曲線之根值約為 0.9696。	35
3.7	蓋博型仔波其由鄰近不同尺度所洩漏而來之頻漏現象分佈曲線，亦或說是鄰近尺度仔波對單元尺度之投影。此一曲線在 $\omega_0 = 5$ 其峰值發生於尺度 1.0393。	35
3.8	類仔波之相位糙音或時移變位之模糊效應分佈曲線。此相位糙音乃指兩個相同尺度但處於不同位置下之函數內積。我們可以看到在零相位點上就是根值點，另其週遭值相對較小。這一特性亦提供此類仔波其時尺分佈上有利之識別性。	36

3.9	蓋博型仔波其相位糙音或時移變位之模糊效應分佈曲線。亦即單元尺度仔波與其時移版本之投影求算。相對應於前圖類仔波之根值點是為一極限峰值。同樣地，其左右鄰近的高數值不利於瞬間頻率之方便識別。	36
4.1	此圖示一個二次方漸高頻訊號其區段時頻或時尺之模值與相位分佈圖。此訊號頻率範圍起於 0 以迄尼克斯率 (Nyquist rate) 100 Hz。上兩子圖乃以莫利仔波之近似式為之。下兩子圖則以類仔波求得。很明顯地，不論以能量或相位觀點判讀，此處類仔波都清晰容易。	41
4.2	相同於前圖訊號，但以不同解析度及不同調適時頻窗（即不同的 ω_0 參數範圍）所得之類仔波轉換模值（中子圖）及相位（上、下子圖）分佈。	42
4.3	此圖說明相位旋轉之效應。其最下子圖係最上子圖之相位多了 $\frac{\pi}{2}$ 之旋轉。其具有反應頻漏渲染範圍之特性。另上子圖黑白交錯帶大底反應解析點處之訊號是波峰亦或波谷。	43
4.4	此圖乃前些圖中所用二次方漸高頻其蓋博類型仔波轉換下全頻域之模值與相位分佈圖。另及能脊線立體顯示。	44
4.5	此圖乃二次方漸高頻其類仔波轉換下全頻域之模值與相位分佈圖。另立體圖則將高低值倒反顯示，以利簡易辨識。	45
4.6	此圖示由兩個相交叉之等能量線性漸變頻訊號所組成之 X 訊號其轉換結果。上子圖為模值分佈，下子圖為相位分佈。左側圖係以蓋博類型仔波為之，右側圖則相關於類仔波。	46
4.7	此圖係前一圖 X-訊號其全頻域之轉換模值與相位分佈。其左側圖為蓋博類型仔波者，右側圖為類仔波者。	47
4.8	此圖乃示 X 訊號在類仔波轉換下其相位旋轉之效應，其黑白交界面帶有頻漏渲染之分佈範疇（中子圖）。另上子圖以色彩提示瞬間頻率分佈是夾於高能模值之間者。	48
4.9	此圖所用訊號係由一對等能量之平行線性漸高頻合成訊號，其兩線間之頻率差距為十分之一尼克斯率 (Nyquist rate)。此圖係由蓋博類型仔波所得模值分佈，其所提供之訊息可說是完全誤導，無法判定成分波。	49
4.10	相同於前一圖之平行訊號下其類仔波所得模值分佈，由圖可以輕易識別出兩平行訊號。	50
4.11	此圖所用訊號係由一對不等能量之平行之線性漸高頻合成訊號，其兩線間之頻率差距仍為十分之一尼克斯率 (Nyquist rate)，但兩成分訊號之能量比為 0.04。此一能量差異在兩種轉換下，其低能量成分均被模糊效應所掩蓋，以致無從分辨。	51
4.12	此相位分佈圖所用訊號係兩個不等能量並交叉之線性漸高頻之合成訊號，兩成分訊號之能量比為 0.01。上子圖係由蓋博型仔波所得，下子圖則係類仔波者。	52
4.13	此圖所分析之訊號係為試驗室水槽之風吹波。其左側圖為蓋博型仔波轉換所得之模值與相位分佈。右側圖則為類仔波者。無論在模值或相位分佈上，類仔波均提供較容易辨別的清晰訊息，特別是相位分佈其識別性之差異甚大。	53

- 4.14 此類仔波轉換模值與相位分佈圖所用訊號亦為試驗室水槽之風吹波，但此一風吹波與前一圖之風吹波比較起來是屬於仍在增長階段，亦即成熟度相對較差（less developed）之波浪，亦或相應於較小風速。無論在模值或相位分佈上，都顯示有多重交界面之現象，其或凸顯波場多尺度暨其相互間之幻化行為，亦或說明水波調變本質（wave modulation）及側頻不穩現象（side band instability）。 54
- 4.15 此圖所分析訊號係以機械造波之史脫克司水波，此一史脫克司波其基本協和頻帶處（約 1.15 Hz）之波浪尖銳度約為 0.06。其左側圖為蓋博型仔波轉換所得之模值與相位分佈。右側圖則為類仔波者。 55

表目錄

3.1	此一 ASYST 語言程式乃用於求取一實訊號之希伯轉換。由這一簡單程式可見，希伯轉換乃輸入訊號之簡單 FFT 及 IFFT 運作與排列組合。而基於 FFT 之自由度所衍生之問題亦或是波譜不定性問題，我們可以體會此一轉換所得解析訊號之瞬間頻率變異行為可能難以捉摸，尤其是當局部振幅或頻率之相對變動率較大時其所帶來的怪異現象。	30
-----	---	----

摘要

基於連續仔波轉換之技法，本文提出一變異型態的類仔波轉換時頻分析方式，此一類仔波為一複數函數，其模值與相位之介定與數值求取方式具有一些不同型式，但其於解析訊號時頻分析瞬間頻率之擷取或能脊線分佈之檢測上，具有較莫利仔波更為明確與容易判讀之優越性。再者，其轉換係數之時尺分佈圖無論模值或相位均可直接提供有義訊息，而不似傳統技法上其相位時尺分佈所需之一些額外處理過程。文中以數種模擬訊號及水槽試驗水波訊號來驗證與比較。另亦數值上探討形成這些表現的各項相關學理因子，如函基形成條件、頻漏現象、模糊效應、相位糙訊、能脊規範等。此外解說其可能優劣表現特性，及其應用上得以突顯的一些物理表徵。最後，吾人更以數學驗證，探討數值行為的基礎根源，解析各種現象成因，更進一步了解此類仔波其模值與相位的分佈特徵，確認其判讀的簡易性。

ABSTRACT

A complex wavelet variant for time-frequency analysis based on the continuous wavelet transform is proposed. And the associate numerical processes and characterizations are provided. The time-frequency plane renditions of transform coefficient, both modulus and phase, are facilitated and compared to those relevant to the Morlet wavelet. The facilitation of the extraction of instantaneous frequencies or power ridges of a signal is not completely in accord with the traditional method. But we show a few superior performances over the conventional ones. Both simulated and experimental signals are used to validate its serviceability and possible applications. Numerical aspects of the wavelet variant, such as basis fulfillment, frequency leakage-in or leakage-out, ambiguity effect, phase noise, and the ridge criteria, are also studied and compared to the corresponding counterparts of the Morlet wavelet. Furthermore, mathematical analyses for a few properties of the modulus and phase distributions of the variant wavelet are provided.

前言與研究背景

1.1 引言

在醫學領域裡或相關電子工程上，其諸多影像診斷技法在英文上統稱為 Imaging modalities（如：X-ray plain film, Fluoroscopy, Angiography, Computed tomography, Ultrasound, Magnetic resonance, Positron emission tomography, Radioisotopic nuclear medicine 等），其之所以叫 Modality 當然一定有它的道理，這些道理也就反應訊號分析的精神：其一，技法是相對而非絕對的，也軟硬體均具的。其二，具有期待性、不定性、可不可預期性。其三，優劣互存、不一而足、不同方法有其不同專善。其四，是人因的、藝術的、手法的、意識型態的、不純然是數學上的。其五，相互間的輔助性而非排它性。其六，雖無萬靈丹，但工欲善其事仍必先利其器，不同症狀宜不同處方，另可彈性應用，唯不同研究標的或探討內容，還是首先要面對分析方法之擇取。綜上簡而言之，不論是在學理本身或技法特性上，所謂一體適用、全能含蓋之解析與技法是不存在的，但就一個特定物理探討問題，某些技法具有明顯特色，甚而存在改造性，也是當然的。

再者，數據分析的本質基本上是只需數學、不需物理，因其可以不用牽涉任何物理量。可是應用上或工程上，人們所要的是實質存在的物理量。也因此任何分析的重要課題，無不在於賦予分析之圓滿或恰適的物理解說，產生合於吾人理念，亦或順乎邏輯的大小值與單位量。此處存在的一個彈性模糊地帶是，我們可以在數學上與技法上給予不同的權重配比，比如犧牲數學上的嚴密性於使用

簡便性。或許這也就是此處「類」仔波（wavelet variant）的命名一項原由。

1.2 研究課題

水波時頻或時尺（time frequency or time scale）分析之目的在於描述訊號組成成分其波譜或尺度譜的演化狀況，以數學工具探析物理現象。分析的兩個核心研究對象是「瞬間頻率（instantaneous frequency）」與「能量密度分佈（energy density distribution）」，可是我們所遭遇到的基本問題，也是最困擾、最具挑戰性的問題，就是這兩個研究對象至今仍然沒有明確或唯一的定義方式。就第一對象而言，「瞬間」與「頻率」本是兩種極不相容的元素，因為所謂「頻率」是源自於正弦與餘弦函數，它們的生命期是無窮的，我們焉能只在乎它的「瞬間」性，硬是把這兩種極端的東西湊在一起，自然會有形形色色的狀況，亦或矛盾現象，此處所可遵循的不變準則，亦或時頻分析基因，大概就只能用「海參堡不定性原則（Heisenberg uncertainty principle）」加以描述。就第二對象而言，「密度」的數學精神其實也是相同於時空上的「瞬間」，是一個微分量，總能量不生不滅，所有的局部分佈全部「加」「減」總成「積分」要不變，而也因為其基本要素上的「瞬間頻率」都沒有一統的說法，所衍生的能量密度分佈自然會有各自的表述，唯此處之各種表述所遵循的不變準則，亦或能量密度分析基因，現今所知則皆脫離不了「威格納-威理分佈（Wigner-Ville distribution）」。

話說回來，雖然有如上的基本問題，但也因此得以讓不同技法展現出不同的視野與觀點，或各家爭鳴，或異中求同，或同中求異。現今比較為大家所知悉及應用的連續型時頻分析法主要有兩種，一者為短時富立葉分析，或稱為加罩窗之富立葉轉換，亦或蓋博轉換（short time Fourier transform, windowed Fourier transform, Gabor transform），一者為仔波時尺轉換。前者所得之能量密度分佈稱為波譜能譜（spectrogram），後者所得之能量密度分佈則稱為尺度能譜（scalogram）。而在後者當中最為大家所引用於物理探討的當屬連續仔波轉換之莫利仔波（Morlet wavelet）或蓋博型仔波（Gabor wavelet）。如果將轉換探討侷限於波譜能譜及莫利仔波能譜這兩型，則它們有非常近似的基本數理，而在這兩

類分析，其理論及優缺點均有相當完整亦且相對淺顯的論述，因而其應用亦較為常見。

針對此處所提之類仔波，自然而然地是要以前述兩型分析作為參考標桿，涉略其數理與物理同異性及應用可能性及差異優劣性，亦或是其不同視野與觀點。也如是乎，這裡所相關的課題有如下：

- 仔波入允條件（wavelet admissibility condition）之義涵，及其相關之拆析完整性（completeness）、贅餘性（redundancy）、數值穩定性，並及於相應物理性。
- 解析訊號法（analytic signal procedure）所涉瞬間頻率之界定解說，因為實數訊號的蓋博轉換及莫利仔波轉換都關連於訊號所對應的複數解析訊號。
- 前述兩種轉換之表徵能脊線與此處類仔波所對應的表徵有何差異。
- 前述兩種轉換其能脊線與轉換係數相位分佈關係解說，另與此處類仔波所得相位分佈之比較為何。
- 求算此處類仔波之模糊效應（ambiguity effect），及其與前述兩種轉換下的特徵有何不同。
- 轉換其時與尺領域上之濾窗（filter window）與對應旋移乘積（convolution）之數理討論。
- 類仔波模值及相位時尺分佈特色所涉數學。
- 在本報告中尚未涉略、而可供未來進一步探討的如：類仔波能量密度分佈調適或時頻窗調適可能性、是否存在可能之威格納-威理時頻基核（Wigner-Ville time-frequency kernel）或其轉化可能性、等。❖

第 2 章

類仔波

2.1 引言

當我們想要應用仔波函基 (wavelet basis) – 亦或是任何類型之函基 (function basis) – 來研究某種物理現象時，其最爲基本，也最爲困擾的問題，就在於最適函數的選取。這當中的一個重要關鍵即在於如何將數學要義與物理探尋作最大程度之契合。數學源於定義，一點也不含糊，可是物理基於解說，而解說依人而論。解說之所以成立、其理得以接受之，必然是人們主、客觀所認定。把主觀最小化、客觀最大化，是爲科學的基本精神。在先前的研究中 [16]，爲了尋取水波模擬或分析應用之最適仔波，我們從統計與數理雙方面，進行嚴謹之模擬檢核鑑取，再以實際之試驗資料加以多方面具體驗證，可說已立論最適仔波函基是爲半正交樞點順適仔波 (semi-orthogonal cardinal spline wavelet)。

前述樞點順適仔波相應於水波特性的優異性，我們也已指出其關鍵數理因子 [16]，也就是這一函基所特別具有的二個解析特性，即「全振性」與「全正性」 [3]。所謂的「全振性」是指母仔波函基函數具有完整的擺盪性，而沒有一些沒必要的中間起伏波動，或者說是所有波動都是越零位之完整性波動。而所謂的「全正性」，則是指函基父仔波（或比尺量度函數 scaling function）全支撐上的曲線分佈都是正值而沒負的。另這兩個特性亦相關於數理上的線性相位濾波 (linear phase filtering)。而這種種特性，在物理義涵與實際應用上，在在表明，試驗水波其時變性對絕大多數之仔波而言，都是相對非常柔順、緩慢變動

的。此外，上述特性也代表下面兩種意象。其一，適當支撐長度、或者是適當生命週期的函基函數，是比較可能產生有義化之物理解說。其二，當輸入訊號有些許差異時，輸出之轉換結果不致於天差地遠、巨大變化，因為唯有如此，研判上才較易理出頭緒，參數與狀況之關連比較可以預期及判讀，因而物理解說性較高 [14, 15, 18]。

另先前研究中我們亦表示，很幸運地，針對所鑑取得最適離散領域仔波，我們得以在連續仔波領域裡找到一個自然而然的對應仔波。而這一連續仔波就是莫利仔波。其所以稱幸運是大有緣由。因為連續的莫利仔波與離散的半正交樞點順適仔波在數學理論上的根基可說毫無血源，可是，也因為這一性狀對應關係，我們得以跳躍過抽象的尺度，從而進入具體而有物理關聯的頻率相關尺度，以及同樣具頻率關聯的仔波移位變量。此頻率關聯乃是，我們得以將莫利母仔波的波形衰減參數值與尺度變量值化成載頻，從而引入豐富之物理探討性。

以上的說明是要述說：同樣地，如果此處類仔波不具有「載頻」這一物理相關性，那我們大概不用期待這一類仔波，在水波分析應用上會有什麼特別的出路。另一方面，這一類仔波及其數值手法當然也是一個屬於純數學的工具，不是一定要用於水波。

2.2 類仔波

在許多仔波轉換應用裡，其所涉仔波函數或函基是僅為實函數，這也意味著在一些應用中相位訊息用處可能不大，亦或表示他們的訊號本質跟波譜中頻率所要表現的特質有甚大差異。可是對水波而言，頻率可說是核心對象，息息相關於所有的物理，也因此我們對水波之研究工具免不了要牽涉到相位。一個實數訊號雖然可以化成實數振幅及實數相位分佈之乘積，但這種轉換方式具有無窮組合，所以一般而言，可以有兩種處理方式，一是把實數訊號運用解析訊號流程（analytic signal procedure）化為唯一型的複數解析訊號（analytic signal），另一是採用具有解析訊號型態之複數轉換函數。

莫利仔波是一具有解析訊號型態之複數轉換函數，而此處所提之類仔波可說

變易於莫利仔波。此外一些探討標的亦涉及解析訊號流程運作。考量引言中之陳述，另及於解析訊號流程之運作，我們當以莫利仔波為基準對比項目，以下說明此類仔波之定義及其可探析型式。

類仔波其具有母仔波（mother wavelet）義涵的源頭函數 $\psi(t)$ 定義為

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} [\text{sgn}(t) \sin \omega_0 t - i \cos \omega_0 t] e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.1)$$

式中 ω_0 乃相關於蓋博轉換之調變頻率（modulation frequency）參數， $\text{sgn}(t)$ 為符號函數（sign function），而時變指數分佈是一高斯分佈罩窗（Gaussian envelope）。另式中定常係數是為配合莫利仔波常規化（unit norm）之定常係數。而莫利仔波是為

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} (e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2}) e^{-t^2/2}. \quad (2.2)$$

上兩式之主要差異在於符號函數之存在，及忽略了莫利仔波的微量改造項。圖 2.1 示此處類仔波之實部與虛部分佈曲線，圖 2.2 則示莫利仔波者。另此類仔波之縮放及移位版本是為

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}\pi^{\frac{1}{4}}} \left[\text{sgn}(t) \sin \omega_0 \left(\frac{t-b}{a} \right) - i \cos \omega_0 \left(\frac{t-b}{a} \right) \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a}}, \quad (2.3)$$

式中 a 為尺度變數， b 為移位變數。而 $\frac{\omega_0}{a}$ 是為反應尺度之載頻物理量，亦且是全文之核心探討對象，本文中所有的圖，其所出現之「尺度」或「頻率」都是指這一載頻物理量。在下一章中，我們將對 ω_0 與載頻作進一步說明。

2.3 類仔波模值與相位

離散仔波轉換應用裡，例如在電子工程上許多影像處理，其轉換函基種類大致不出下述幾類，正交、交正交、半正交、及仔波包（orthogonal, bi-orthogonal, semi-orthogonal, wavelet packets [3, 5, 21, 25, 26]）。而這諸多離散轉換應用中，

基本上都只有轉換模值之結果而不涉轉換相位，亦即都是用實數函基，無涉虛部訊息。而即使是以複數莫利仔波所求取得之轉換相位，亦甚少見其著墨者，蓋其「直接」用處甚難簡易辨識。唯此處所提之類仔波，不但其模值具探討價值，其相位也同具豐富訊息與簡易辨識。此外這一類仔波其模值與相位尚可給予不同型式，產出不同訊息。

設若 $f(t)$ 為所欲分析之訊號，則轉換模值 $|Wf(a, b)|$ 依據有如下之幾種方式：

$$Wf(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle, \quad (2.4)$$

或

$$Wf(a, b) = \langle f(t), \mathbf{I}_m \psi_{a,b}(t) \rangle + i\mathcal{H}[\langle f(t), \mathbf{I}_m \psi_{a,b}(t) \rangle], \quad (2.5)$$

或

$$Wf(a, b) = \langle f(t), \mathbf{R}_e \psi_{a,b}(t) \rangle + i\mathcal{H}[\langle f(t), \mathbf{R}_e \psi_{a,b}(t) \rangle]. \quad (2.6)$$

式中 $\mathbf{R}_e$ 與 $\mathbf{I}_m$ 分別表實部與虛部， $\langle, \rangle$ 表內積， $\mathcal{H}$ 則代表取希伯轉換（Hilbert transform）。式 2.4 為常規轉換方式，亦是此類仔波較為突顯的模值能量密度分佈型式。式 2.5 等同蓋博類型仔波轉換亦或等同簡化型態之莫利仔波轉換。而式 2.6 則可視覺上產出近似式 2.5 的密度分佈型態。

另類仔波轉換之相位時尺分佈 $\phi(a, b)$ 為：

$$\phi(a, b) = \tan^{-1} \frac{\mathbf{I}_e \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle}{\mathbf{R}_m \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle}, \quad (2.7)$$

或

$$\phi(a, b) = \tan^{-1} \frac{\mathbf{I}_e \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle}{\mathbf{R}_m \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle} + \frac{\pi}{2}. \quad (2.8)$$

式 2.7 為常規定義式，亦是此類仔波之相位時尺分佈主要呈現方式。式 2.8 乃將式 2.7 作一 90 度之旋轉，其作用將於數值結果中說明，主要是可彰顯頻漏渲染

分佈。另式 2.6 亦可提供一相位呈現方式如下

$$\phi(a, b) = \tan^{-1} \frac{\langle f(t), \mathbf{R_e} \psi_{a,b}(t) \rangle}{\mathcal{H}[\langle f(t), \mathbf{R_e} \psi_{a,b}(t) \rangle]}. \quad (2.9)$$

由以上定義得知，此處之主要數值方法基本上相同於連續仔波轉換，另部分定義所涉希伯轉換，將於下一章中說明。❖

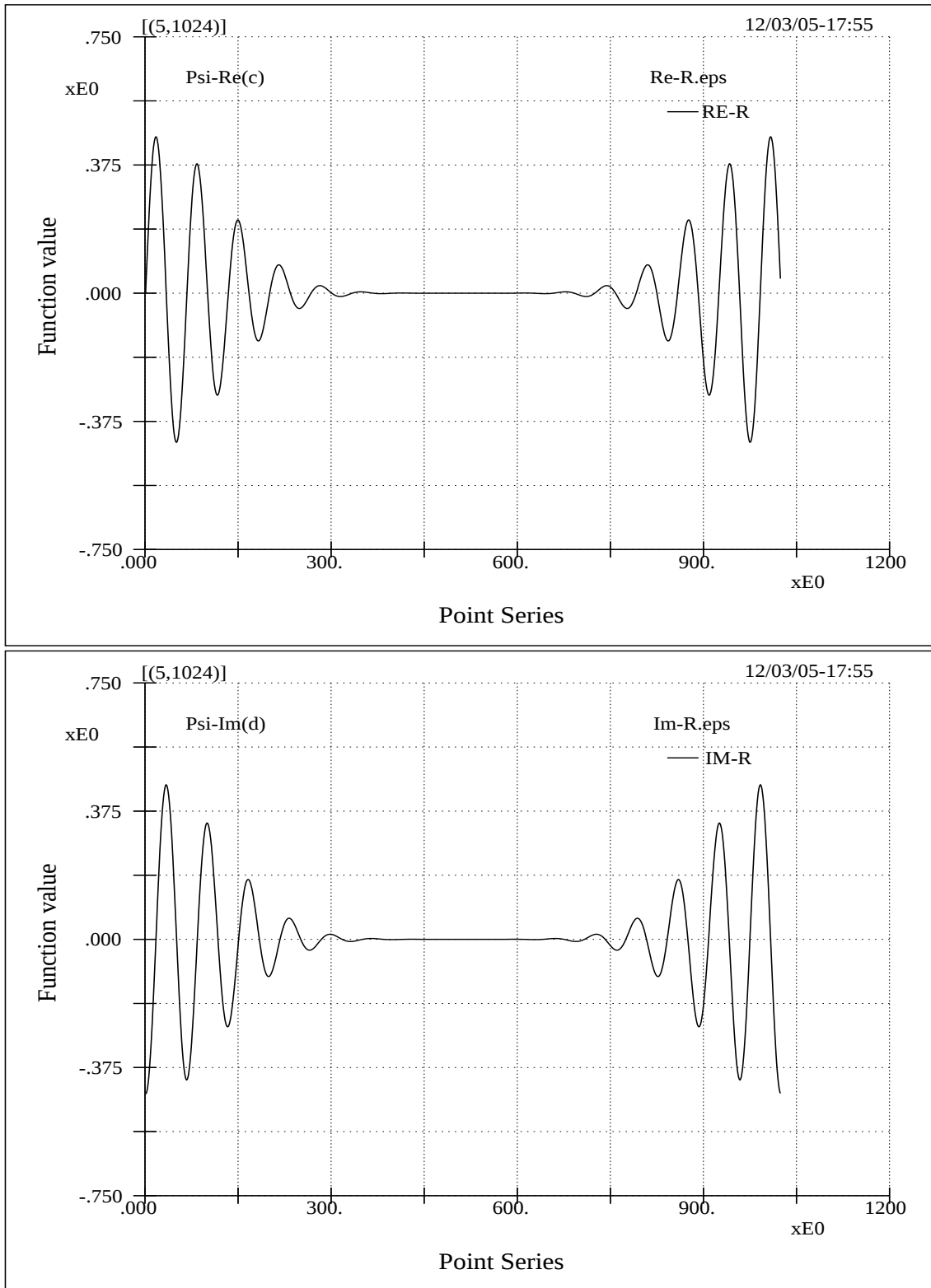


圖 2.1 本文所提類仔波其實部與虛部之函數分佈圖，其實部與虛部均為偶函數。另此一函數並非解析函數（analytic signal）。

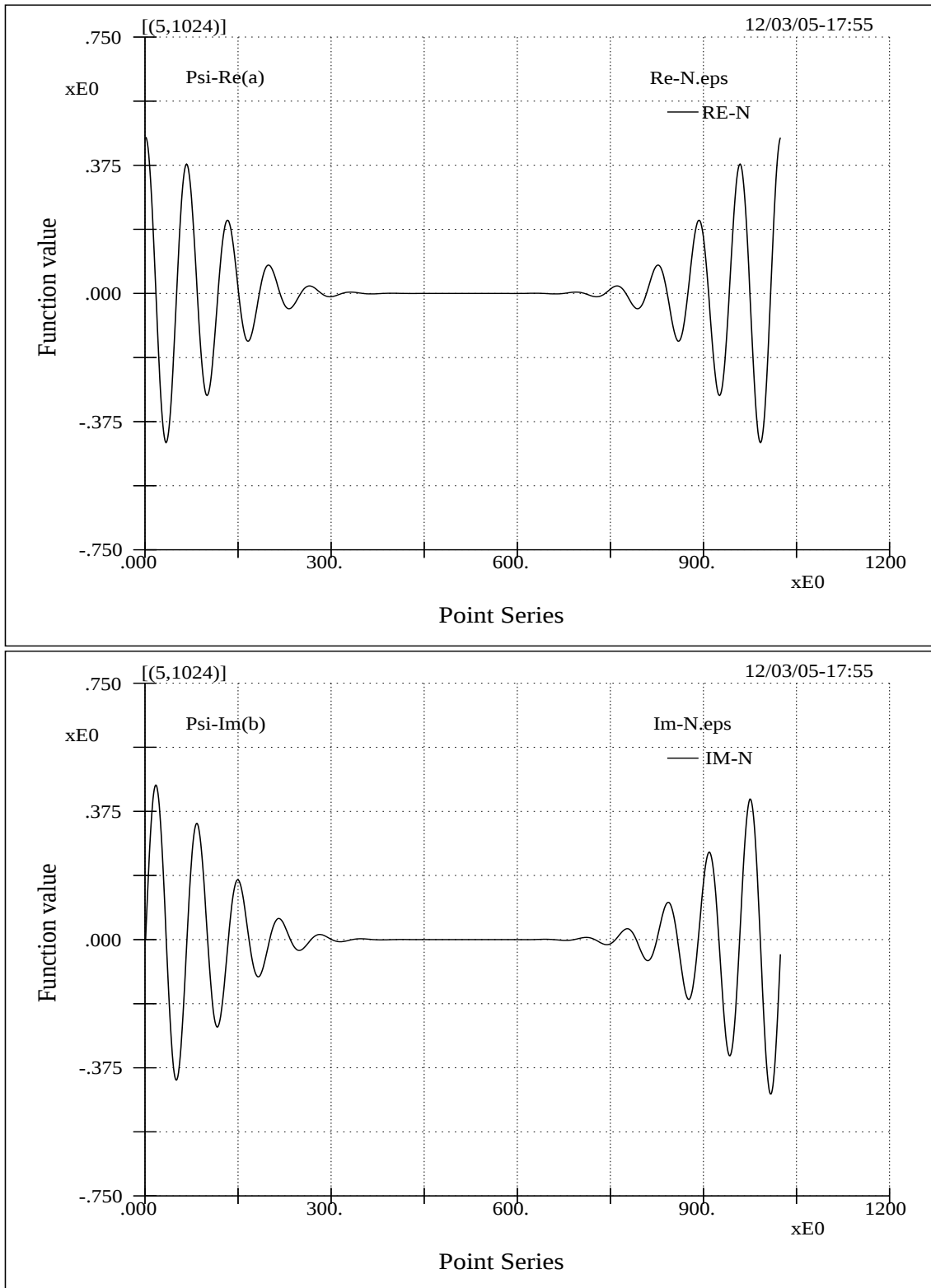


圖 2.2 蓋博類型仔波（Gabor wavelet）亦或是簡化型之莫利仔波（Morlet wavelet）其實部與虛部之函數分佈圖，而實部與虛部分別為偶函數與奇函數。此一仔波有二個優良特點：其一，即其甚為近似解析函數（analytic signal），設若其載頻不是很低；其二，其時頻窗面積接近於海參堡不定性之極限值。

時尺分析特性

3.1 引言

在第一章中我們提到，任何一種時頻或時尺能量密度分佈都相關於威格納-威理分佈（Wigner-Ville distribution），亦即每一種分佈都對應於一個特殊基核（kernel）。而在種種基核裡，有兩種基核，其時頻或時尺表示方式特別清晰簡易與富含物理解說，也較具完整數理。這兩種基核所形成的分佈，一是波譜能量密度（spectrogram），另一是時尺能量密度分佈（scalogram）。前者是為加罩窗之富立葉轉換，而後者是把前者之罩窗及調變頻率再度加以縮放及移位之連續仔波轉換。基於這一認知，這兩種轉換也就成為本研究的參考基準。此處說明其時尺分析特性，並及於類仔波其所可能之相應情形。相關探討項目有：仔波入允條件（admissibility condition）、轉換完整性（completeness）、仔波全振性（complete oscillation）、解析訊號流程（analytic signal procedure）、希伯轉換（Hilbert transform）、能脊線（power ridge）、瞬間頻率（instantaneous frequency）、模糊效應（ambiguity effects）等。

3.2 仔波入允條件及轉換完整性

本節的內容相關於「類仔波」明稱之由來，亦觸及理論與應用上的不同觀點及需求。這些主要是涉及連續仔波轉換之仔波入允條件（admissibility condition）。

若一函數 $\psi(t)$ 可以符合連續仔波轉換所稱的連續仔波，那它的唯一要求就是 $\psi(t)$ 符合「入允條件」：

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = C_{\psi}, \quad (3.1)$$

式中 C_{ψ} 是為常數，並由 ψ 完全決定，而 $\hat{\psi}(\omega)$ 是為 $\psi(t)$ 的富立葉轉換。另富立葉正、反轉換對應領域間的關係式定義取為

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.2)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.3)$$

此一入允條件是權重下的能譜合積，它將能譜加以權重，而此權重是為頻率的倒數。因此頻率越高權重越低，頻率越低權重越高，另外合積必需是定量。也因此，此入允條件代表著，仔波其成分尺度在低頻區的能量不宜囂張，亦或曲線適當減衰收斂，以致無零頻率之成分。這一沒有零頻率成分的明顯數學要求，是說仔波波形曲線變化對橫軸之積分為零，即其平均值必需為零。綜合這些意象，一個重要認知可得如下，仔波的基本核心觀念就是仔波必需合理衰減，其分佈支撐長度最好是有合理的限度，即使數學上也許無限長，但至少它是極不顯著，而形同可忽略、或收斂。如是，仔波的觀念完全不在「大小」方面，而是在說它的「有限生命」分佈。順此一提的是，其實只要不是無限，再怎麼大都是有限，所以把 wavelet 稱為「小波」，不僅失真，更失去 wavelet 專有名詞的氣度。

若把 $\psi(t)$ 視為母仔波，那它的衍生仔波是為 $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a})$ ，式中 a 是尺度參數，代表尺度伸縮之水平方向放大縮小， b 是移位變化參數，代表衍生仔波其發生位置。而 $a > 0$ ， $a \in \mathbf{R}$ ， $b \in \mathbf{R}$ 。另式中的 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 是針對 L^2 -norm 探討範疇下的常規化調校係數，代表垂直軸方向之放大縮小。當然 $\psi_{a,b}$ 也符合入允條件。另常數 C_{ψ} 是驗證這仔波轉換具有拆解及重建「完整性 (completeness)」所自然衍生的一常數值。也就是在二次方空間 (L^2 -space) 下，兩個函數 g 與 h 具

有如下的等位拆解公式（resolution of identity）

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^\infty \langle g, \psi_{a,b} \rangle \overline{\langle h, \psi_{a,b} \rangle} db da. \quad (3.4)$$

入允條件可說是極其寬鬆，這寬鬆反應出連續仔波轉換必然是贅餘的，即使其轉換對象是一個非離散型的函數分佈。而要得以輕易了解此贅餘性，我們可以拿一記錄得的數位訊號進行轉換，由正交離散系統以迄連續系統。茲解說如下。

由於任何離散轉換的仔波（如任何屬於正交、交正交、半正交函基類屬之仔波）必然符合連續仔波的入允條件，因此若把一個離散仔波用於連續轉換，基於我們對離散仔波函基轉換完整性（completeness）之確立，我們就可以了解非離散轉換的贅餘性。此時需說明離散仔波的框架式 $\psi_{a_0, b_0; j, k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - kb_0)$ ，而前述中的 a 變成式中的離散伸縮尺度 a_0^j ，而 b 變成式中的離散移位變量 $a_0^j kb_0$ ，另 $j, k \in \mathbf{Z}$ ； $a_0 \neq 1$ ； $b_0 > 0$ 。上述中我們已把用來模擬的仔波原子（wavelet atoms）拘限於整數相關尺度。不過，一個離散仔波的諸框架必需額外符合下一「穩定條件」（stability condition）

$$b_0 A \leq 2\pi \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^j \omega)|^2 \leq b_0 B. \quad (3.5)$$

式中 A 與 B 為正值常數，而 $0 < A \leq B < \infty$ 。此式的 b_0 與 2π 常數值係故意保留，一方面配合仔波函基常規化之定義，另一方面也讓 A 跟 B 值的大小可以方便決定贅餘性。此一離散轉換穩定條件狀似抽象，但其實際含義卻甚簡單，茲說明如下：為了使一個轉換過程可逆化，我們需要的是一個具有收斂性的數值過程，這一過程是說，當我們把它的各個成分波或成分尺度能量加總時它具有收斂的行為。也如此，各個成分尺度的能量之合成不得為零，亦不可無限。若合成值為零，則什麼都不存在。若合成值為無限，則表這些成分尺度其時與頻分佈性狀之重疊性過於嚴重，它們不是太相依，就是太混淆在一起，正如向量幾何裡，兩個幾乎平行的向量不是二維平面上良好的向量基（vector basis）。另外補充說明的是，入允條件僅針對母仔波，但穩定條件則還需針對衍生仔波設限。

談到由仔波轉換係數來重建一個函數，那必然會出現一個匹配仔波（就正交仔波函基而言，其匹配仔波同於原仔波，即自匹配）。另任何分解與重建過程其仔波與匹配仔波的角色是可互換的，因此上述贅餘性的陳述亦通用於匹配仔波，只是此時的架框極限值或有差異。

如果將基核函數常規化（normalization），並將穩定條件之上下區間加以極限化，即將 A 與 B 定為：

$$A = \inf \left[\frac{2\pi}{b_0} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^j \omega)|^2 \right], \quad (3.6)$$

$$B = \sup \left[\frac{2\pi}{b_0} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^j \omega)|^2 \right], \quad (3.7)$$

若 A 與 B 相近，則贅餘性的代表值是為 A 與 B 的平均值，即 $\frac{A+B}{2}$ 。至於連續仔波轉換之贅餘性可以如下解說。設若一組相應於離散伸縮尺度及移位參數基本源始變化量為 (a_0, b_0) 的仔波函基其架框極限值為 A 與 B ，則若我們把離散伸縮尺度及移位參數基本源始變化量改為 $(a_0/2, b_0/2)$ ，則其架框極限值必將含蓋舊的架框極限值，而類此之延伸作用是為連續轉換之情形。這一狀況亦說明連續仔波轉換並無反轉換之價值。

另一個相當易於了解的直接解釋是，當把連續仔波轉換應用於所收集記錄的離散資料時，對每一個尺度而言，它的轉換係數量是同於數據點數，可是我們可以選擇任意解析尺度，也因此我們基本上是有無限多的連續仔波轉換係數，因而若無能量密度分佈概念的引入，我們應該不難想像，這些係數之能量的合積是可以如何龐大，但另一方面，訊號能量必然是一定值。再者，如果兩個相鄰尺度甚是接近，可想而知，其轉換係數分佈亦將相近，也如是瞭解連續轉換之贅餘性問題。

贅餘性在一些應用上固然有其明顯缺點，其顧慮如：程式建構難易度、正反轉換執行效率、訊號重建完整度優劣性等；但研究顯示贅餘性亦有其用處，如下面的兩種重要特性。

其一，贅餘性不代表在行反轉換重建時，我們必需使用非常多的轉換係數以獲取原訊號之良好複製品。也就是說，相較於緊密框架，亦或是大底緊密框架，我們仍得以相對稀少的係數量來重現原始訊號。這一沉例可以 Mallat and Zhong [22] 及 Froment and Mallat [6] 的研究實証。在第一個的研究裏，他們是取用二次方性（quadratic）順適函數當為仔波以研究二維圖像之重建，而他們所取用的轉換係數是少數區域上所發生的局部最大值係數。更有甚者，他們所取用的仔波僅能說是一種鬆散而未能精確定位的仔波，但即使是不全然的仔波，也只取少量的局部極限值，其仔波法重建影像的視覺表現則甚是優良。

其二，贅餘性表示隱藏於集錄資料中的自然糙音，或是因為數值過程中所引入的各類誤差（如頻漏現象），可以藉由大量的轉換係數之統計加以消除或降減。另外需加說明的是，贅餘性多寡在應用上的效益應有其限度。其用途表現也許正如一個高斯函數之累積分佈曲線，在某一階段以後就達到飽和而不再增加。

連續仔波轉換之入允條件與離散仔波轉換之穩定條件存在重大彈性差異。穩定條件是必要條件，並非任意擇取一組 (ψ, a_0, b_0) 就可形成仔波框架。再者穩定條件雖然在理論上是必然可重現任何函數，但實際上其數值行為未必不無可顧慮之處。而這一顧慮有時正可以表示正交與非正交，亦或贅餘性之有無，其所可能產生的效應。

此處類仔波其實部與虛部之積分都不為零，因而其函數並不符合仔波入允條件，然因此處所有的數值分析概念與技法可說完全同於仔波手法，也如是，我們稱其為類仔波。另外說明一點的是，此類仔波其時域上的衰減特性等同莫利仔波。

至於是否有必要把這一類仔波加以仔波化，這就等同於探討轉換完整性之問題，基本上可說只要符合仔波曲線分佈積分為零，即達於入允條件之要求，並同時具有轉換完整性，也就是具有等位拆解亦或等位解析（resolution of identity）之功能。因此我們是可以分別對類仔波之實部與虛部進行調校，而使其符合入允條件。這一調校是除了引入在莫利仔波所有的調校項外，再引入一高斯分佈的虛數調校項，這一新引入的虛數項涉及一較大的常數。然而這一調校可能會使本研

究所欲凸顯的數值特性爲之減弱或散失，因而我們捨理論而就實用，不討論轉換完整性之問題，而僅就時尺瞬間頻率分佈鑑別的效應著墨。

3.3 仔波全振性與解析訊號流程之關連

複數函數得以提供振幅及相位資料，而由相位進而供應瞬間頻率訊息，但在物理上的一個顧慮是負頻率的產生，避免負頻率的產生可透過解析訊號流程（analytic signal procedure）。此處我們說明仔波其全振性（complete oscillation）與解析訊號流程之關連，從而提示莫利仔波所突顯的瞬間頻率，亦即此類仔波的比較標的。而此處之關連牽涉到四點簡單學理：

其一，富立葉轉換其對應領域上存在多種雙向具可之轉換關係（duality properties）。其中一種是兩函數相乘積（multiplication）的轉換是另一領域上兩函數轉換後的旋移乘積（convolution），因而解析訊號流程形同一種濾波行爲，因爲設若我們可以設計一個只在正頻率有所分佈的濾波罩窗，那將這一罩窗乘以原始訊號之頻率分佈，即可得全是正頻率的解析訊號。

其二，上述另一種雙向具可之轉換關係是說，一領域上的調變是對應於另一領域上的移位，因而借由時域之調變可以把罩窗往正頻率移動。

其三，頻率罩窗若可以被全然地移到正頻率處，則其頻帶上曲線分佈必須適當或快速衰減，設若此頻率罩窗具對稱性，則是說沒有高頻成分，而其時域曲線分佈則相應規則度大，可微性高。

其四，原始訊號先經解析訊號流程再轉換等同於先轉換再經解析訊號流程，而若直接取用一符合解析訊號的仔波來轉換，這樣的結果自然是正頻率分佈的解析訊號。

綜合上述諸點我們可以瞭解到仔波全振性與解析訊號流程的對應本質，從而體會蓋博轉換亦或莫利仔波所擁有的數個特性是爲，高斯分佈罩窗之局部性、富立葉函數引入的可調變性、規則而完整順暢的振動性、直接由原始訊號轉換的便易性。另一方面，藉由解析訊號的引入，亦才得以探討下一節所要說明的能脊線與瞬間頻率對應關係。

瞬間頻率是由相位所得，可是甚少有數值分析是直接以相位之時尺分佈來彰顯瞬間頻率的。這主要是肇因於相位分佈的對比性，就解析訊號之瞬間頻率而言並非是直接關鍵要素。另相位分佈基本上以 0 到 2π 表示，且無論模值之多寡，即使是糙音或渲染或誤差，也一定存在有相位值，因為其相位是依實虛部相對大小而非絕對大小而定，也就是說，即使是模值甚小的非真實分佈區，也有相位分佈，而全時尺領域幾乎佔滿。以上是就莫利仔波而言，然就類仔波的相位而言，此處的結果顯示它只突顯解析訊號流程上的能脊線。

至於此處類仔波之解析訊號符合性，由於引入一不可微但仍為連續之點，因而其頻譜分佈並不利於解析訊號流程。唯此處額外的處理方式是以實虛部分別處理，透過希伯轉換以提供一些不同數值結果。就式 2.5 而言，其為解析訊號而等同簡化型的莫利仔波。就式 2.6 而言，其轉換結果雖異於莫利仔波，但模值相對大小之分佈表現則相似於莫利仔波，另相位分佈對比特性則幾乎同於式 2.4。

3.4 瞬間頻率與能量密度分佈

瞬間頻率與能量密度分佈之間的關係是依時頻分析基核而定，不同基核有其不同對應分佈型態，這諸多型態當中，一個最自然，亦或說是最符合人們直覺，也最能關連上物理，並具諸多實際應用與解說長處的基核，當屬蓋博轉換或加窗之富立葉轉換。而在仔波領域裡頭，連續型的莫利仔波可說是蓋博轉換之仔波化，另在仔波離散領域，半正交樞點順適仔波（semi-orthogonal cardinal spline wavelet）則是對應於莫利仔波的離散實函數仔波。這些轉換的重要性與出色因子有如下幾點：

- 在水波訊號模擬上，我們由先前對廣泛仔波類屬之鑑取研究 [16]，已論定這些函數或函基為其各自領域上的水波模擬應用最適種類。
- 其能量密度分佈是全為正數分佈。而其它基核所得之能量密度分佈大底都有負能量的產生，亦或是不合直覺的能量密度分佈。
- 其直接轉換結果可以自然地相當符合解析訊號流程。

- 由於它們的轉換都相關於解析訊號流程，在適當條件下，其瞬間頻率與能量密度分佈上的能脊線（power ridge）有良好對應關係。
- 此些轉換裡都自然地相關於「載頻」（carrier frequency）。載頻之出現大大提升其物理上的用途。而大多數仔波轉換裡使用的是無因次的尺度變數，這一非物理量變數甚難關連上實際應用或物理解說。
- 相較於其它基核，其所涉數理來得完整且簡單易明，因而解說性強、應用性高。

另圖 3.1 與 3.2 用以對比及彰顯此處仔波全振性亦或解析訊號流程所涉物理使用性。這兩個圖是相關於交正交離散仔波，因其缺乏上述諸項特性，故有其諸多顧慮。我們特以曲線爆展數值試驗來說明。其乃藉由仔波曲線局部上的連續放大來檢測仔波本質及數值表現行為，如其收斂性與穩定性，及其物理可用性。圖中我們對兩個交正交仔波其在某一尺度之波形的某一點加以局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ 。圖 3.1 之交正交仔波其所涉波濾權重係數量為 4 個，而圖 3.2 所涉波濾權重係數量為 20 個。使用 4 個權重係數者，其爆展過程失去了其原始數值恆定之要求，也就是說，理論上存在的收斂性在數值計算中消失了。使用 20 個權重係數者，其爆展過程中的收斂性也不是很理想，而且其曲線傾斜方向性也左右不定。而由這 4 個與 20 個權重係數量的對照，我們可以體會到精簡與效率所可能付出的代價。而再由這一點加以推廣，我們應也可以感受正交、非正交暨贅餘性所為何在。

此處類仔波定義式中承襲了莫利仔波的載頻變量，以下略述此載頻物理。

莫利仔波之複數函數為

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} (e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2}) e^{-t^2/2}, \quad (3.8)$$

上式中 ω_0 為一定值常數，而 $e^{-\omega_0^2/2}$ 項是用於讓該式符合仔波入允條件的調整

項。而莫利仔波的富立葉轉換式為

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{1/4}} [e^{-(\omega-\omega_0)^2/2} - e^{-\omega^2/2} e^{-\omega_0^2/2}]. \quad (3.9)$$

上一轉換式基本上亦幾乎是一個移位的高斯分佈（shifted Gaussian）。這當中的參數 ω_0 代表調變參數，它除了用來移動頻率罩窗，另外的實際物理是表示 $\psi(t)$ 波幅振動上第二大值與尖峰最大值的比質 r ：

$$r = \psi(t_2)/\psi(0), \quad (3.10)$$

式中 t_2 為第二大峰值發生點， t_2 的確值可以由其超越方程式（transcendent equation）數值求算，不過一個相當精確的顯式估量值可以用下式求得，

$$\omega_0 \approx \frac{2\pi}{t_2} \approx \pi \left(-\frac{2}{\ln r} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

此乃因為就我們所關心的尺度範圍亦或能量考量上，莫利仔波的調校項與主項其值有數個級距之差。由上式可見 ω_0 越大則 r 質越小，若 ω_0 為常數，則對任何縮放或不同尺度之仔波其 r 值均相同，即不同尺度之波高衰減分佈形狀均相似。再者，參數 ω_0 在經尺度 s 之縮放後其相對應的載頻即為 ω_0/s ，本文全部所有圖示中，凡所標示為尺度或頻率者都是表示此一物理量。另外說明的是，忽略了式 3.8 中的調整項，則 $\psi(t)$ 已不符仔波入允條件，而本質上、或數理上就是一個經過縮放的加窗之富立葉轉換，但我們仍得以稱其為簡化型的莫利仔波，蓋因調整項一般甚小而可以省略。

以下我們說明前述出色要項中，瞬間頻率所相關的是能量最大值之能脊線。不過，先指出的是，此處之類仔波其對應於上述瞬間頻率的則是密度分佈的谷底位置點。

設 $g(t)$ 為一罩窗函數，且具常規化值（unit norm），另其支撐分佈適當衰減並以 $t = 0$ 為分佈中心，亦即 $\hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ ，而 $\hat{g}(0)$ 是為 $\hat{g}(\omega)$ 之最大值，另其級數量（order）為 1。此時加入這一罩窗之富立葉轉換之轉換原子（Fourier

atom) 是為

$$g_{\zeta}(t) = g(t)e^{i\zeta t} = g(t)e^{i\theta}. \quad (3.12)$$

此原子之罩窗以尺度 s 縮放及移位 u 變位之版本則為

$$g_{s,u,\zeta}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}g\left(\frac{t-u}{s}\right)e^{i\zeta t} = g_s(t-u)e^{i\theta}, \quad (3.13)$$

式中 ζ 為調變頻率， $g_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}g(\frac{t}{s})$ 為 $g(t)$ 之縮放，亦具常規化值。另前述調變頻率項如果也再進行縮放及移位，則所得的轉換原子即是仔波原子 (wavelet atom)。

今以富立葉轉換原子式 3.13 將一實函數 $f(t)$ 進行轉換，即

$$\langle f, g_{s,u,\zeta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_s(t-u)e^{-i\zeta t}dt. \quad (3.14)$$

此時若將 $f(t)$ 表為解析訊號流程所得並具唯一性之實部項，即 $f = a(t) \cos \phi(t)$ ，可以得証 [21, 28] 如下關係式：

$$\langle f, g_{s,u,\zeta} \rangle = \frac{\sqrt{s}}{2}a(u)e^{i(\phi(u)-\zeta u)} \left(\widehat{g} \left(s[\zeta - \phi'(u)] \right) + \epsilon(u, \zeta) \right), \quad (3.15)$$

其中

$$|\epsilon(u, \zeta)| \leq \epsilon_{a,1} + \epsilon_{a,2} + \epsilon_{\phi,2} + \epsilon_g. \quad (3.16)$$

此處之 ϵ 為整體校正項，其各種校正有四類如下：

- 該點振幅數值之相對性變化率， $\epsilon_{a,1} \leq \frac{s|a'(u)|}{|a(u)|}$;
- 週遭振幅曲度所可引致之相對性變化率， $\epsilon_{a,2} \leq \sup_{|t-u| \leq \frac{s}{2}} \frac{s^2|a''(t)|}{|a(u)|}$;
- 週遭頻率變化率所可引致之誤差， $\epsilon_{\phi,2} \leq \sup_{|t-u| \leq \frac{s}{2}} \left[s^2|\phi''(t)| \right]$;
- 罩窗其頻率分佈 $\widehat{g}(\omega)$ 之相對高頻區所帶來誤差， $\epsilon_g = \sup_{|\omega| \geq s\phi'(u)} |\widehat{g}(\omega)|$.

設若 ϵ 可略，則上式轉換模值能量分佈之最大值是發生在 $\hat{g}(0)$ 處，即此處

$$\xi - \phi'(u) = 0, \quad (3.17)$$

因而

$$\phi(u) - \xi u = \text{Const.} \quad (3.18)$$

而由上面轉換式 3.13 中我們知悉其模值分佈之相位訊息是為 $\phi(u) - \xi u$ ，也如是乎，我們得到瞬間頻率、能脊線、及停駐相位或靜態相位（stationary phase）這三者的關係。即在解析訊號流程相關轉換下，若誤差條件許可，訊號之瞬間頻率發生位置是相應於能脊線及停駐相位。

至於若使用仔波轉換原子，類似的推導，亦得其模值能量分佈之最大值是發生在 $\hat{g}(0)$ 處，即 $\xi - \phi'(u) = 0$ ，唯此時其模值時尺分佈之相位訊息是為 $\phi(u)$ 而非 $\phi(u) - \xi u$ ，因而停駐相位並不適用，而能脊線發生在所在點的頻率相等於所在點相位分佈之時導數，也就是瞬間頻率是發生在頻率座標等於該點上相位分佈之時導數。

由上述的推演我們得以明白，無論蓋博轉換、亦或莫利仔波轉換，其時尺座標上的相位分佈，基本上都無法直接看出瞬間頻率之發生位置。相對地，此處類仔波轉換相位分佈之數值結果具有非常明確清晰的直接訊息，可由分佈圖上馬上判定。

圖 3.3 驗證式 2.5 其符合解析訊號流程之程度，圖中所求算訊號為一 X 型訊號 $f(t)$ ，而內積為 $\langle f(t), \mathcal{A}[\psi] - \psi \rangle$ ，式中 $\mathcal{A}$ 表求取相應解析訊號。由其能量分佈得知其為相當良好的解析訊號。而由其相位分佈圖亦得以說明，相位分佈是全面性的，不論模值之大小為何都具分佈，也就是說，即使是非訊號真實分佈區，亦或無能量、低能量區，也都有因誤差或渲染而來的相位分佈，故其相位時尺分佈，未經前置及後置處理並無法直接取用。

3.5 解析訊號與希伯轉換

在先前我們已說明了解析訊號流程與蓋博轉換及莫利仔波轉換的關連，並及於其所涉長處或用途，而在這一節中我們探討解析訊號與希伯轉換之關係，從而得以進一步了解解析訊號行為特性，或其拘限。

一實數訊號記為 $f(t) = f_r(t)$ ，若可以找到一個適當的虛數對應函數 $f_i(t)$ ，則將兩者組合成複數函數 $z(t)$ ，而得其振幅函數 $a(t)$ 及相位函數 $\phi(t)$ ，而由 $\phi(t)$ 之導數得其瞬間頻率 $\omega_i(t)$ ，其關係如下：

$$z(t) = f_r(t) + I f_i(t) = a(t)e^{i\phi(t)}, \quad (3.19)$$

$$\omega_i(t) = \phi'(t). \quad (3.20)$$

若依上式則自然地可以把實訊號表為：

$$f_r(t) = a(t) \cos \phi(t), \quad (3.21)$$

可是，若實部與虛部 $f_r(t)$ 及 $f_i(t)$ 完全沒有關連，亦或說是 $f_i(t)$ 任意給定，那我們知道 $a(t)$ 及 $\phi(t)$ 有無窮多可能。因而這裡的問題是，何謂適當的對應虛部，而這一問題就是說何謂瞬間頻率，亦或說是如何設計瞬間頻率，一個 $f_i(t)$ 就有一個特別型式的瞬間頻率。也如是乎，瞬間頻率的定義至今仍是一個開放的問題（open question）。

然而蓋博（Gabor）在1946 [7]，從頻率領域反轉換的觀點出發，提出一個複數訊號如下：

$$z(t) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F_r(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.22)$$

式中 $F_r(\omega)$ 為 $f_r(t)$ 的富立葉轉換。我們得以由上式看出，它是把 $F_r(\omega)$ 在負頻率的分佈都取為零值，而正頻率的分佈則不變，兩者組合再行富立葉反轉換，是故，將 $z(t)$ 行富立葉轉換所得便只有正頻率之存在。也如是乎， $z(t)$ 是一個

合乎直覺而可物理解析的訊號。另外式中所出現的常數 2，是得以把這一實部完全等同原訊號 $f(t) = f_r(t)$ 。另由富立葉轉換的基本特性知 $z(t)$ 必然是複數也唯一。

至於解析訊號與希伯轉換的關連，則必須探討下一等式關係 [4]，

$$z(t) = f_r(t) + i \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_r(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (3.23)$$

而式中的虛數項即為希伯轉換定義式

$$\mathcal{H}[f_r(t)] = \widetilde{f_r(t)} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_r(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (3.24)$$

另式中的符號 $\mathcal{P}$ 是表高希主質積分（Cauchy principal value），即

$$\mathcal{P} \int = \lim_{\epsilon_1 = \epsilon_2 \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t - \epsilon_1} + \int_{t + \epsilon_2}^{\infty} \right). \quad (3.25)$$

式 3.24 中的積分是一旋移乘積之型式，也就是若令

$$g(t) = \frac{1}{t}, \quad (3.26)$$

則該式就等同下一式

$$\widetilde{f_r(t)} = \frac{1}{\pi} (f_r \star g)(t). \quad (3.27)$$

而由富立葉轉換之成對雙向可行特性（Fourier duality properties），得此旋移乘積之富立葉轉換與希伯轉換之富立葉轉換有如下關係，

$$\mathcal{F}[\widetilde{f_r(t)}] = \widehat{H}(\omega) = \frac{1}{\pi} F_r(\omega) G(\omega). \quad (3.28)$$

此時 $F_r(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 被分開來，而高希主值積分此時只相關於 $g(t)$ ，而 $g(t)$ 之富

立葉轉換為

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t)] &= G(\omega) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt = \\ &\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{t} dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt.\end{aligned}\quad (3.29)$$

由於上一式其實部之積分對象為反對稱（antisymmetry）故其積分為零。至於虛部之積分對象 $\frac{\sin(\omega x)}{x}$ 則因全支撐，包含 $x = 0$ 之處，都為定值故不須牽涉高希主值積分，另這一虛部積分對象為對稱型態，故只考慮其一半之積分，並由變數轉化（change of variable）得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx = \text{sgn}(\omega) \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du. \quad (3.30)$$

這裡我們得知 $G(\omega)$ 與 ω 的大小變化沒有關連，而只跟其符號有關，另其積分式雖狀似簡單，但並不是一個無足輕重的不起眼過程，它必需以複數積分法（complex integral calculus）中的剩餘定理（residue theorem）求取，如參見 Greenberg 所著高等工數教科好書 [8]。其結果如下

$$G(\omega) = \begin{cases} -i\pi \text{sgn}(\omega) & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

至此得解析訊號的富立葉轉換 $\mathcal{A}[f_r(t)]$ 為

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[f(t)]] = F_r(\omega) + i\mathcal{F}[\mathcal{H}[f_r(t)]](\omega) = \begin{cases} 2F_r(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega \leq 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

上一式同時完全匹配式 3.22 與式 3.23，也就是實質上驗證了式這兩個式子是同一信號。至此，我們得訊號其希伯轉換之富立葉轉換為

$$\hat{H}(\omega) = \mathcal{F}[\mathcal{H}[f(t)]](\omega) = \begin{cases} -iF(\omega) & \omega > 0 \\ iF(\omega) & \omega \leq 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

使用這一方程式，我們知道，希伯轉換僅是把原訊號的富立葉轉換結果作一些簡單變化再行富立葉反轉換即得。其程式僅需簡單數行即得，如表 3.1 中以 ASYST 語言所撰寫的一個「字」(word) `my.hilbert`。

由上述所涉流程及其最終結果，必需指出的是，希伯轉換會把富立葉轉換所具有的特性充分反應出來，這當中存在有主要的困擾或衍生顧慮，如波譜自由度 (degree of freedom) 或變異不定性所涉問題。另外我們先前的研究中 [13]，亦探討過以 Parks-McClellan minimax algorithm 在時領域上的不同調適處理法，及其於希伯轉換上的不同現象及優劣並存 (trade off) 行為。簡而言之，解析訊號流程所涉瞬間頻率在訊號紊亂度較大下，有其難以預期行為亦或矛盾現象。如，雖然解析訊號其頻帶必然是在正頻區，但瞬間頻率可以為負值。

以上的說明再度陳述，就蓋博轉換及莫利仔波轉換而言，其瞬間頻率與能脊線其關係之存在有其一定限制，一個大致原則是要求訊號或成分訊號緩變。而這一現象其實等同下面的解析觀點。

若把轉換之內積式視為一線性運算子 $\mathcal{L}$ (一個含移位的內積式，如式 3.15，可以轉換成一個旋移乘積式，而旋移乘積為一線性濾波運算)，則 $\mathcal{L}$ 必需具有弱連貫性 (weak continuity)，亦即當 $f(t)$ 只稍微改變時， $\mathcal{L}f(t)$ 也就只能有稍微的變化。此一弱連貫性一方面則反應出連續轉換及其贅餘性的價值，一方面也反應出離散領域上的正交、交正交各類仔波難以提供有用物理訊息亦或說是難以現象診斷，蓋這些離散轉換不具弱連貫性。如圖 3.1 與 3.2 所涉函基及其相應現象。

3.6 類仔波轉換時尺鑑別特性

這一節的本質事實上就是把贅餘性加以具體化，而所謂贅餘性也就等同模糊效應。了解模糊效應也才得知悉時尺鑑別特性。

罩窗的選擇反應出時頻解析原子 (transform atoms) 的性狀，而時頻解析原子的基本要求在於海參堡不定性原理。在一個有限的時頻座標區域內，不論是連續或離散轉換，其能量沒有單純的線分佈，更不可能有點分佈，它必然是區塊分

佈。訊號如此，轉換原子亦如此。另前述區塊上之分佈連貫性與變化性或密度權重性，甚而都有可能是不規則的性狀。而所謂轉換的正交非正交、贅餘非贅餘，正是反應其轉換原子在時頻分佈上之重疊非重疊，另及重疊嚴重性。由此一觀點看，連續之時尺轉換必然是贅餘的，而一般離散轉換所要的正是，其轉換原子時頻窗都只相鄰而不重疊所帶來的轉換效率。另外必需說明的是，時頻窗或轉換原子在時頻能量密度圖上，一般也僅能說是代表性的表意顯示手法，並無法反應確切真實分佈，只是說，其中心座標大底代表能量分佈重心，而其所佔區塊也大底代表其劃分的等值範圍。因而要有時頻解析度的觀念，時頻窗很籠統，比較容易體會的，就是要理清模糊效應（ambiguity effects）。在這一節中，我們從模糊效應的觀點來探討莫利仔波與此處類仔波的特性差異，並進而說明類仔波訊息提供性的形成因子，即其頻漏現象與相位糙音所凸顯特性。

因為贅餘帶來了籠統的模糊，一個頻率（或尺度）與其週遭的頻率（或尺度）互為渲染，每一個尺度即由內向外投射，也接受其它尺度由外而入的投射。此外同尺度間亦具渲染。前者是一種的頻漏投射，後者是一種相位糙音投射。以下我們用數值求算結果來探討其分佈特性。

- 圖 3.4 示此類仔波之向外頻漏特性分佈曲線。此向外頻漏乃單位尺度轉換原子對其相鄰尺度解析訊號原子的投射渲染。這裡的重大特性就是根值發生點、根值兩側曲線坡度（即此處根值與旁邊數值的對比性）、暨其兩側之一正一負分佈，此三特性提供類仔波瞬間頻率鑑別之簡易性。就參數 $\omega_0 = 5$ 而言，曲線根值發生點為尺度 1.0313。
- 圖 3.5 示莫利仔波之向外頻漏特性分佈曲線。這裡的特性就是頻漏曲線之全正分佈而不涉根值，及接近尺度 1 的峰值點（亦即驗證前節中能脊線與瞬間頻率的關係）。此一峰值點就 $\omega_0 = 5$ 而言，是發生在尺度 0.9622（亦驗證前節中所存在誤差）。由於峰值點左右鄰近的相互對比差甚小，故不利於瞬間頻率之方便識別。另就解析度上的時頻窗分佈之體會而言，由此圖與類仔波者，我們應該比較能感受到罩窗分佈相關的複雜性，也體會以頻漏來探討的淺顯易明。

- 圖 3.6 示類仔波其由外而內的頻漏特性分佈曲線。此外來渲染乃相鄰尺度解析訊號原子對單位尺度轉換原子的投射。這一曲線基本上對照於圖 3.4。其比較突出之處，仍是相似，即根值點發生點（曲線之根值約為 0.9696）、根值兩側曲線坡度、根值與其它數值的對比、暨其兩側之一正一負分佈。另可看出大尺度對小尺度之渲染相對嚴重。
- 圖 3.7 示莫利仔波之由外而內的頻漏分佈曲線。這一曲線基本上對照於圖 3.5。其特性仍是頻漏曲線之全正分佈而不涉根值，及接近尺度 1 的峰值點（發生在尺度 1.0393）與此處的不明顯對比。
- 圖 3.8 示類仔波其相位糙音特性分佈曲線。此相位糙音乃由兩個相同尺度但不同相位的轉換原子與解析訊號元間的內積投射，亦即將一移位的單位尺度訊號投影於未移位的轉換原子，這裡的重要特性乃是零相位上的根值點，暨其鄰近之糙音對比於下一圖莫利仔波者是相對較小。另外說明的是，此根值點左右兩側曲線其包絡線各有其峰，即整體曲線為兩峰分佈。
- 圖 3.9 示莫利仔波之相位糙音特性分佈曲線。其特性仍是曲線之分佈零相位並不涉根值而是一個最高的峰值點，另其整體曲線包絡線之單峰特性。

綜上及前些節中所述，我們了解到時尺能量密度分佈暨轉換相位分佈在兩種轉換下其瞬間頻率的鑑別方式是截然不同地。對莫利仔波而言，瞬間頻率發生於一個對比甚差的峰頂脊線位置，而就類仔波而言，則是對應於能量谷底。另相位時尺分佈上，兩者的鑑別度也截然不同。對莫利仔波而言，時尺相位分佈無法直接看出瞬間頻率發生位置，然而就類仔波而言，它發生在零相位正負轉換點，它們的對比性極其強烈。 ❖

表 3.1 此一 ASYST 語言程式乃用於求取一實訊號之希伯轉換。由這一簡單程式可見，希伯轉換乃輸入訊號之簡單 FFT 及 IFFT 運作與排列組合。而基於 FFT 之自由度所衍生之問題亦或是波譜不定性問題，我們可以體會此一轉換所得解析訊號之瞬間頻率變異行為可能難以捉摸，尤其是當局部振幅或頻率之相對變動率較大時其所帶來的怪異現象。而此亦相關於莫利仔波其能脊線與靜態相位（stationary phase）之間關係之存在良劣性。

```

\ -----
\ A small program piece which finds the imaginary part of a real signal
\ based on the analytic signal procedure.
\ The computation makes use of the final results of complex calculus based
\ on Cauchy principal value integration.
\ The length of the input array will be automatically truncated to the
\ maximum allowable power of 2.
\ -----
: my.hilbert
  fft  []size  n.fft.pts :=
  dup  becomes> t1

  dup  sub[ 1 , n.fft.pts 2 / ]
  0    +1    z=x+iy *
  t1   sub[ 1 , n.fft.pts 2 / ] :=

      sub[ n.fft.pts 2 / 1 + , n.fft.pts 2 / ]
  0    -1    z=x+iy *
  t1   sub[ n.fft.pts 2 / 1 + , n.fft.pts 2 / ] :=

  t1   ifft
  zreal
;
\ -----

```

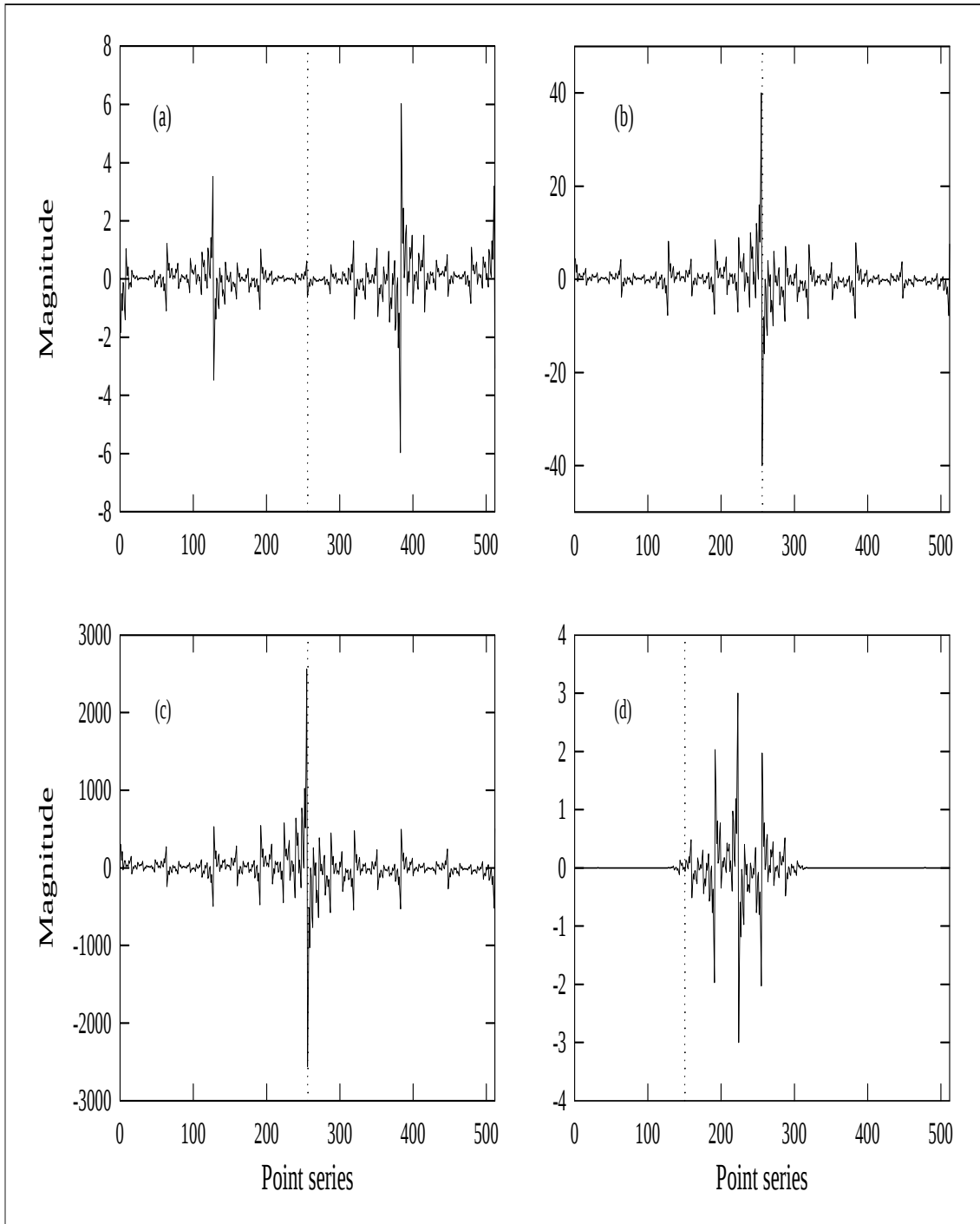


圖 3.1 具有迷人解析特性，亦或是具有高效率的精簡數值流程的仔波，其波形往往相當怪異，而非水波物理模擬上的選用對象。此圖為一個交正交仔波其某一尺度之波形（d子圖）的局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ （a、b、c子圖）。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為 4 個，由各子圖可見，其爆展過程失去了其原始數值恆定之要求，也就是說，理論上存在的收斂性在數值計算中消失了。相關爆展中心點為 150。

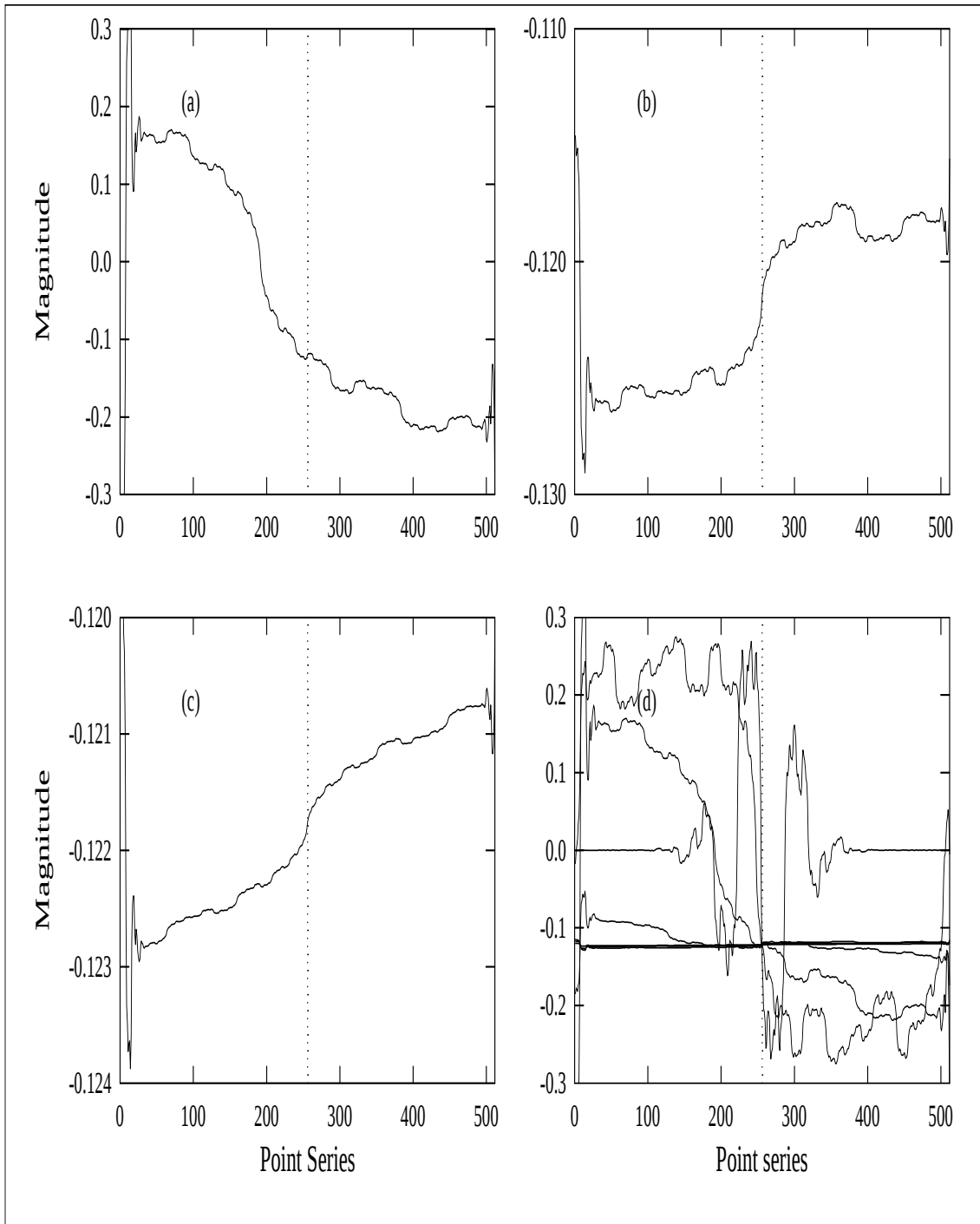


圖 3.2 此圖亦示解析特性特出之仔波，難以成就水波之物理模擬。亦且對比於母仔波全振性及其父仔波之全正性所衍生之性狀。此圖為另一交正交仔波其某一尺度之波形的局部連續放大（d子圖綜合各曲線），其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ （a、b、c子圖）。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為 20 個，由各子圖可見，爆展過程中其曲線傾斜方向性很特殊。相關爆展 爆展中心點為 256。

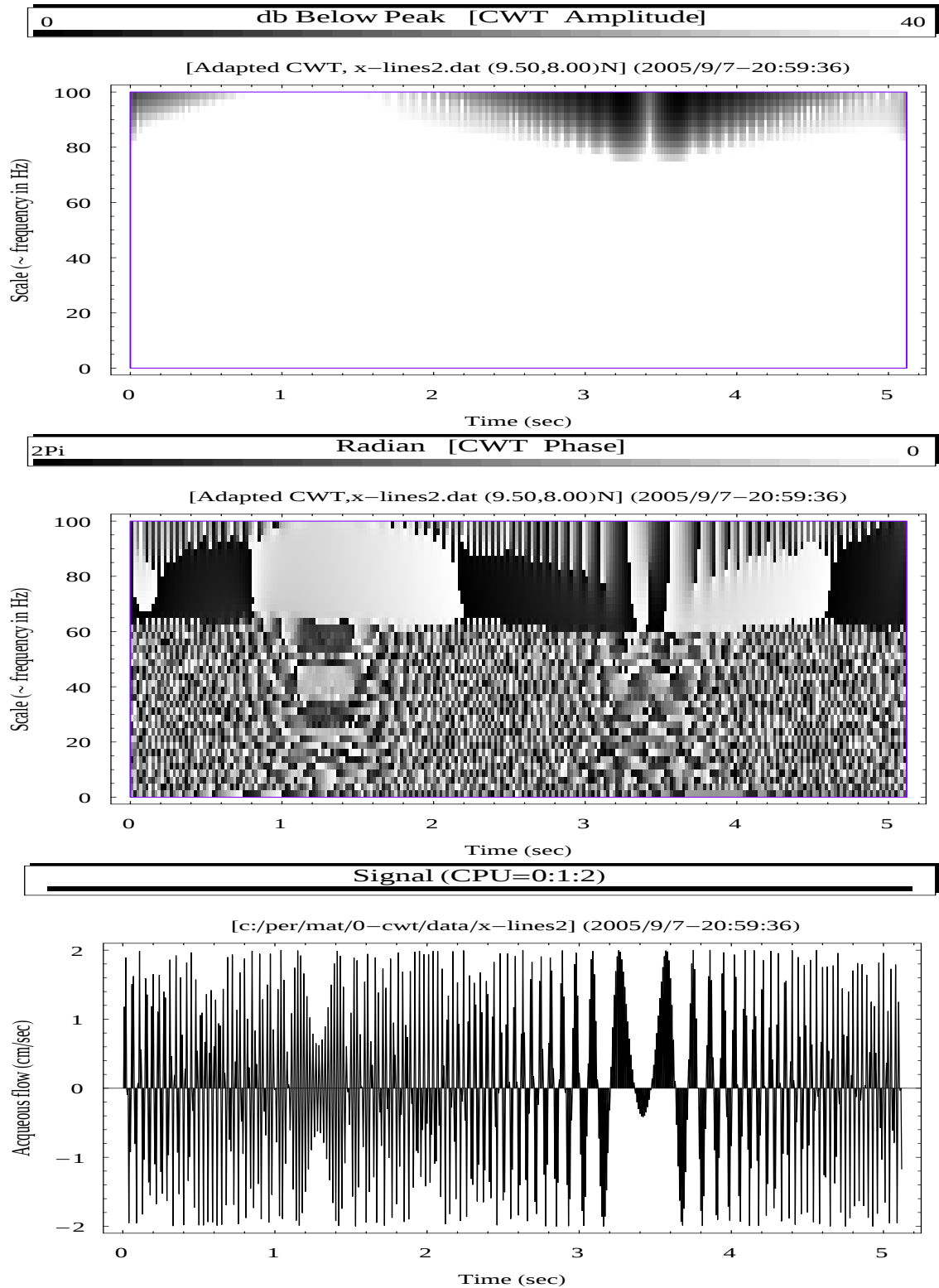


圖 3.3 此圖示相關於式 2.5 之仔波 ψ 其近似解析函數之程度。上子圖示 $\langle f(t), \mathcal{A}[\psi] \rangle$ 與 $\langle f(t), \psi \rangle$ 所得能量密度之差值分佈。中子圖示 $\langle f(t), \mathcal{A}[\psi] - \psi \rangle$ 所得相位分佈。下子圖則為所分析之訊號，其係為兩個線性漸變頻所合成的 X-型組合訊號。

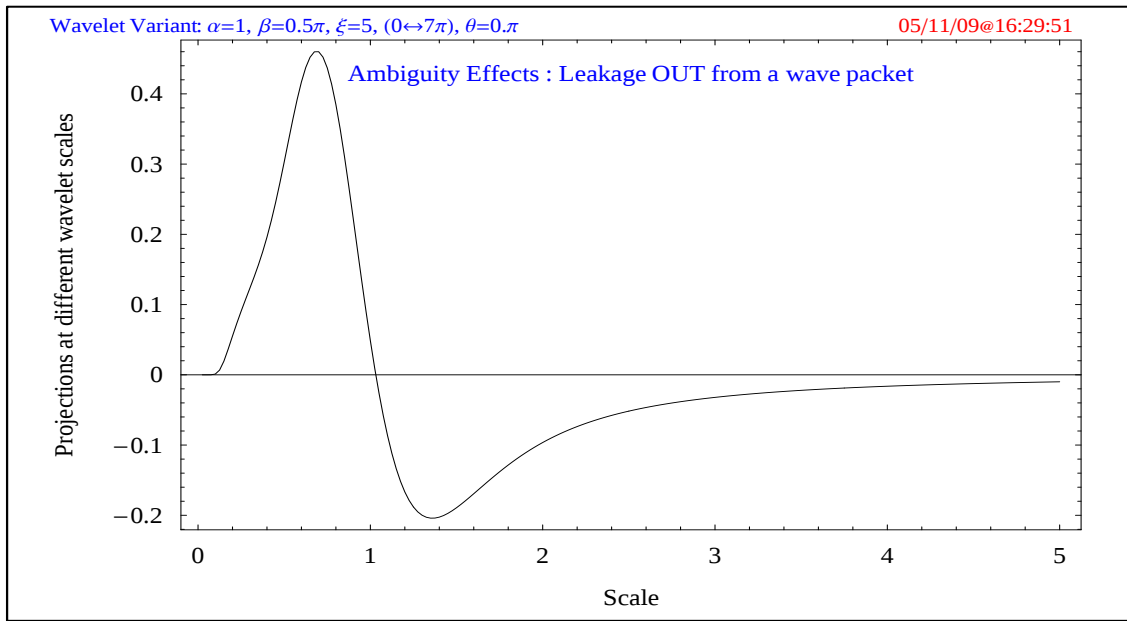


圖 3.4 類仔波其頻漏現象之向外渲染分佈曲線，亦或說是單元尺度類仔波對鄰近尺度之投影。當 $\omega_0 = 5$ 時此曲線之根值約為 1.0313。此一零值點及其左右之陡坡分佈得以提供時頻分佈上其瞬間頻率之方便識別。

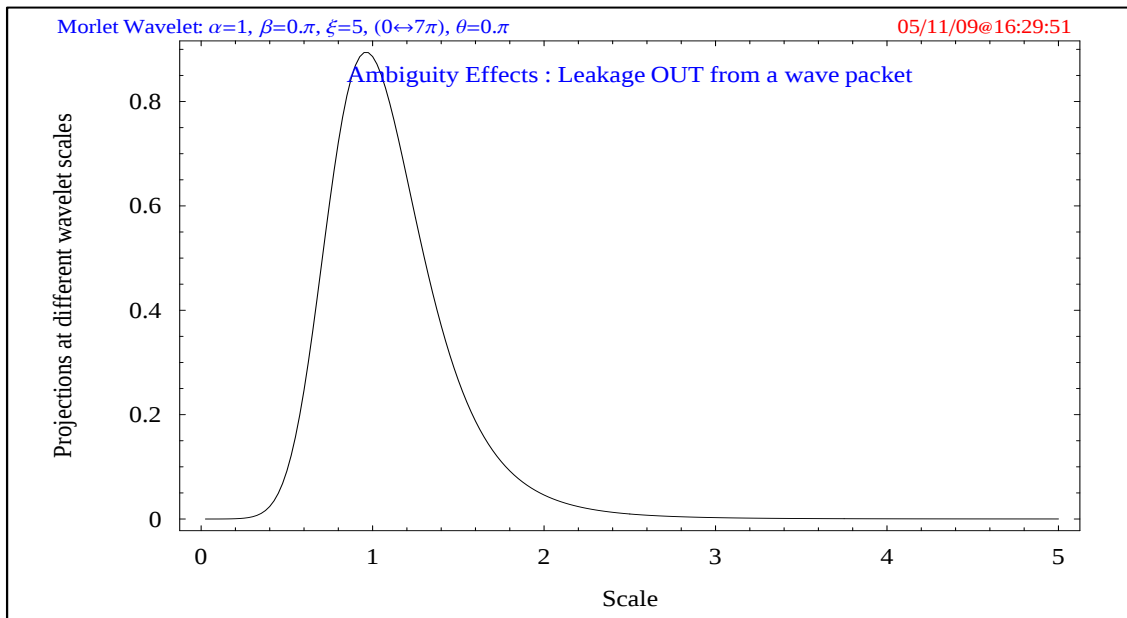


圖 3.5 蓋博型仔波其頻漏現象之向外渲染分佈曲線，亦或說是其單元尺度仔波對鄰近尺度之投影。此一曲線在 $\omega_0 = 5$ 其峰值發生於尺度 0.9622。由於峰值點左右鄰近的相互對比差甚小，故不利於瞬間頻率之方便識別。

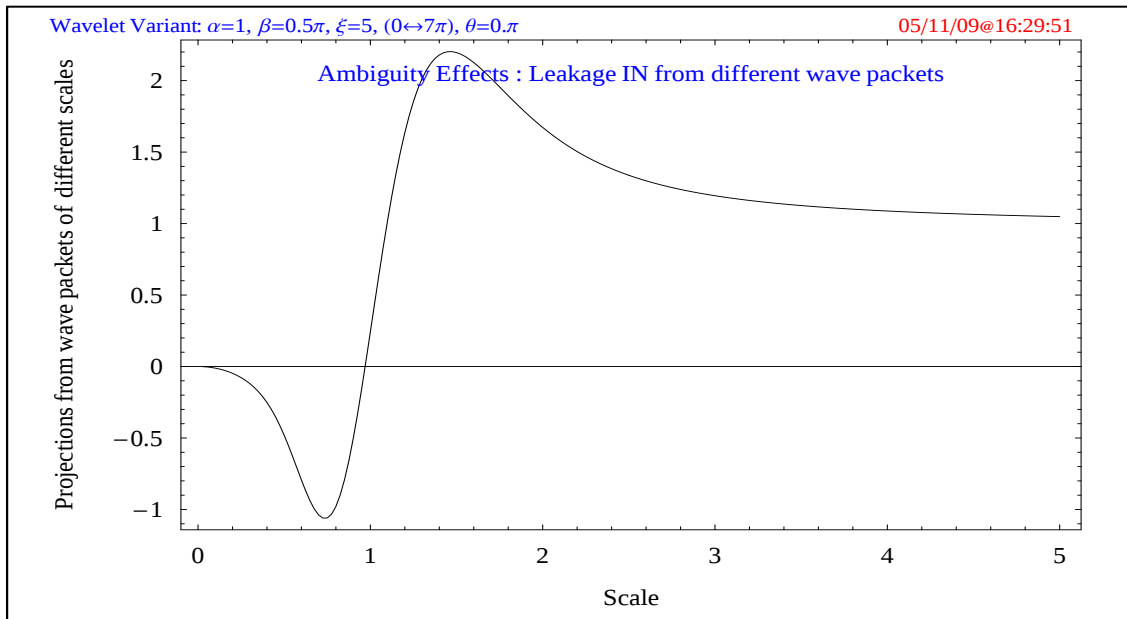


圖 3.6 類仔波其由鄰近不同尺度所洩漏而來之頻漏現象分佈曲線，亦或說是鄰近尺度對單元尺度類仔波之投影。當 $\omega_0 = 5$ 時此曲線之根值約為0.9696。

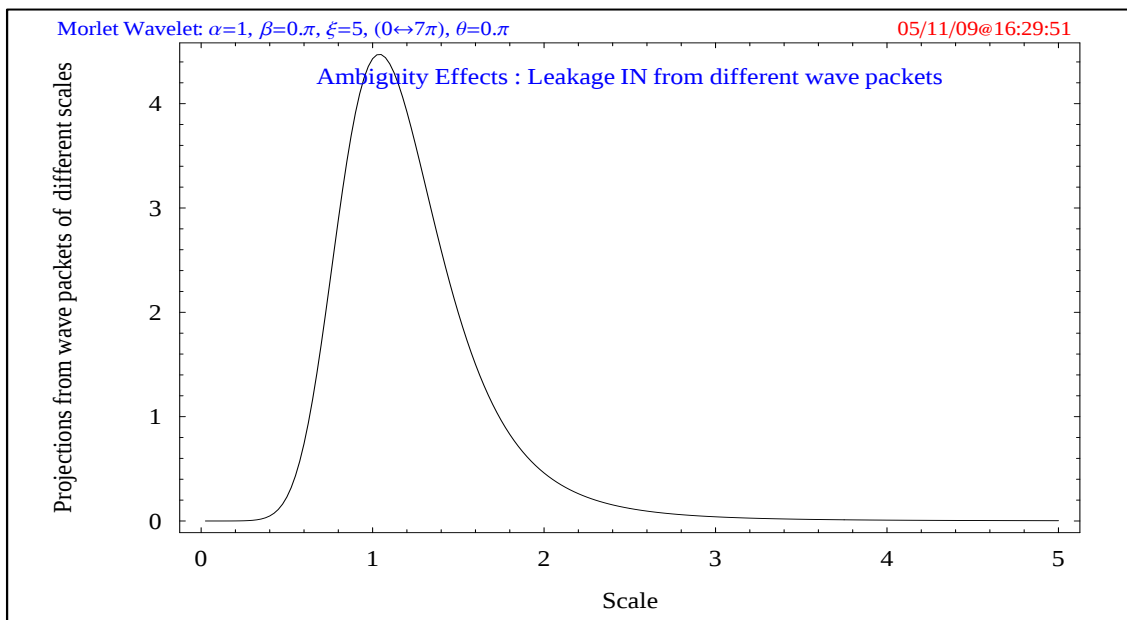


圖 3.7 蓋博型仔波其由鄰近不同尺度所洩漏而來之頻漏現象分佈曲線，亦或說是鄰近尺度仔波對單元尺度之投影。此一曲線在 $\omega_0 = 5$ 其峰值發生於尺度1.0393。

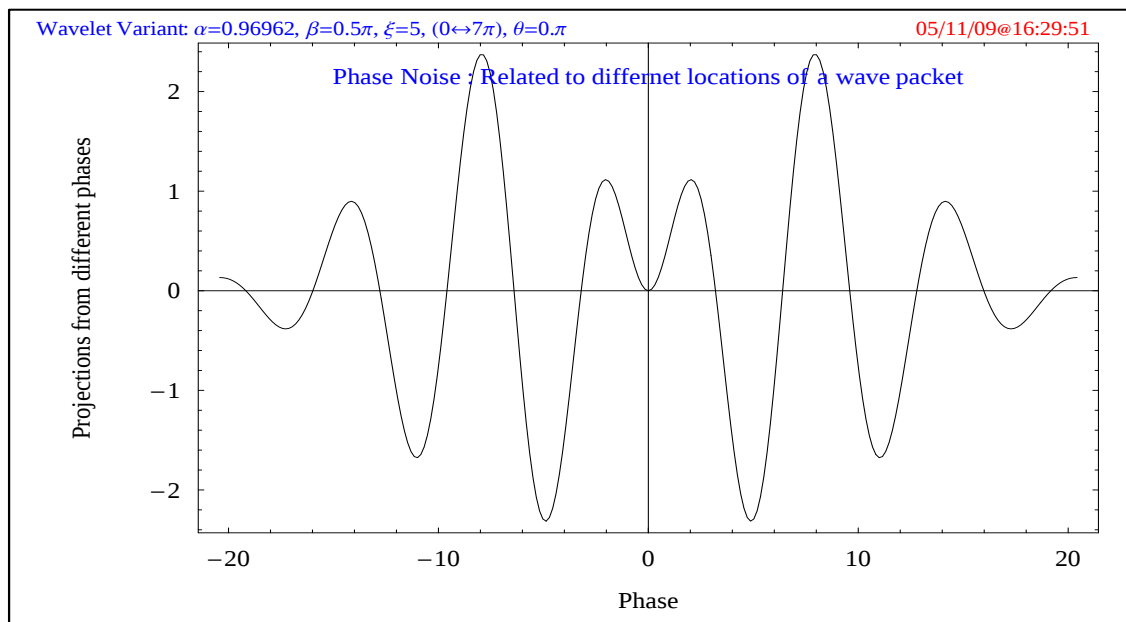


圖 3.8 類仔波之相位糙音或時移變位之模糊效應分佈曲線。此相位糙音乃指兩個相同尺度但處於不同位置下之函數內積。我們可以看到在零相位點上就是根值點，另其週遭值相對較小。這一特性亦提供此類仔波其時尺分佈上有利之識別性。

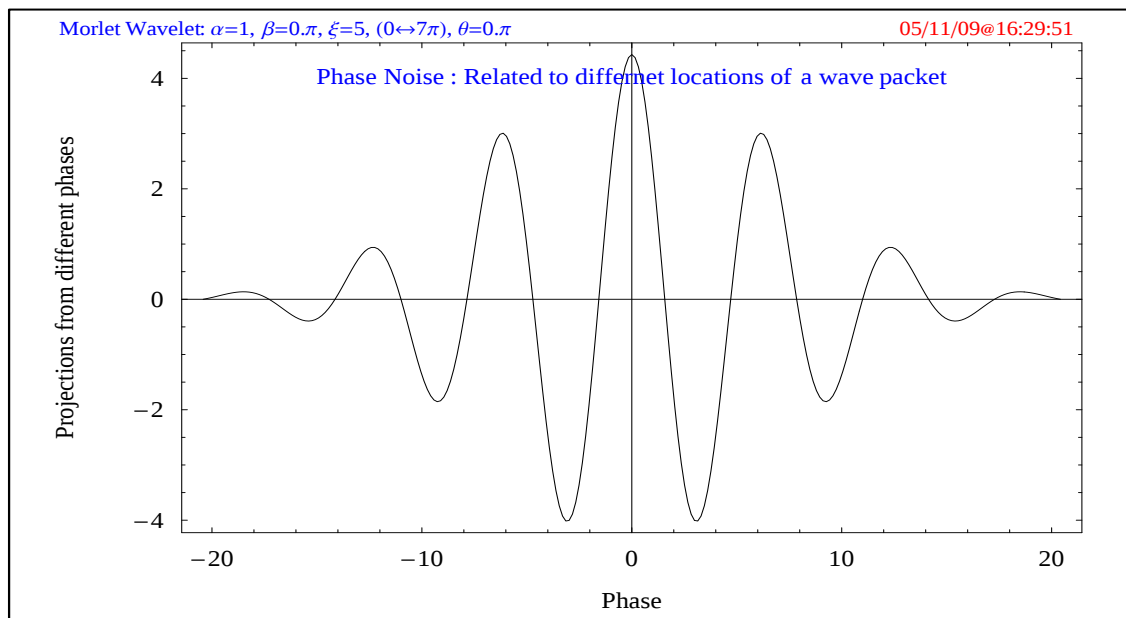


圖 3.9 蓋博型仔波其相位糙音或時移變位之模糊效應分佈曲線。亦即單元尺度仔波與其時移版本之投影求算。相對應於前圖類仔波之根值點是為一極限峰值。同樣地，其左右鄰近的高數值不利於瞬間頻率之方便識別。

數值探討暨模擬與應用

4.1 模擬訊號與試驗水波

此章中我們用一些數值模擬訊號及試驗室水槽波浪來檢測類仔波所可提供之信息，並與莫利仔波所得結果相互比較。其中數值模擬訊號有如下數種：

- 一個二次方漸高頻（parabolic chirp）訊號，其頻率由近零值以迄尼克斯率（Nyquist rate）100 Hz。
- 一個由兩成分線性漸變頻（linear chirps）交錯而成的 X 型訊號。此兩成分訊號之尼克斯率為 100 Hz，且相交於 50 Hz。另兩成分之振幅相等，即成分能量等值不變。
- 前述之 X 型訊號，唯其兩成分之能量比值為 0.01。
- 一個由兩成分等振幅平行分佈線性漸變頻所合成之訊號，其頻率亦由近零值以迄尼克斯率 100 Hz。
- 前述之平行訊號，唯其成分能量比為 0.04。

至於所用試驗室訊號則是循環水槽之波浪，有風生波與機械波如下：

- 一較高風速下的風生水波，其頻譜主峰帶頻率約 2.0 Hz。
- 相對於較低風速下之風生波，其頻譜主峰帶頻率約 2.6 Hz。
- 以機械所造之一個史脫克司（Stokes）波。

4.2 結果與討論

- 圖 4.1 為二次方漸高頻訊號其區段放大之時尺模值與時尺相位分佈圖。所示放大區段之載頻範圍由 20 以迄 57.5 Hz。其上兩子圖乃相應於莫利仔波者，即以近似式 2.5 為之。下兩子圖則是以類仔波求得之模值與相位分佈（式 2.4 及 2.7）。很明顯地，此處類仔波不論以能量或相位觀點檢視，都具強烈對比、容易判讀。就模值分佈而言，莫利仔波的能脊線是對應於類仔波的谷底位置。就相位分佈而言莫利仔波是無法直接提供訊息的，但類仔波的零相位交界位置則與模值分佈谷底位置互為對應，且可說同樣清晰、一看即知。
- 圖 4.2 之訊號相同於前圖，但以不同解析度及不同調適時頻窗（即 ω_0 參數範圍不同）所得之類仔波轉換分佈模值（中子圖）及相位（上、下子圖，分別相應於式 2.4 式 2.6）。雖然此處所用尺度數值解析間隔較大，但其瞬間頻率之識別則同樣非常清礎。特別的是，即使時尺相位分佈其各時變解析點未落於確確的瞬間頻率上，仍得以顯示清晰的交界面，此或說是具有容誤性。另 ω_0 參數變化所造成改變不明顯，這一點的部分因素應是 ω_0 已化於載頻變數內。
- 圖 4.3 說明相位旋轉之效應。其最下子圖係最上子圖之相位多了 $\frac{\pi}{2}$ 的旋轉。此一旋轉具有反應頻漏渲染範圍之特性。另上子圖黑白交錯帶大底反應解析點處之訊號是波峰亦或波谷。
- 圖 4.4 乃二次方漸高頻訊號其莫利仔波轉換下全頻域（近零值以迄尼克斯率 100 Hz）之模值與相位分佈圖。另及能脊線之立體顯示。
- 圖 4.5 乃二次方漸高頻訊號其類仔波轉換下全頻域之模值與相位分佈圖。另其立體圖則將高低值倒反顯示，以利簡易辨識。相較於模值分佈，在大尺度（即低載頻）區之相位紛紜性較高。
- 圖 4.6 示由兩個相交叉之等能量線性漸變頻訊號所組成之 X 訊號轉換結果，

並取區段放大。上子圖為模值分佈，下子圖為相位分佈。左側圖係以莫利仔波為之，右側圖則相對於類仔波。無論模值或相位，其優劣立判。

- 圖 4.7 係前一圖 X 訊號其全頻域之轉換模值與相位分佈。其左側圖為莫利仔波者，右側圖為類仔波者。其訊號交叉處都具渲染。另單就類仔波模值而言，其大尺度（即低頻區）對小尺度有較高的頻漏，故高頻區之效果不若低頻區，另其相位辨識仍然相當清晰，但極低頻區中易有大尺度之邊界效應。
- 圖 4.8 示上一 X 訊號在類仔波轉換下其相位旋轉之效應，其黑白交界面帶有頻漏渲染之分佈範疇（中子圖）。另上子圖以色彩提示瞬間頻率分佈是夾於高能模值之間者。
- 圖 4.9 所用訊號係由一對等能量之平行線性漸高頻合成訊號，其兩線間之頻率差距為十分之一尼克斯率（Nyquist rate），即 10 Hz。此圖係由莫利仔波所得模值分佈，其所提供之訊息可說是幾乎完全誤導，無法分辨成分波。
- 圖 4.10 示相同於前一圖之平行訊號下其類仔波所得模值分佈，由圖可以輕易識別出夾於藍色交錯分佈之兩平行訊號。
- 圖 4.11 所用訊號係由一對不等能量之平行線性漸高頻之合成訊號，其兩線間之頻率差距仍為十分之一尼克斯率（Nyquist rate），但兩成分訊號之能量比為 0.04。此一能量差異在兩種轉換下，其低能量成分均被模糊效應所掩蓋，以致無從分辨出。但就類仔波而言，其主能量訊號仍明確易識。反觀莫利仔波者，只在大尺度區有明確顯示，而在小尺度區（高頻區）仍甚差，亦即些微能量卻帶來嚴重汙染。
- 圖 4.12 示不等能量並交叉之線性漸高頻合成 X 型訊號相位分佈圖，其兩成分訊號之能量比為 0.01。上子圖係由莫利仔波所得，下子圖則係類仔波者。基本上類仔波亦難由相位取得弱能成分訊號，但似乎類仔波者在低頻區可有稍多的訊息。

- 圖 4.13 所分析之訊號係為試驗室水槽之風生波，其頻譜主峰值為 2.0 Hz。其左側子圖為莫利仔波轉換所得之模值與相位分佈。右側子圖則為類仔波者。無論在模值或相位分佈上，類仔波均提供較容易辨別的清晰訊息與對應性，特別是相位分佈其識別性之差異甚大。
- 圖 4.14 示另一風生波（頻譜主峰值為 2.0 Hz）之類仔波轉換模值與相位分佈圖，此一風生波與前一圖之風生波比較起來是屬於仍在增長階段，亦即波浪成熟度相對較差（less developed），亦或相應於較小風速。此處無論在模值或相位分佈上，都顯示有比較多重交界面之現象，其或可凸顯波場多尺度暨其相互間之幻化行為，亦或說明水波調變本質（wave modulation）及側頻不穩現象（Benjamin-Feir side band instability）[1, 2, 9, 10, 11, 12, 17, 19, 20, 23, 24, 27, 29]。
- 圖 4.15 所分析訊號係以機械所造之史脫克司水波，此一史脫克司波其基礎協和頻帶（fundamental harmonic）上（約 1.15 Hz）之波浪尖銳度約為 0.06。其左側圖為莫利仔波轉換所得之模值與相位分佈，右側圖則為類仔波者。無論在模值或相位分佈上，類仔波均展示較多，亦且較清晰的訊息。如介於 2 到 3 Hz 間其黑白交界點之起伏振盪，另亦可看到基礎協和頻帶之演化調變現象，如其前半段較平穩，而後半段較有高低分佈。綜合此類仔波於這些實際水波訊號的表現，我們可以說，在水波物理上的能量往覆行為（recurrence phenomenon）亦或側頻不穩現象研究上，此類仔波有較優良的表現，無論從模值或相位都能提供較詳細明確的特性。❖

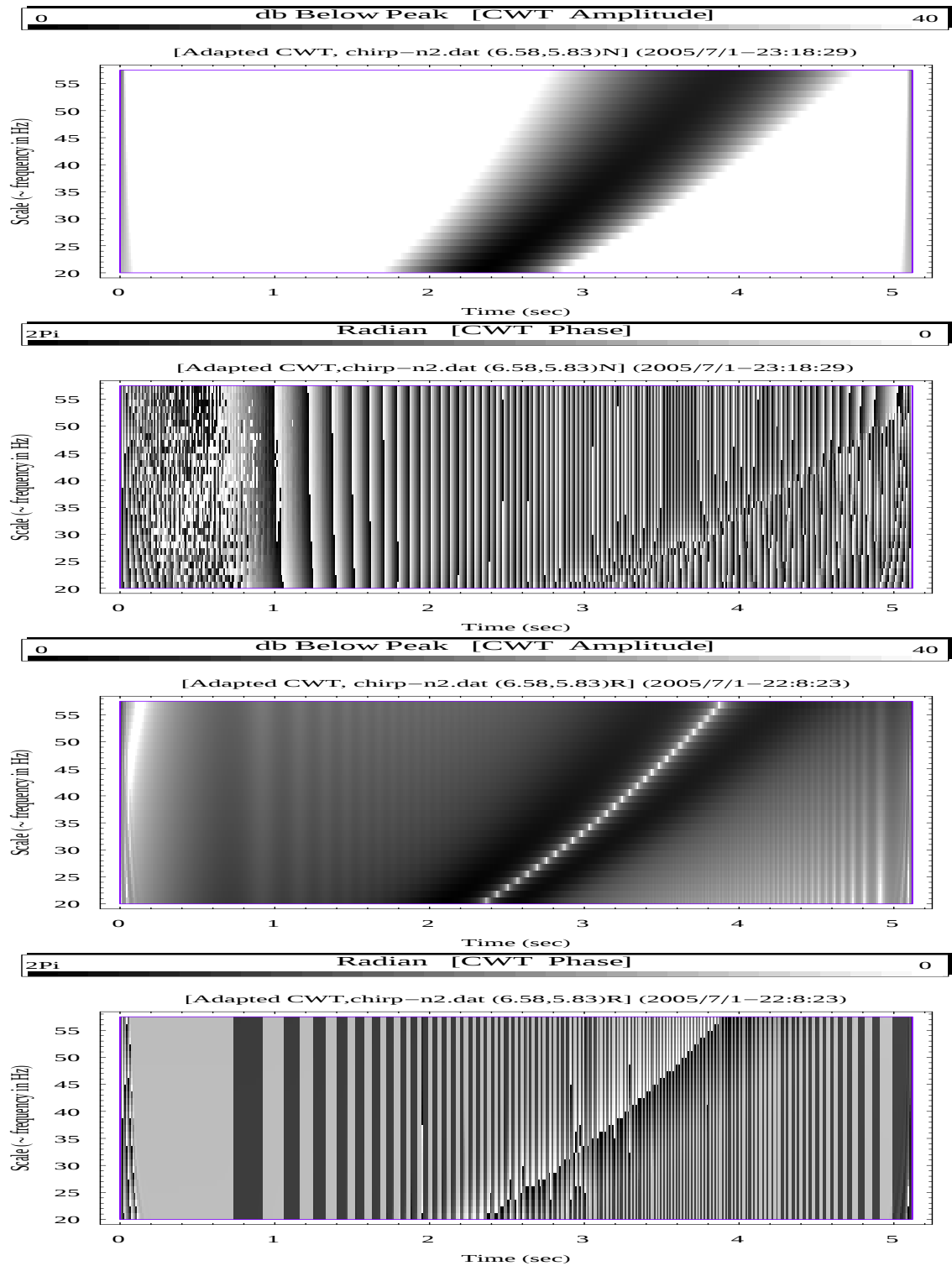


圖 4.1 此圖示一個二次方漸高頻訊號其區段時頻或時尺之模值與相位分佈圖。此訊號頻率範圍起於 0 以迄尼克斯率 (Nyquist rate) 100 Hz。上兩子圖乃以莫利仔波之近似式 2.5 為之。下兩子圖則以類仔波求得 (式 2.4 及 2.7)。很明顯地，不論以能量或相位觀點判讀，此處類仔波都清晰容易。

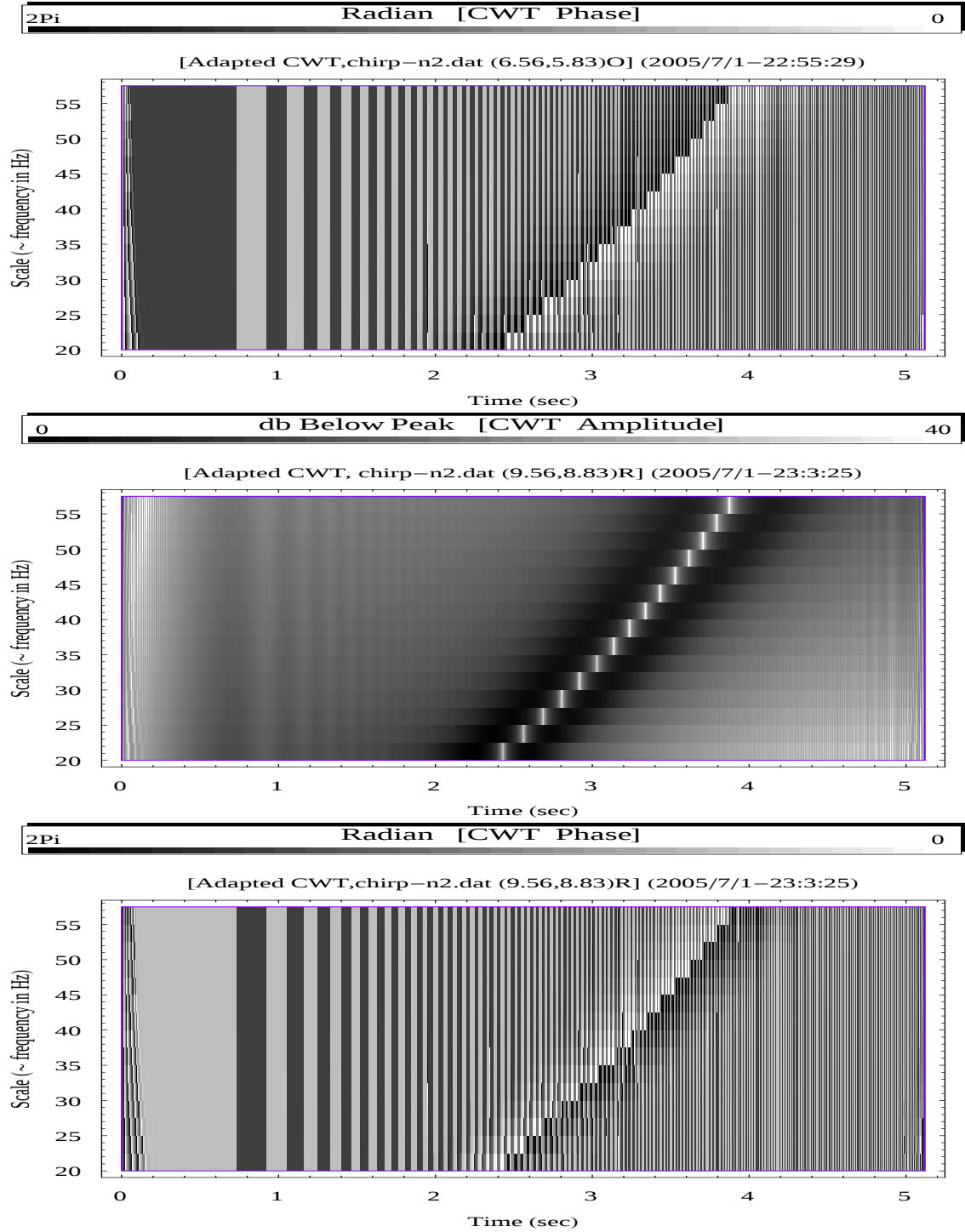


圖 4.2 相同於前圖訊號，但以不同解析度及不同調適時頻窗（即不同的 ω_0 參數範圍）所得之類仔波轉換模值（中子圖）及相位（上、下子圖）分佈。雖然此處所用解析間隔較大，但其瞬間頻率之識別則非常清礎。尤其是，即使時尺相位分佈其各時變解析點未落於確確的瞬間頻率上，仍得以顯示清晰的交界面。

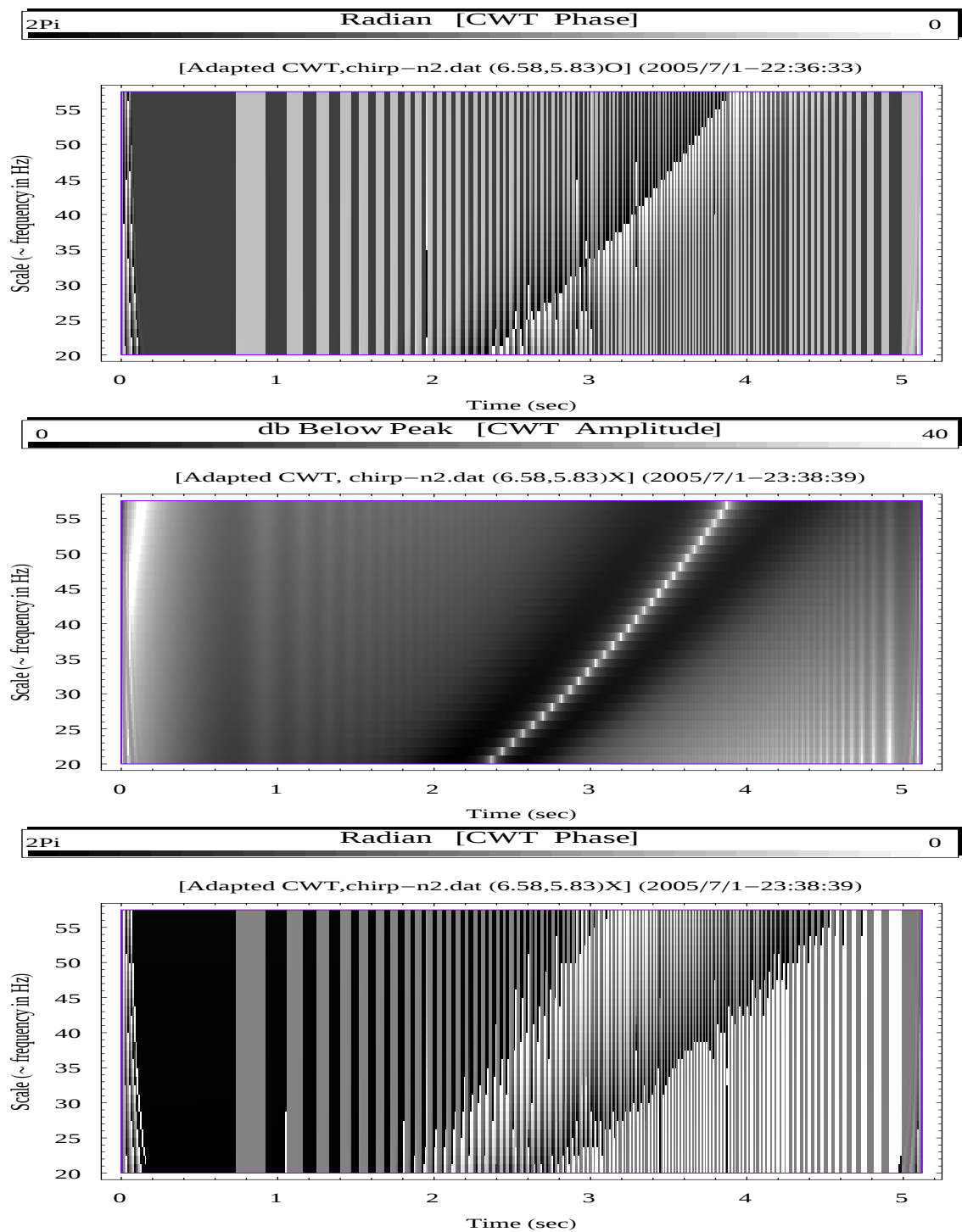


圖 4.3 此圖說明相位旋轉之效應。其最下子圖係最上子圖之相位多了 $\frac{\pi}{2}$ 之旋轉。其具有反應頻漏渲染範圍之特性。另上子圖黑白交錯帶大底反應解析點處之訊號是波峰亦或波谷。

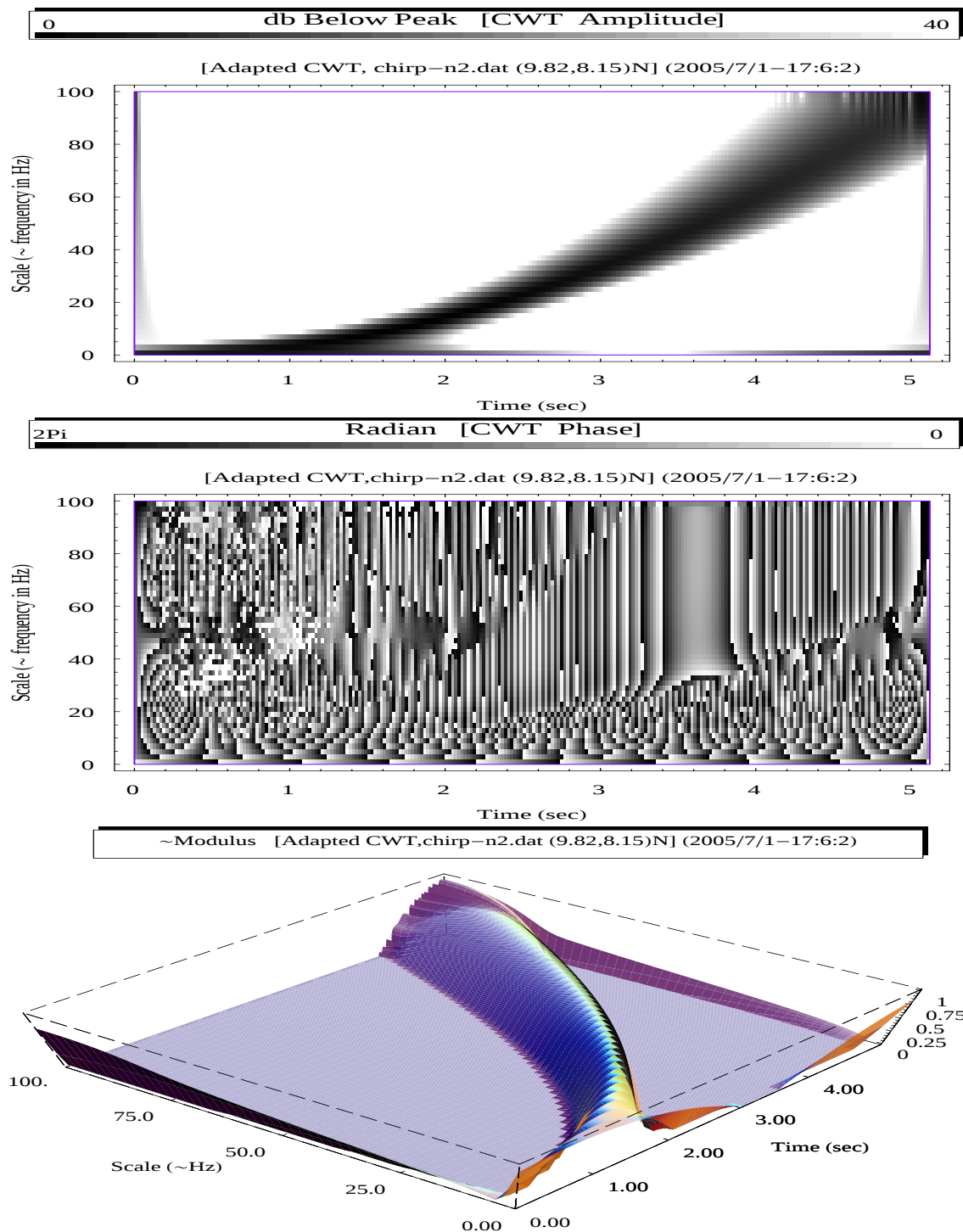


圖 4.4 此圖乃前些圖中所用二次方漸高頻其蓋博類型仔波轉換下全頻域之模值與相位分佈圖。另及能脊線立體顯示。

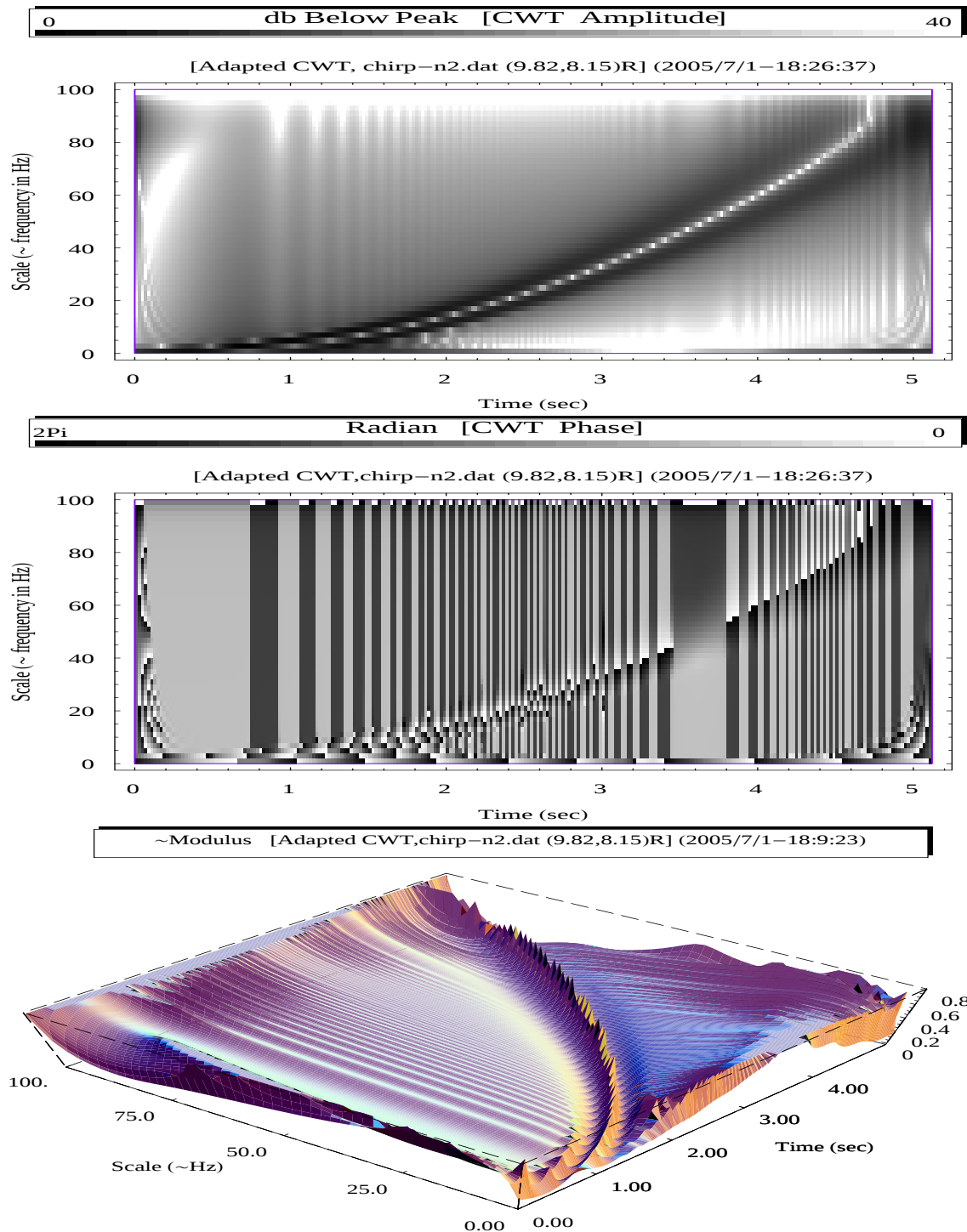


圖 4.5 此圖乃二次方漸高頻其類仔波轉換下全頻域之模值與相位分佈圖。另立體圖則將高低值倒反顯示，以利簡易辨識。

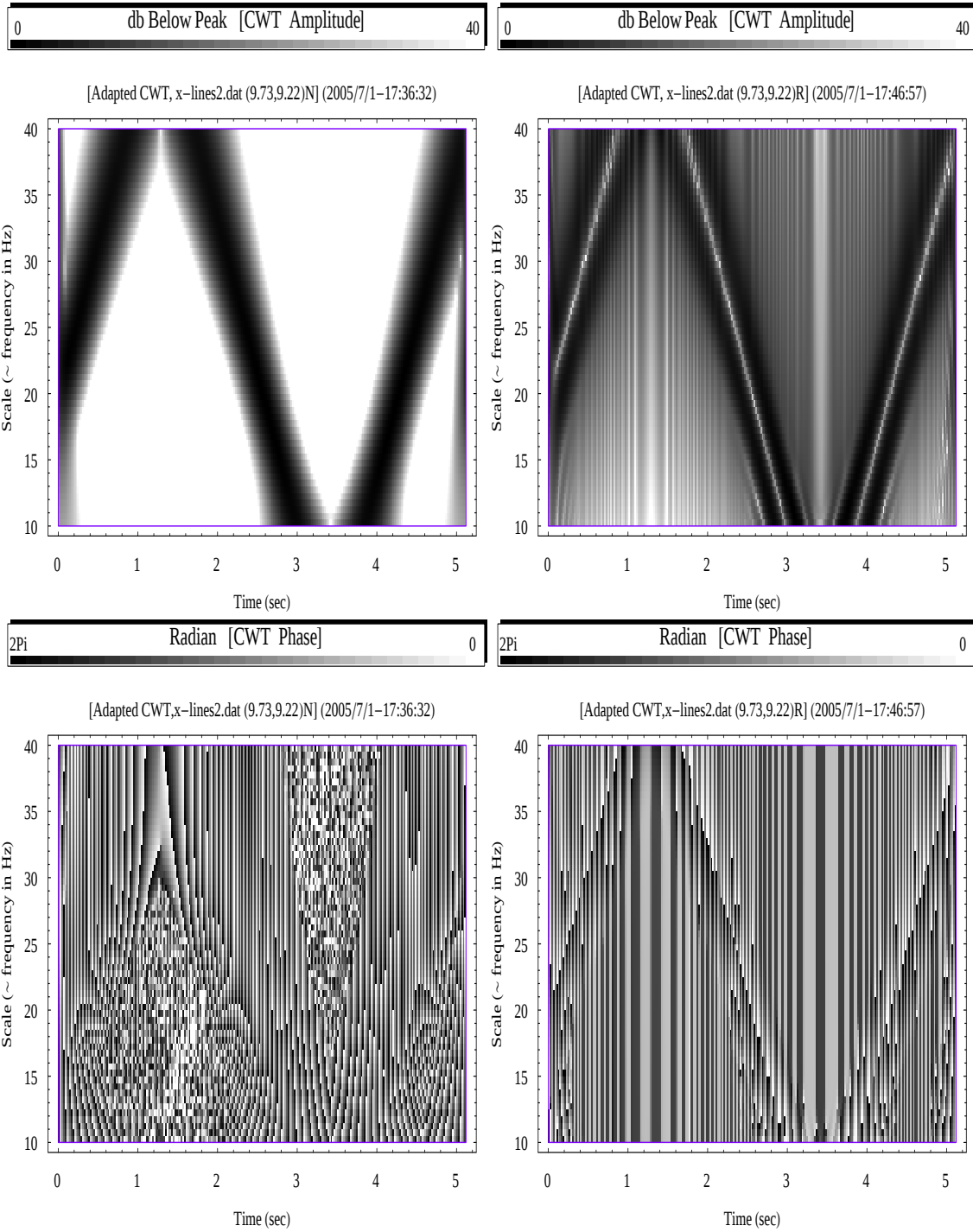


圖 4.6 此圖示由兩個相交叉之等能量線性漸變頻訊號所組成之 X 訊號其轉換結果。上子圖為模值分佈，下子圖為相位分佈。左側圖係以蓋博類型仔波為之，右側圖則相關於類仔波。

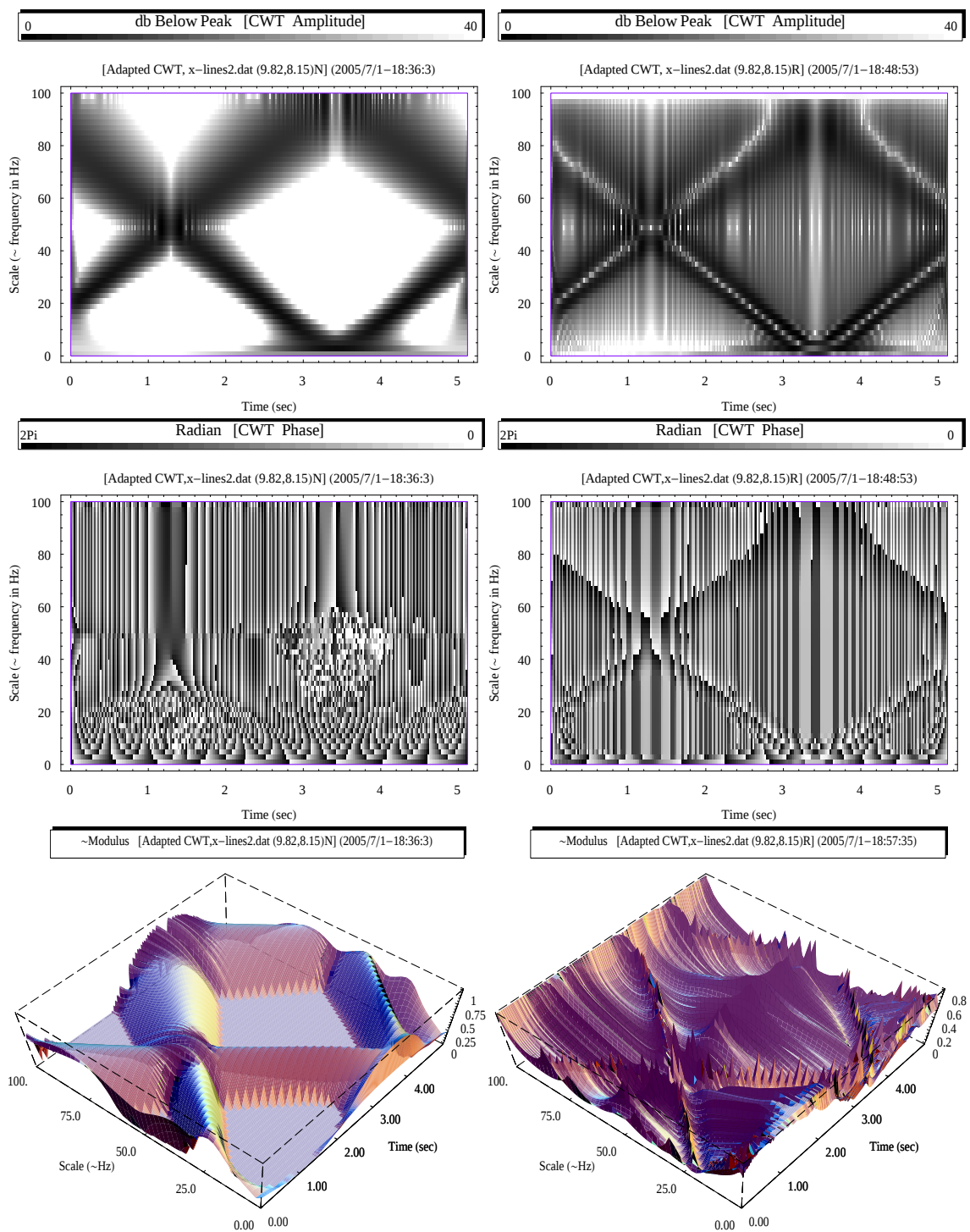


圖 4.7 此圖係前一圖 X 訊號其全頻域之轉換模值與相位分佈。其左側圖為蓋博類型仔波者，右側圖為類仔波者。就類仔波模值而言，其大尺度（即低頻區）對小尺度有較高的頻漏渲染，故高頻區之效果不若低頻區，另其相位辨識仍然相當清晰，但極低頻區中易有大尺度之邊界效應。

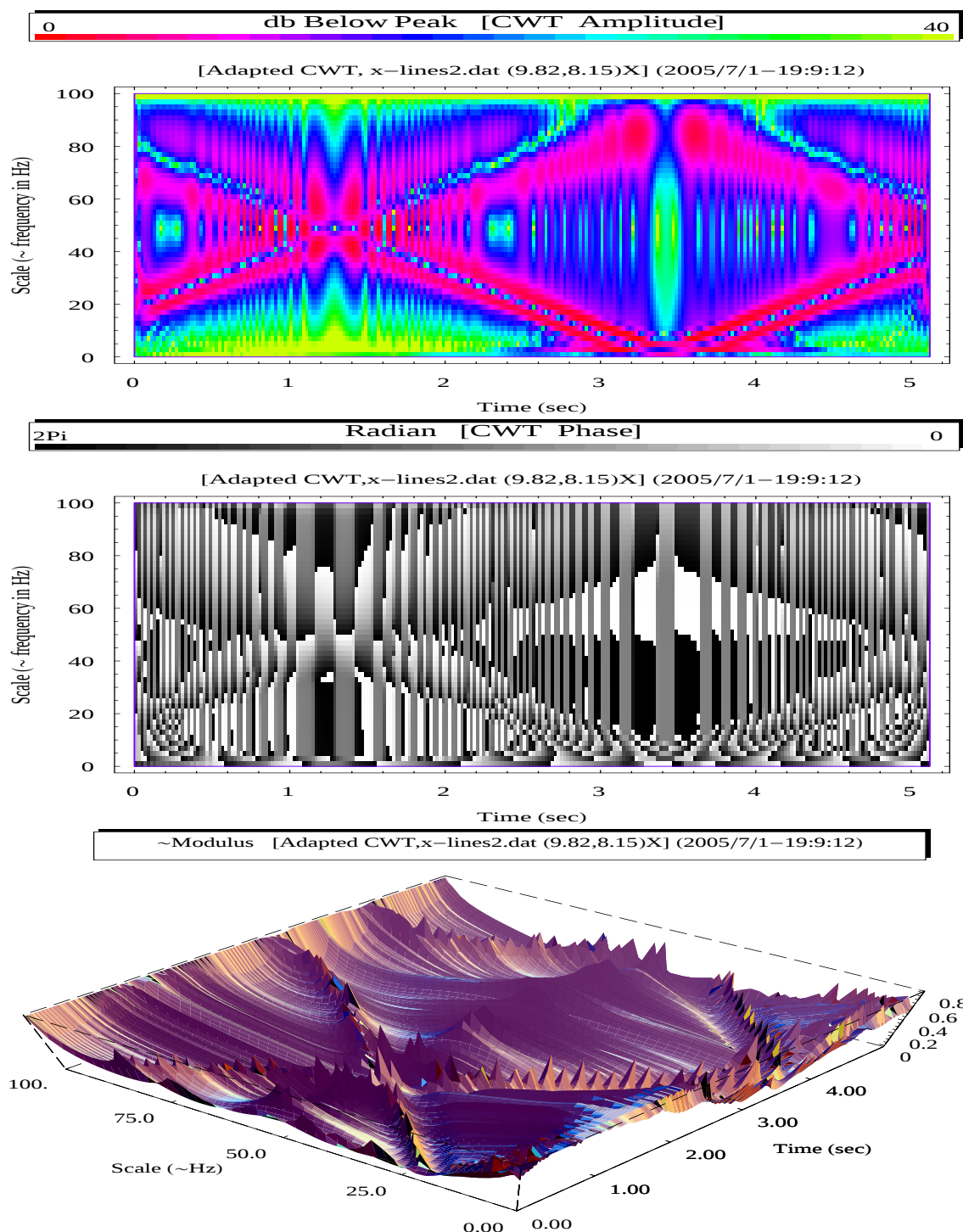


圖 4.8 此圖乃示 X-訊號在類仔波轉換下其相位旋轉之效應，其黑白交界面帶有頻漏渲染之分佈範疇（中子圖）。另上子圖以色彩提示瞬間頻率分佈是夾於高能模值之間者。

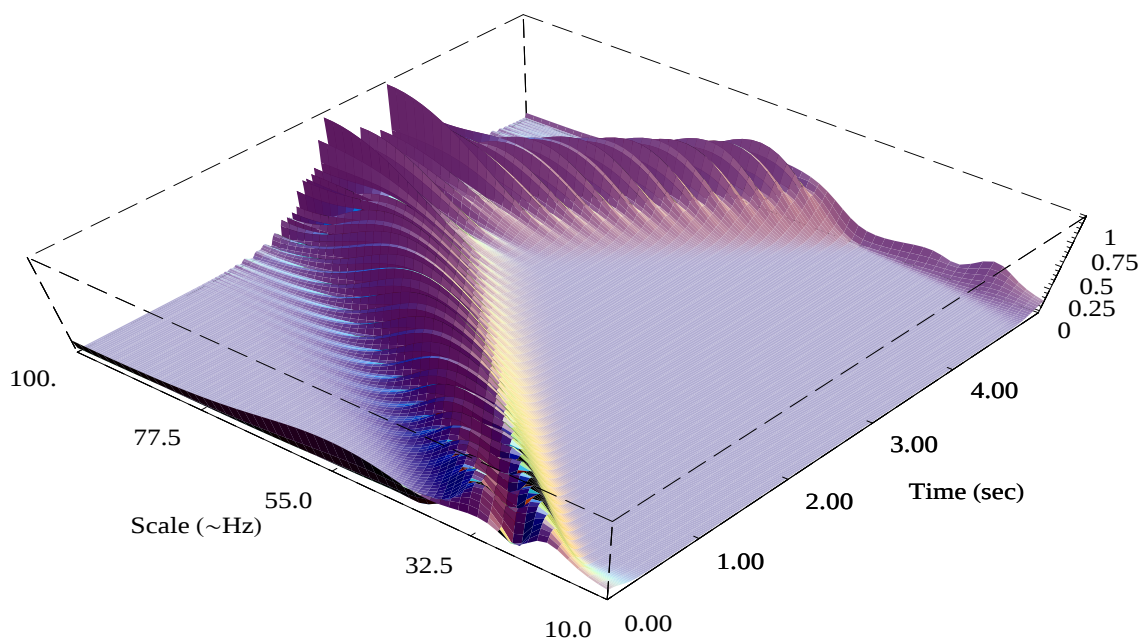
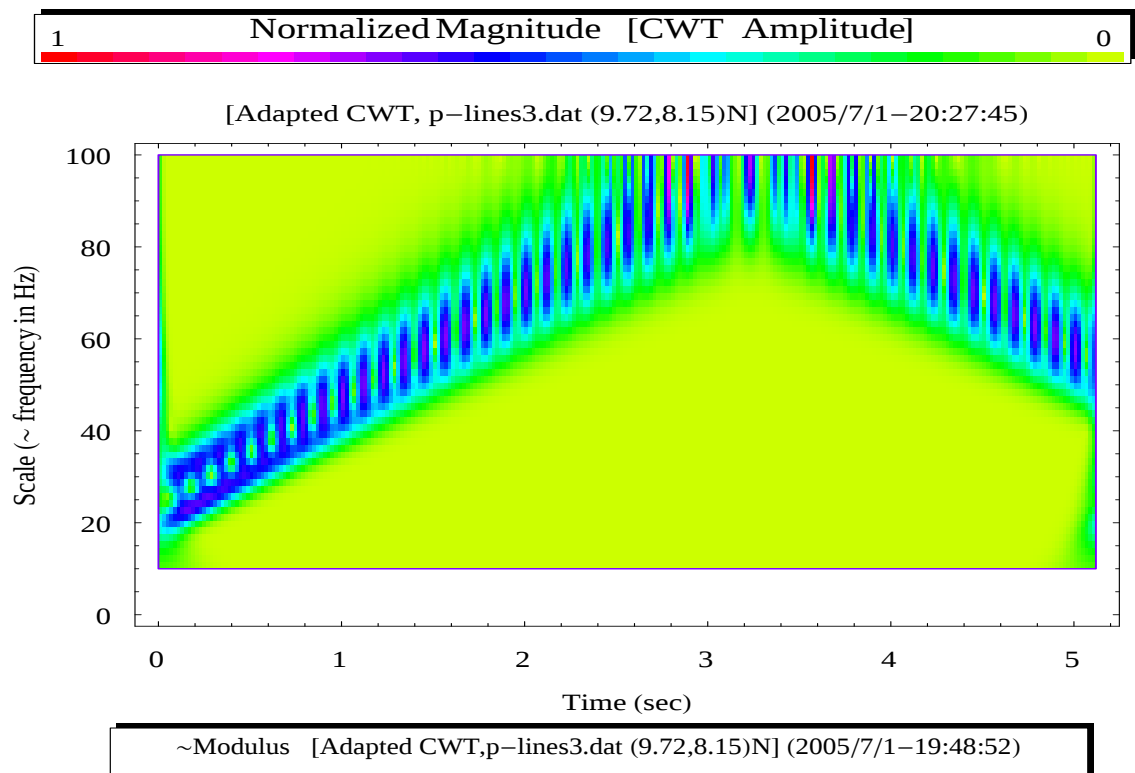


圖 4.9 此圖所用訊號係由一對等能量之平行線性漸高頻合成訊號，其兩線間之頻率差距為十分之一尼克斯率（Nyquist rate）。此圖係由蓋博類型仔波所得模值分佈，其所提供之訊息可說是完全誤導，無法判定成分波。

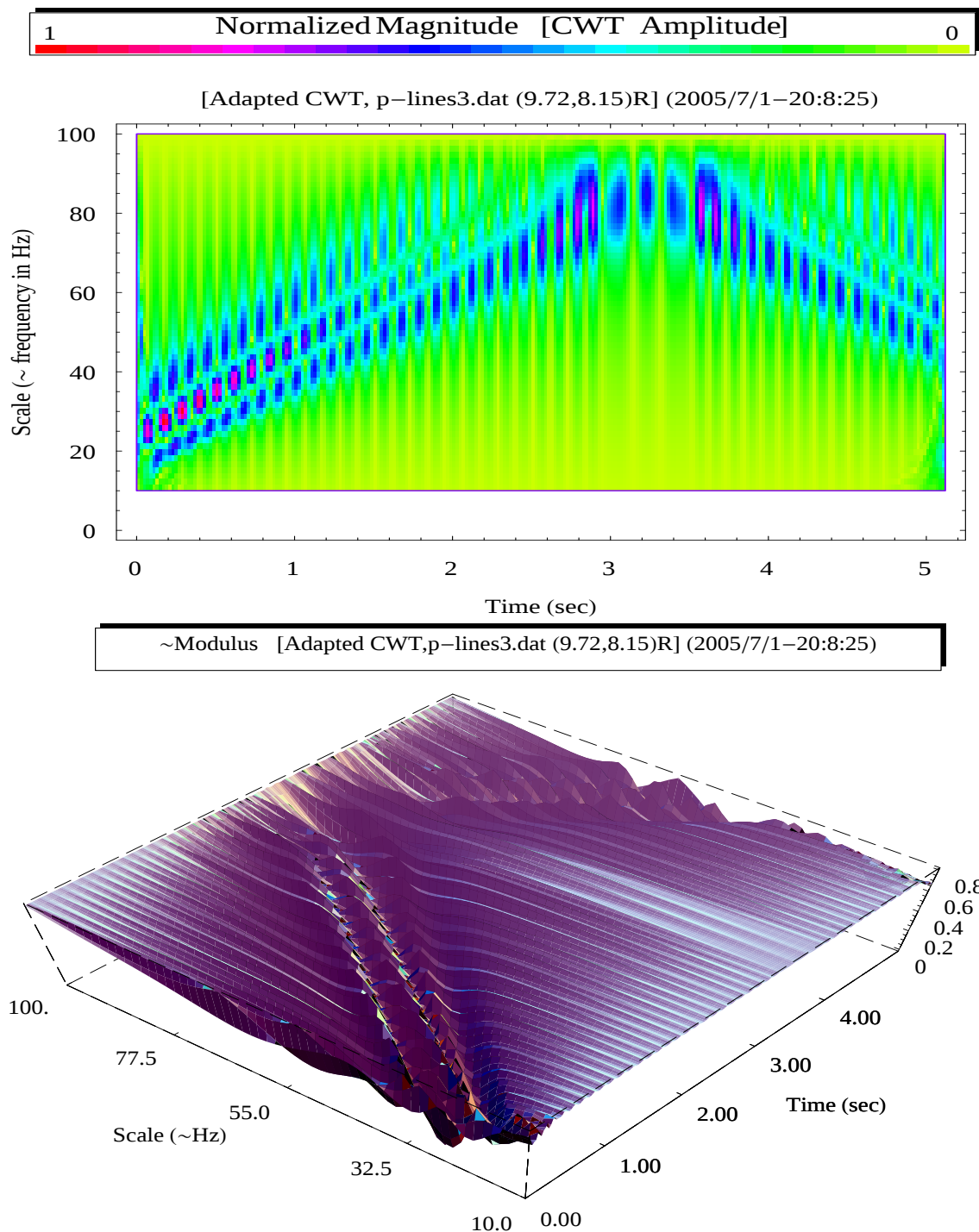


圖 4.10 相同於前一圖之平行訊號下其類仔波所得模值分佈，由圖可以輕易識別出兩平行訊號。

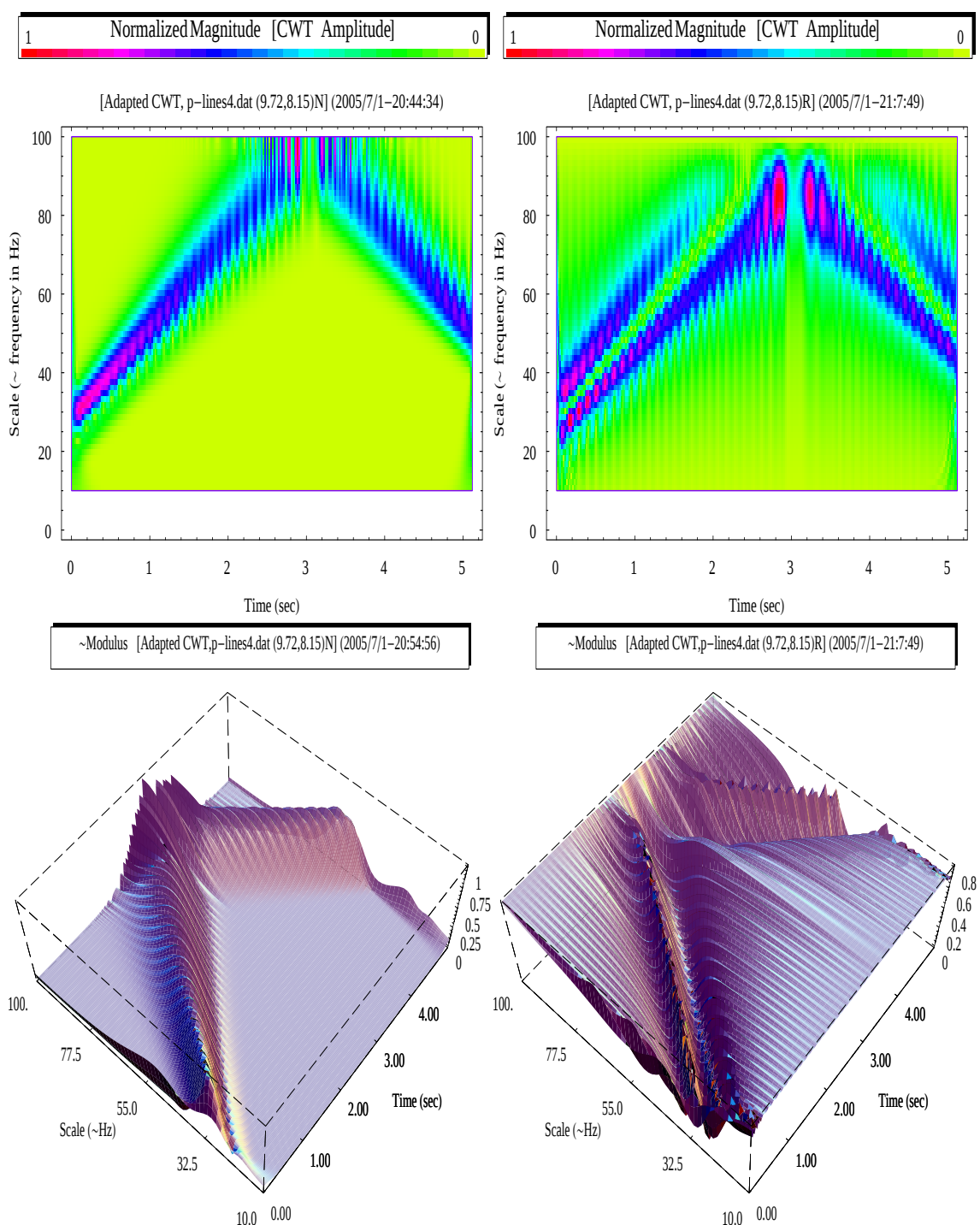


圖 4.11 此圖所用訊號係由一對不等能量之平行之線性漸高頻合成訊號，其兩線間之頻率差距仍為十分之一尼克斯率（Nyquist rate），但兩成分訊號之能量比為 0.04。此一能量差異在兩種轉換下，其低能量成分均被模糊效應所掩蓋，以致無從分辨。但就類仔波而言，仍得識其主能量訊號。反觀蓋博仔波者，只在大尺度區有明確顯示，而在小尺度區（高頻區）則甚差，亦即些微能量卻帶來嚴重汙染。

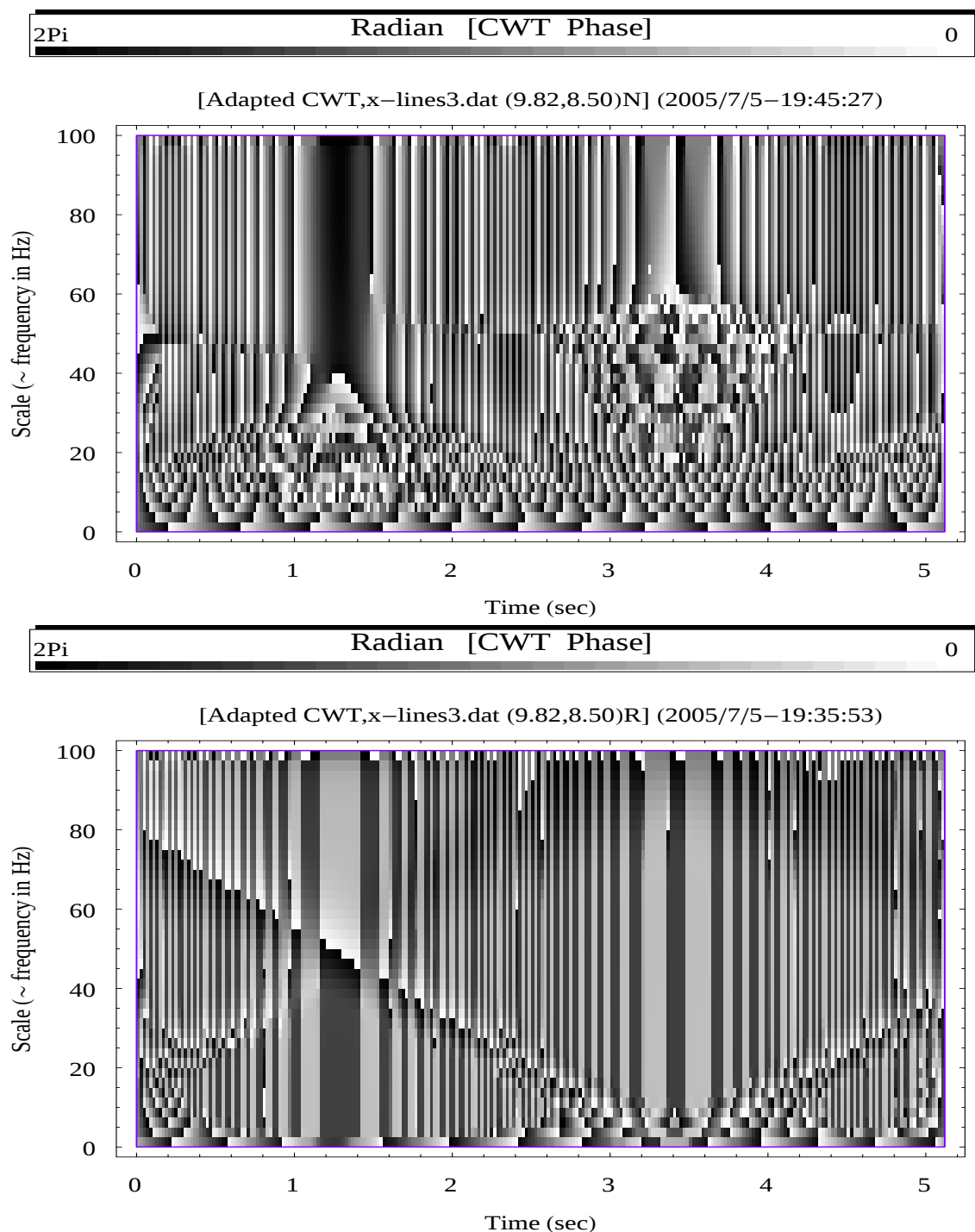


圖 4.12 此相位分佈圖所用訊號係兩個不等能量並交叉之線性漸高頻之合成訊號，兩成分訊號之能量比為 0.01。上子圖係由蓋博型仔波所得，下子圖則係類仔波者。基本上兩圖都甚難取得弱能成分訊號，但似乎類仔波者可有稍多的訊息，特別是在低頻區。

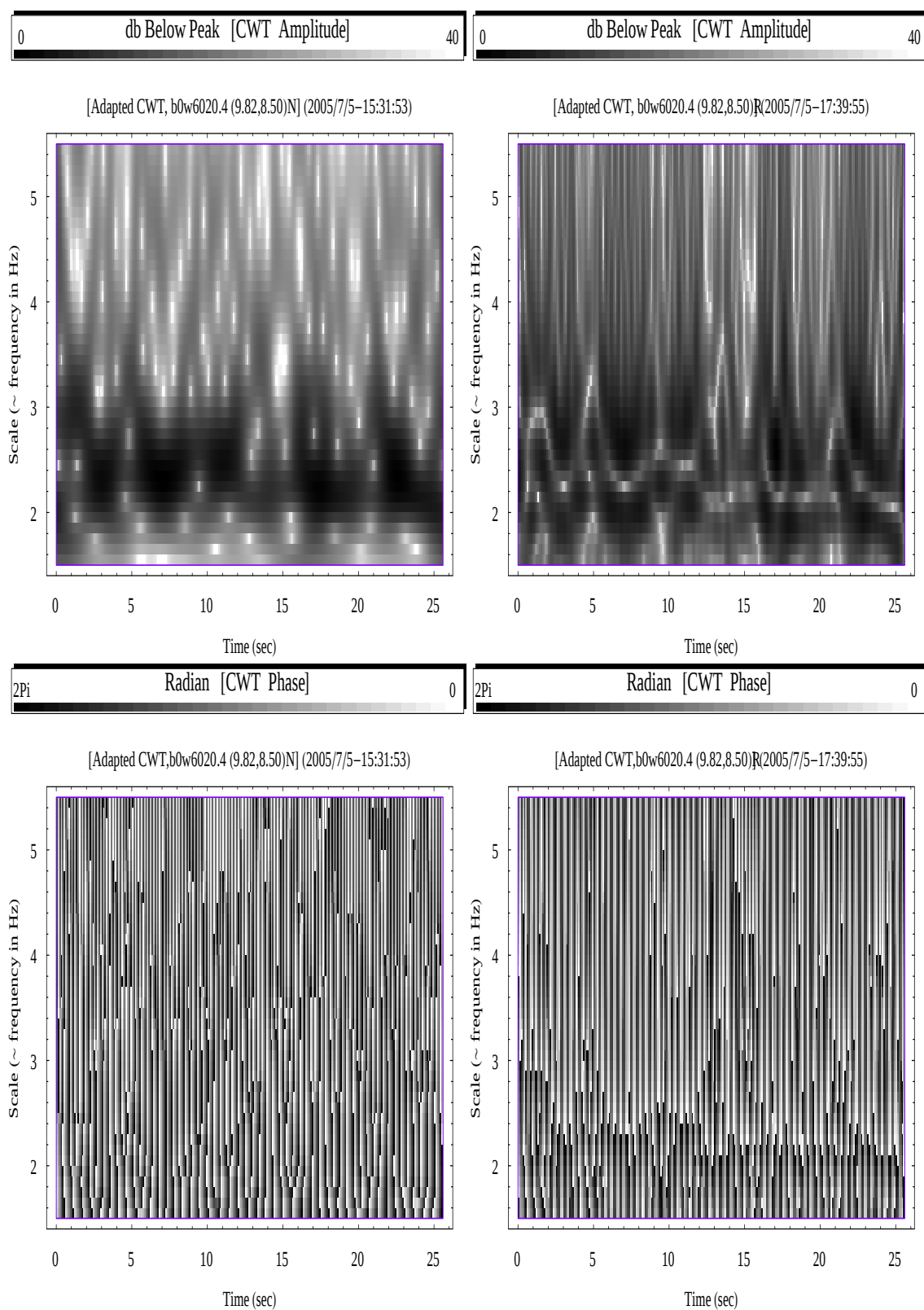
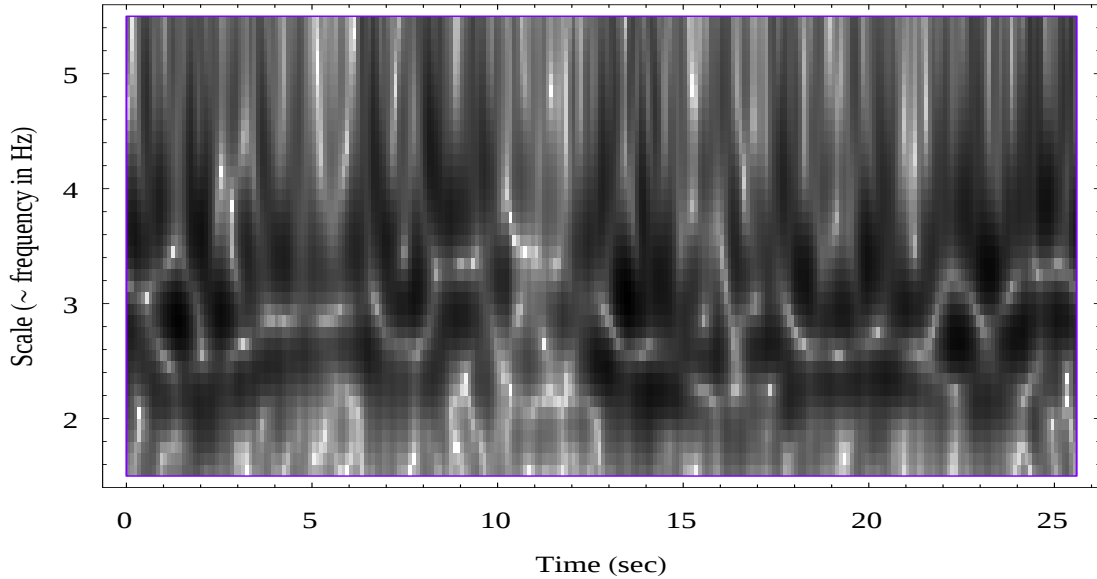


圖 4.13 此圖所分析之訊號係為試驗室水槽之風吹波。其左側圖為蓋博型仔波轉換所得之模值與相位分佈。右側圖則為類仔波者。無論在模值或相位分佈上，類仔波均提供較容易辨別的清晰訊息，特別是相位分佈其識別性之差異甚大。



[Adapted CWT, b0w4020.4 (9.82,8.50)R] (2005/7/6–21:8:42)



[Adapted CWT, b0w4020.4 (9.82,8.50)R] (2005/7/6–21:8:42)

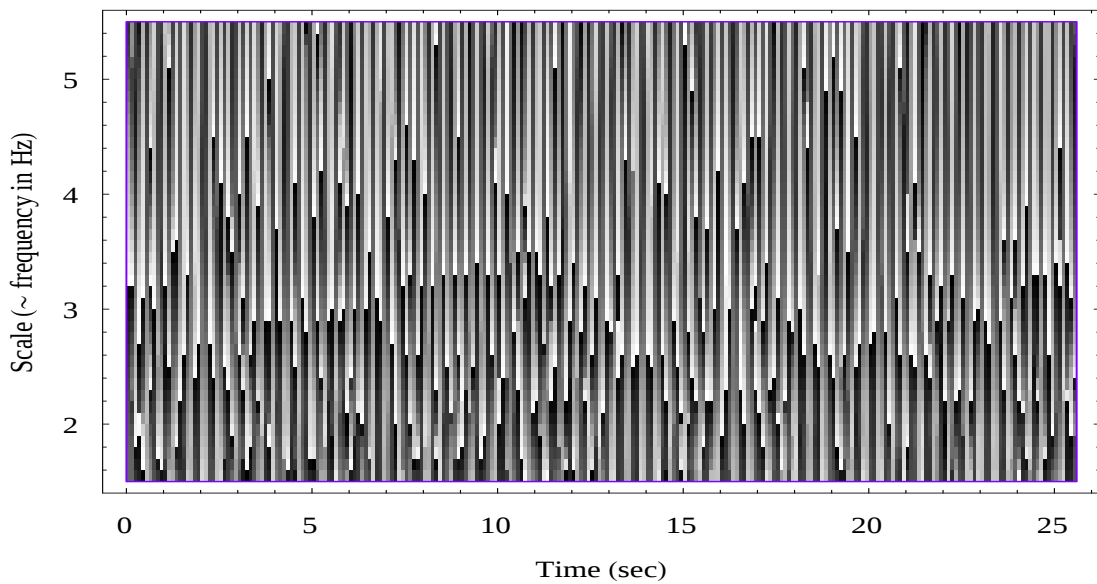


圖 4.14 此類仔波轉換模值與相位分佈圖所用訊號亦為試驗室水槽之風吹波，但此一風吹波與前一圖之風吹波比較起來是屬於仍在增長階段，亦即成熟度相對較差（less developed）之波浪，亦或相應於較小風速。無論在模值或相位分佈上，都顯示有多重交界面之現象，其或凸顯波場多尺度暨其相互間之幻化行為，亦或說明水波調變本質（wave modulation）及側頻不穩現象（side band instability）。

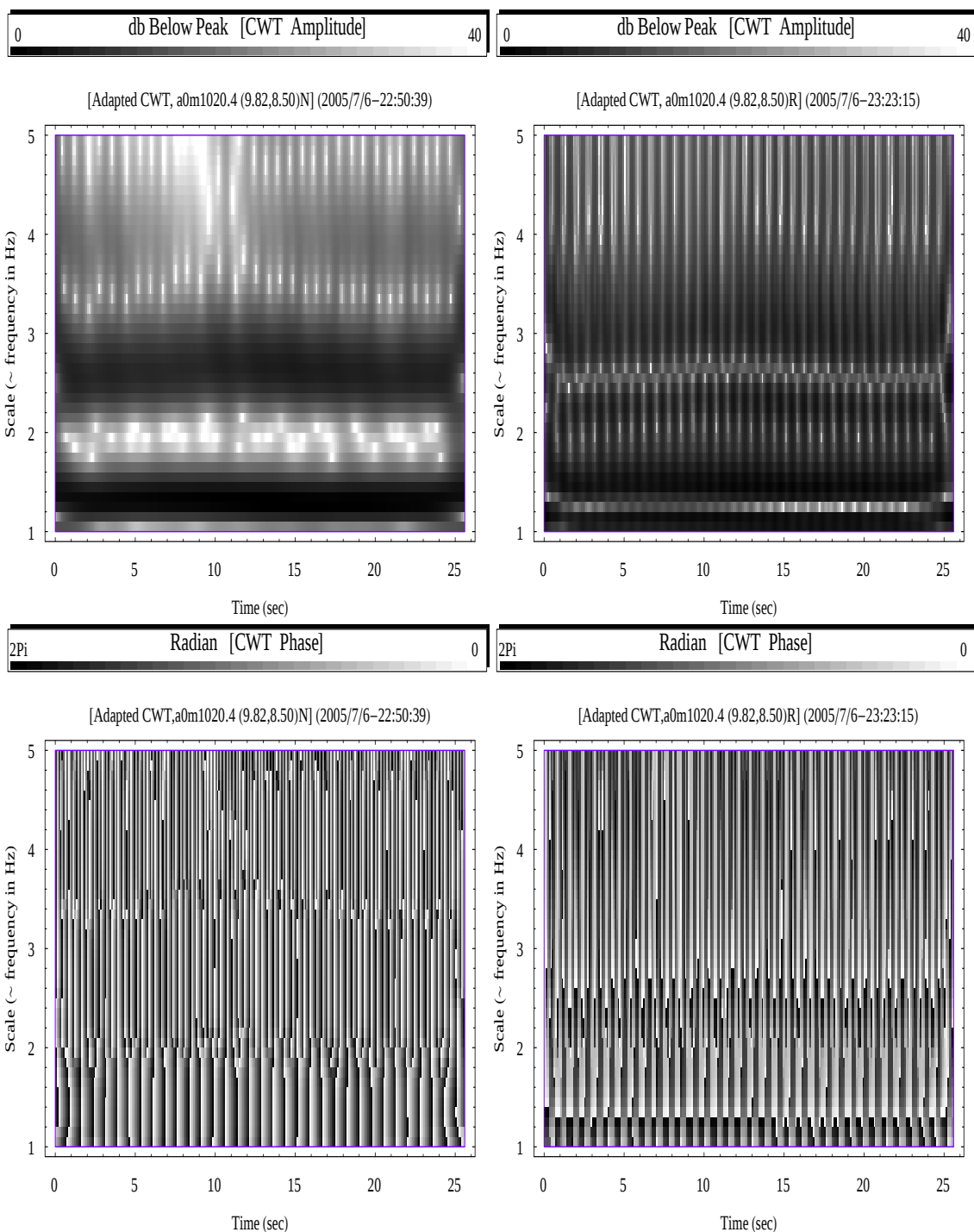


圖 4.15 此圖所分析訊號係以機械造波之史脫克司水波，此一史脫克司波其基礎協和頻帶（fundamental harmonic）處（約 1.15 Hz）之波浪尖銳度約為 0.06。其左側圖為蓋博型仔波轉換所得之模值與相位分佈。右側圖則為類仔波者。無論在模值或相位分佈上，類仔波均展示較清晰，亦且較多的訊息。如介於 2 到 3 Hz 間其黑白交界點之起伏振盪，另如基礎協和頻帶之演化等。

第 5 章

數學驗證

5.1 引言

在前面的章節中，我們對此類仔波的特性或其行為表現之瞭解，主要都來自於數值計算及模擬之結果，在這一章中我們提供進一步的數學解析，探討模值分佈與相位分佈各種特性之基礎根源，庶幾知其然，亦知其所以然。

5.2 數學探討

為求與前述加罩窗之富立葉轉換（或短時富立葉轉換）及簡化型莫利仔波轉換有較一致之數學記述方式，此處類仔波記如下式：

$$\psi(t) = [\operatorname{sgn}(t) \sin \eta t - i \cos \eta t] g(t) \quad (5.1)$$

$$= -i [\cos \eta t + i \operatorname{sgn}(t) \sin \eta t] g(t) \quad (5.2)$$

式中 η 等同前面中的 ω_0 ，而 $g(t)$ 為高斯函數：

$$g(t) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad (5.3)$$

式中 σ 參數為其時支撐（time support）長度之表徵參數，亦反向對照於其頻率支撐長度（frequency support）。

基於此一類仔波其實、虛部皆具偶對稱之特性，為應用歐拉公式（Euler's equation）於數學推導之方便性起見，將類仔波表為：

$$\psi(t) = -i [h(t)g(t)e^{i\eta t} + h(-t)g(-t)e^{-i\eta t}] \quad (5.4)$$

$$= -i [h(t)g(t)e^{i\eta t} + h(-t)g(t)e^{-i\eta t}] \quad (5.5)$$

式中 $h(t)$ 為如下定義之赫韋塞階梯函數（Heaviside step function）：

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } t = 0 \\ 1 & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

另赫韋塞階梯函數可表為下式：

$$h(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t)) \quad (5.7)$$

式中 $\text{sgn}(t)$ 為符號函數（signum function or sign function）：

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } t < 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ 1 & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

另以下的推導中，富立葉轉換對應公式系統仍取一致單元、角頻率（unitary, angular frequency）系統記述如下：

$$F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\eta t} dt \quad (5.9)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)e^{i\eta t} d\eta \quad (5.10)$$

上式類仔波其經移位（ u ）及縮放（ s ）之式子爲：

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (5.11)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{s}} \left[h\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\eta \frac{t-u}{s}} + h\left(-\frac{t-u}{s}\right) g\left(-\frac{t-u}{s}\right) e^{-i\eta \frac{t-u}{s}} \right] \quad (5.12)$$

設若訊號函數爲

$$f(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (5.13)$$

則其類仔波轉換爲：

$$Wf(u, s) = \langle f(t), \psi_{u,s}(t) \rangle \quad (5.14)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{-i\eta \frac{t-u}{s}} dt + \right. \quad (5.15)$$

$$\left. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(-\frac{t-u}{s}\right) g\left(-\frac{t-u}{s}\right) e^{i\eta \frac{t-u}{s}} dt \right] \quad (5.16)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} \left[e^{i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{-i\frac{\eta}{s}t} dt + \right. \quad (5.17)$$

$$\left. e^{-i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(-\frac{t-u}{s}\right) g\left(-\frac{t-u}{s}\right) e^{i\frac{\eta}{s}t} dt \right] \quad (5.18)$$

今爲將上一轉換式等號右側兩項分別展開，茲利用如下的富立葉轉換對應領域關係式：

$$f(t) \iff F(\eta) \quad (5.19)$$

$$g(t) \iff G(\eta) \quad (5.20)$$

$$h(t) \iff H(\eta) \quad (5.21)$$

$$h(t-u) \iff e^{-i\eta u} H(\eta) \quad (5.22)$$

$$g\left(\frac{t-u}{s}\right) \iff e^{-i\eta u} |s| G(s\eta) \quad (5.23)$$

$$h\left(\frac{t-u}{s}\right) \iff e^{-i\eta u} |s| H(s\eta) \quad (5.24)$$

$$h\left(-\frac{t-u}{s}\right) \iff e^{-i\eta u} |s| H(-s\eta) \quad (5.25)$$

$$h(t)g(t) \iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H(\eta) \star G(\eta) \quad (5.26)$$

$$f(t) \text{ 爲純實數} \iff F(\eta) \text{ 爲 Hermitian 對稱} \quad (5.27)$$

$$f(t) \text{ 爲偶對稱純實數} \iff F(\eta) \text{ 亦爲偶對稱純實數} \quad (5.28)$$

$$f(t) \text{ 爲反對稱純實數} \iff F(\eta) \text{ 爲反對稱純虛數} \quad (5.29)$$

再者，赫韋塞階梯函數 $h(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t))$ 之富立葉轉換式爲：

$$H(\eta) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2\pi} \delta(\eta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i} \text{p.v.} \frac{1}{\eta} \right) \quad (5.30)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(\eta) - \frac{i}{\pi} \text{p.v.} \frac{1}{\eta} \right) \quad (5.31)$$

上些式中， $\delta(\eta)$ 爲狄拉克分佈函數（Dirac delta distribution function），「 $\star$ 」爲旋移乘積（convolution）符號，而 p.v. 表應用柯西主值定理，其係指分佈函數之運作以如下公式爲之，

$$\text{p. v.} \left(\frac{1}{x} \right) (v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon; \varepsilon]} \frac{v(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{v(x) - v(-x)}{x} dx \quad (5.32)$$

在以下的方程式中我們將此 p. v. 標記省略。

今將上一類仔波轉換式等號右側兩項分別展開，在第一項中令 $\omega_1 = \frac{\eta}{s}$ ，則

$$\frac{i}{\sqrt{s}} e^{i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{-i\frac{\eta}{s}t} dt \quad (5.33)$$

$$= \frac{i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s}} e^{i\omega_1 u} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{-i\omega_1 t} dt \right] \quad (5.34)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} e^{i\omega_1 u} \left[F(\omega_1) \star \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega_1 u|s|} H(s\omega_1) \star e^{-i\omega_1 u|s|} G(s\omega_1)) \right] \quad (5.35)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star \left(e^{-i\frac{\eta}{s}u|s|} H(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u|s|} G(\eta) \right) \right] \quad (5.36)$$

在第二項中令 $\omega_1 = -\frac{\eta}{s}$ ，則

$$\frac{i}{\sqrt{s}} e^{-i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(-\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\frac{\eta}{s}t} dt \quad (5.37)$$

$$= \frac{i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s}} e^{i\omega_2 u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h\left(-\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{-i\omega_2 t} dt \quad (5.38)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} e^{i\omega_2 u} \left[F(\omega_2) \star \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega_2 u} |s| H(-s\omega_2) \star e^{-i\omega_2 u} |s| G(s\omega_2) \right) \right] \quad (5.39)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(-\frac{\eta}{s}\right) \star \left(e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| H(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \right) \right] \quad (5.40)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star \left(e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| H(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \right) \right] \quad (5.41)$$

故得

$$Wf(u, s) = \frac{i}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star \left(e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| H(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \right) \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star \left(e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| H(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \right) \right] \right\} \quad (5.42)$$

即

$$Wf(u, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| (i\delta(\eta) + \frac{1}{\pi\eta}) \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| (i\delta(\eta) + \frac{1}{\pi\eta}) \right] \right\} \quad (5.43)$$

事實上，上一展開式可以代表兩種探討模式，一種是把 s 視為參數，而把 η 視為變數，這一思考模式等同短時富立葉分析之處理手法；另一種則是把 η 視為參數，而把 s 視為變數，這一模式等同仔波分析之處理方式。若使用仔波手法，則因 $\eta \neq 0$ 而 $\delta(\eta) = 0$ ，故得

$$Wf_\eta(u, s) = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| \frac{1}{\pi\eta} \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| G(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| \frac{1}{\pi\eta} \right] \right\} \quad (5.44)$$

$$= \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \frac{G(\eta)}{\pi\eta} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} |s| \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| \star e^{i\frac{\eta}{s}u} |s| \right] \right\} \quad (5.45)$$

若使用短時富立葉手法，則得

$$Wf_s(u, \eta) = \frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} (i\delta(\eta) + \frac{1}{\pi\eta}) \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u} (i\delta(\eta) + \frac{1}{\pi\eta}) \right] \right\} \quad (5.46)$$

再者，上式中

$$e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} \delta(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\xi}{s}u} G(\xi) e^{-i\frac{\eta-\xi}{s}u} \delta(\eta - \xi) d\xi \quad (5.47)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\xi) \delta(\xi - \eta) d\xi \quad (5.48)$$

$$= e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\xi) \Big|_{\xi=\eta} \quad (5.49)$$

$$= e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \quad (5.50)$$

$$e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} \frac{1}{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\xi}{s}u} G(\xi) e^{-i\frac{\eta-\xi}{s}u} \frac{1}{\eta - \xi} d\xi \quad (5.51)$$

$$= e^{-i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) \frac{1}{\eta - \xi} d\xi \quad (5.52)$$

$$= e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[G(\eta) \star \frac{1}{\eta} \right] \quad (5.53)$$

$$= e^{-i\frac{\eta}{s}u} \pi G(\eta) \operatorname{Erfi} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.54)$$

故得

$$Wf_s(u, \eta) = \frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \left[i + \operatorname{Erfi} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right] \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \left[i + \operatorname{Erfi} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right] \right] \right\} \quad (5.55)$$

由解析訊號理論流程（analytic signal procedure）我們知道角頻率 η 必須大於

適當值以上（即不可太小，遠離零值，而 $(\sigma\eta)^2 \gg 1$ ），且因爲 $x \gg 1$ 時 $\text{erfi}(x) \gg 1$ ，即式中虛部之值遠小於實部之值。今以一模擬訊號驗證其最低模值點之發生處。設實訊號爲

$$f(t) = \cos \zeta t = \frac{1}{2} (e^{-i\zeta t} + e^{i\zeta t}) \quad (5.56)$$

則

$$F(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\zeta + \zeta) + \delta(\zeta - \zeta)] \quad (5.57)$$

而

$$\begin{aligned} & e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \right] + \\ & e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \right] \\ = & e^{i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\zeta}{s}\right) e^{-i\frac{\eta-\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) d\zeta + \\ & e^{-i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F\left(\frac{\zeta}{s}\right)} e^{i\frac{\eta-\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} = & \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\zeta}{s}\right) e^{i\frac{\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) d\zeta + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F\left(\frac{\zeta}{s}\right)} e^{-i\frac{\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} & e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \text{Erfi}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right] + \\ & e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u} G(\eta) \text{Erfi}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right] \\ = & e^{i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\zeta}{s}\right) e^{-i\frac{\eta-\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\eta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) d\zeta + \\ & e^{-i\frac{\eta}{s}u} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F\left(\frac{\zeta}{s}\right)} e^{i\frac{\eta-\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\eta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) d\zeta \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} = & \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\zeta}{s}\right) e^{i\frac{\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\eta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) d\zeta + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F\left(\frac{\zeta}{s}\right)} e^{-i\frac{\zeta}{s}u} G(\eta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\eta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) d\zeta \end{aligned} \quad (5.61)$$

今將 $F(\zeta)$ （或 $F\left(\frac{\zeta}{s}\right)$ ，取不取 $s = 1$ 並不重要）代入上式得

$$Wf_s(u, \zeta) = \frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\zeta - \zeta) + \delta(\zeta + \zeta)) \left(e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u} \right) G(\zeta - \zeta) d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\zeta - \zeta) + \delta(\zeta + \zeta)) \left(e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u} \right) G(\zeta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\zeta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) d\zeta \right\} \quad (5.62)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{\frac{3}{2}} i \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u} \right) G(\zeta - \zeta) \right] \Big|_{\zeta=\zeta} + \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u} \right) G(\zeta - \zeta) \right] \Big|_{\zeta=-\zeta} \right\} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{\frac{3}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u} \right) G(\zeta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\zeta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) \right] \Big|_{\zeta=\zeta} + \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u} \right) G(\zeta - \zeta) \text{Erfi}\left(\frac{\zeta - \zeta}{\sqrt{2}}\right) \right] \Big|_{\zeta=-\zeta} \right\} \quad (5.63)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{\frac{3}{2}} \frac{e^{i\frac{\zeta}{s}u} + e^{-i\frac{\zeta}{s}u}}{2} \{ i [G(0) + G(-2\zeta)] + [G(0) \text{Erfi}(0) + G(-2\zeta) \text{Erfi}(-\sqrt{2}\zeta)] \} \quad (5.64)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\zeta}{s}u\right) \{ i [G(0) + G(-2\zeta)] + [0 + G(-2\zeta) \text{Erfi}(-\sqrt{2}\zeta)] \} \quad (5.65)$$

$$\doteq \sqrt{\frac{\pi}{2}} s^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\zeta}{s}u\right) [0 + G(0)i] \quad (5.66)$$

5.3 特性與數理

以上的數學探討得以驗證數值行為的基礎根源，讓我們更進一步了解此類仔波其模值與相位的分佈特性。以下對數點重要特徵作解析，主要有：

- 相位對比交界面
- 模值極小值點分佈
- 相位條狀變化特性

由式 5.45 可知類仔波轉換其使用仔波模式之展開式其模值俱為實數，此可由式中兩大項的各小項互為共軛得知；而其使用短時富立葉模式下之轉換式 5.46，其相對應各小項（不計赫韋塞項）亦互為共軛，且基本上也只有實數項存在重要性，其虛部值相對於實部值是可忽略。這一實數分佈特性，使得相位分佈

圖得以只凸顯兩種極端對比色，此外，極端對比界面發生處可以虛誤差函數（imaginary error function）之反對稱分佈性解說，如式 5.55 之 Erfi 及特例方程式 5.62 在瞬間頻率之零值結果。再者，這一兩色極端對比特性，也與短時富立葉分析及仔波轉換所得相位分佈特性大為不同。此兩者皆無法由相位分佈直接分辨出瞬間頻率。就短時富立葉分析而言，它必需求算停駐相位（stationary phase），即相位分佈其時導數為零值處（就 $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$ 而言，相位分佈理論值為 $\phi(t) - \eta t$ ，瞬間頻率發生點其 $\phi'(t) - \eta = 0$ ）；就仔波轉換分析而言，則亦必需求算相位分佈的時導數，再判定該導數值是否等同座標上的頻率（就 $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$ 而言，相位分佈理論值為 $\phi(t)$ ，瞬間頻率發生點其 $\eta = \phi'(t)$ ）。是故這兩者的瞬間頻率在相位分佈圖上與原始訊號的相位有密切關連，但卻無法由轉換之相位分佈圖直接判讀出訊號位置。反觀此處類仔波其相位平面分佈與原始訊號的相位關係則甚為薄弱，瞬間頻率可以直接由圖上的對比界面決定。另外需尚考慮的是，對離散數值計算而言，求取導數值往往就是不理想的手段，它需要一定的解析密度，也需要對能量微小區域行排除作業，設定起跳值（thresholding）。

在數值結果中，瞬間頻率是對應於局部最小模值，也對應於相位之變異對比界面，這在式 5.62 中我們驗證其為幾乎零值，而在類仔波轉換式 5.44 中，我們亦可判定其零值點對應於 $\frac{\eta}{s}u = \frac{n+1}{2}\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ 。另外， u 變數並不參與旋移乘積，且它都只出現於指數（Exp）之冪次方上。再者，在類仔波轉換式第一大項及第二大項展開式中，其最前端分別各有一調變相乘係數，即互為共軛之 $e^{-i\frac{\eta}{s}u}$ 與 $e^{i\frac{\eta}{s}u}$ 。這兩調變係數亦不參與旋移乘積。這些特性帶來一些分佈特徵指標。它得以解說何以相位分佈圖具有直立條狀分佈的性質，並在橫軸方向，相位以一定型態交替顯現；另在縱軸方向上，考量虛誤差函數（亦或 Dawson 函數，其乃相關於式 5.54 之 $G(\eta)\text{Erfi}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)$ ）在瞬間頻率點上之變號現象，亦或考量尺度模糊效應圖（即圖 3.4）所示之單元尺度兩側數值變號行為，我們得知在縱軸方向相位的對比變異特性。

以上說明了類仔波轉換主要數值特徵所涉之一些數學關聯，亦驗證了瞬間頻率判讀上，無論在模值分佈圖或相位分佈圖上，均甚簡易可行。❖

第 6 章

結論

本文基於連續仔波轉換之技法，提出一個變異型態的複數函數類仔波，並可給予不同定義型態或數值求取方式，從而提供時頻分析上的一些不同觀點及視野。此處其模值與相位相應於瞬間頻率之關係異於傳統之連續仔波轉換，但其於解析訊號所涉瞬間頻率之擷取或能脊線分佈之檢測表現上，具有判讀上之優越性，大底均較莫利仔波來得明確與容易。此外，除了其轉換係數時尺分佈圖可直接提供瞬間頻率明確訊息，一項最凸出的差異，是其相位之時尺分佈圖亦可直接提供同樣清晰的有義訊息，這在傳統技法上，除了解析密度要求高外，尚需要一些額外前置後置處理流程，否則無法直接由相位看到有義訊息。研究中以數種模擬訊號及一些水槽試驗水波訊號來驗證與比較，包含不同組合成分的模擬波、風生波、與機械造史脫克司波。另亦探討帶來這些表現的各項相關學理因子的數值現象，研究其函基形成條件、頻漏現象、模糊效應、相位糙訊、瞬間頻率或能脊規範等。此外亦解說其可能優劣特性，及其應用上得以突顯的一些物理表徵。再者，吾人更以數學驗證，探討數值行為的基礎根源，解說各種現象成因，而得以更進一步了解此類仔波其模值與相位的分佈特性，並確認其判讀上的簡易可行。❖

參考文獻

- [1] Brooke Benjamin, T. Instability of periodic wave trains in nonlinear dispersive systems. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A299:59–75, 1967.
- [2] Brooke Benjamin, T., and J. E. Feir. The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.*, 27:417–430, 1967.
- [3] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [4] Cohen, L. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [5] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 1992.
- [6] Froment, J. and, S. Mallat. Second generation compact image coding with wavelets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, pages 655–678. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [7] Gabor, D. Theory of communication. *Journal of the IEE*, 93:429–457, 1946.
- [8] Greenberg, M.D. *Advanced Engineering Mathematics*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1988.
- [9] Hwang, P. A., D. Xu, and J. Wu. Breaking of wind generated waves: Measurements and characteristics. *J. Fluid Mech.*, 202:177–200, 1989.
- [10] Lake, B.M., and H.C. Yuen. A note on some nonlinear water wave experiments and comparison of data with theory. *J. Fluid Mech.*, 83:75–81, 1977.
- [11] Lake, B.M., and H.C. Yuen. A new model for nonlinear gravity waves, Part 1, Physical model and experimental evidence. *J. Fluid Mech.*, 88:33–62, 1978.

- [12] Lake, B.M., H.C. Yuen, H. Rundgaldier, and W.E. Ferguson. Nonlinear deep-water waves: Theory and experiment, Part 2, Evolution of a continuous wave train. *J. Fluid Mech.*, 83:49–74, 1977.
- [13] Lee, Y.R. Signal analysis from wave modulation perspective – Part I: Characterizing the analytic signal procedure. Technical report, No.1997–7, Institute of Harbor and Marine Technology, Taichung, Taiwan, 1997.
- [14] Lee, Y.R. Wave Characterizations Using Wavelet and Spectral Coherences. Technical report, No.2001–08, Institute of Harbor and Marine Technology, Taichung, Taiwan, 2000.
- [15] Lee, Y.R. Wavelet Time-Frequency Analysis - An Optimum Basis and Its Applications to Water Waves. Technical report, No.93-79-7112, Institute of Harbor and Marine Technology, Taichung, Taiwan, 2003.
- [16] Lee, Y.R. The Optimal Wavelet Basis – Transform Entropies and Phase Distributions of Basis Kernel Functions (In Chinese). In *Proc. 31th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 97–102, 2009.
- [17] Lee, Y.R., and J. Wu. Time-frequency features and side band instability. In *Proc. 19th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 32–39, 1997.
- [18] Lee, Y.R., and J. Wu. The wavelet optimum basis and the phase distribution of the characteristic function. *Proc. 25th Conf. on Ocean Engineering in Taiwan*, pages 149–156, 2003.
- [19] Longuet-Higgins, M.S. The instability of gravity waves of finite amplitude in deep water I, Superharmonics. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A360:471–488, 1978.
- [20] Longuet-Higgins, M.S. The instability of gravity waves of finite amplitude in deep water II, Subharmonics. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A360:489–505, 1978.
- [21] Mallat, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1998.
- [22] Mallat, S., and S. Zhong. Wavelet transform maxima and multiscale edges. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 67–104. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [23] Melville, W. K. The instability and breaking of deep water waves. *J. Fluid Mech.*, 115:165–185, 1982.

- [24] Melville, W. K. Wave modulation and breakdown. *J. Fluid Mech.*, 128:489–506, 1983.
- [25] Meyer, Y. *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- [26] Ruskai, M. B., G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor. *Wavelets and Their Applications*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [27] Su, M.Y. Evolution of groups of gravity waves with moderate to high steepness. *Phys. Fluids*, 25:2167–2174, 1982.
- [28] Tchamitchian, Ph., and B. Torresani. Ridge and skeleton extraction from the wavelet transform. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 123–151. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [29] Yuen, H. C., and B. M. Lake. Nonlinear deep water waves: Theory and experiment. *Phys. Fluids*, 18:956–960, 1975.

附錄一： Mathematica 數值程式

**(* A Quasi Wavelet Basis Function
for Refined Ridge Extraction*)**
(* by Ron Lee *)

■ **Files and Parameters**

File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

```
<< "c:/lee/mat/Initial_SetNotebook.M" (* Set notebook options *)
<< "c:/lee/mat/Initial_Forms.M";
<< "c:/lee/mat/Initial_Frames.M";
<< "c:/lee/mat/Initial_Words.M";
myfont = "Times";
$TextStyle = {FontFamily -> "Times", FontSize -> myfontsize};
timeflag = "Y";
dynamictimeflag = "N";
flabelflag = "Y";
flabelflag2 = "Y";
abcdflag = "N";
llabelflag = "y";
gridlineflag = "YY";
xyaxisflag = "LL";
stringposflag = 1;
xshiftflag = 0;
forcedstringaryflag = "n";
forcedflabelflag = "n";
stringindexmul = 3;
stringindexsin = 1;
abcdlabel = "a";
timeflag = "Y"; tlabel = tlabelv;
```

■ **Macros**

File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

```
doshowxy := {
  moutt[flabel];
  moutt[flabel2];
  myplot=ListPlot[ dataxy
    , PlotJoined->True
    , PlotRange->All
    , PlotStyle->{Thickness[0.0008] (* , Hue[0.0] *) }
    , Frame->True
    , DisplayFunction->Identity
  ];
  myshow;
  (* Run["mmawav.bat"]; *)
  <<"c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"
};
```

```

flabel2 := typestr<"α=">StringTake[ToString[N[scap1,
9]],If[StringLength[ToString[N[scap1, 9]]]>=7, 7, 1 ]<>"], β=">ToString[N[
peakshiftp1,2]]<>"π, ξ=">StringTake[
ToString[N[xi,2]],1]<>"], (θ↔>StringTake[ToString[N[xlimitp1, 2]],1]<>"π),
θ=">ToString[N[phap1,3]]<>"π";

```

■ **Leakage Out** File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

■ **Leakage out (Wavelet variant)**

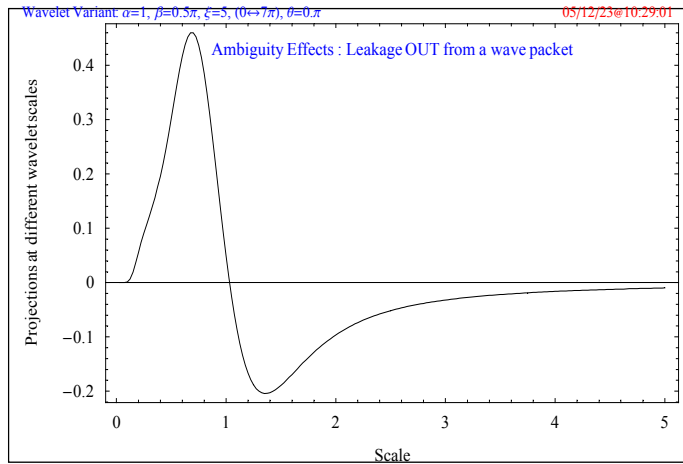
```

(* ----- Frequency Leakage Out (Variant) ----- *)
typestr="Wavelet Variant: ";
xlabel="Scale";
ylabel="Projections at different wavelet scales";
flabel="Ambiguity Effects : Leakage OUT from a wave packet";
<<"c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m";
frelkgout [peakshiftp1, scap1, xlimitp1, phap1, xiv] :=
  1 / (scap1) * NIntegrate[Cos[xiv*x]*Sin[xiv*x/scap1]*
    Exp[-((x - peakshiftp1/xiv)^2/scap1^2 + (x)^2)/(2)],
    {x, 0, xlimitp1},
    {MinRecursion->3, MaxRecursion->10}
];
(* 1 / scap1 * NIntegrate[Cos[x]*Sin[xiv * x/scap1]* (* a=sca/xi *)
  Exp[-((x/scap1 - peakshiftp1/xiv )^2 + (x)^2)/(2)],
  *)
peakshiftp1=0.5;peakshift= peakshiftp1 * Pi;
xlimitp1=7;xlimit=xlimitp1 * Pi;
phap1=0;pha=phap1 * Pi;
xi=5;
scap1=1;
datax= Table[ ni , {ni, 0.025, 5, 0.025}];
datay= Table[ frelkgout [peakshift, sca, xlimit, pha, xi], {sca, 0.025 ,
5 , 0.025 } ];
dataxy=Table[ {datax[[ i ]], datay[[i]]}, {i,1 ,Length[datax]};
doshowxy;

```

Ambiguity Effects : Leakage OUT from a wave packet

Wavelet Variant: $\alpha=1$, $\beta=0.5\pi$, $\xi=5$, $(\theta\leftrightarrow 7\pi)$, $\theta=0.\pi$



07) {2005, 12, 23, 10, 29, 1} CPU:(00, 00, 0.937); Time:(00, 00,

■ Leakage out (Morlet)

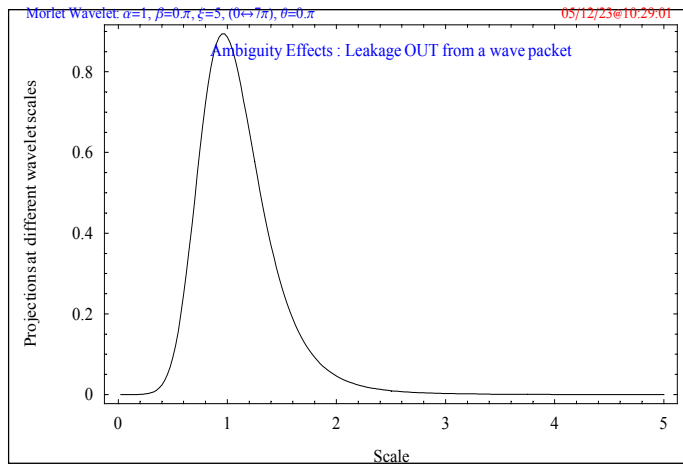
```
(* ----- Frequency Leakage Out (Morlet) ----- *)
typestr="Morlet Wavelet: ";
xlabel="Scale";
ylabel="Projections at different wavelet scales";
flabel="Ambiguity Effects : Leakage OUT from a wave packet";
<<"c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m";
(*
frelkginM[peakshiftv_, scav_, xlimitv_, phav_, xiv_] :=
  NIntegrate[Cos[u/scav]*Cos[(u)]*
    Exp[-((u - peakshiftv)^2 + (u/scav)^2)/(2*xiv^2)],
    {u, 0, xlimitv},
    , MinRecursion->3, MaxRecursion->10
];
*)
(* There exists analytical form *)
frelkgoutM[peakshiftv_, scav_, xlimitv_, phav_, xiv_] :=
  2* 1 / (scav) * Integrate[Cos[xiv*x]*Cos[xiv*x/scav]*
    Exp[-((x - peakshiftv/xiv)^2/scav^2 + (x)^2)/(2)],
    {x, 0, Infinity}
];
peakshiftp1=0; peakshift= peakshiftp1 * Pi;
xlimitp1=7; xlimit=xlimitp1 * Pi;
phap1=0; pha=phap1 * Pi;
xi=5;
scap1=1;
dofrelkgoutM=frelkgoutM[peakshift, sca, xlimit, pha, xi>(*analytical form*)

datax= Table[ ni , {ni, 0.000, 5, 0.025}];
datay= Table[ N[dofrelkgoutM], {sca, 0.000, 5, 0.025} ];
dataxy=Table[ {datax[[ i ]], datay[[i]]}, {i,1,Length[datax]};
doshowxy;
```

$$\frac{1}{sca} \left(2 \text{ If} \left[\text{Im} \left[\frac{1}{sca} \right] == 0 \ \&\& \ \text{Re} \left[\frac{1}{sca^2} \right] > -1, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\left(e^{\frac{25 (-1+sca)^2}{2 (1+sca^2)}} + e^{\frac{25 (1+sca)^2}{2 (1+sca^2)}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2 e^{25} \sqrt{1 + \frac{1}{sca^2}}}, \int_0^\infty e^{\frac{1}{2} \left(-x^2 - \frac{x^2}{sca^2} \right)} \text{Cos}[5 x] \text{Cos} \left[\frac{5 x}{sca} \right] dx \right] \right)$$

Ambiguity Effects : Leakage OUT from a wave packet

Morlet Wavelet: $\alpha=1$, $\beta=0.\pi$, $\xi=5$, $(0 \leftrightarrow 7\pi)$, $\theta=0.\pi$



04) {2005, 12, 23, 10, 29, 8} CPU:(00, 00, 0.344); Time:(00, 00,

■ << "c:\\lee\\mat\\000-p1.m";

FindMinimum[-1 * 1 / sca *

$$\left(\left(E^{-\frac{25 (-1+sca)^2}{2 (1+sca^2)}} + E^{-\frac{25 (1+sca)^2}{2 (1+sca^2)}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{sca^2}} sca^2 \right) / (2 (1 + sca^2)), \{sca, 0.97\}]$$

<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"

{-0.447397, {sca -> 0.962224}}

00) {2005, 12, 23, 10, 29, 12} CPU:(00, 00, 0.015); Time:(00, 00, 00)

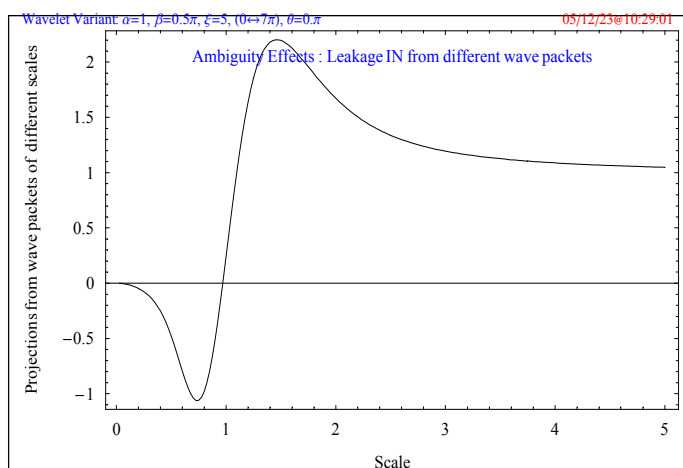
■ **Leakage In** File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

■ Leakage in (Wavelet variant)

```
(* ----- Frequency Leakage In (Variant) ----- *)
typestr="Wavelet Variant: ";
xlabel="Scale";
ylabel="Projections from wave packets of different scales";
flabel="Ambiguity Effects : Leakage IN from different wave packets";
<<"c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m";
frelkgin[peakshiftv_, scav_, xlimitv_, phav_, xiv_] :=
  NIntegrate[Cos[u/scav]*Sin[(u)]*
    Exp[-((u - peakshiftv)^2 + (u/scav)^2)/(2*xiv^2)],
    {u, 0, xlimitv},
    {MinRecursion->3, MaxRecursion->10}
  ];
(* gsca[b_, a_, s_] := NIntegrate[Cos[u/a]*Sin[(u)]*
  Exp[-((u-Pi/2.)^2+(u/a)^2)/(2*s^2)], {u, 0, b} ] *)
peakshiftp1=0.5;peakshift= peakshiftp1 * Pi;
xlimitp1=7;xlimit=xlimitp1 * Pi;
phap1=0;pha=phap1 * Pi;
xi=5;
scap1=1;
datax= Table[ ni , {ni, 0.025, 5, 0.025}];
datay= Table[ frelkgin [peakshift, sca, xlimit, pha, xi], {sca, 0.025 ,
  5 , 0.025 } ];
dataxy=Table[ {datax[[ i ]], datay[[i]]}, {i,1 ,Length[datax]};
doshowxy;
```

Ambiguity Effects : Leakage IN from different wave packets

Wavelet Variant: $\alpha=1$, $\beta=0.5\pi$, $\xi=5$, $(0\leftrightarrow 7\pi)$, $\theta=0.\pi$



01) {2005, 12, 23, 10, 29, 12} CPU:(00, 00, 0.313); Time:(00, 00, 0.313)

■ Leakage in (Morlet)

```
(* ----- Frequency Leakage In (Morlet) ----- *)
typestr="Morlet Wavelet: ";
xlabel="Scale";
ylabel="Projections from wave packets of different scales";
flabel="Ambiguity Effects : Leakage IN from different wave packets";
<<"c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m";
(* There exists closed analytical form *)
frelkginM[peakshift_, scav_, xlimit_, phav_, xiv_] :=
  2 * Integrate[Cos[u/scav]*Cos[u]*
    Exp[-((u - peakshiftv)^2+ (u/scav)^2)/(2*xiv^2)],
    {u, 0, Infinity}
  ];
peakshiftp1=0; peakshift= peakshiftp1 * Pi;
xlimitp1=7; xlimit=xlimitp1 * Pi;
phap1=0; pha=phap1 * Pi;
xi=5;
scap1=1;
dofrelkginM=frelkginM [peakshift, sca, xlimit, pha, xi>(*analytical form*)

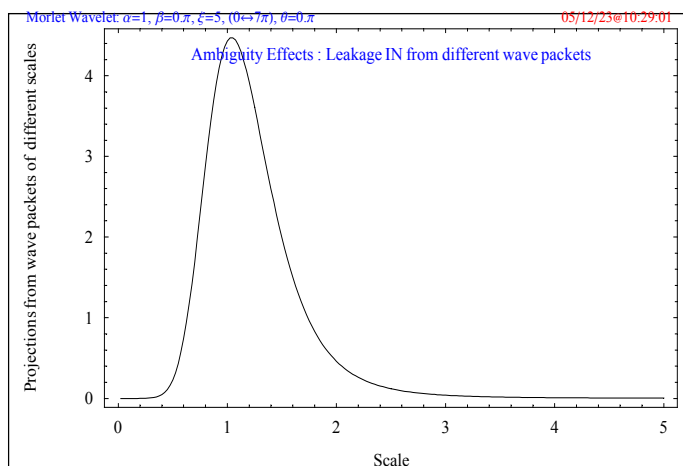
datax= Table[ ni , {ni, 0.000, 5, 0.025}];
datay= Table[ N[dofrelkginM], {sca, 0.000 , 5 , 0.025 } ];
dataxy=Table[ {datax[[ i ]], datay[[i]]}, {i,1 ,Length[datax]};
doshowxy;
```

$$2 \text{ If} \left[\text{Im} \left[\frac{1}{\text{sca}} \right] == 0 \&\& \text{Re} \left[\frac{1}{\text{sca}^2} \right] > -1, \right.$$

$$\left. \frac{5 \left(e^{\frac{25(-1+\text{sca})^2}{2(1+\text{sca}^2)}} + e^{\frac{25(1+\text{sca})^2}{2(1+\text{sca}^2)}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2 e^{25} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{sca}^2}}}, \int_0^\infty e^{\frac{1}{5\theta} \left(-u^2 - \frac{u^2}{\text{sca}^2} \right)} \text{Cos}[u] \text{Cos} \left[\frac{u}{\text{sca}} \right] du \right]$$

Ambiguity Effects : Leakage IN from different wave packets

Morlet Wavelet: $\alpha=1$, $\beta=0.\pi$, $\xi=5$, $(0 \leftrightarrow 7\pi)$, $\theta=0.\pi$



```

03) {2005, 12, 23, 10, 29, 13} CPU:(00, 00, 0.187); Time:(00, 00,
0.03)

■ << "c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m"

FindMinimum[-1 * 10 *  $\left( E^{-\frac{25(-1+sca)^2}{2(1+sca^2)}} + E^{-\frac{25(1+sca)^2}{2(1+sca^2)}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{sca^2} sca^2} \Big/ (2(1+sca^2))$ ,
{
  {sca, 1.01}
}]
<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"
{-4.47397, {sca → 1.03926}}

{2005, 12, 23, 10, 29, 16} CPU:(00, 00, 0.); Time:(00, 00, 00)

```

■ **Phase noise** File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

■ **Phase noise (Wavelet variant)**

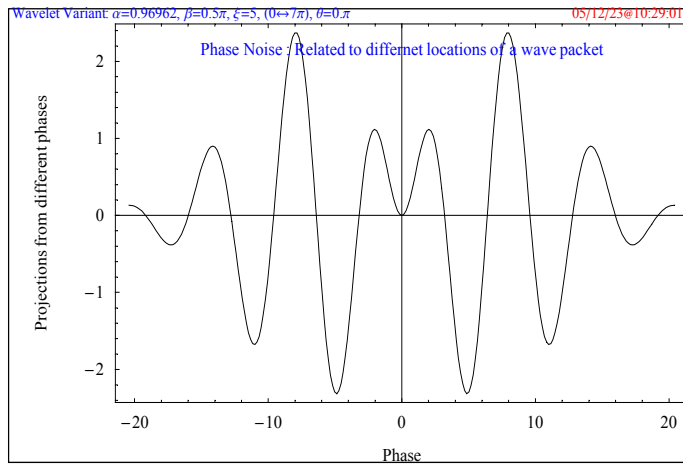
```

(* ----- Phase Noise ----- *)
typestr="Wavelet Variant: ";
xlabel="Phase";
ylabel="Projections from different phases";
flabel="Phase Noise : Related to differnet locations of a wave packet";
<<"c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m";
integright[peakshiftp1_, scaadjp1_, xlimitp1_, phavp1_, xivp1_] :=
  NIntegrate[Cos[u/scaadjp1-phavp1]*Sin[u]*
    Exp[-((u - peakshiftp1)^2. + (u/scaadjp1-phavp1)^2.)/(2*xivp1^2)],
    {u, 0, xlimitp1},
    {MinRecursion->3, MaxRecursion->10}];
integleft[peakshiftp1_, scaadjp1_, xlimitp1_, phavp1_, xivp1_] :=
  NIntegrate[Cos[u/scaadjp1-phavp1]*Sin[-u]*
    Exp[-((u + peakshiftp1)^2. + (u/scaadjp1-phavp1)^2.)/(2*xivp1^2)],
    {u, -1.*xlimitp1, 0},
    {MinRecursion->3, MaxRecursion->10}];
peakshiftp1=0.5; peakshiftp1= peakshiftp1 * Pi;
xlimitp1=7; xlimitp1=xlimitp1 * Pi;
phavp1=0; phavp1=phavp1 * Pi;
xivp1=5;
scaadjp1= 0.969621557058245997; scaadjp1=scaadjp1;
phaintp1=Table[ integright[peakshiftp1, scaadjp1, xlimitp1, phavp1, xivp1],
  {phavp1, 0.05 Pi, 6.5 Pi, 0.05 Pi}];
phaintp2=Table[ integleft[peakshiftp1, scaadjp1, xlimitp1, phavp1, xivp1],
  {phavp1, 0.05 Pi, 6.5 Pi, 0.05 Pi}];
phaintmid=2 * Table[ integleft[peakshiftp1, scaadjp1, xlimitp1, phavp1, xivp1],
  {phavp1, 0.00 Pi, 0.00 Pi, 0.05 Pi}];
posshiftp1sum=phaintp1+phaintp2;
midintsum=phaintmid;
datax=Join[ -1* Reverse[Table[ ni * Pi, {ni, 0.05, 6.5, 0.05}]], {0},
  Table[ ni * Pi, {ni, 0.05, 6.5, 0.05}]];
datay=Join[ Reverse[posshiftp1sum], midintsum, posshiftp1sum];
dataxy=Table[ {datax[[ i ]], datay[[i]]}, {i,1,Length[datax]}];
doshowxy;

```

Phase Noise : Related to differnet locations of a wave packet

Wavelet Variant: $\alpha=0.96962$, $\beta=0.5\pi$, $\xi=5$, $(0 \leftrightarrow 7\pi)$, $\theta=0.\pi$



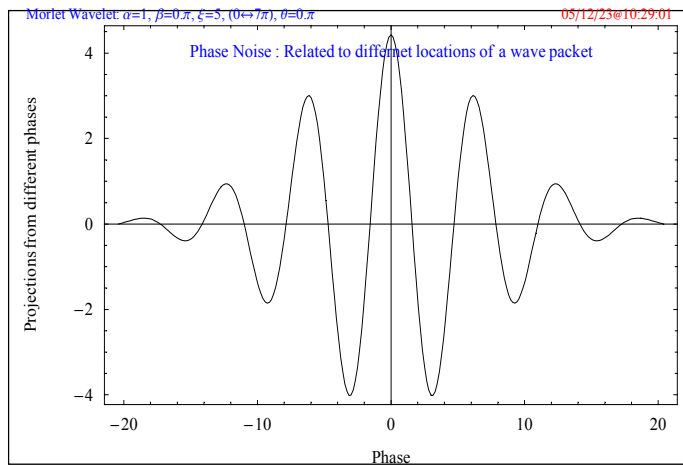
```
{2005, 12, 23, 10, 29, 17} CPU:{00, 00, 0.454}; Time:{00, 00, 00}
```

■ Phase noise (Morlet)

```
(* ----- Phase Noise (Morlet) ----- *)
typestr="Morlet Wavelet: ";
xlabel="Phase";
ylabel="Projections from different phases";
flabel="Phase Noise : Related to differnet locations of a wave packet";
<<"c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m";
integrightM[peakshiftp1_, scaadjv_, xlimitv_, phav_, xiv_] :=
  NIntegrate[Cos[u/scaadjv-phav]*Cos[u]*
    Exp[-((u -peakshiftp1)^2. + (u/scaadjv-phav)^2.)/(2*xiv^2)],
    {u, 0, xlimitv},
    {MinRecursion->3, MaxRecursion->10}];
integleftM[peakshiftp1_, scaadjv_, xlimitv_, phav_, xiv_] :=
  NIntegrate[Cos[u/scaadjv-phav]*Cos[-u]*
    Exp[-((u + peakshiftp1)^2. + (u/scaadjv-phav)^2.)/(2*xiv^2)],
    {u, -1.*xlimitv, 0},
    {MinRecursion->3, MaxRecursion->10}];
peakshiftp1=0.0; peakshift= peakshiftp1 * Pi;
xlimitp1=7; xlimit=xlimitp1 * Pi;
phap1=0; pha=phap1 * Pi;
xi=5;
scaadj= 1;
scap1=scaadj;
phaintp1=Table[ integrightM[peakshift, scaadj, xlimit, phav, xi],
  {phav, 0.05 Pi, 6.50 Pi, 0.05 Pi}];
phaintp2=Table[ integleftM[peakshift, scaadj, xlimit, phav, xi],
  {phav, 0.05 Pi, 6.50 Pi, 0.05 Pi}];
phaintmid=2 * Table[ integleftM[peakshift, scaadj, xlimit, phav, xi],
  {phav, 0.00 Pi, 0.00 Pi, 0.05 Pi}];
posshiftsum=phaintp1+phaintp2;
midintsum=phaintmid;
datax=Join[ -1* Reverse[Table[ ni * Pi, {ni, 0.05, 6.50, 0.05}]], {0},
  Table[ ni * Pi, {ni, 0.05, 6.50, 0.05}]];
datay=Join[ Reverse[posshiftsum], phaintmid, posshiftsum];
dataxy=Table[ {datax[[ i ]], datay[[i]]}, {i,1,Length[datax]}];
doshowxy;
```

Phase Noise : Related to differnet locations of a wave packet

Morlet Wavelet: $\alpha=1$, $\beta=0.\pi$, $\xi=5$, $(0\leftrightarrow 7\pi)$, $\theta=0.\pi$



02) {2005, 12, 23, 10, 29, 17} CPU:(00, 00, 0.468); Time:(00, 00,

■ **Roots** File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

```
<< "c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m"
g[b_, a_, s_] := Integrate[Cos[u/a] * Sin[u] *
  Exp[-((u - Pi/2.)^2. + u^2.) / (2*s^2)], {u, 0, b}]
FindRoot[g[5.*Pi, a, 5] == 0, {a, 0.95, 0.7, 1.2}]
<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"

{a -> 0.970672}

{1998, 7, 27, 2, 18, 16} CPU:(00, 00, 44.27); Time:(00, 00, 44)

<< "c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m"
g[b_, a_, s_] := Integrate[Cos[u/a] * Sin[u] *
  Exp[-((u - Pi/2.)^2. + u^2.) / (2*s^2)], {u, 0, b}]
FindRoot[g[7.*Pi, a, 5] == 0, {a, 0.9696, 0.7, 1.2}]
<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"

{a -> 0.970672}

{1998, 7, 27, 2, 19, 0} CPU:(00, 00, 44.71); Time:(00, 00, 45)

<< "c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m"
g[b_, a_, s_] := Integrate[Cos[u/a] * Sin[u] *
  Exp[-((u - Pi/2.)^2. + (u/a)^2.) / (2*s^2)], {u, 0, b}]
FindRoot[g[5.*Pi, a, 5] == 0, {a, 0.97, 0.7, 1.2}]
<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"
(* Run["mmawav.bat"]; *)

{a -> 0.969622}
```

{1998, 7, 27, 2, 19, 46} CPU: (00, 01, 17.17); Time: (00, 01, 17)

■ Others File Macro LeakOut LeakIn PhaseNoise Root Others End

■ Close form integrations

$$g2[b_, a_, s_] = \int_0^\infty \cos\left(\frac{u}{a}\right) \sin(u) e^{-\frac{(u/a)^2 + u^2}{2s^2}} du$$

```
<< "c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m"
```

```
g2[b_, a_, s_] = Integrate[Cos[u/a] * Sin[u] *  
Exp[-((u)^2. + (u/a)^2.) / (2*s^2)], {u, 0, Infinity}]
```

```
<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"
```

$$\text{If}\left[\text{Im}\left(\frac{1}{a}\right) == 0 \wedge \text{Re}\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1}{s^2}\right) > 0, \frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1}{s^2}\right)^{0.5}} \left(0.5 \left(\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 s^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1}} {}_1F_1\left[1.; \frac{3}{2}; -\frac{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 s^2}{2\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1\right)}\right] \text{sgn}\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{(a-1)^2 s^2}{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1\right) a^2}} {}_1F_1\left[1.; \frac{3}{2}; -\frac{(a-1)^2 s^2}{2\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1\right) a^2}\right] \text{sgn}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right], \int_0^\infty e^{-\frac{(u/a)^2 + u^2}{2s^2}} \cos\left(\frac{u}{a}\right) \sin(u) du$$

{1998, 1, 10, 0, 15, 19} CPU: (00, 00, 15.22); Time: (00, 00, 15)

$$\text{If}\left[\text{Im}\left[\frac{1}{a}\right] == 0 \&\& \text{Re}\left[\frac{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}{s^2}\right] > 0,$$

$$\left(0.5 \left(\sqrt{\frac{(-1+a)^2 s^2}{\left(1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right) a^2}} \text{Hypergeometric1F1}\left[1., \frac{3}{2}, -\frac{(-1+a)^2 s^2}{2\left(1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right) a^2}\right] \text{Sign}\left[1 - \frac{1}{a}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 s^2}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}} \text{Hypergeometric1F1}\left[1., \frac{3}{2}, -\frac{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 s^2}{2\left(1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)}\right] \text{Sign}\left[1 + \frac{1}{a}\right]\right) /$$

$$\left(\frac{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}{s^2}\right)^{0.5}, \int_0^\infty e^{-\frac{u^2 + \left(\frac{u}{a}\right)^2}{2s^2}} \cos\left[\frac{u}{a}\right] \sin[u] du$$

{1998, 7, 26, 17, 28, 31} CPU: (00, 00, 5.05); Time: (00, 00, 05)

```
<< "c:/lee/mat/000-p1_nb-m.m"
```

```
g3[b_, a_, s_] = Integrate[Cos[u/a] * Sin[u] *  
Exp[-((u - Pi/2.)^2. + (u/a)^2.) / (2*s^2)], {u, 0, Infinity}]
```

```
<< "c:/lee/mat/000-p2_nb-m.m"
```

$$\int_0^\infty e^{-\frac{(-1.5708+u)^2 + \left(\frac{u}{a}\right)^2}{2s^2}} \cos\left[\frac{u}{a}\right] \sin[u] du$$

{1998, 7, 27, 2, 21, 8} CPU: (00, 00, 8.79); Time: (00, 00, 09)

附錄二： 論 wavelet 之「仔」與「小」

附錄二： 論 wavelet 之「仔」與「小」

話說小明、小華、小麗、小美是同班同學，參與了全民無所不檢小不點級語文檢定。

小明、小華在試場甲，電腦題庫篩出的單選題有了這兩題：

- (1) 「小波」是

 1. proper noun
 2. common noun
 3. 以上皆是
 4. 以上皆非
 5. 隨便

(2) 「小波」的最適對應你認為是

 1. small wave
 2. minor wave
 3. trivial wave
 4. little wave
 5. tiny wave
 6. insignificant wave
 7. low wave
 8. wavelet
 9. 以上皆可

小麗、小美在試場乙，電腦題庫篩出的單選題有了這兩題：

- (1) 「仔波」是

 1. proper noun
 2. common noun
 3. 以上皆是
 4. 以上皆非
 5. 隨便

(2) 「仔波」的最適對應你認為是

 1. small wave
 2. minor wave
 3. trivial wave
 4. little wave
 5. tiny wave
 6. insignificant wave
 7. low wave
 8. wavelet
 9. 以上皆可

小明、小華從呀呀學語就參加什麼華盛頓、或林肯或什麼 abc 的多才、多元、多藝、多語、等等培育班，程度不錯，每個英文字，除了 wavelet 沒學過外，好像

都有印象，花了甚多時間在這兩題咬文嚼字，又從兩題關聯性邏輯推理下手，更想說班上還有同學是大小明、小小華、、，「小」者非吾獨享。所以就選了2及9。

可小麗、小美是比較屬於「女人無才便是德」的家庭環境成長的，程度普普，遇到這兩題，懂的字不多，心想「仔波」是什麼碗糕？從來也沒聽過，況且人家都是兩個字組成，只有 wavelet 是一個單字，很特別，又心想，班上有「宅」女，很獨特，搞不好此「仔」與彼「宅」是相通，所以很快、就隨便選了1及8。

等到放榜，小明、小華因在這兩題蹉跎太多，不幸以些微差距落榜；但小麗與小美卻驚險過關。可是這些題的出題老師是同一人，而老師對這四小不點也甚熟悉，得知結果甚感意外，自咎誤人子弟。原來仔波題是他早期所出題目，後來感於「積非也可成是」，「吾言如人言，庶幾無大錯」，又對後來題庫補充題中提供了「小波」題，不過卻忘了把「仔波」題給刪了。

言歸正傳。就讓我們來討論一個比較有趣、常被問到、也是最根本的話題，那就是英文的 wavelet 該如何中文稱之？也藉此順便涉略 wavelet 的一些相關概念。

Wavelet 如今似乎最常見的翻譯是「小波」，而本人最早期則習慣叫它為「子波」，然而個人認為最貼切的譯法應該是「仔波」。話說當年，約莫是1993年初，是我在國外初次接觸 wavelet，而比較大規模的自我研習則大概又在一年之後。因為先前在國內並無接觸，自然對它的中文譯法也無從得知。另一方面也因 wavelet 的主要理論與應用學門並不在海洋科技領域，就我所知，學校內並無 wavelet 的課程（包含當時數學系及各研究所所開課程），所認識之老中也無人從事這一課題，所以也無人相詢。如是「子波」的稱呼就建立在我的習慣上了。如果當時有如現在這樣發達且簡易而方便的 Internet，或許也就可以查到它的叫法，從而附會主流。印象深刻的是，那時試驗室所用連接設備是一台頂頂名

牌 Hayes Modem，當時撥接速率大家習慣稱為 baud rate（即 bit per second），它是僅僅的 1024，如今再也沒聽過這一名詞了。

接著，也讓我們來說說為何仔波的譯法最為貼切。從英文字義講，-let 是一個名詞附尾，比如我們所常聽到 droplet、piglet、booklet、bracelet。這個附尾代表小、年輕、局部，而有具變動性、發展性、活蹦亂跳的含義。但把英文的 wavelet 稱之為「小波」，我認為最大的致命傷就是中文的「小」跟「波」形成一種非常泛濫的概念，容易讓人聯想它是小小的波（small wave），也不免讓人想起是否有個相對應的大波？它缺乏一種像英文 wavelet 那樣的專有名詞的氣度；另一方面，從數學內涵而論，wavelet 的精神絕對不是在大小方面，它主要的觀念是在強調一種局部性分佈的波，你要它多大就可多大，要多小就多小。此外小波的叫法也缺乏 wavelet 的一些內涵，如多元性（無窮多種）、變異性（各形各色）、勁爆性（奇奇怪怪）。再者，小波的叫法也很難讓人把它與函基（function basis）構成函數作一些關聯連想，而 wavelet 的重要用途無不肇始於它所衍化形成的函基。另外值得一提的是，實際上，數學的分析可以完全不涉單位，而沒有單位，也就無所謂的絕對大小；而在實用上，一般離散數值解析的整個處理流程可說也可完全不涉單位（只涉及序列），只需於最後的結果適當的考慮加入單位即可。如是，這種大小的區別比較就非核心問題所在。

至於第二種稱法「子波」，個人認為，相對於小波，它比較有專有名詞的氣度，不會像小波有著那樣泛濫的意義。事實上子本身就有小的含義，再者它影射仔的年輕與動力，而它似乎亦表示可成長、演化。不過有個缺點，那就是，wavelet 的學門無不在訴說 mother wavelet，可是這 mother wavelet 的中譯法「母子波」，可能給門外漢一種「霧煞煞」的感覺，或者會讓人聯想到跟「子」有相對應的意涵（同樣的，father wavelet「父子波」也容易有所混搖），事實上

此處的「母子」並非比照倫理上或家庭上的長幼關係，這裡「母」跟「子」必需完全分離，「母」在此處的主要意涵是源頭，也就是說母子波最貼切的說法是源頭子波（用以製造或生成其它子波以便形成一個函基）。

有了上面的論述，似乎「仔波」叫法的優點也已不述自明了。「仔」者小也、子也，但卻毫無小或子的泛泛，「仔波」很自然地形成一個專有的名稱。再者仔也，桀驁不馴、有活力、也可能不按牌理出牌—這顯示它的多元性、變異性、奇特性。而仔也有一種容易呼朋引友，自我膨脹，形成一種特立獨行的群體—這顯示它與函基的意涵有如是密切的關聯。至於「母仔波」、「父仔波」，與「母子波」、「父子波」的差異，我想大概也是不說而自可分明。

附錄三： 簡報資料

A Wavelet Variant and Its Characterization

A basic research of IHMT

新型類仔波研究暨其水波應用

李 勇 榮

交通部運輸研究所
港灣技術研究中心
email: ronlee@ms4.hinet.net

<http://www.ihmt.gov.tw/>



1/35



回舊

回新



再見



2/35



回舊

回新



再見

Contents

1. The wavelet variant ➤
2. Comparison target: Morlet wavelet ➤
3. Time-scale characterizations ➤
4. Tests and applications ➤
5. Mathematical verification ➤

The Wavelet Variant

The devising

The wavelet variant:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \left[\text{sgn}(t) \sin \omega_0 t - i \cos \omega_0 t \right] e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1)$$

The scaled and translated versions of the wavelet variant:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}\pi^{\frac{1}{4}}} \left[\text{sgn}(t) \sin \omega_0 \left(\frac{t-b}{a} \right) - i \cos \omega_0 \left(\frac{t-b}{a} \right) \right] e^{-\frac{(\frac{t-b}{a})^2}{2}}. \quad (2)$$



3/35



The rendering

The modulus:

$$Wf(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle, \quad (3)$$

or

$$Wf(a, b) = \langle f(t), \mathbf{I}_m \psi_{a,b}(t) \rangle + i \mathcal{H} \left[\langle f(t), \mathbf{I}_m \psi_{a,b}(t) \rangle \right], \quad (4)$$

or

$$Wf(a, b) = \langle f(t), \mathbf{R}_e \psi_{a,b}(t) \rangle + i \mathcal{H} \left[\langle f(t), \mathbf{R}_e \psi_{a,b}(t) \rangle \right]. \quad (5)$$

The phase:

$$\phi(a, b) = \tan^{-1} \frac{\mathbf{I}_e \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle}{\mathbf{R}_m \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle}, \quad (6)$$

or

$$\phi(a, b) = \tan^{-1} \frac{\mathbf{I}_e \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle}{\mathbf{R}_m \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle} + \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$



4/35



The wavelet variant

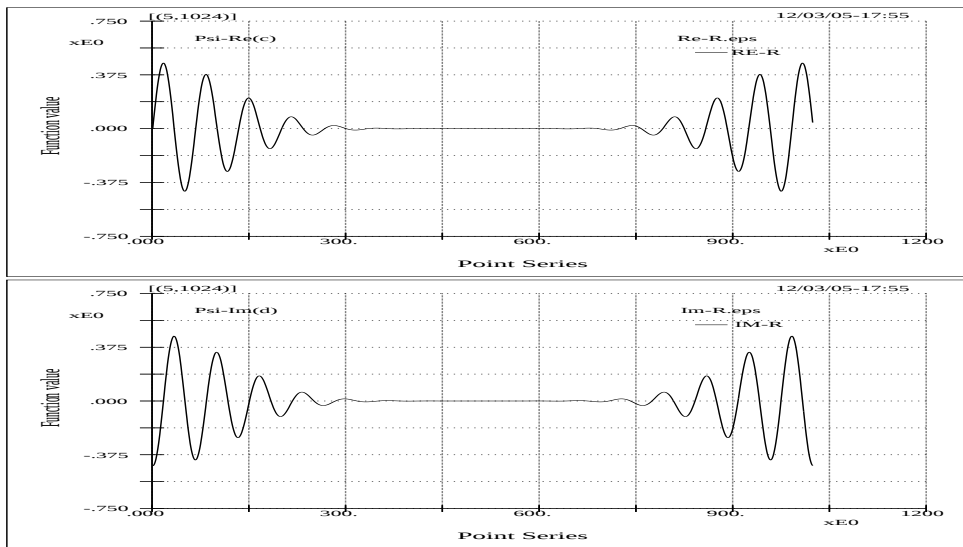


Figure 1: The real and imaginary parts of the wavelet variant for the renditions of modulus and phase as defined by equations 4, 5, 6 and 7. The wavelet variant is poorly analytic.

Time-Scale Characterizations

A few topics

- The admissibility condition and the completeness and redundancy
- Analytic versus complete oscillation and total positivity
- Instantaneous frequency, stationary phase, power ridge
- The analytic signal procedure and the Hilbert transform
- Time-frequency resolution, frequency leakage, and phase ambiguity
- Power ridge vs. trough

Analytic vs Non-analytic (B0350)

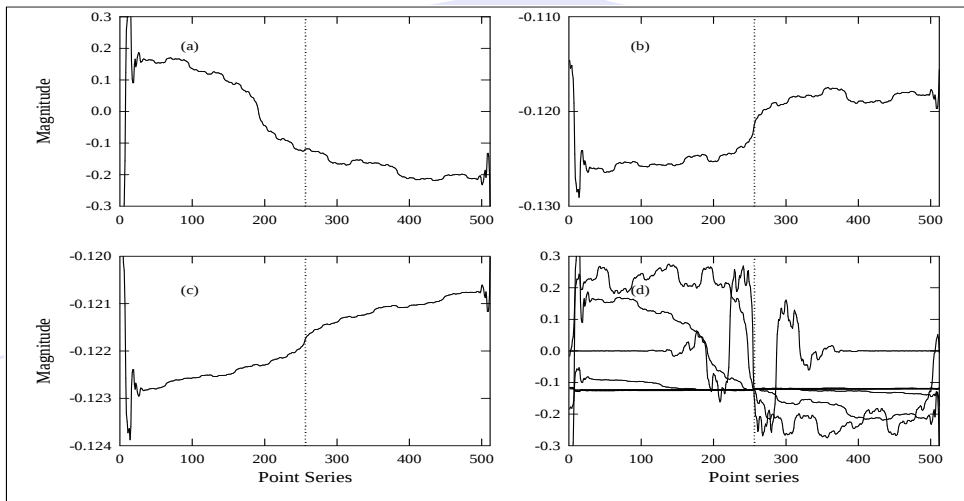


Figure 4: Wavelets with fancy analytical properties are often of peculiar wave forms and are not of our choice for studying water-wave related physics — Either judging from their entropy results or from their stability conditions shown here. Here the blow-ups of bi-orthogonal wavelets B0350 are shown — different curve inclinations.

The frequency leakage-out distribution curves

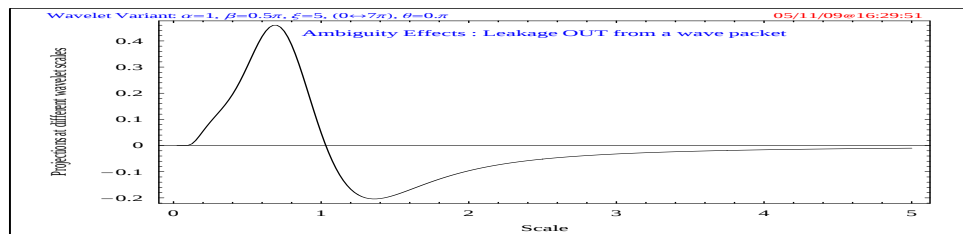


Figure 5: The frequency leakage-out distribution curve for the proposed wavelet variant. The frequency leakage-out is the projection of the unit scale basis function into its neighboring scales. For $\omega_0 = 5$ the curve has a root at scale 1.0313. This zero value and the sharp steep slopes at both sides of the root make possible the easy identification of energy ridges.

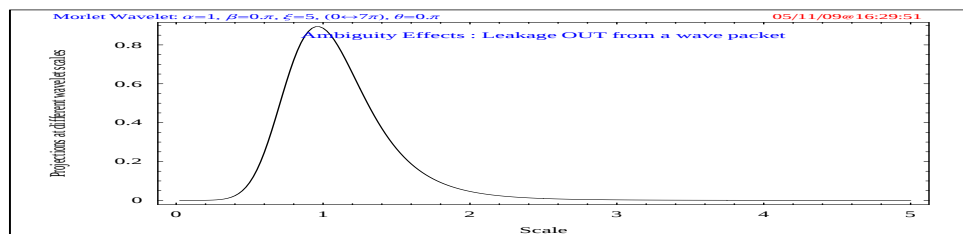


Figure 6: The frequency leakage-out distribution curve for the simplified Morlet wavelet. Again the frequency leakage-out is the projection of the unit scale basis function into its neighboring scales. The curve has a peak at scale close to 0.9622. The weight centers around the peak and contributes to a relatively broader leakage of energy.

The phase noise distribution curves

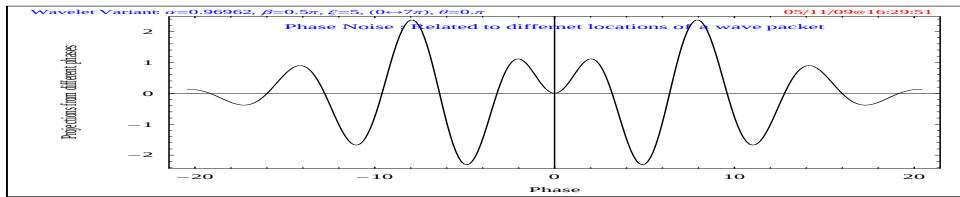


Figure 9: Phase noise or time smearing effects associated with the proposed wavelet variant. The phase noise is caused by the phase mismatch between two identical but translated basis functions. That is to say, it is calculated by projecting a unit scale basis function into its various time-translated versions. There is a root at the zero phase point. Again, this zero value and smallness around it provide the reasons for the proposed basis' successful applications using the phase plane information.

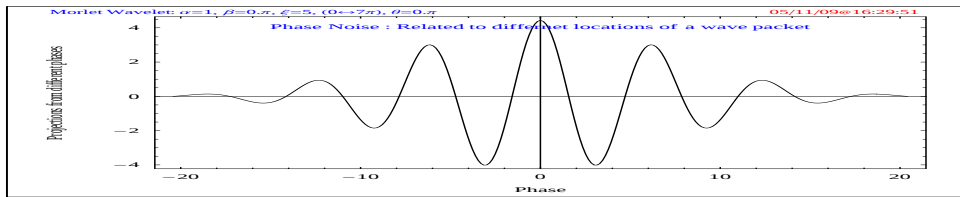


Figure 10: Phase noise or time smearing effects associated with the simplified Morlet wavelet. The phase noise is calculated by projecting a unit scale basis function into its various time-translated versions. There is a peak rather than a root at the center. The large values around the center point indicate that it is hard to get informative features from the phase plane information using such a basis.

The analytic degree of ψ

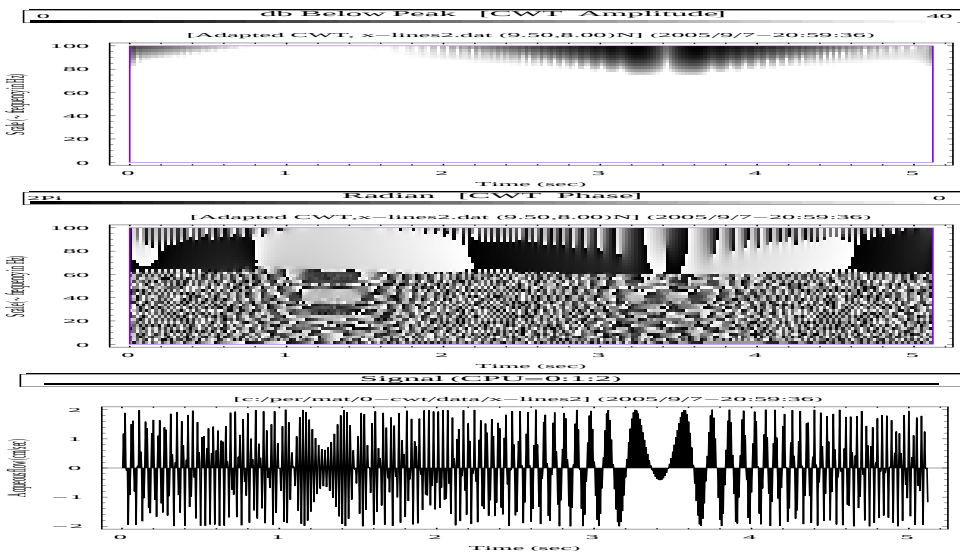


Figure 11: This figure shows the analytic degree of ψ related to equation 4. The top sub-figure shows the power (modulus squared) of the difference between $\langle f(t), A[\psi] \rangle$ and $\langle f(t), \psi \rangle$, where A means the analytic counterpart. The mid sub-figure shows the corresponding phase. Here an X-signal composed of two linear chirps (bottom sub-figure, see figure (Fig. 17)) is used.

Tests and Applications

Simulated signals

- A parabolic chirp with a frequency range of zero to Nyquist rate of 100 Hz;
- A signal composed of two liner chirps with equal power contents;
- An X-signal with a power ratio 0.01 between the two component signals;
- A signal composed of two liner chirps that are parallel and have the same power contents;
- A signal composed of two liner chirps that are parallel but with a power ratio of 0.04.

Water wave signals in laboratory tank

- Wind waves in oval tank with respective spectral peaks at about 2.0 to 2.6 Hz;
- Stokes waves with different fundamental harmonic frequencies and different wave steepness values.

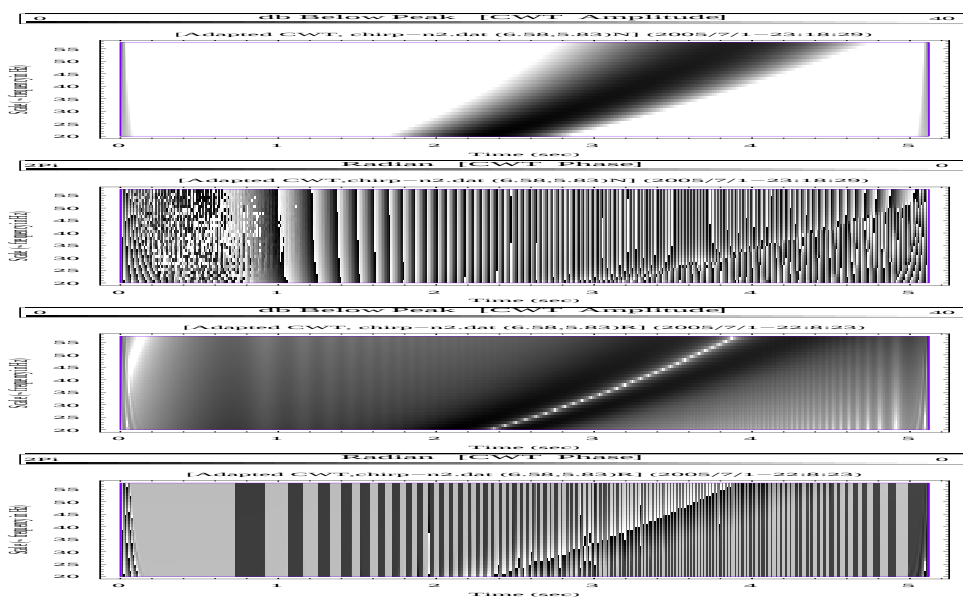


Figure 12: The time-Frequency zoom-in of a section of a parabolic chirp with frequency range of 0 to 100 Hz Nyquist rate. The top two sub-figures are related to the definition of equation 4, and it is therefore almost identical to the results of the Morlet wavelet. The bottom two sub-figures are associated with the proposed wavelet variant (equations 3 and 6). It is obvious that the proposed function basis provides better and easier identifications of the power ridge or stationary phase points from both the modulus and phase renditions.

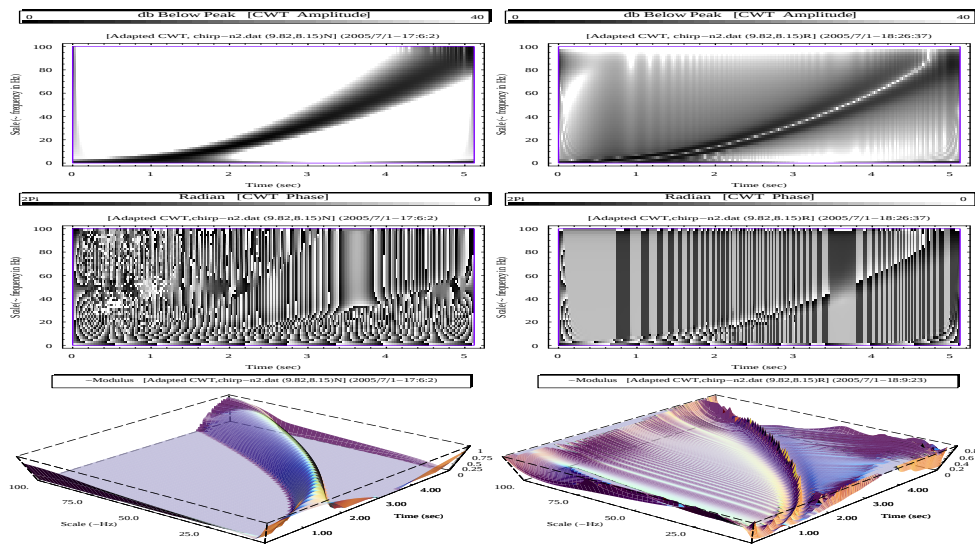


Figure 15: This figure shows the modulus and phase planes for the full extend of the same parabolic chirp using both the simplified Morlet wavelet (the left sub-figures) and the wavelet variant (the right sub-figures). The phase plane associated with the simplified Morlet wavelet tells little in practical significance. Note that there is a slight up-shift of instantaneous frequency for the wavelet variant, and it is about $\frac{1}{0.9696}$ larger than that for the simplified Morlet wavelet.

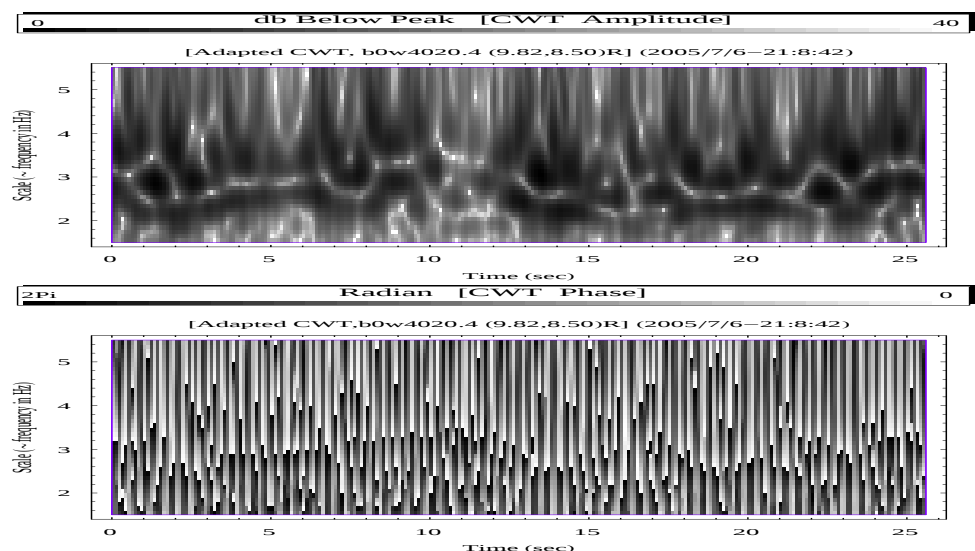


Figure 23: The modulus and phase planes for a lesser developed water wave signal (when compared to the previous figure, and it is due to a smaller wind speed in the tank) using the wavelet variant. The phase plane shows a very distinguish feature of multiple interfacing points along the time line. It reflects the existence of multiple scale components and the mutual interactions among them, and it also serves as the indication of instability or rapid wave modulation.



19/35



27/35



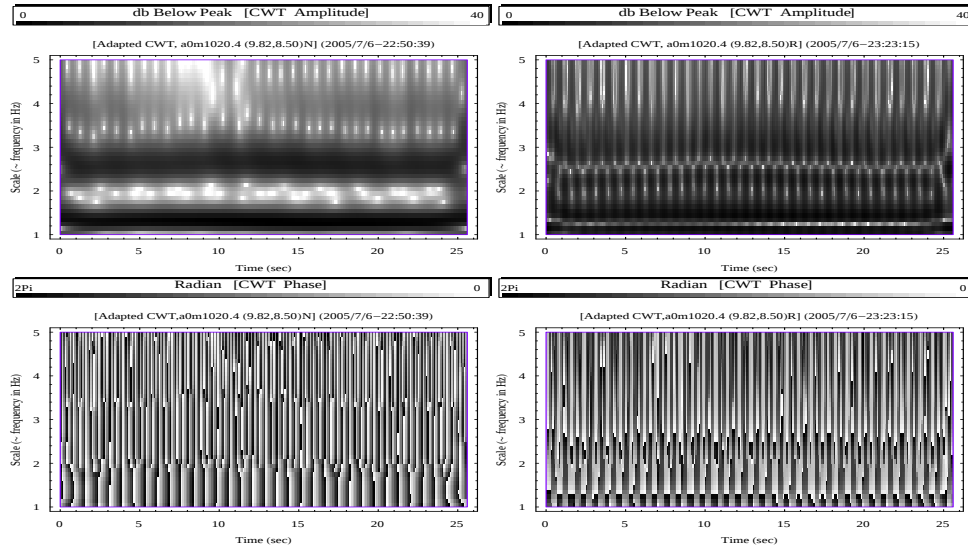


Figure 24: This figure compares the modulus (top sub-figures) and phase (bottom sub-figures) planes of a mechanically generated Stokes wave for both the simplified Morlet wavelet (left sub-figures) and function (right sub-figures). Here the Stokes wave has a wave steepness value of about 0.06 at its fundamental harmonic band. Again, the wavelet variant shows off more interesting physics either from its modulus or phase rendition: for examples, the multi-troughs around frequency 2 to 3 Hz from both the modulus and phase renditions, the feature of rapidly oscillating (or up-and-down) interfacial points for the above troughs, and the evolution of the first fundamental harmonic. All these may serve as evidences of the energy recurrence phenomenon among wave components and the Benjamin-Feir side-band instability.

Mathematical relevance

Main matters

- Instantaneous frequency and phase interfacial pattern ➡
- Instantaneous frequency and modulus minima ➡
- Phase striping pattern ➡

The formulation

$$\begin{aligned}\psi(t) &= [\text{sgn}(t) \sin \eta t - i \cos \eta t] g(t) \\ &= -i [\cos \eta t + i \text{sgn}(t) \sin \eta t] g(t)\end{aligned}\quad (9)$$

$$g(t) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$



32/35

$$Wf(u, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}|s|G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}|s|(i\delta(\eta) + \frac{1}{\pi\eta}) \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u}|s|G(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u}|s|(i\delta(\eta) + \frac{1}{\pi\eta}) \right] \right\} \quad (17)$$

Wavelet style:

$$\begin{aligned} Wf_{\eta}(u, s) &= \frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}|s|G(\eta) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}|s|\frac{1}{\pi\eta} \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u}|s|G(\eta) \star e^{i\frac{\eta}{s}u}|s|\frac{1}{\pi\eta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}} \frac{G(\eta)}{\pi\eta} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}|s| \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}|s| \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u}|s| \star e^{i\frac{\eta}{s}u}|s| \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Windowed Fourier transform style:

$$Wf_s(u, \eta) = \frac{1}{2}s^{\frac{3}{2}} \left\{ e^{i\frac{\eta}{s}u} \left[F\left(\frac{\eta}{s}\right) \star e^{-i\frac{\eta}{s}u}G(\eta) \left[i + \operatorname{Erfi}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right] \right] + e^{-i\frac{\eta}{s}u} \left[\overline{F\left(\frac{\eta}{s}\right)} \star e^{i\frac{\eta}{s}u}G(\eta) \left[i + \operatorname{Erfi}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right] \right] \right\} \quad (19)$$



Conclusions

1. A wavelet variant ➤
2. Modulus and phase renditions ➤
3. Numerical characterizations ➤
4. Comparisons with the Morlet wavelet ➤
5. Tests and applications ➤
6. Mathematical verifications ➤



35/35



附錄四： 審查意見回覆表

交通部運輸研究所港灣技術研究中心

自辦研究計畫期末審查意見回覆表

新型類仔波特性研究與應用探討

審查委員及審查意見	意見回覆
劉景毅委員：	
1. 本研究過程嚴謹，成果經由數值與試驗資料驗證，而仔波在許多領域有相當多的應用，因港研中心負責解決許多實際港灣問題，因此建議可多著墨與港研中心任務相關課題，也就是研究題目中的應用探討可再加強。	由基本研究以迄實際應用的歷程往往需經由試驗之精確掌控及釐定，特別是高階物理訊息之探討。理論之實際應用始終是作者的企盼。作者於多年前，曾為此一方向，規劃並編列較大型且偏重於試驗驗證之四年度長期研究計劃，計劃及經費均經各機關審核通過，並國科會列案。不料幾乎所有預算均遭本中心主任及本科科長在本人未知下挪用一空，遂行其不學無術、搞利益輸送之意圖。其敗壞官箴、斲喪學術研究之風氣，實無以爲甚。
2. Wavelet 的中文名稱不用“小波”的原因，文中有敘述，但在網路中還是大都使用小波，使用小波或仔波應有較一致的說法。	這一問題一再被提及。謹再提供如附錄二（論 wavelet 之「仔」與「小」）之說明。

審查委員及審查意見	意見回覆
莊甲子委員：	
1. 本研究對於莫立仔波與類仔波之不同特性有很深入之分析，值得肯定。 2. 摘要內容中包含有各項仔波的探討與驗證並解說其不同的優異性，惟類仔波的應用性部份建議加以增述。 3. 圖 4.1（P.41）至圖 4.15（P.55）中重要的分析結果與所獲成效建議加以補述。	此類仔波在判讀上大底均較莫利仔波來得明確與容易，具有一定程度之優越性。但其數學理論或分析上的完整性及廣泛性仍不若仔波理論或莫利仔波者，另類仔波之函基本質也尚缺乏明瞭。 本報告其應用方面只及於試驗室水槽訊號，其之難有進一步之探討，正如答覆劉委員第一條提問所述。問題的核心是大家只搞利益輸送、沽名吊譽、割稻尾不耕種，只事委託研究、合作研究，而視基礎研究、自我增進於無物。研究風氣豈堪言語。 在第四章之「結果與討論」中應已對每一個圖有所說明陳述。

莊甲子委員：

- | | |
|---------------------------------------|--|
| <p>4. 類仔波之分析應用上宜注意之事項亦建議能加以敘明。</p> | <p>基本上，此一類仔波其數值處理所依循法則，完全與莫利仔波者相同。至於此類仔波是否得以如仔波般地形成一個理論數學上的函基（function basis）亦是尙待研究的課題，這一問題解決了，將增進類仔波 decomposition 的用處。另連續仔波轉換由於其嚴重贅餘性，一般缺乏反轉換的實用價值。再者，此類仔波時頻窗解析觀念相對其它函基是比較薄弱。</p> |
| <p>5. 國外近年如有類似相關研究結果建議加以涵蓋包含比較驗證。</p> | <p>就作者所知，國內外並無類似此類仔波的研究。再者，水波中最常用的仔波即莫利仔波，另時頻分析基核種類甚多，正如第一章引言所述，其或有不同專善，亦且優劣互存。而本研究以仔波為關連，並以莫利仔波為比較對象。如此選擇是因為，基本上，作者在先前對水波模擬之最適仔波研究中，已從廣泛並完整的仔波類屬裡定論出「莫利仔波是為仔波連續領域上的最適水波模擬仔波」。這一部分詳述於作者二年前的年度（2010）報告中。另作者亦有相關於希伯轉換瞬間頻率之研究探討，這些結果在在驗證本文前言中所提訊號分析之精神。</p> |

審查委員及審查意見	意見回覆
李兆芳委員：	
1. 提出類仔波函數，確認其優越性及可用性，有研究方向及內涵。 2. 類仔波和英文 wavelet variant 在內文中要一致化。如摘要、p.2、p.7。 3. p.7 公式（2.1）和（2.2）編輯呈現要一致。 4. p.55 圖 4.15 中使用的水波時間系列，建議可以列出，看出波形和振幅。	仔波之用途取決於其可變時頻窗的形狀，而一種時頻分析基核的適用性是要依其時頻窗本質之特性而論，此處類仔波之所以特出，正是其模糊效應有與莫利仔波者全然不同的分佈。再者，其轉換係數之時尺分佈圖無論模值或相位均可直接提供有義訊息。 基本上並無不一致譯名。「wavelet variant」等同「類仔波」。另少數地方之所以出現「新型」「類仔波」是因為並無人探討研究此處所定義之「類仔波」，且這一「類仔波」也不能說是數學上的「仔波」。只是其數值處理手法同於連續仔波者。 基本上並無不一致。除了內文緊接第二公式的下頭已說明「上兩式之主要差異在於符號函數之存在，及忽略了莫利仔波的微量改造項」。下一章節中也有提及何以忽略這一項。這也是本文中常會出現「簡化型」莫利仔波的因素。 該圖所用試驗訊號為史脫克司波，其時序列波形為典型之 harmonic wave，其波峰凸尖、波谷則平坦。另本報告中所凸顯的現象（模值與相位分佈），主要只在相對性，而不在絕對性，故而略其時序列之圖示。

審查委員及審查意見	意見回覆
翁文凱委員：	
1. 內容大致豐富，目標清楚，文章內容建議修正為較正式之方式或格式。	由於多年來作者一貫使用同此報告之書寫模式，其方式或格式可說已「燒」入腦海中，有時也難以自我察覺其有可以改進之處，另所有大小瑣碎事務也必需獨立作業，有時也難全盤兼顧，有不妥或不協調之處而不自覺。其有未臻完善者，當自勵之。

審查委員及審查意見	意見回覆
蔡清標委員：	
1. 本研究提出一個變異型的 Wavelet 轉換時頻分析方式，具有訊號瞬間頻率變化判讀的優點。 2. 研究名之譯名，建議與中文一致。而內文對“新型”及“類”的意義，建議有所說明。 3. p.7 第一行，“變易”應修正為“變異”。 4. p.3 所述之相關課題，建議附註說明將於哪一章節探討，以易於閱讀。	本研究基本上屬於無心的發現，是作者多年來對仔波研究程式開發中一種美麗的錯誤。 原英文名稱較中文為通泛，但基本精神並不背離。今將研究名稱之英譯加入了「Applications」使其與中文更為契合。另「wavelet variant」等同「類仔波」。少數地方之所以加上「新型」是因為並無人探討研究此處所定義之「類仔波」。 當初作者之所以使用「變易」，是基於心中有個意念，是說：這一類仔波只是把人家的 $\sin(t)$ 更易為 $\text{sgn}(t) \sin(t)$，它不是那麼地「異」，所以「變易」與「變異」兩者都應允適。 本報告章節不多，另大部分課題暨其觀念散見、重覆出現於多處，故未加瑣碎註明，另有一項未在報告中提及，已加以修改說明。