

103-53-7757
MOTC-IOT-102-H2DA003

水波時頻分析之優化 (1/4)

— 最適仔波其時頻窗之調適



交通部運輸研究所

中華民國 103 年 4 月

103-53-7757
MOTC-IOT-102-H2DA003

水波時頻分析之優化 (1/4) — 最適仔波其時頻窗之調適

著 者：李勇榮

交通部運輸研究所

中華民國 103 年 4 月

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

水波時頻分析之優化. (1/4)：最適仔波其時頻窗之
調適 / 李勇榮著. -- 初版. -- 臺北市：交通部運
研所，民 103.04

面；公分

ISBN 978-986-04-1001-3(平裝)

1.波動 2.數值分析

332.654

103006867

水波時頻分析之優化 (1 / 4) - 最適仔波其時頻窗之調適

著者：李勇榮

出版機關：交通部運輸研究所

地址：10548 台北市敦化北路 240 號

網址：www.iot.gov.tw/chinese/lib/lib.htm

電話：(04)26587176

出版年月：中華民國 103 年 4 月

印刷者：

版(刷)次冊數：初版一刷 75 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站

定價：200 元

展售處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 台北市中山區松江路 209 號 F1•電話：(02)25180207

五南文化廣場：40042 台中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1010300586

ISBN：978-986-04-1001-3 (平裝)

著作財產權人：中華民國(代表機關：交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部份內容者，須徵求交通部運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：水波時頻分析之優化（1／4）－ 最適仔波其時頻窗之調適			
國際標準書號 ISBN978-986-04-1001-3 (平裝)	政府出版品統一編號 1010300586	運輸研究所出版品編號 103-53-7757	計畫編號 102-H2DA003
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計劃主持人：李勇榮 研究人員：李勇榮 聯絡電話：04-26587183 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 101 年 01 月 至 102 年 12 月
關鍵詞：最適仔波函基、莫利仔波、水波能量物理、互補誤差函數優化手段、數學驗證、熵值效應。			
摘要： 本研究探討水波模擬最適仔波函基其在分析應用上如何進一步優化，研究中我們首先指出先前所鑑取得的最適函基是為連續領域中的莫利仔波，另闡述其最適化的各種肇致因子，並將這些基因與行為所涉數學與物理儘可能地作概念化、具體化表述。接著我們比較此最適函基數學與水波能量物理的同異之處，再進而提出一個比較直覺的優化手段。其主要論點為：一個固定形狀、亦或固定時頻窗的母仔波，其縮放之不同尺度無法對水波組成分提供全面性的物理吻合性，它不是高估了低頻端成分波的降減，就是低估了高頻端成分波的衰敗，亦或是兩者兼而有之。故此處依尺度調適母仔波的時頻窗。最後以一試驗室小水槽風生波及一模擬之漸高頻訊號說明這一優化所帶來的訊息。基本上這一優化得以顯示較佳的局部化時頻分佈，增益其辨識性。另其重要特徵是：雖然母仔波在低頻帶的時支撐大大增加，但它所帶來的模糊效應卻更低。這一現象顯示此處調適的物理符合性暨優化正當性。			
出版日期	頁數	定價	本 出 版 品 取 得 方 式
103 年 4 月	100	200	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 （解密條件： ☐ 年 ☐ 月 ☐ 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密） ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: The Optimizations of Water Wave Time-Frequency Analyses (1/4) – The Adaptation of the Time-Frequency Window of the Best Wavelet Basis			
ISBN 978-986-04-1001-3 (pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1010300586	IOT SERIAL NUMBER 103-53-7757	PROJECT NUMBER 102-H2DA003
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Yung-Fang Chiu PRINCIPAL INVESTIGATOR: Yueon-Ron Lee PROJECT STAFF: Yueon-Ron Lee PHONE: 886-4-26587183 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2013 TO December 2013
KEY WORDS: Best wavelet basis; Morlet wavelet; Damping of water waves; Complimentary error function; The admissibility condition; Entropy effects.			
ABSTRACT: Here we provide an optimizing scheme regarding the applications of the best wavelet basis to water wave signal analyses. We first point out that the best wavelet basis is associated with the Morlet wavelet in the continuous domain, and various contributing factors both in mathematical and physical aspects are outlined in palpable and tangible ways. Subsequently, based on the viscous damping of water waves, we compare the amplitude modulation feature of the Morlet wavelet to that of the water wave dynamics. This shows that the fixed decaying parameter of the Morlet wavelet does not fit the real physics for a full coverage of all scales. We therefore adapt the time support of the mother wavelet in accordance with the carrier frequency. Here an intuitive adaptation in association with the distribution of a dilated and translated complementary error function is adopted. Later on, a purely numerical chirp signal and a wind wave signal derived from an experimental wave tank are used to check the validity of the adaptations. Results show better localizations of time-scale distributions. Most notably, even the time supports of the modified mother wavelets are greatly increased for those larger scale wave components; the adaption yields less ambiguity in reference to that of the fixed mother wavelet. Such an optimization is thus justified for its improved modeling capability.			
DATE OF PUBLICATION April 2014	NUMBER OF PAGES 100	PRICE 200	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

水波時頻分析之優化（1／4）－
最適仔波其時頻窗之調適

The Optimizations of Water Wave
Time-Frequency Analyses (1/4) –
The Adaptation of the Time-Frequency Window of
the Best Wavelet Basis

李勇榮

交通部運輸研究所港灣技術研究中心

Email: ronlee@ms4.hinet.net

Revision: , March 14, 2014,
Printed: March 14, 2014

目錄

圖目錄	iii
表目錄	v
摘要	vii
ABSTRACT	ix
1 前言與研究背景	1
1.1 引言	1
1.2 變動或非穩定形態之效應	4
1.3 海參堡定理與加窗之轉換	5
1.4 研究課題	10
2 水波分析最適仔波函基	11
2.1 引言	11
2.2 直接逆向旋移乘積作用與黑盒子機制	12
2.3 劇變效應與相位糙音	14
2.4 波譜重複性問題	16
2.5 架框值與贅餘性	19
2.6 尺度與載頻	29
2.7 結語	32
3 最適仔波之調適優化	33
3.1 引言	33
3.2 最適仔波與水波物理	33
3.3 入允條件之驗證	43
3.4 結語	45
4 結論	47
參考文獻	49
附錄一： 論 wavelet 之「仔」與「小」	51
附錄二： 簡報資料	57
附錄三： 審查意見回覆表	69

圖目錄

1.1	時頻窗概念圖示。此圖乃仔波包轉換 (wavelet packet transform) 之時頻窗相位分佈圖 (上圖)，此處仔波包是相應於Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號 (下圖)，其頻率分佈由0 至100 Hz。	6
1.2	另類時頻窗概念圖示。其仍示仔波包轉換時頻窗相位分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖。	7
2.1	一個問題重重的黑盒子機制。此一簡單圖示彰顯兩訊號之波譜係數分佈之直接商值是否有實質的重要性。	15
2.2	本圖以兩個相鄰尺度之仔波合成訊號其富立葉能譜說明模糊效應與相位糙音之影響。	17
2.3	相應於表2.1 所示三組波流場訊號之能譜，其上子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之流速訊號能譜。就波譜觀點而論，穩定形態卻可說是被完全地推翻了。	21
2.4	此圖以自相關係數歷時分佈說明此處之水槽風生波瞬即散失其身分本位。上下圖分別為上下游波高訊號之自相關係數係。圖示自相關係數值低下且快速降減。	22
2.5	此圖與下一圖彰顯贅餘性的價值。而具有迷人解析特性，亦或是具有非常有效率的精簡數值流程的仔波，其波形往往相當怪異，而非水波物理模擬上的選用對象。此圖為交正交仔波BO31O 其某一尺度之波形的局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ 。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為4 個。	27
2.6	此圖同樣彰顯贅餘性的價值，另亦示解析特性特出之仔波，難以成就水波之物理模擬。此圖為交正交仔波BO35O 其某一尺度之波形的局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ 。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為20 個。	28
3.1	代表波浪減衰之參數 $\omega_0(a)$ 與載頻之關係曲線。	39
3.2	時頻分佈比較圖。其所用訊號是為試驗室小水槽裡的風生波，這些風生小水波的幻化，相對於一般海洋波浪者，相對甚快。相對於長波而言，針對這些小尺度風生波進行 ω_0 調適可以比較明顯展現一些效益。	40
3.3	此圖示一純粹數值模擬訊號之比較圖。此訊號為二次方漸高頻訊號，其所含蓋頻率區間為零以迄尼克斯取樣頻率，而時頻分析圖其所覆蓋頻率亦為全範圍。	41
3.4	此圖中的上子圖乃前圖二次方漸高頻訊號其相位分佈圖，其係以吾人先前所提之類仔波 (wavelet variant) 為之。而下子圖係為具有全頻域之二次方漸高頻訊號。	42

表目錄

2.1 以傳統的波浪越零位統計法所得之三組風生波流場量測訊號統計值。這三組量測都是在完全一樣的試驗條件下量得。第二頻道訊號都是同一點之波高量測，因此，從越零位統計觀點而言，此一數值分析手段已達理想的穩定形態。然這一情形卻與波譜觀點者大相逕庭。	20
---	----

摘要

本研究探討水波模擬最適母仔波函基其在分析應用上如何進一步優化，研究中我們首先指出先前所鑑取得的最適函基是為連續領域中的莫利仔波，另闡述其最適化的各種肇致因子，並將這些基因與行為所涉數學與物理儘可能地作概念化、具體化表述。接著我們比較此最適函基數學與水波能量物理的同異之處，再進而提出一個比較直覺的優化手段。其主要論點為：一個固定形狀、亦或固定時頻窗的母仔波，其縮放之不同尺度無法對水波組合成分提供全面性的物理吻合性，它不是高估了低頻端成分波的降減，就是低估了高頻端成分波的衰敗，亦或是兩者兼而有之。故此處依尺度調適母仔波的時頻窗。最後以一試驗室小水槽風生波及一模擬之漸高頻訊號說明這一優化所帶來的訊息。基本上這一優化得以顯示較佳的局部化時頻分佈，增益其辨識性。另其重要特徵是：雖然母仔波在低頻帶的時支撐大大增加，但它所帶來的模糊效應卻更低。這一現象顯示此處調適的物理符合性暨優化正當性。

ABSTRACT

Here we provide an optimizing scheme regarding the applications of the best wavelet basis to water wave signal analyses. We first point out that the best wavelet basis is associated with the Morlet wavelet in the continuous domain, and various contributing factors both in mathematical and physical aspects are outlined in palpable and tangible ways. Subsequently, based on the viscous damping of water waves, we compare the amplitude modulation feature of the Morlet wavelet to that of the water wave dynamics. This shows that the fixed decaying parameter of the Morlet wavelet does not fit the real physics for a full coverage of all scales. We therefore adapt the time support of the mother wavelet in accordance with the carrier frequency. Here an intuitive adaptation in association with the distribution of a dilated and translated complementary error function is adopted. Later on, a purely numerical chirp signal and a wind wave signal derived from an experimental wave tank are used to check the validity of the adaptations. Results show better localizations of time-scale distributions. Most notably, even the time supports of the modified mother wavelets are greatly increased for those larger scale wave components, the adaption yields less ambiguity in reference to that of the fixed mother wavelet. Such an optimization is thus justified for its improved modeling capability.

前言與研究背景

1.1 引言

「時頻分析」乃研究訊號隨時間而變動的頻率、亦或訊號其組合成分的變易現象，一個更為廣義及恰當的名稱是為「時尺分析」，即研究尺度內涵隨時間而變動的情形。狹義的「頻率」是一種正弦或餘弦的週期行為，這一週期現象的生命期是無限的，它適合穩定狀態（steady state）之描述。正因為以「無限」來研究「有限」或「局部」，在邏輯本身上就非妥適，是故，於非穩態（unsteady state）或劇變的情形下，其數理上暨應用上的表現也較不理想，亦或事倍功半。而「時尺分析」（亦或仔波分析）即在配合這一方面的需求。一個基本概念就是：生命期長、緩變行為、重覆現象宜偏向「頻率」；反之，生命期短、劇變行為、非重覆現象宜偏向「尺度」。

在醫學領域或相關電子工程上，其諸多影像診斷技法在英文上廣稱為Imaging modalities（如：X-ray plain film, Fluoroscopy, Angiography, Computed tomography, Ultrasound, Magnetic resonance, Positron emission tomography, Radioisotopic nuclear medicine 等），其之所以叫Modality 當然一定有它的道理，這些道理也就反應訊號分析的精神：其一，技法是相對而非絕對的，也軟硬體均具的，不是單方可以適足。其二，各技法都具有期待性、不定性、可與不可預期性。其三，優劣互存、不一而足、不同方法有其不同專善。其四，是人因的、藝術的、手法的、意識型態的、不純然是數學上的。其五，相互間往往具有輔助性而非排它性。其

六，應無萬靈丹，但工欲善其事仍必先利其器，不同症狀宜不同處方，技法雖可彈性應用，唯不同研究標的或探討內容，還是首先要面對分析方法之擇取，不宜亂槍打鳥。綜上，簡而言之，不論是在學理本身或技法特性上，所謂一體適用、全能含蓋之解析與技法是不存在的，但就一個特定物理探討問題，某些技法具有明顯特色，甚而存在改造性，也是當然的。

再者，數據分析的本質基本上是只需數學、不需物理，因其可以不用牽涉任何物理量。可是應用上或工程上，人們所要的是實質存在的物理量。也因此任何分析的重要課題，無不在於賦予分析之圓滿或恰適的物理解說，產生合於吾人理念，亦或順乎邏輯的大小值與單位量。此處存在的一個彈性模糊地帶是，我們可以在數學上與技法上給予不同的權重配比，比如犧牲數學上的嚴密性於使用簡便性或物理的恰合性。這或許也就是水波分析法得以優化的一個根由。

就水波現象研究而言，從最早期的越零位統計法以迄近期的仔波法，就作者所知，大致有下列不同分析類別：

- 示性波法（significant wave method）
- 富立葉波譜法（Fourier transform）
- 短時富立葉分析或加窗波譜法（short time Fourier transform or windowed Fourier transform）
- 蓋博解析訊號法（Gabor's analytical signal procedure）
- 希伯轉換相關分析法（Hilbert transform）
- 基於各類不同設計基核之各種時頻分析法（time-frequency transforms associated with various kernels [2]）
- 連續仔波轉換法（continuous wavelet transform or the integral wavelet transform）
- 離散仔波轉換法（discrete wavelet transform）

這裡說明的是，此處把連續與離散仔波轉換區別為兩型。這一不同歸類，與連續暨離散富立葉轉換之未作區別，是有其重要根據。因為連續或離散富立葉轉換其所涉函基、亦或公式數值推演流程大底都具一致性；然而，離散仔波轉換與連續仔波轉換兩者，一方面其函基是可以完全不相關的，而另一方面它們的技法與公式推演流程也基本上可說具有獨立性的。下面對兩者的描述或許可以看出一些端底。

在以下的說明中，我們以一個一維的時序列作為說明例，簡要述說前述分析方法的用途或一般特性或相互差別。

富立葉分析將一時序列轉換為一頻率序列，其轉換將一獨立變數轉為另一獨立變數。而短時富立葉分析則是欲取得某一局部時間區間上的頻率內容，它相對於富立葉分析的主要額外動作就是在時序列上罩上一個濾窗，而把這罩窗隨著時間軸移動就可以得到不同時刻下的不同波譜內容，這種轉換將一個時變序列轉換成一組合時間與頻率兩個自變數的時變波譜分佈。

蓋博解析訊號法則可將一個時序列訊號表示為一種隨時間分佈的瞬時頻率，此外它可以同時求算出一個隨時間而變動的波動振幅包絡線。此一轉換其對應領域的獨立自變數只有時間，且其瞬時頻率與振幅包絡線也非互不相關的。

至於基於各種基核（kernel）設計之時頻轉換，其概念上與短時富立葉分析有些相似，只是它們所取用的分析基核是完全不同於富立葉函基，而往往具有個自顯著特性，而其罩窗也是不像短時富立葉分析那樣可以輕易分開。

至於離散仔波轉換則一個一維的時序列將產生一個一維的轉換係數序列，每一個係數則同時代表著兩個獨立變數，其一為時變數，另一為尺度變數。基本上離散仔波轉換其函基設計也是可以無窮多的。

至於連續仔波轉換則將一維的時序列轉換成一個二維的轉換係數序列，這二維的轉換係數序列其獨立變數一為時間、一為尺度，每一個時間都有其尺度（或說是代表頻率）分佈，而每一尺度值則可扮演其在每一時刻之個別角色。此一轉換其處理流程亦類似於短時富立葉分析之概念，有時候他們的主要差別可視為罩窗之改變，即只需符合仔波入允條件（the admissibility condition）。

1.2 變動或非穩定形態之效應

富立葉轉換適於穩定形態之訊號，而對局部多變動現象則有其明顯的局限性，下述解說可作為其特性考慮之延伸。

- 數學上，任何函數都無法同時滿足「有限時分佈」暨「有限頻分佈」，若一函數在一領域其分佈是有限的（即局部存在）則其對應領域之分佈函數必然是無限延伸。而在自然界的狀況，或是實際取得的訊號，亦或是部分取用於分析之數據，必然是有其時間或空間的局限性。此外，接受訊號的硬體設備也必然是有其反應感受區間、或頻帶感應範圍。綜此，我們大致瞭解到理論與實際是無法完全符合的，也就是說富立葉分析之實質上已引入了一些虛擬的狀況。而短時富立葉分析強調局部訊號而將兩側遠端訊號權重遞降為零，然而對短時富立葉分析而言，這種有限時與頻的互斥拘限性乃是存在的，這現象可以Balian-Low 定理說明：若罩窗函數為 $g(t)$ ，蓋博型態架構函數（Gabor type frame）為

$$g_{m,n}(t) = e^{-2\pi i m t} g(t - n), \quad (1.1)$$

式中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。若設罩窗函數具有優良的局部分佈性，則架構函數的富立葉轉換之局部分佈性則不佳。這裡的說明也許有些抽象，但它的實質可以說是下述現象的一種表徵。

- Gibbs 現象指出，若一訊號有不連續的突變，則富立葉反轉換所得之訊號必然是無法與原訊號一致的，它會在斷點兩側產生一些起伏，而且這種起伏的幅度是不會隨積分區間大小或離散使用項目數而改變的，它的「消失」只存在於「分佈」概念（the concept of distribution）下之極限狀況。這種現象其實也就是說，一個尖銳多變的形狀需要非常多的波譜分量來模擬，或則說是越局部之現象其波譜分佈區間就越廣，這一狀況的極端表徵就是delta 函數（或更正確地稱delta 分佈），delta 函數其相應富立葉轉換之頻率俱是等值而向正負無限延伸。

- 富立葉轉換其函基函數是週期分佈而向兩側無限延伸。因此它的研究對象最好也是具有週期性，而且最好也是可以無限取樣，如果不能滿足這些要求，就有一些如下的副作用：頻漏現象、邊端效應、折誤作用、滑濾誤差、解析誤差等。圖 1.1 所示為一取樣率在一半Nyquist 頻率下之狀況，原始模擬訊號為一線性頻率分佈之漸高頻訊號，由圖亦可見此些效應進一步亦對離散仔波轉換所帶來的一些影響。

整體而言，上述情形都與非穩定型態衍生效應有所關聯。

1.3 海參堡定理與加窗之轉換

前頭說過，任何函數都無法同時滿足「有限時間」與「有限頻率」之分佈，這一特性實質上代表一個重要概念，亦且是海參堡定理（Heisenberg uncertainty principle）之得以存在的基本因素。這一概念如下：我們對訊號組成成分是無法絕對正確定位的，即訊號組合成分是沒有所謂的點分佈，任何成分的定位必然是一個時軸與頻軸上的一個分佈面積，而這個時頻面積，最簡單地，大致就是以一個時頻窗來代表，另這一個時頻窗的面積有其最小極限，即需滿足海參堡定理。另這一時頻窗概念亦是加窗之轉換的根源。而本研究就相關於這時頻窗的設計問題。

為彌補富立葉函基其描述非穩態局部變化現象之不足，短時富立葉轉換及仔波轉換可說都是將一訊號隨時間而局部化，如此形成一個由各時間點上的局部訊號所形成的集合，再以此集合進行個自轉換。就短時富立葉分析而言，其執行方式就是變動式 1.1 中的 m 、 n ，而 $g(t)$ 則不變；就仔波而言，以典型的莫利（Morlet）仔波為例，其是藉由移位及縮放母仔波（mother wavelet）之波形為之，也就是 $m, n, g(t)$ 具是異動的。這兩種轉換所得到的局部時間段的波譜或尺度資料，就短時富立葉分析而言，用頻率、Hz、或頻譜是可以名正言順，但對仔波而言，正確的描述應是尺度或尺度譜。基於前述Balian-Low 定理，短時富立葉分析實際上是無法在時間分佈上設為真正局部，因為數據處理上的離散富立葉轉換其頻軸分佈是有限的，然而仔波轉換在這一方面就可符合完全局部之要求，或則

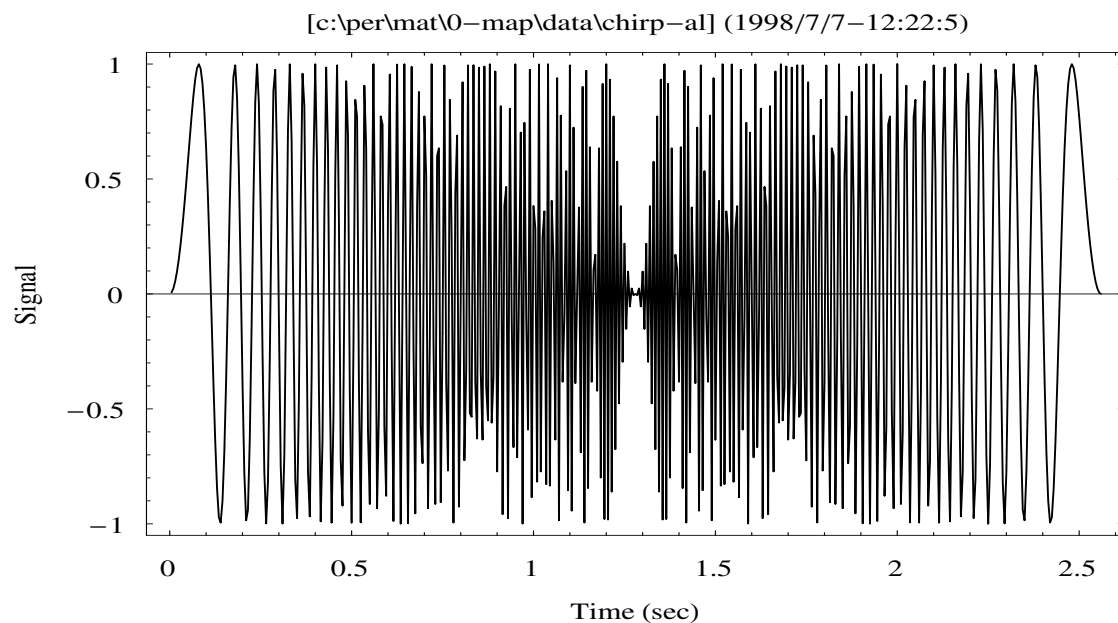
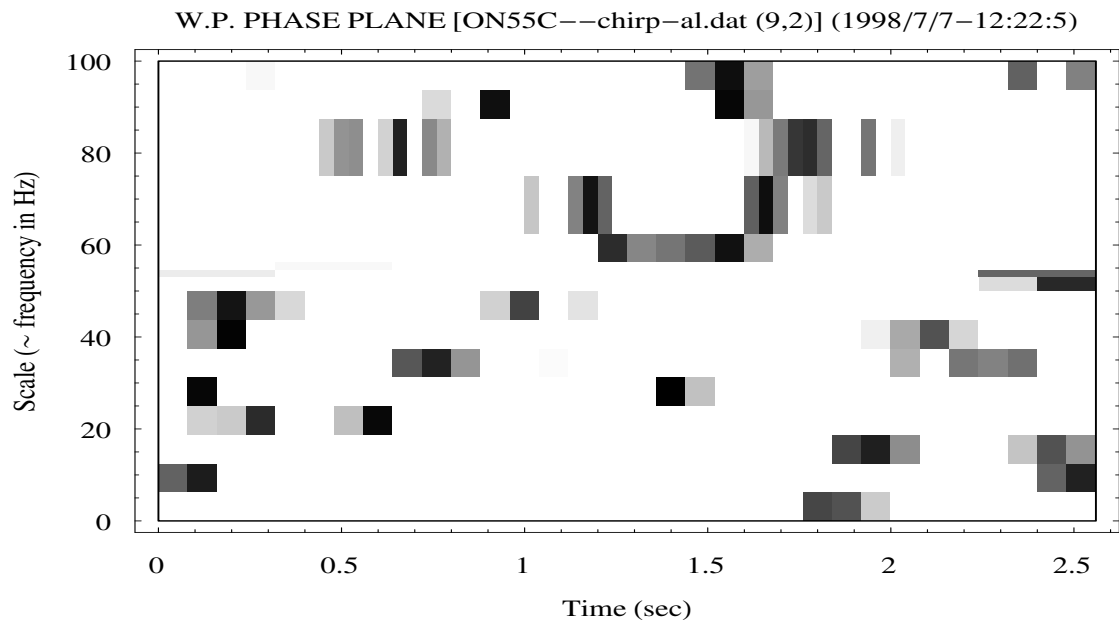


圖 1.1 時頻窗概念圖示。此圖乃仔波包轉換 (wavelet packet transform) 之時頻窗相位分佈圖 (上圖)，此處仔波包是相應於Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號 (下圖)，其頻率分佈由0 至100 Hz，此處因係非足頻取樣 (即取樣率只為Nyquist rate 一半)，故有折誤現象。此外當注意此時頻窗之非對稱分佈及多重頻帶分散性所代表轉換意涵。

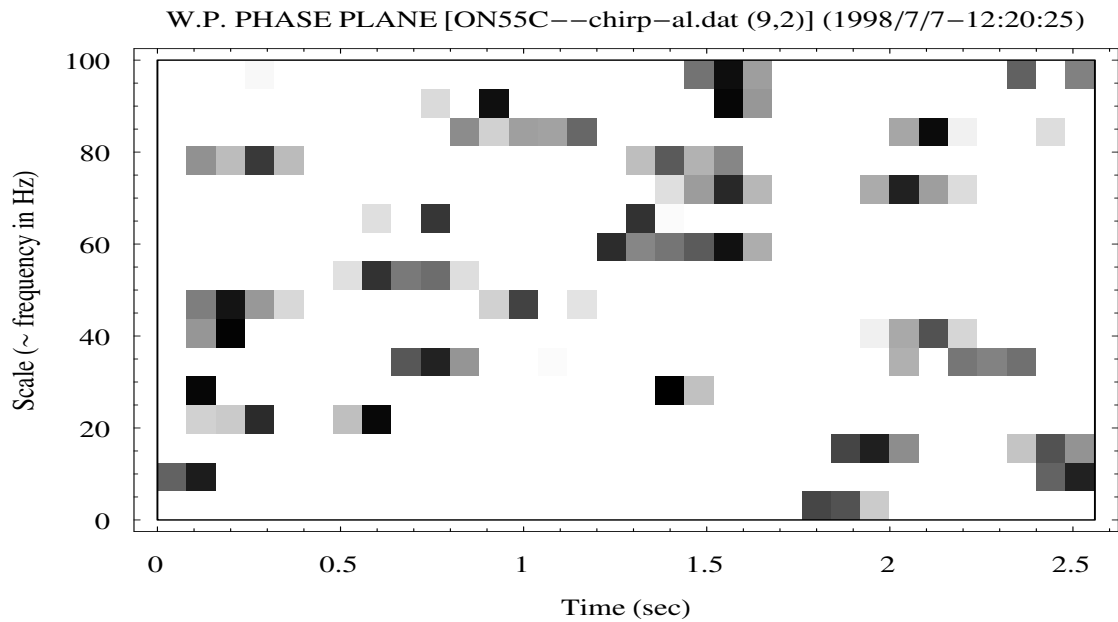
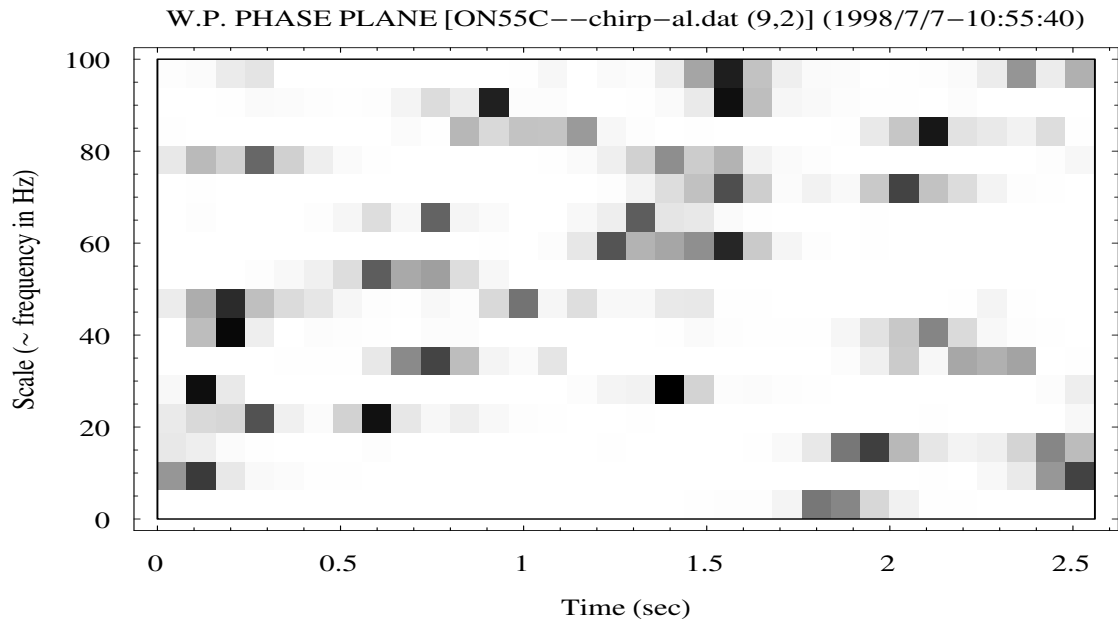


圖 1.2 另類時頻窗概念圖示。其仍示仔波包轉換時頻窗相位分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖，與前圖綜合起來，我們可以體會到仔波轉換其表現方式的多樣性及其可能帶來的困擾。諸如諸多類屬函基、諸多組合型態、不同最適規範、不同圖示方法、等等。

至少可說仔波之分佈其向正負兩側之延伸波形必然是要衰減，以致於不存在有零頻率的成分，以下再進一步說明個別轉換之特性或差異：

- 基本上短時富立葉分析與仔波分析都可視為加罩窗之轉換，就短時富立葉分析而言，它包含兩個區別十分明顯的步驟，第一個步驟就是在原訊號加予一形狀不隨時間改變的罩窗，接下來就是將這一加窗的訊號行富立葉轉換，此一轉換其相對應的反轉換（或是訊號重建）也很自然地牽連上一頻軸罩窗，而其數值處理也類似正轉換包含有兩個可以明顯區隔的步驟。因此，短時富立葉分析，罩窗明顯可視，而函基亦是所熟悉的弦性函數。然而對仔波轉換而言，這兩個步驟就非明顯可見，其罩窗與其函數可說是一種合成體，既無法體會該罩窗形狀，亦無法將罩窗由函基函數分離出，事實上這種情形可以由下述的比較參照明顯看出：若把式1.1之Gabor型構架的罩窗取為高斯分佈，則這一高斯罩窗與莫利仔波函基函數之擺動振幅的輪廓是相似的。綜此可見，這兩個轉換的用意是一致的，亦即提供一種投射機制，以便分離出調變或振盪更易的成分。
- 對短時富立葉分析而言其時頻罩窗之形狀與大小，在不同時頻下都維持不變，這是因為式1.1中的 $g(t)$ 只與 n 而與 m 無關，也就是說任何時間與任何頻率下所用的時頻窗它的寬與高都維持不變，因而在二維的時頻座標裡有一個固定形狀不隨時頻而變的罩窗。至於仔波的時頻窗則是隨尺度而變化，但這些變化只是形狀上的，其面積大小還是不變的，也就是說時頻窗它的寬度與高度成反比，而乘積則固定，另這一特性對離散或連續仔波轉換都是適用的。圖1.1與1.2可以用來說明這一情形，圖中所取之仔波類別係取正交離散仔波包，兩圖中之源始母仔波相同，但轉換函基函數係取不同階位，一個相關於最適函基（best basis），另一個則相關於最適階位（best level），所用訊號則如圖1.1之下半圖，其係為一漸增頻訊號。此處因函基是屬正交類型，故所有的時頻窗都不重疊，也因此每個時頻窗所代表範疇，其時尺位置可以說是相對地精準明確，而非謹是代表示意之區塊而已（相對地，非正交函基其時頻窗謹可示性表達之）。至於連續仔波轉換其不同時頻之時頻窗可

謂糾纏在一起，重重疊疊，此時通常不用具有尺寸與形狀的時頻窗表示，而是以在個別特定時頻點上給予一假定的解析大小作為代表，再由這些解析分佈以灰階圖或色彩圖表現，如果所用解析度很細，就狀似連續分佈之時頻圖。

- 短時富立葉分析其函基由正交之弦性函數所組成，其乃獨特唯一，而對仔波轉換而言，其函基亦或母仔波之選取可以是非常鬆散或非常廣泛，這鬆散的條件，就連續仔波轉換而言就僅僅是能滿足入允條件（the admissibility condition）即可（即不含有零頻率週期之函數），而就離散仔波轉換而言，也僅僅是需符合穩定收斂之條件（stability condition）而已。
- 短時富立葉分析轉換係數所代表的是局部頻譜，它含有與頻率完全一致的義涵，但仔波轉換係數所表徵的是尺度而非頻率，也因此仔波轉換所遭遇的難題尚有數點。第一，因解析函基之設計甚多，且函基函數間可以互是獨立或互有相關；第二，所謂的尺度基本上是沒有單位的，只有大小值，也因此我們實際上對每一轉換係數所代表的波形範圍或確切尺寸，可說完全沒有具體認知；第三，仔波轉換的數值處理或理論架構存在各種型式與調適性，諸如多音型態（multi-voice）[5]、多仔波混合（multi-wavelet）[3, 4, 15]、非以兩倍為基底之轉換（different dilation factors）[1]、等等，一般說來，這些變化在某些針對數值演算的應用或許困擾不大，然而在水波研究時，因為物理義涵之重要性遠較數值演算功能或技巧來得重要，因而這些導入的複雜數學因子往往就形成諸多困擾，治絲愈棼，難以使用。
- 在基本的物理應用上， $L^2(\mathbb{R})$ Banach 空間，亦或希伯空間（Hilbert space），可說已最具有實際之用途，雖然仔波數學尚存在一些非針對 $L^2(\mathbb{R})$ 空間之研究[5, 11]，但就水波物理而言，我們所探討的大底不離能量現象，也因此 L^2 空間可說已很恰適。大致上，不同空間上的研究，往往相關於解析上的嚴謹度，如可微分性、連續性、規則度、多階解析分析（multiresolution analysis）存在性等，這些於水波物理，基本上可說看不出任何有義性，也因此，希伯空間上的研究已充分滿足我們的需求。

1.4 研究課題

局部化之轉換在水波研究及應用上的立足點，事實上可以簡單直覺地加以解說如下：如果一個水波訊號是由一些有限生命與有限空間分佈的成分波所合成、亦或其成分波隨時空而演化，則用那些有生命期亦或含蓋有限分佈空間的仔波來加以模擬，自然而然地就能比較滿足這一本質。再者，我們知道即使那些狀似相當規則的水波，它們往往存在一些調變行為，亦且存在一些非線性亦或不穩定（wave instability）性質，甚或干擾或邊界效應等等，也因為這些存在的變動與不定性本質，使得我們可以期待以變動而具生命期的成分波來分析模擬其所可帶來之不同訊息、或其所可能產生之另一番物理描述。而本研究更進一步比較仔波數學與水波物理的同異之處，另針對其不同之處，嘗試其可優化之作爲。而這一優化乃反應於時頻窗之調適，即依據水波之大小不同尺度來調適母仔波的時頻窗特徵參數。另我們的調適對象已是水波分析及應用所當取用的最佳仔波。❖

水波分析最適仔波函基

2.1 引言

首先必需再說明的是，本研究針對水波訊號，另所要優化的分析法是屬於仔波訊號分析領域。再者我們所取的優化對象已是水波分析上所當取用的最適仔波。如果所要優化的對象不是如此的一個最適仔波，則其情形恐如瞎子摸象，亦當然無法錦上添花。在這一章中，我們對此最適仔波之形成因素、特性、適足性作一些數理上與物理上的關聯描述。

在先前就水波模擬最適仔波函基之鑑取中[8]，我們是由離散領域之函基出發，可是最終之驗證或實際數據應用上之實証，我們並非以離散最適函基直接作為，而是取連續領域上所可對應之函基為之，此一作為一石二鳥，同時驗證取得離散暨連續領域之最適仔波，而這當中不可不謂庇祐於一些「幸運與巧合」，因為離散與連續最適函基所形成的鏈結，正如前章所言，在解析數學條件下相對非常薄弱，只是性狀上可謂「自然」匹配。然而由離散以迄連續之必要性，是大有因由的，再者也是因為，離散與連續之間的各種因子互相匹配，故得形成一個水波分析上的最適仔波。如果以基因與行為來比擬先前的探討，那麼可以說，水波模擬最適函基的形成基因，是對照於離散領域的特性，而數據分析上之行為表現，則是此一基因進一步藉由連續領域上所獨具特性的襄助，互相配合而形成的現象。這一因果關係，可謂，天理昭昭，物必循其理、理必彰其物。另一方面，在數學上，離散仔波領域所牽涉的學理遠較連續領域者來得豐富多元，這些複雜

內涵可算是基因，但在物理上或意念上，連續領域提供一個比較容易具體描述的特色，另輔以其自身額外的功能，得以讓最適基因彰顯出來，是故兩者相輔相成。

在這一章裡，我們藉由一些比較零散的意象來解說闡明這些基因與行為的表徵。雖言零散，但這些無不依循數理，只是此處的描述，吾人儘量將之物理化、概念化、具體化，其種種之間，互為因果、往往你儂我儂、相為表裏。大致而言主要的論點有：逆向旋移乘積機制之問題；相位糙音與劇變效應之耦合現象；離散轉換與連續轉換之不同效應；正交與非正交之不同長處；轉換係數贅餘性之價值；尺度與載頻（carrier frequency）之實用差別；尺度解析度及所考量尺度區間之選定彈性問題；等。

2.2 直接逆向旋移乘積作用與黑盒子機制

對一複雜系統內的作用過程或訊號演化現象的探析，我們最常見的手法就是比較因與果兩者的波譜，或者說是比較輸入與輸出訊號之頻譜。這樣的一個比較到底會遭遇到何種問題，是此處首先要探討的。圖2.1的黑盒子機制圖輔助說明了這一作為的問題，幫助吾人充分了解它所可能提供的信息究竟如何。

設若我們有一輸入訊號，而這一訊號在一個複雜的系統裡，受到各種因子的影響或不明因素的作用下產生了一個輸出訊號，此時我們想就這些因子對各成分波的綜合效應加以瞭解，則一個非常自然的作法就是比較輸入與輸出訊號之轉換頻譜，這一觀念與其手法可說非常直接與簡易，而其使用更也屢見不鮮，可是這裡需指出的是，這是一個極其脆弱亦且是問題重重的作法。一言以概之，這一頻譜比較法所涉問題就等同一個逆向旋移乘積（deconvolution）所涉問題，而其過程所遭遇的重大難題其理甚簡，茲參考黑盒子機制圖說明如下：

設若輸入訊號為 $f(t)$ 、輸出訊號為 $g(t)$ 、黑盒子效應函數為 $h(t)$ ，而其富立葉領域之對應函數分別為 $F(t)$ 、 $G(t)$ 、 $H(t)$ ，則富立葉轉換及旋移乘積配對關係式

如下：

$$h(t) \iff H(\omega), \quad (2.1)$$

$$h(t) \star f(t) \iff H(\omega)F(\omega). \quad (2.2)$$

此處之雙箭號表示 t 與 ω 可以互相掉換。依黑盒子機制圖可設有下列式：

$$H(\omega)F(\omega) = G(\omega), \quad (2.3)$$

由此式我們可以相當直接的認定，這一黑盒子機制其對各成分波的作用就是如下的兩個波譜之相除：

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}. \quad (2.4)$$

也因此，系統的作用因子其綜合反應作用函數（impulse response function）就是如下的直接逆向旋移乘積函數（direct deconvolution）

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(\omega)}{F(\omega)} \right]. \quad (2.5)$$

這裡所遭遇的問題是多方面的，但卻是具體而微，因而也使得它在解析上與使用上都滯礙難行，而這一切都相關於出現在分母的函數 $F(\omega)$ 。其一，理論上2.5式可能是完全不成立的，因為 $F(\omega)$ 中有部分是可能為零分佈的；其二，在實質上或數值解析上，一個離散數值分析流程必然是屬於有限性質的，也必然是一個綜合各種無法避免的誤差或近似演算的過程，這當中各種副作用所在都有，某部分的 $F(\omega)$ 可能誤差特大；其三，離散波譜是反應連續波譜分佈的一種矩形狀估算值（periodogram estimations），此外富立葉波譜是一種統計估算值，一般帶有嚴重的變異不定性，並且甚難有效率地加以改善或精準化[13]；其四，劇變效應與相位糙音耦合所難以克服的困擾，如下節所述；其五，很多實際狀況其成分波譜是僅分佈於一個窄頻帶，即使有分佈曲線也僅是集中於整個數值處理求算頻率範圍

內的一個狹窄區間，因此對大部分能量甚小的區域，其數值結果絕大部分遠離真實值，或說都是誤差，亦甚或不存在。

如是之故，兩個波譜之相除其本質就是一個誤差放大器，可說非常不可靠。理論上或數值上只要存在有一點是零數值的成分，那整個逆轉換公式也就不存在。整體而言，此處的症候是所謂的「源頭直接逆向旋移乘積」（direct source deconvolution），它在數值分析領域上被稱為「振幅等值化效應」（effects of amplitude equalization），它往往形成一個頻率領域的高通窗（high-pass window），在糙音影響下，此一濾窗進一步將各項不定性放大[14]。以上學理說明了這一處理方式的嚴重缺失，但令人遺憾的是，我們還是經常會看到這樣的一個分析處理手法，此一黑盒子機制被不當用來分析複雜系統裡的尺度演化現象或作用效應。以下的章節另可提供更具體明確的解說。

2.3 劇變效應與相位糙音

一個具複雜尺度及多元作用因子的系統通常難以避免高不規則性 or 高亂度，時空上的明顯變化或混亂是常態，圖2.2 在概念上突顯這些現象對波譜及正交函基所帶來的影響，亦隱示其對比於連續仔波之不同反應。這一個圖也足以彰顯為何有些研究之數值分析其數據分佈零散，而其結果缺乏歸納性與說服力。

從波譜理論上我們知道，如果一個訊號沒有自相關（或是兩個訊號沒有交相關）則就缺乏能譜（或共能譜），設若一個波或其成分波之生命期甚短，則相關於該波的相關函數分佈其存在歷程亦同樣短暫，而相應之能譜內容即相對薄弱或不明顯而難以區別，使用如此薄弱的波譜內涵來行逆向旋移乘積可說無甚意義，要直接比較恐亦不可行。圖2.2 所舉意象雖說比較極端，但甚是具體明白。在圖中我們以兩個Lemarié 仔波之合成來模擬一個訊號所含急變性波形。基本上此處隨意取兩個小尺度的仔波，其左脈動係為相應於單位仔波係數元 e_{600} 之仔波反轉換（即位於第600 點之單位值行反轉換而得，而訊號長度為1024 點），右脈動係為相應於單位仔波係數元 e_{470} 之仔波反轉換，其尺度階較 e_{600} 者大一階。這些選擇一方面是隨機，一方面也可說是特意。選擇兩個小尺度讓我們可以明顯感受局部

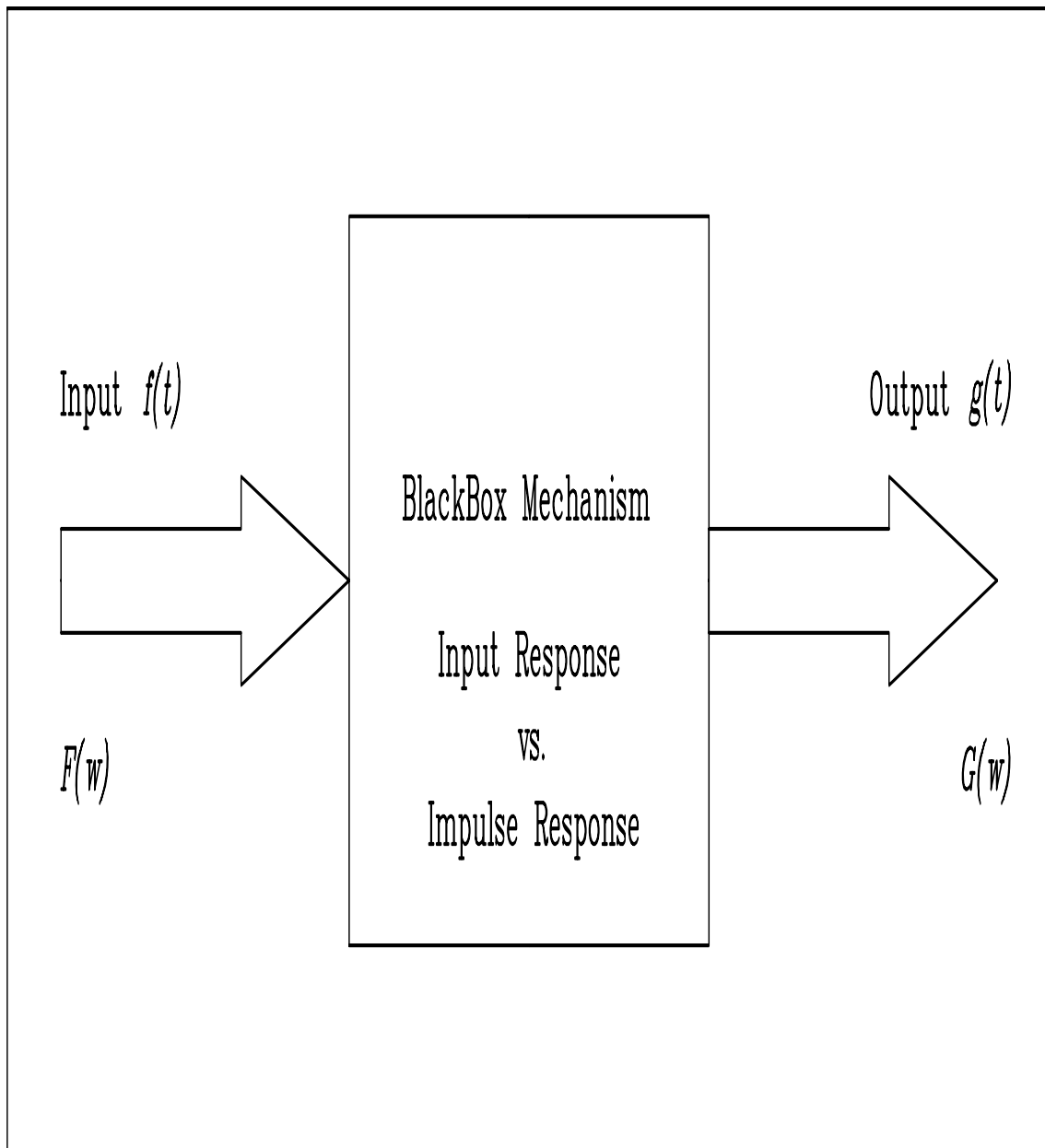


圖 2.1 一個問題重重的黑盒子機制。此一簡單圖示彰顯兩訊號之波譜係數分佈之直接商值是否有實質的重要性。如果直接取輸出與輸入訊號之波譜商值，則此黑盒子機制作用即代表輸出訊號是為輸入訊號與某一入載反應函數（impulse response function）之旋移乘積（convolution），也就是說這一黑盒子機制是為輸出與輸入訊號之間的逆向旋移乘積（deconvolution）。這一觀念與手法看似非常簡單，可惜它是一個誤差極其嚴重的過程。簡易的學理如內文所示。而此圖內在的問題亦相關於波譜直接比較所必須深慮的問題，同時它亦與圖2.2 所代表含意密切相關，此外尚需考慮時空變化性及其它各樣數值不定性所涉之轉換行為效應。

變化對頻率分佈所可能帶來的衝擊，而兩個位置點的選擇也牽涉到訊號突變產生位置所引致的現象，亦或說是相位效應，而這一效應於此處所引致的性狀乃是波譜分佈之巨幅波動。更具體的說，所謂の故意，是讓兩個局部訊號分開甚長，而離的越遠則這一波動性就越激烈。而所謂の隨機，則是說在一真實混亂狀況下，我們往往無法掌控時空上的發生性。試想，吾人若拿兩個類如此圖的訊號來行波譜比較或逆向旋移乘積，那會取得多少有義意的結果！

前述之說明如果用數學公式來闡釋，也不過是下面兩個富立葉轉換關係式而已：

$$f(t - \tau) \iff e^{-i\omega\tau} F(\omega), \quad (2.6)$$

$$|f(t) + g(t)|^2 \iff |F(\omega) + G(\omega)|^2. \quad (2.7)$$

同樣地，此處雙箭號表 t 與 ω 可以互相掉換（但可能存在一常數乘積差，端視富立葉轉換式之定義為何），此公式之具體意象解說是，在一個領域內的移位會形成對應領域內的調變，不同位置之局部波形造成另一領域的急劇波動。是為富立葉轉換之配對特性（duality properties）之一。再者，即使第二個局部脈動的獨立波譜模值（modulus）是同於第一個脈動其獨立的波譜模值，但兩個脈動的合成訊號之波譜模值是不同於個別脈動其模值的合成。也就是說，雖然富立葉轉換對成分訊號是一個線性作業，但能譜並非線性過程，亦或說是合成訊號之能量波譜分佈不等於個別能譜分佈之和。

以上之狀況尙是學理上的現象，其它還需考慮的是實際數值流程所可能引入的一些不確定性，如有限解析、有限支撐長度、單側或雙側波譜表示之義涵、或二維能譜對稱性之物理解說切中性等。

2.4 波譜重複性問題

前面兩節基本上相關於波譜應用上所必需注意之可歸納性問題。為加強對此現象的瞭解，從而進一步認識體會此類不定性程度，我們以波浪試驗水槽裡的風生波

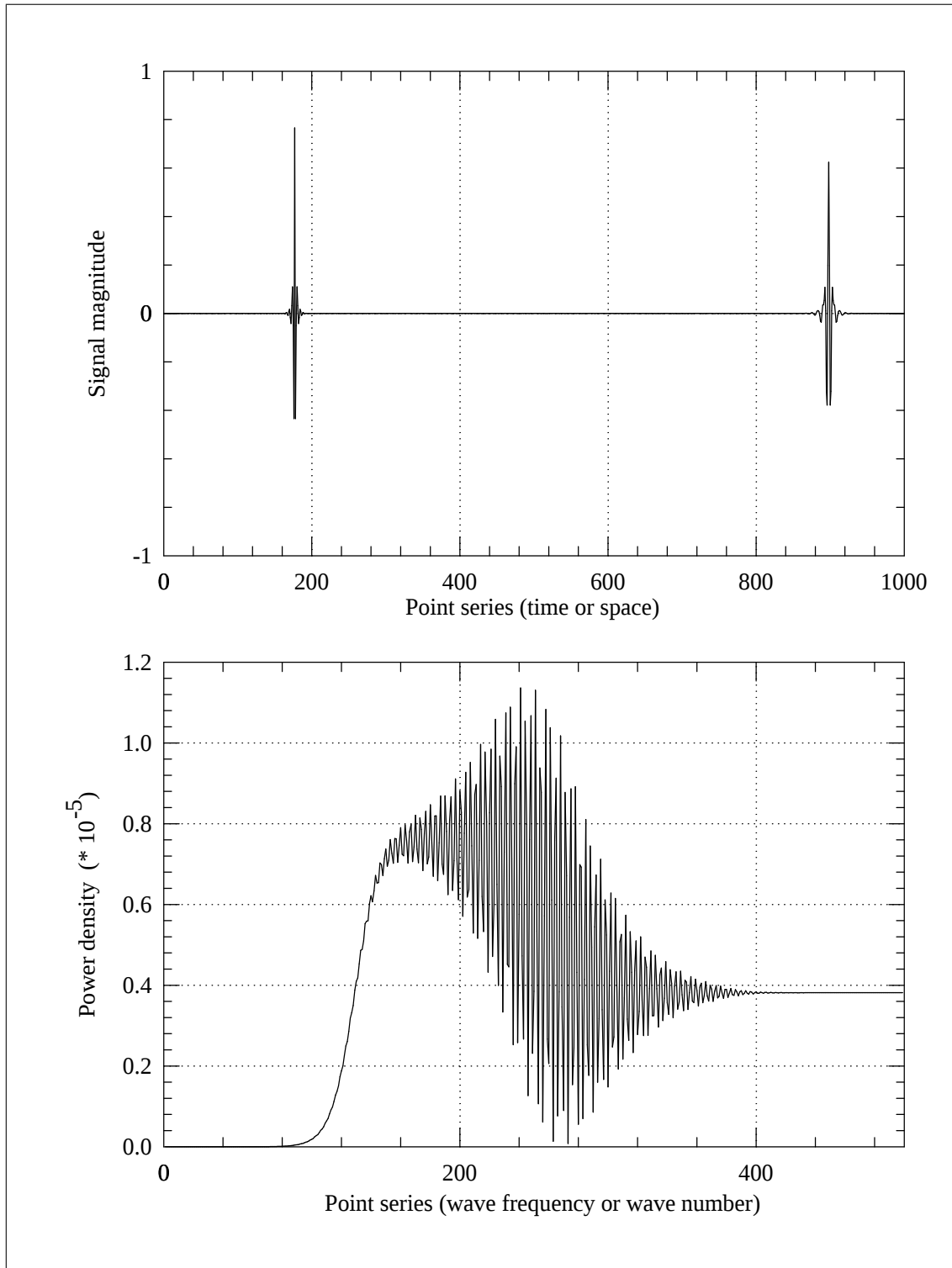


圖 2.2 本圖以兩個相鄰尺度之仔波合成訊號其富立葉能譜說明模糊效應與相位糙音之影響。上圖示一1024 點序列之最小兩個相鄰尺度之Lemarié 仔波合成訊號，其左脈動係為相應於單位仔波係數元e600 之仔波反轉換，右脈動係為相應於單位仔波係數元e470 之仔波反轉換。下子圖則為合成訊號之富立葉能譜。此圖充份顯示時變性與相位性這兩個因子對富立葉頻譜亦或正交函基其相關應用分析所可能帶來之巨大影響，同時亦說明逆向旋移乘積之問題。

流場訊號，藉由兩種不同的波浪數據分析觀點，來加以突顯，也同時顯示不同分析法其個別長短處。

表2.1 示三組量測訊號其波高與水速統計值，其係以傳統的波浪越零位統計法為之。這三組風生波流場量測都是在完全一樣的試驗條件下量得。訊號取樣歷時為240 秒，取樣頻率為40 Hz，三組訊號之第二頻道訊號都是同一點之波高量測，第一頻道訊號則分別是在三個不同水深（離靜水位分別為3、4、5 cm）之雷射都卜勒水速量測，而波高與水速量測位置基本上可視為在同一橫斷面上（上下游相距0.6 cm）。如是，第二頻道之波高基本上可視為重覆試驗之訊號，由表得知，個別試驗之波高訊號其各項統計值可說是極端吻合，因此，從越零位統計觀點而言，此一波浪場狀況，在此量測手段下其數值統計分析已是達到理想的穩定形態（stationary condition）。只是就波譜觀點而論，這樣的一個穩定形態卻可說是被完全地推翻了。圖2.3 表這三組訊號之能譜，其上子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之水速訊號能譜。而左右子圖分別是取不同富立葉分析參數。由兩個上子圖可見其重覆量測之能譜是甚難說是重現。但另一方面如果比較上子圖與下子圖之同一組波流場量測，則我們可以看到波高與水速之能譜形狀可算是一致的，此乃因為在同一組量測裏，波高與水速的相位，無論是在時間上或空間上，都是相一致的。反觀不同量測組，其相互間就存在了時間上的相位差，而僅僅是這一時間相位的不同，就帶來了嚴重的不可重現性問題。上面兩種狀況充分顯現的作用即為「相位效應」。基本上，對一個紛紜系統我們是無法掌握不同量測其不同相位狀況的。基此，細部的波譜比較行為能不謹慎為之乎！有了這樣的認知，如果我們把這些現象跟前述的黑盒子機制或逆向旋移乘積效應加以關聯，那我們不難進一步了解先前的顧慮，也可以具體體會波譜共關協振其表現行為法則。

另左右子圖其富立葉分析參數之數值處理係依循最高自由度原則，以降減其分佈之變異性，並取Blackman 濾窗以減少邊界效應。左子圖其區段點數為512 點，而自由度為36，右子圖其區段點數為1024 點，自由度為17。自由度高則波譜解析度差，反之自由度低則波譜歧異性加大而重覆性判別性明顯降低。

接著讓我們以另一種比較物理性、直覺化的陳述方式來補充說明何以會有這樣

的不確定性及不可重覆性，圖2.4 示風波水槽其上下游兩支波高計所得波高之自相關係數分佈歷程，由圖可見其分佈之不規則性狀，且自相關數值急劇衰減。自相關都如此，更遑論交相關了。這樣的狀況無不表示，就波譜觀點而言，這些波浪很快就喪失了它們的身分，本尊與分身難抵局部時空的幻化。

2.5 架框值與贅餘性

前面數節著重於離散領域內，特別是相關於富立葉轉換的現象解說，而就最適連續仔波之成就表現而言，除了必然歸功於離散領域之熵值鑑取結果外，連續與離散分析所涉不同學理特性，乃致於其效應得失，在此處不可等閒視之。這裡主要從兩方面加以解釋。

首先是解析度的問題。離散仔波轉換其各尺度階之間的變動值是為對數變化關係（即以2 為底之不同冪次方），而不同尺度下的移位量差距亦是為對數變化關係，而離散富立葉轉換其尺度間隔，即頻率間隔，為線性等值增減。唯仔波共關協振數值法之移位參數，無論在同一尺度階或不同尺度階，其移位量幾乎是可任意給定，只要是移位量不小於取樣頻率即可。

再者就是架框值與贅餘性的問題。一個離散仔波函基其集合內的各個仔波函數在概念上形同一種所謂的框架（frame），而此函基集合則牽涉到所謂的架框組合上下極限值，或架框值（frame bounds）。這一理念是把每一成分仔波視為一項構建材料，而這些構建材料不可太少，但亦不用太多，當然更不需無窮多。也就是說，這架框值有其上下分佈範圍。而如此的分佈範圍區間就有所謂的鬆密或贅餘現象。此外，相對於緊密架框外（tight frame），有些研究所用的仔波函基僅是大致緊密（relatively tight）。

以上的架框值論點是針對離散仔波轉換而言，但就連續仔波而言，其成立所要求的條件是相對非常寬鬆，它不牽涉、不討論、或不存在上下極限架框值。如是乎，此處架框值存在與否，正是吾人認為關鍵於仔波共關協振傑出表現的重要因子，而這一因子也就是這裡所要探討的贅餘性（redundancy）。

表 2.1 以傳統的波浪越零位統計法所得之三組風生波流場量測訊號統計值。這三組量測都是在完全一樣的試驗條件下量得。第二頻道訊號都是同一點之波高量測，第一頻道訊號則分別是在三個不同水深（離靜水位分別為3、4、5 cm）之水速量測，而波高與水速量測位置基本上可視為在同一橫斷面上。訊號取樣歷時為240 秒，取樣頻率為40 Hz。如是，第二頻道之波高基本上可視為重覆試驗之訊號，由表得知，個別試驗之波高訊號其各項統計值可說是極端吻合，因此，從越零位統計觀點而言，此一數值分析手段已達理想的穩定形態。然這一情形卻與波譜觀點者大相逕庭。

Case	:	f0w6030.dat	(f1 p3 c1 s9)											
Date	:	01/05/96												
Time	:	02:19:05.48								Sampling frequency :	40 Hz			
Specifics	:									Sampling time length :	240 Sec			
Ch	#_W	H.1	H.2	H.3	H1/10	H1/3	H1/2	H.ave	H.rms	T1/10	T1/3	T1/2	T.ave	T.rms
1.	554	26.74	23.67	23.04	20.20	17.38	15.92	12.03	12.93	.44	.44	.44	.43	.44
2.	572	2.90	2.69	2.61	2.33	2.04	1.89	1.44	1.54	.44	.44	.43	.42	.42
Case	:	f0w6040.dat	(f1 p3 c1 s9)											
Date	:	01/05/96												
Time	:	02:14:05.76								Sampling frequency :	40 Hz			
Specifics	:									Sampling time length :	240 Sec			
Ch	#_W	H.1	H.2	H.3	H1/10	H1/3	H1/2	H.ave	H.rms	T1/10	T1/3	T1/2	T.ave	T.rms
1.	546	22.81	20.65	20.52	17.04	14.48	13.32	10.35	11.01	.45	.44	.44	.44	.45
2.	563	2.98	2.88	2.72	2.35	2.04	1.89	1.46	1.55	.44	.43	.43	.43	.43
Case	:	f0w6050.dat	(f1 p3 c1 s9)											
Date	:	01/05/96												
Time	:	02:00:30.72								Sampling frequency :	40 Hz			
Specifics	:									Sampling time length :	240 Sec			
Ch	#_W	H.1	H.2	H.3	H1/10	H1/3	H1/2	H.ave	H.rms	T1/10	T1/3	T1/2	T.ave	T.rms
1.	546	17.62	16.49	16.30	14.02	11.94	10.97	8.22	8.88	.45	.44	.44	.44	.45
2.	562	2.83	2.74	2.72	2.36	2.06	1.91	1.45	1.55	.44	.44	.44	.43	.43

Units::		Aqueous flow (Ch1:H): cm/s												
		Surface wave (Ch2:H): cm												
		Period (T): s												

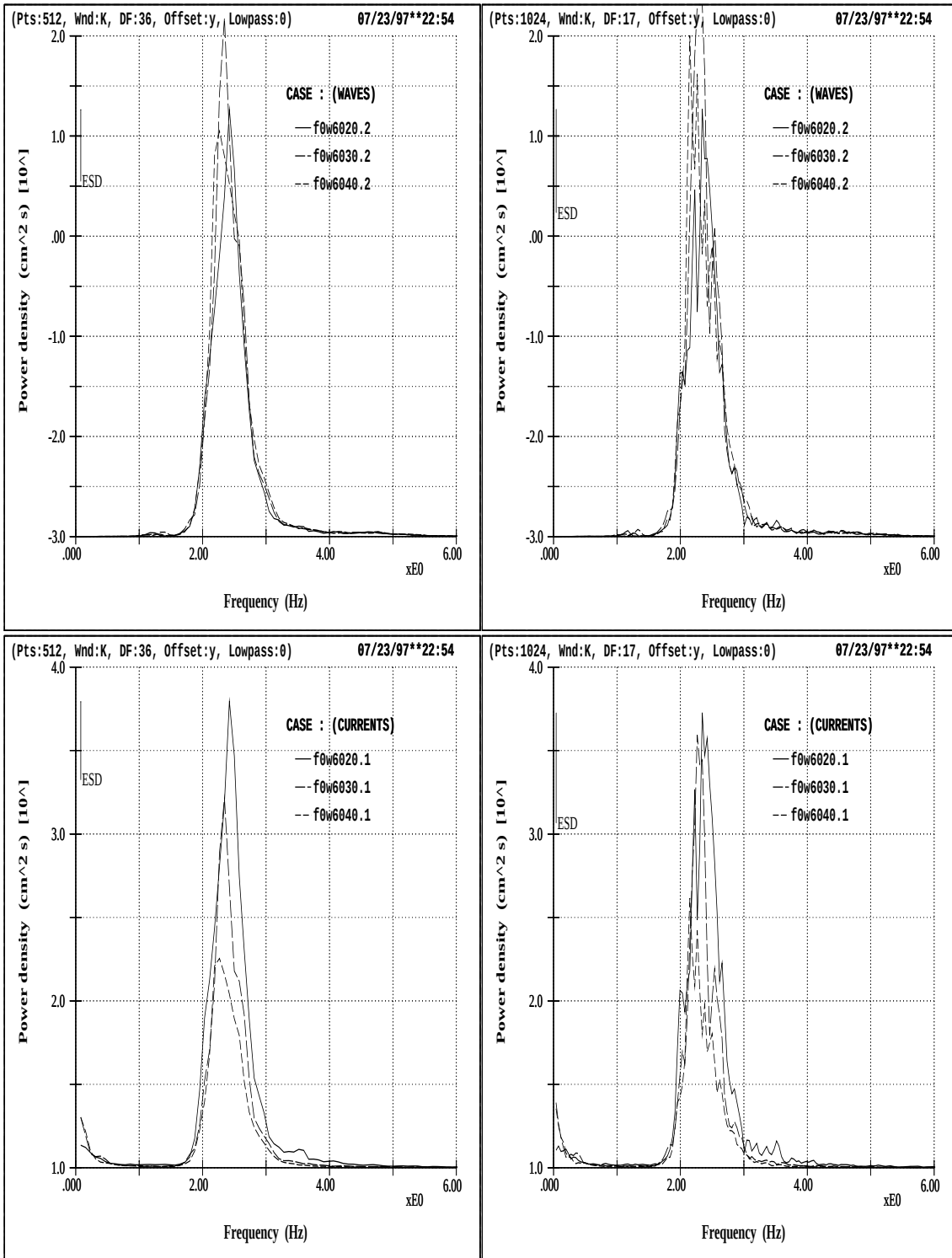


圖 2.3 相應於表2.1 所示三組波流場訊號之能譜，其上子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之水速訊號能譜。而左右子圖分別是取不同富立葉分析參數，左右子圖其相關於自由度之區段劃分點數分別為為512 與1024 點。由表2.1 與此圖之比較，可甚是明確地看出，即使就零位統計觀點而言，此一波浪場狀況已達到理想的穩定形態。但就波譜觀點而論，這一個穩定形態卻可說是被完全地推翻了。此圖與圖2.1 及2.2 是互為關聯的，其亦隱含離散正交函基之表現行為，亦且是黑盒子機制或逆向旋移乘積效應所需深加考慮因素。

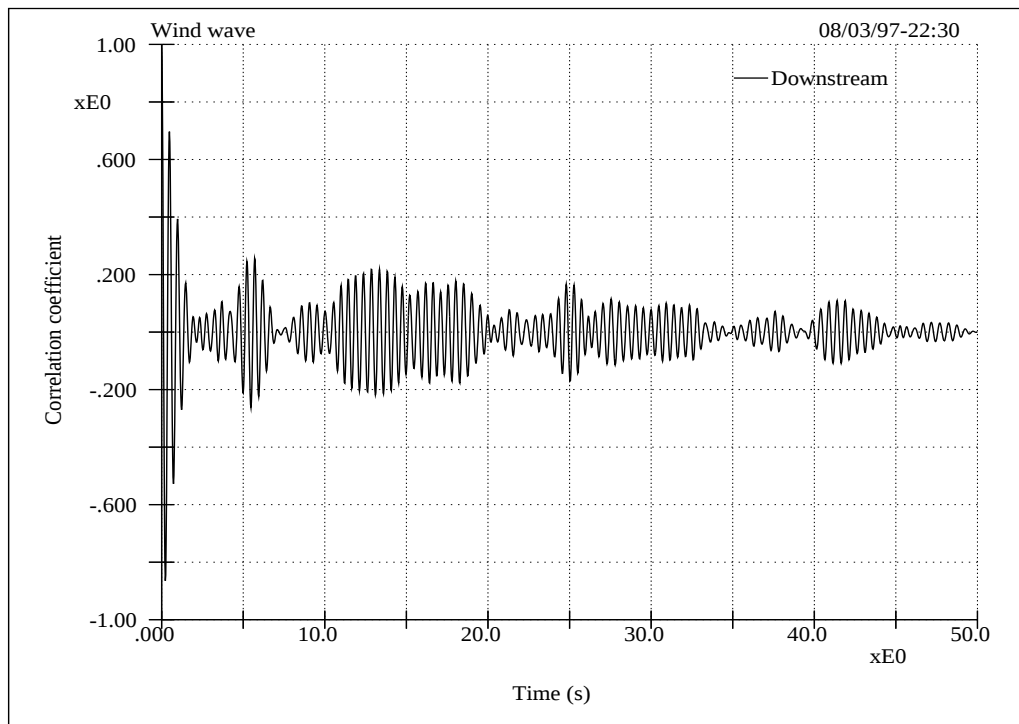
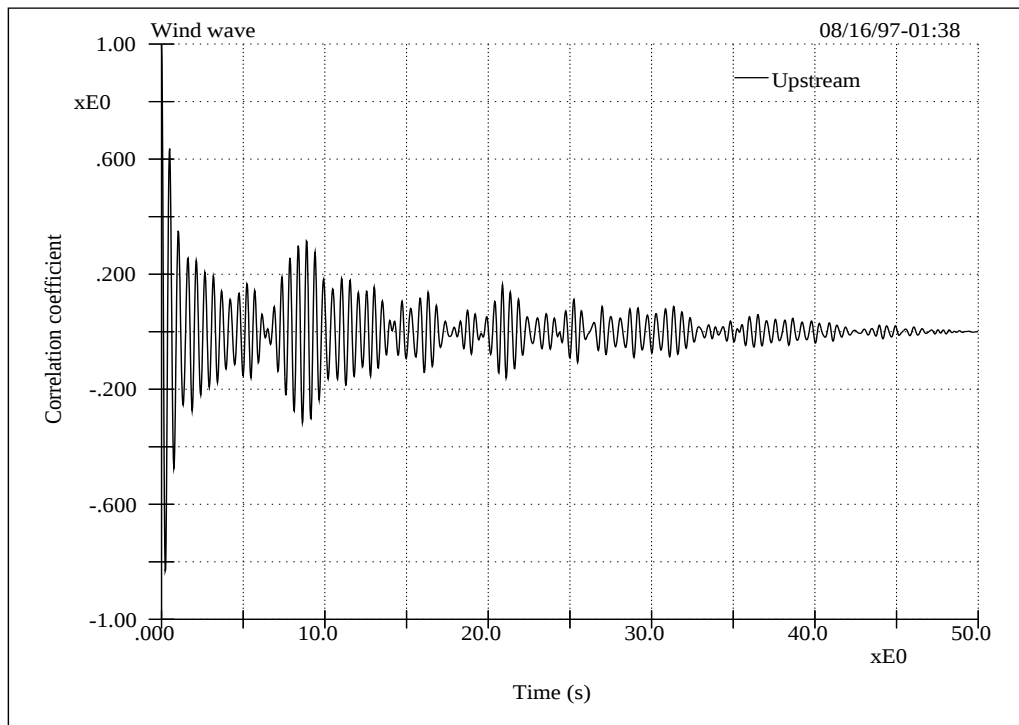


圖 2.4 此圖以自相關係數歷時分佈說明此處之水槽風生波瞬即散失其身分本位。上下圖分別為上下游波高訊號之自相關係數係。圖示自相關係數值低下且快速降減。這裡的物理義涵是可以解釋為；以富立葉波譜觀點而言，此水槽風生波很快喪失自我，紛紜性大，其波譜統計穩定性狀之顧慮深。

天下事無不得失互伴，離散仔波轉換之架框值與連續仔波轉換之贅餘性正是如此的映照。之所以選擇離散是因為它的精簡、效率、洗練、不含糊；但也因為這些特性，它顯得斤斤計較，容納不了雜質，也不善變通圓隔。也正因為它太精準、簡約，而與一些紛紜或複雜現象格格不入。而這樣的缺點正是連續仔波轉換所可表現之處，它的表現是藉由其成分尺度間之互混包容、你儂我儂、不拘小處、大而化之。

上一段的說法偏向於經驗所得之非正式、感觸性、物理化形容，接著我們用比較正式精確的方式來進一步說明架框值及贅餘性。

若一函數 $\psi(t)$ 欲符合連續仔波轉換之仔波，那它的唯一要求就是 $\psi(t)$ 符合「入允條件」(admissibility condition)，

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = C_{\psi}, \quad (2.8)$$

式中 C_{ψ} 是為常數，並由 ψ 完全決定，而 $\hat{\psi}(\omega)$ 是為 $\psi(t)$ 的富立葉轉換。另上式中所取之富立葉轉換對應領域間關係式定義為 $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$ 及 $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ 。

此一入允條件是權重下的能譜合積，它將能譜以頻率的倒數加上權重。因此頻率越高權重越低，頻率越低權重越高，另外合積必需是定量。也因此，此入允條件代表著，仔波其成分尺度在低頻區的能量必需是不可囂張，而適當收斂。另外入允條件公式中還有一項數學要求，也就是仔波波形曲線變化對橫軸之積分為零，即其平均值必需為零。綜合這些意象，一個重要認知可得如下，仔波的基本核心觀念就是仔波必需合理衰減，而其分佈支撐長度也應有合理的限度，即使數學上也許無限長，但至少它是極不顯著，而形同可忽略。如是，仔波的觀念完全不在「大小」方面，而是在說它的「有限生命」。

若把 $\psi(t)$ 視為母仔波，那它的衍生仔波是為 $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a})$ ，式中 a 是尺度參數，代表尺度伸縮之水平方向放大縮小， b 是移位變化參數，代表衍生仔波其發生位置。而 $a > 0, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$ 。另式中的 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 是針對 L^2 -norm 探討範疇下的常規化調校係數，代表垂直方向之放大縮小。

當然 $\psi_{a,b}$ 也符合入允條件。入允條件可說是極其寬鬆，它對一記錄得的數位訊號進行連續仔波轉換時的贅餘性尚待下面解說。由於離散轉換的仔波必然會符合連續仔波的入允條件，因此若把一個離散仔波用於連續轉換，那我們就可以了解什麼叫贅餘性。此時就需說明離散仔波的框架式 $\psi_{a_0,b_0;j,k}(t) = a_0^{-j/2}\psi(a_0^{-j}t - kb_0)$ ，而前述中的 a 變成式中的離散伸縮尺度 a_0^j ，而 b 變成式中的離散移位變量 $a_0^jkb_0$ ，另 $j, k \in \mathbf{Z}$ ； $a_0 \neq 1$ ； $b_0 > 0$ 。不過，一個離散仔波的諸框架必需額外符合下一「穩定條件」（stability condition），

$$b_0A \leq 2\pi \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^j\omega)|^2 \leq b_0B. \quad (2.9)$$

式中 A 與 B 為正值常數，而 $0 < A \leq B < \infty$ 。此式的 b_0 與 2π 常數值係故意保留，一方面配合仔波函基常規化之定義，另一方面也讓 A 跟 B 值的大小可以方便決定贅餘性。此一離散轉換穩定條件狀似抽象，但其實際含義卻甚簡單，茲說明如下：為了使一個轉換過程可逆化，我們需要的是一個具有收斂性的數值過程，這一過程是說，當我們把它的各個成分波或成分尺度能量加總時它具有收斂的行為。也如此，各個成分尺度的能量之合成不得為零，亦不可無限。若合成值為零，則什麼都不存在。若合成值為無限，則表這些成分尺度其時與頻分佈性狀之重疊性過於嚴重，它們不是太相依，就是太混淆在一起，正如向量幾何裏，兩個幾乎平行的向量不是二維平面上良好的向量基（vector basis）。另外補充說明的是，入允條件僅針對母仔波，但穩定條件則還需針對衍生仔波設限。

談到由仔波轉換係數來重建一個函數，那必然會出現一個匹配仔波（就正交仔波函基而言，其匹配仔波同於原仔波，即自匹配）。另任何分解與重建過程其仔波與匹配仔波的角色是可互換的，因此上述贅餘性的陳述亦通用於匹配仔波，只是此時的架框極限值或有差異，正如前面章節中熵值表現之不同。

如果將基核函數常規化，並將穩定條件之上下區間加以極限化，即將 A 與 B 定

爲：

$$A = \inf \left[\frac{2\pi}{b_0} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^j \omega)|^2 \right], \quad (2.10)$$

$$B = \sup \left[\frac{2\pi}{b_0} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(a_0^j \omega)|^2 \right], \quad (2.11)$$

若 A 與 B 相近，則贅餘性的代表值是爲 A 與 B 的平均值，即 $\frac{A+B}{2}$ 。至於連續仔波轉換之贅餘性可以如下解說。設若一組相應於離散伸縮尺度及移位參數基本源始變化量爲 (a_0, b_0) 的仔波函基其架框極限值爲 A 與 B ，則若我們把離散伸縮尺度及移位參數基本源始變化量改爲 $(a_0/2, b_0/2)$ ，則其架框極限值必將含蓋舊的架框極限值，而類此之延伸作用是爲連續轉換之情形。這一狀況亦說明連續仔波轉換並無反轉換之數值運算價值。

另一個相當易於了解的直接解釋是，當把連續仔波轉換應用於所收集記錄的離散資料（數位數據當然不可能有理論上的連續）時，對每一個尺度而言，它的轉換係數量是同於數據點數，可是我們可以選擇任意解析尺度，也因此我們基本上是有無限多的連續仔波轉換係數，因而應該不難想像，這些係數之能量的合積是可以如何龐大，但另一方面，訊號能量必然是一定值。再者，如果兩個相鄰尺度甚是接近，可想而知，其轉換係數分佈亦將相近，也如是瞭解連續轉換之贅餘性問題。

贅餘性在一些應用上固然有其明顯缺點，其顧慮如：程式建構難易度、正反轉換執行效率、訊號重建完整度優劣性等；但研究顯示贅餘性亦有其用處，如下面的兩種重要特性。

其一，贅餘性不代表在行反轉換重建時，我們必需使用非常多的轉換係數以獲取原訊號之良好複製品。也就是說，相較於緊密框架，亦或是大底緊密框架，我們仍得以相對稀少的係數量來重現原始訊號。這一沉例可以Mallat and Zhong [10]及Froment and Mallat [6]的研究實証。在第一個的研究裏，他們是取用二次方性（quadratic）順適函數當爲仔波以研究二維圖像之重建，而他們所取用的轉換係

數是少數區域上所發生的局部最大值係數。更有甚者，他們所取用的仔波僅能說是一種鬆散而未能精確定位的仔波，因為它的架框極限值存在與否，甚或是入允條件，未能符合理論之數學驗證。但即使是不全然的仔波，也只取少量的局部極限值，其仔波法重建影像的視覺表現則甚是優良。

其二，贅餘性表示隱藏於集錄資料中的自然糙音，或是因為數值過程中所引入的各類誤差（如頻漏現象），可以藉由大量的轉換係數之統計加以消除或降減。而這一沉例正可以先前對仔波共關協振之分析其分佈曲線所顯示優異表現証之。另外需加說明的是，贅餘性多寡在應用上的效益應有其限度。其用途表現也許正如一個高斯函數之累積分佈曲線，在某一階段以後就達到飽和而成水平走勢。這一方面亦可說是，數據量多寡所帶來的反應，一來具高效率，即需求量簡省；一來也具急速飽和現象，即數據量不必太多。

連續仔波轉換之入允條件與離散仔波轉換之穩定條件存在重大彈性差異。穩定條件是必要條件，並非任意擇取一組 (ψ, a_0, b_0) 就可形成仔波框架。再者穩定條件雖然在理論上是必然可重現任何函數，但實際上其數值行為未必不無可顧慮之處。而這一顧慮正表示正交與非正交、亦或贅餘性之有無其所可能產生的效應。圖2.5與2.6所示以交正交離散仔波所作之曲線爆展數值試驗正可說明這一顧慮。其乃藉由仔波曲線局部上的連續放大來檢測數值表現行為，如其收斂性與穩定性。圖中我們對兩個交正交仔波其在某一尺度之波形的某一點加以局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ 。圖2.5之交正交仔波其所涉波濾權重係數量為4個，而圖2.6所涉波濾權重係數量為20個。使用4個權重係數者，其爆展過程失去了其原始數值恆定之要求，也就是說，理論上存在的收斂性在數值計算中消失了。使用20個權重係數者，其爆展過程中的收斂性也不是很理想，而且其曲線傾斜方向性也左右不定。而由這4個與20個權重係數量的對照，我們可以體會到精簡與效率所可能付出的代價。而再由這一點加以推廣，我們應也可以感受正交非正交暨贅餘性所為何在。

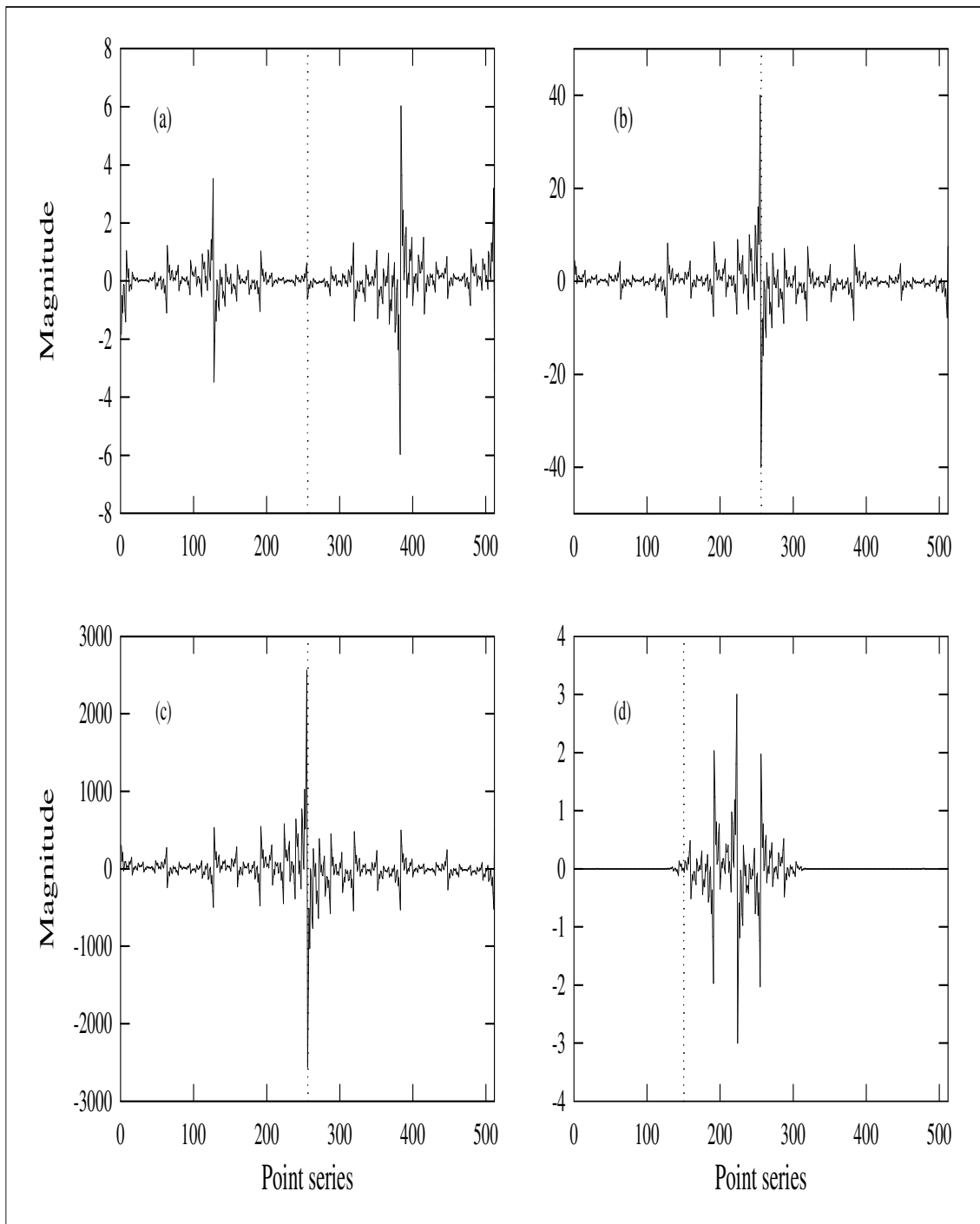


圖 2.5 此圖與下一圖彰顯贅餘性的價值。而具有迷人解析特性，亦或是具有非常有效率的精簡數值流程的仔波，其波形往往相當怪異，而非水波物理模擬上的選用對象。此圖為交正交仔波BO31O 其某一尺度之波形（d子圖）的局部連續放大，其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ （a、b、c子圖）。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為4個，由各子圖可見，其爆展過程失去了其原始數值恆定之要求，也就是說，理論上存在的收斂性在數值計算中消失了。相關爆展資料為：爆展中心點為150；仔波曲線源始點為階位2 下的第12 點。

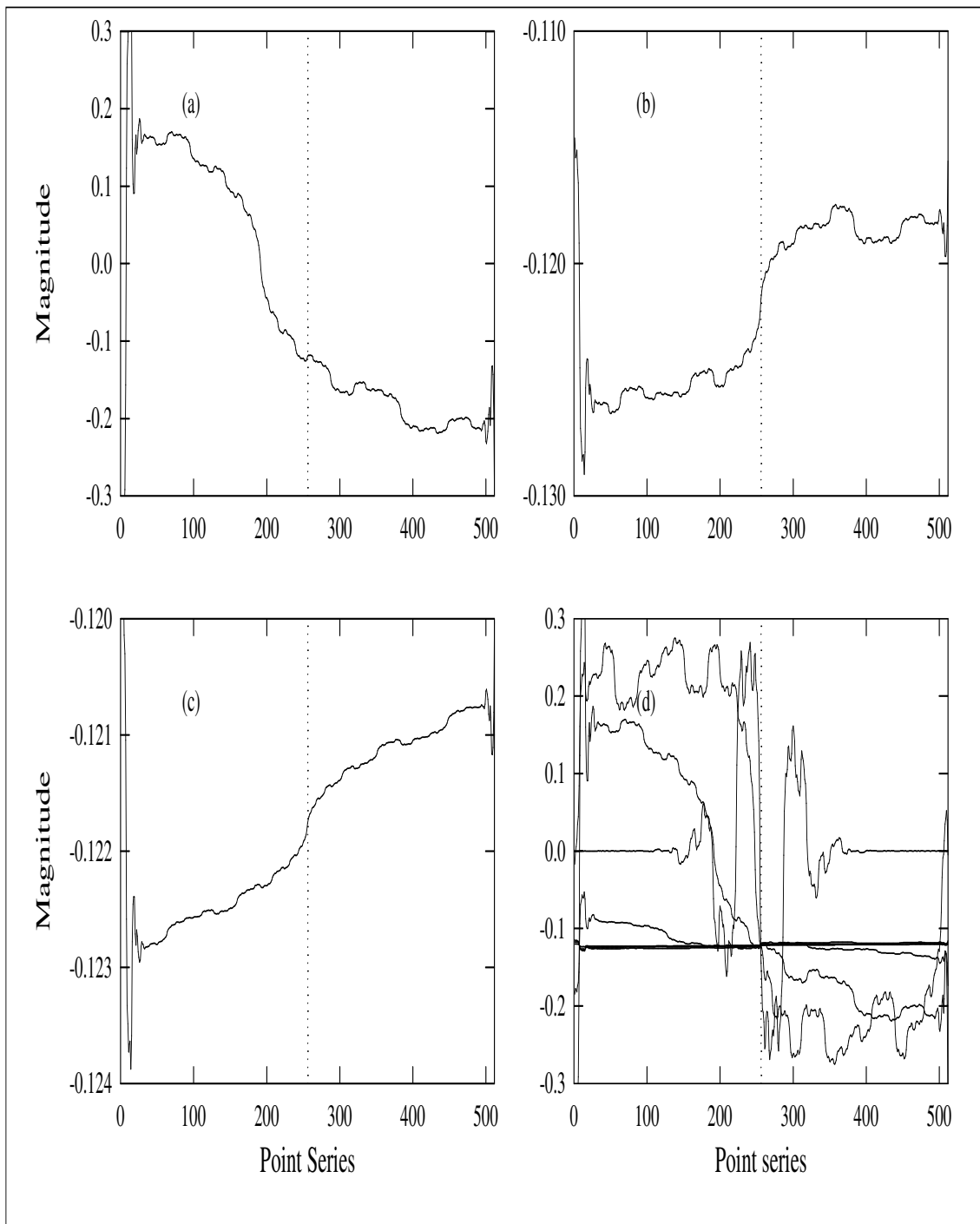


圖 2.6 此圖同樣彰顯贅餘性的價值，另亦示解析特性特出之仔波，難以成就水波之物理模擬。此圖為交正交仔波BO350 其某一尺度之波形的局部連續放大（d子圖綜合各曲線），其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ （a、b、c子圖）。此交正交仔波其所涉波濾權重係數量為20 個，由各子圖可見，爆展過程中的收斂性也不是很理想，而且其曲線傾斜方向性也左右不定。相關爆展資料為：總點數為512 點；爆展中心點為256；仔波曲線源始點為階位2 下的第12 點。

2.6 尺度與載頻

先前我們已指出，水波物理模擬之最適函基由離散領域以迄連續領域有極其順暢自然的推衍性。而就最適仔波之成就而言，我們尚未明白指出的一個絕對關鍵乃是：化「尺度」為「載頻」。這一轉化，物理於焉產生，實用價值從此迥異。

樞點順適仔波是一實數離散仔波，只涉有尺度，其學理推演上是完全不在乎頻率或載頻的，可是樞點順適仔波在適當的參數選擇下，它非常接近於高斯調變函數，而高斯調變函數又極為近似於莫利仔波之實部或虛部，因為莫利仔波實際上乃修正化的高斯調變函數，此一修正是為了使其得以滿足仔波入允條件，然而這一修正項在絕大多數的情形都相對微小。也如是，這一由離散以迄連續之推衍自然地帶入了載頻也引出了數項重要因子，這些因子環環相扣，以下讓我們來解說這些互為關聯的成敗因素。

其一：反應仔波形狀對稱與否之影響——一組波濾係數分佈若不具有對稱性或反對稱性，則其轉換過程就不具有線性相位濾波（linear phase filtering）的功能，可是線性相位濾波卻是一個實用的重要因子，它的物理要義是說，些微的轉換係數差異不會代來重現訊號的怪異差別，亦或說是，波形有一些改變其轉換係數不致於天差地遠。

其二：進一步反應仔波建構衡度函數（scaling function）形狀之影響，即波形之全振性——衡度函數性狀是較第一項波濾係數分佈更為進化、或高階的一項重要數理及物理性因子。其亦是形成最適離散模擬函基的決定因子。在先前特性相位函數之分佈探討中，我們鑑取出樞點順適仔波其零相位變化之特性，此一特性相應於衡度函數之全正性，而這一全正性則反應在仔波的全振性，即有波動必完整。這裡的重要物理是說，這一模擬仔波的波形可謂相當滑順，而無勁爆性突變。如果一個仔波脫離了此項及前一項要求，那這一仔波的碎裂自似性（fractal nature）跟我們對水波的傳統認知就不免格格不入。另一方面，那些波濾係數量越是有限或較少的仔波，其破裂自似性就更是突出，而頗具視覺衝擊性。

其三：糙音及誤差降減作用——在前兩項因子存在下，共關協振藉由贅餘性的作用，得以將誤差及糙音排除。圖1.1、1.2 與諸多仔波波形爆展圖（如

圖2.5、2.6) 或明或暗與上述各點相關。

其四：抽象的尺度對照於具體的載頻——載頻的出現得以自然承續前面三個重要因子，一方面綜合各項特質，一方面具體的展現出物理，尤其是相位參數的引入。因而載頻之引入也是成就仔波共關協振的關鍵作為。缺少了這一點，那我們對前面三項的認知，還是會相當不踏實、不實際。以下就是我們對這一關鍵點的解說。

幾乎所有絕大多數的仔波，特別是所有離散仔波，都只具有尺度的表示，其產生可謂毫無頻率的關聯。尺度 a 是無因次量，它是相對於母仔波大小的比率值。一個尺度值到底代表何一實際尺寸、何一形狀、何一支撐長度、何一起伏變量，在在讓人難以實際捉摸、對比參照。其不易掌控，再加上資料集錄策略之差異與分析手法之變動，則不僅相關陳述表達抽象模糊，物理更是不清不礎。無論是定量，還是定性，處處都是玄疑，要霧裡看花也難。很遺憾的，這種只用 a 來表示其物理分析結果的研究卻也屢見不鮮。

先前我們亦表示過，我們很幸運地得以在連續仔波領域裡找到一個對應於所鑑取得離散領域之樞點順適仔波。這裡之所以稱幸運是大有緣由。因為連續的莫利仔波與離散的樞點順適仔波在數學理論上的根基可說毫無血源，可是，也因為這一對應關係，我們得以跳躍過抽象的尺度從而進入具體而有頻率關聯的尺度，以及同樣具頻率關聯的仔波移位變量。這一頻率關聯乃是，我們得以將莫利母仔波的波形衰減參數值與尺度變量值化成載頻。另外一個幸運緣由則是說，要不是我們已先在廣泛離散領域中的諸多類型裡鑑取出模擬最適仔波，並找出其學理因子，然後藉由連續領域內的數據應用分析（共關協振表現比較研究），那我們何以敢說水波模擬最適連續仔波是莫利仔波，因為事實上，對任何數據或應用研究，我們根本可以直接由連續領域下手，而完完全全撇開半正交之樞點順適仔波。相對地，反過來說，如果要不是我們有連續仔波在試驗數據上應用的實証，那我們豈敢把樞點順適離散仔波定論為最適。這裡的離散與連續，你証我、我証你，你提供學理檢驗、我提供應用實証，不也算是「良緣」、「機運」嗎！

前述的「良緣」與「機運」也就在於載頻的一線牽。檢視莫利仔波的縮放衍生

仔波，即

$$\psi_a\left(\frac{t-b}{a}\right) = \pi^{-1/4} \left[e^{-i\frac{\omega_0(a)}{a}(t-b)} - e^{-\omega_0(a)^2/2} \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}, \quad (2.12)$$

而載頻即為式中的 ω_0/a 。此處吾人不免再要表示的是：我們還是常常看到一些研究，它們未能把此一尺度與載頻的關係顯示出來，它們即使是以莫利仔波亦或高斯調變函數作為分析函數，但其分析呈現法仍然用無因次的 a 值，而未與載頻作任何關聯，而這樣的結果不是霧煞煞，就是讓人難以具體感受。

以下再就尺度與載頻作些補充說明。

- 一個母仔波亦或其任何尺度，特別是離散類型仔波，幾乎都是由一複雜分佈形狀的富立葉轉換頻譜所合成，亦或說是由數個較明顯頻帶成分波的合成體。圖1.1 與1.2 所示之有限支撐長度正交仔波包之時頻窗分佈性狀，其實尚僅是一種依樹枝狀分歧圖解說法的代表性、近似性表示法而已，真正的表示法只能說是無以精確呈現。而由這一點我們或可體會尺度之為用，若不困難也太複雜。
- 不似富立葉分析上清晰而簡潔的頻率概念，如果我們要對某一尺度的仔波有具體認知，亦或是視覺上的感知，那我們需要綜合的資訊有：基本母仔波為何、其常規化情形如何、支撐長度多少、振幅隨尺度之變化、移位變量到底是多大、移位變量落於何處、數據取樣間距為何。試想這些錯綜性可不令人迷失！再比如說，無論離散富立葉轉換或離散仔波轉換，其數值分析過程都是可以完全不考慮其實際單位量（或物理量），而只要正確掌握其轉換係數所在位置指標值（index）即可，可是就富立葉係數而言，指標值很容易的對應到一個頻率，然而，仔波轉換係數要將其指標值對應到何一尺度，恐怕大多數人都要捉摸半天，更何況要把指標值對應到實際的波形及其大小與發生點。
- 使用 a 值解說表示法，那不同的仔波，亦或不同的數據集錄對策或參數，即使 a 值相同，其實際尺寸也不會一樣，因而容易造成混淆或誤導。相對的，

載頻的出現，即使我們對仔波的時頻窗加以調適，我們也可完全排除這些顧慮。

- 在載頻中的 ω_0 是一個相關於波形衰減的參數，一般其值都會取大於5，而在這一情形下的莫利仔波，其修正項一般會較主項小數個級距，也因此，此分析手法將調變高斯函數的載頻非常精確的對應於仔波尺度。
- 載頻之使用引入了一個非常重要的物理量，即相位。此乃最適離散仔波是實數函數，而莫利仔波則是複數函數。相位亦是共關協振表現的重要因子。
- 在使用連續仔波轉換時，我們只要針對我們所感興趣的載頻區間計算轉換係數即可，可是在使用尺度變數、或離散仔波轉換、亦或富立葉轉換時，那我們需要對訊號所含蓋的全域尺度或頻率進行求算。因此後者浪費了很多資源於不相關的尺度或頻率區間，真正有意義的區間相對非常狹小。事實上這一點的現象也可以用圖1.1 與1.2 加以相關，蓋因載頻之出現，使一尺度所對應之時頻窗得以真正地不擴散污染相位平面圖的其它區域。也如是，此點亦是說水波沒有「尺度」所要表示的那麼複雜。

2.7 結語

此處吾人解說造成水波最適模擬的各種仔波因子，包含離散暨連續轉換之各類解析特性及其相應物理表徵，同時含蓋富立葉波譜分析上之比較。這些因子提供吾人對其進一步優化之根源與動機。❖

3

第 3 章

最適仔波之調適優化

3.1 引言

在前一章中我們述說水波分析所當取用的最適連續仔波函基其最適化因由，如果以最簡單的方式來歸結，那可以說是：這一函基一方面對應於離散領域轉換係數的最小熵值，另一方面它對分析偏差、紛紜、扭曲的容忍性高，即反應性不極端。另其最適離散函基是為樞點順適仔波（cardinal spline wavelet），而最終之最適連續仔波函基則為莫利仔波。在這一章中我們探討這一最適仔波數學與水波物理的配合性如何，再針對其進行分析優化。

3.2 最適仔波與水波物理

莫利仔波之母仔波（mother wavelet）是為

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2})e^{-t^2/2}, \quad (3.1)$$

式中 ω_0 為一常數，而 $e^{-\omega_0^2/2}$ 這一項可說是針對蓋博函數（Gabor fuction）亦或調變的高斯函數所特別引入的修正項，其目的是在於讓經過這一修正的函數得以滿足仔波之入允條件（the admissibility condition.）。此母仔波的富立葉轉換為

$$\hat{\psi}(\omega) = \pi^{-1/4}[e^{-(\omega-\omega_0)^2/2} - e^{-\omega^2/2}e^{-\omega_0^2/2}]. \quad (3.2)$$

這一式也幾乎就是一個移位的高斯分佈函數（shifted Gaussian），此處的 ω_0 在物理上是針對振幅調變下的一個調變頻率（modulation frequency），而調變內容為高斯函數。如是之故， ω_0 亦隱含這波動振幅其變易之快慢。一個比較具體的指標就是拿母仔波的最高峰值與第二高峰值的對比值來記述。設若最高峰值位在 $t = t_0 = 0$ 而第二高峰值位在 $t = t_2$ 則此一比值為

$$r = \left| \frac{\psi(t_2)}{\psi(0)} \right|. \quad (3.3)$$

另 ω_0 與 r 具一定的關係。而 t_2 的確值相關於一個超越方程式（transcendental equation），可以數值方法簡易求算。不過由於莫利仔波的第二項修正項之值與第一項主項之最大值基本上級距之差別一般約有四、五階，故把第二項忽略掉也可以得到相當準確的 r 值。此時

$$\omega_0 \approx \frac{2\pi}{t_2} \approx \pi \left(-\frac{2}{\ln r} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

是故 ω_0 越大則 r 值亦越大，而 ω_0 為常數，則 r 此值也維持不變。在莫利仔波母仔波中 ω_0 為定數，也就是說，對任何尺度的仔波、亦或無論如何縮放的成分波，其 r 值皆為固定。這裡自然而然的聯想就是：難道每個成分尺度的波形都具有一致的衰減特徵？

水波研究者都知道，一般若波浪其週期較長或波長較大，則其減衰現象也大底較和緩，而週期較短的水波或小波其生滅相對明顯而劇變嚴重。也如是乎，把 ω_0 取為常數與我們的基本認知已不相符合。

以下就讓我們以水波黏滯性耗能所引致的波浪減衰來對比這一情形。在水面無覆蓋之乾淨狀況下，以深水波而言，則其因黏滯消能所引致之波能損耗可說幾乎都是來自於水柱體非旋性運動之剪應力所引生，而表面層部分的滯性應力所生的耗損則可忽略。此時的波能密度其時變率是為（Lamb 1932 [7]; Phillips 1977 [12]）：

$$\dot{E} = -2\mu\sigma^2 a_w^2 k, \quad (3.5)$$

式中 μ 、 σ 、 a_w 、 k 分別爲水之動力滯度、波頻、波幅、波數（dynamic viscosity, wave frequency, wave amplitude, wave number），而因深水波之能量密度爲

$$E = (2k)^{-1} \rho \sigma^2 a_w^2, \quad (3.6)$$

式中 ρ 爲水之密度，故能量減衰係數（attenuation coefficient）爲

$$\gamma_v = -\frac{\dot{E}}{2E} = 2\nu k^2, \quad (3.7)$$

式中 ν 爲水之運動滯度（kinematic viscosity）因而能量密度之演化如下

$$E = C_1 e^{-2\gamma_v t}, \quad (3.8)$$

式中 C_1 爲一常數。此時水波振幅之降減則如

$$a_w = \sqrt{\frac{C_1 2k}{\rho \sigma^2}} e^{-\gamma_v t} = C_2 e^{-2\nu k^2 t}, \quad (3.9)$$

式中設若波頻 σ 並無變化，則 C_2 亦爲常數。

拿上面這一波浪減衰物理模式來跟莫利仔波其所設定之波幅降減比較，我們可以見得其同異之處。

由物理模式的降減式，我們知道，水波其波數越大則衰減越形劇烈，亦或說高頻波其生命之幻化相當無常，而長波其波幅變化相對緩慢。而這一點已否定了把 ω_0 視爲定值的正當性。今將莫利仔波的移位及縮放式

$$\psi_a \left(\frac{t-b}{a} \right) = \pi^{-1/4} \left[e^{-i \frac{\omega_0}{a} (t-b)} - e^{-\omega_0^2/2} \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}. \quad (3.10)$$

與物理模式之振幅降減式參照比較，我們得見其相似之處爲：兩者的衰減係數都相依於尺度量之平方的倒數，對仔波而言是相依於 $(1/a)^2$ ，對物理模式而言則相依於 k^2 ；而其相異之處則爲：兩者對時間的相依性明顯不同，在莫利仔波中是 t^2 冪次相關，而在物理模式中則只是 t 線性相關。由此我們可以預期，一個固定形

狀的母仔波，亦或是不變的 ω_0 ，其縮放之不同尺度是無法對水波組成分提供全面性的物理切適性。簡而言之，一個固定的莫利母仔波它不是高估了低頻端成分波的降減，就是低估了高頻端成分波的衰敗，亦或是兩者兼而有之。若由式3.7 暨一般常取用的莫利仔波 $r = 0.5$ 值來判斷，則可認知這一偏離對於長生命期的水波是較明顯的。而這一點也可以說明在穩態現象（steady state）下，仔波技法的使用多多少少必然失去了它具有的基因優勢。如上所述的物理與數學糾結，正顯示我們在第一章開頭中對「modality」的闡釋，仔波分析是一項工具，但它也可能形成一把殺雞的牛刀，慎之，勉之。

以上的說明提供本研究分析優化之核心概念。藉著調整莫利母仔波其振幅之降減力道來增益不同尺度成分水波演化物理。亦即藉著調整前述 r 值，在不同尺度下使用不同的 ω_0 值。而不同的 ω_0 值，其時頻窗之分佈自是不同。換句話說，我們現在所用的莫利母仔波不是固定的，其初始時頻窗是變動的。

根據上面論述，此處對時頻窗調適原則相當直覺。對具有長時間支撐的成分波取較大的 ω_0 ，而其頻寬相對為窄；另一方面，對短時間支撐的成分波則取較小的 ω_0 ，另其頻寬即相對較寬。亦即此時

$$\omega_0 = \omega_0(a). \quad (3.11)$$

此時經縮放移位的仔波是為

$$\psi_a\left(\frac{t-b}{a}\right) = \pi^{-1/4} \left[e^{-i\frac{\omega_0(a)}{a}(t-b)} - e^{-\omega_0(a)^2/2} \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}. \quad (3.12)$$

而在此一調適下，不同尺度仔波所對應之載頻幾乎即為

$$\omega = \frac{\omega_0(a)}{a}. \quad (3.13)$$

此處我們亦可了解只使用無因次 a 來表示物理現象之不足及缺點，其不僅模糊抽象，更因為同樣一個 a 值可以對應任意的 ω_0 ，即對應不同的載頻，亦或不同的母仔波可以有相同 a 值但實際上代表不同尺度。而相對地，如果使用載頻來記述，

那就可以避免這一基準不同所帶來的困擾。

數位訊號必然是離散的，而通過這些所有離散點的函數基本上是無限多，這些函數可以是有限頻寬，也可以是無限頻寬，不過數值分析往往只相關於有限頻寬，亦或往往只在乎某些尺度範圍，這一點多多少少反應出連續仔波轉換其贅餘性的相關因子，另一方面也反應出我們對其進行調適之可行性。接著我們說明此處對波浪衰減表徵參數之直覺性調適。

一般莫利仔波所取的 ω_0 值為5，此一 ω_0 ，對應的波浪衰減參數 r 是比 $\frac{1}{2}$ 還來的小。在 $r = \frac{1}{2}$ 下， $\omega_0 \cong \pi \left(-\frac{2}{\ln \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cong 5.3$ ，因此我們大致很容易認定，對大多數人所研究的海洋波浪而言，這一數值有相當多的偏差。不過本文中所用的實際水波是為試驗室小水槽裡的風生波，另其頻率基本上約以2.5 Hz左右為主要分佈帶，這些風生小水波的幻化相對甚快，因而其 ω_0 對 $\omega_0 = 5.3$ 之偏離嚴重性應比前述海洋水波的狀況來得輕。

另一方面，參考前面對水波滯性衰減現象之描述，我們可以體會，相對於長波而言，針對這些小尺度風生波進行 ω_0 調適可以比較明顯展現一些效益，因為此時 ω_0 的分佈可以在一個較大的範圍內取用。另其調適處理方向應該如下：對其頻帶分佈偏向長波的部分，可以明顯加大 ω_0 的異動範圍，而對頻帶偏向高頻小尺度部分， ω_0 相對地只需小幅度變化異動。簡單的說，在大尺度的部分，其所取 ω_0 明顯增加，而小尺度部分， ω_0 則變化較小。基於這一物理上的理念，此處我們對 $\omega_0(a)$ 的取法尚是一個相當直覺的假設。這一假設如下：

$$\text{Erfc} \left[\frac{4}{10} \left(\frac{\omega_0}{a} + 2.5 \right) - 2 \right] 3 + 5 = a\omega \quad (3.14)$$

式中Erfc 為互補誤差函數（complimentary error function）， ω 為實際載頻。圖3.1 為 ω_0 分佈圖，另圖中亦隱示其各常數之選定邏輯，主要考量為：參考標準的互補誤差函數其分佈情形，將橫軸大致分佈範圍由4 單位延伸至10單位，另因所探討訊號其頻帶分佈中心約為2.5 Hz，故將曲線中心左移2 單位，而 $\omega_0(a)$ 分佈區間介於極限5 與11之間。圖3.2 示此一水槽風生波的時尺分佈圖。其上子圖相應於固定母仔波下的時頻窗參數 $\omega_0 = 5.3$ ，下子圖則為調適化時頻窗者。如前頭所提及，

此時主要的調適在大尺度範疇，即低載頻部分。另時頻窗參數由小尺度以迄大尺度所涉實際分佈範圍則從5.26（小尺度端）以迄9.16（大尺度端）。這裡必須加以說明的是：雖然我們的調適對主頻帶之低載頻部分特別地將 ω_0 明顯加大，亦即其所取用的母仔波時頻窗分佈面積是大大增加，但它所帶來的模糊效應卻更低。這一現象必然可以推論、亦或歸功於：這樣的調適比較符合物理，所以即使基準時頻窗變的很大其模糊效應卻明顯較低；因為母仔波的時頻窗若越大，則表示其局部性越低，亦或解析度越低，而模糊現象顯著。

另外的一些特徵描述為：（1）調適化時頻窗下其主頻帶分佈仍約為2.3 Hz。（2）各不同尺度成分均不斷演化，代表能量強度的黑白色隨時間交錯出現。而其高頻帶的演化，在調適狀態下，較未調適者來的緩和。（3）在調適狀態下，其明顯能量區帶處的演化，因模糊效應降減，而有較清晰的變動更易性，即明暗對比較強烈，或說其生滅亦或週而復始性較突出。這一方面所代表的是，此時之轉換係數分佈大小差異變大，也就是說，轉換效率提高，而其熵值變小，蓋因物理符合性大為增進。（4）風生波的群聚現象比較明顯表現，此與側頻不穩現象或相符合。另尺度間的歧支行為（bifurcation among scales）亦較清礎，此一由較大尺度而來的能量渲洩行為（energy cascade）其頻率區間約為2.8 to 4.5 Hz。

圖3.3 則示一純粹數值模擬訊號之比較圖。此訊號為二次方漸高頻訊號（parabolic chirp），其所含蓋頻率區間為零以迄尼克斯取樣頻率（Nyquist sampling rate），而時頻分析圖其所覆蓋頻率亦為全範圍。這裡所用的 $\omega_0(a)$ 由小尺度端的7以迄大尺度端的10，另取其為線性改變。而對比圖則用固定的 $\omega_0 = 5.3$ 。由圖可見，除了最低的兩個載頻帶以外，所有其它載頻都有比較局部化的時頻分佈。事實上，最低載頻區帶的模糊性主要來自數值分析上嚴重的邊緣效應，若欲將其模糊區帶範圍減縮，則所用母仔波時頻窗的時支撐宜降減，也就是把此處的 $\omega_0(a)$ 另調適變的比5.3還小，但此時邊緣效應仍是明顯存在的。另圖3.4 中的上子圖示其相位分佈圖，而這一子圖係以吾人先前所提之類仔波（wavelet variant）為之，而右子圖係為全頻域之二次方漸高頻訊號。

```

obeg=11.; oend=5.;
fcenter=2.5; fdilation=10/4; fshift=2. ;

perfc=Plot[ Erfc[(1/fdilation)* (freq +fcenter)-fshift]*
            (obeg-oend)/2+ oend, {freq, -2.5, 8.5} ]

```

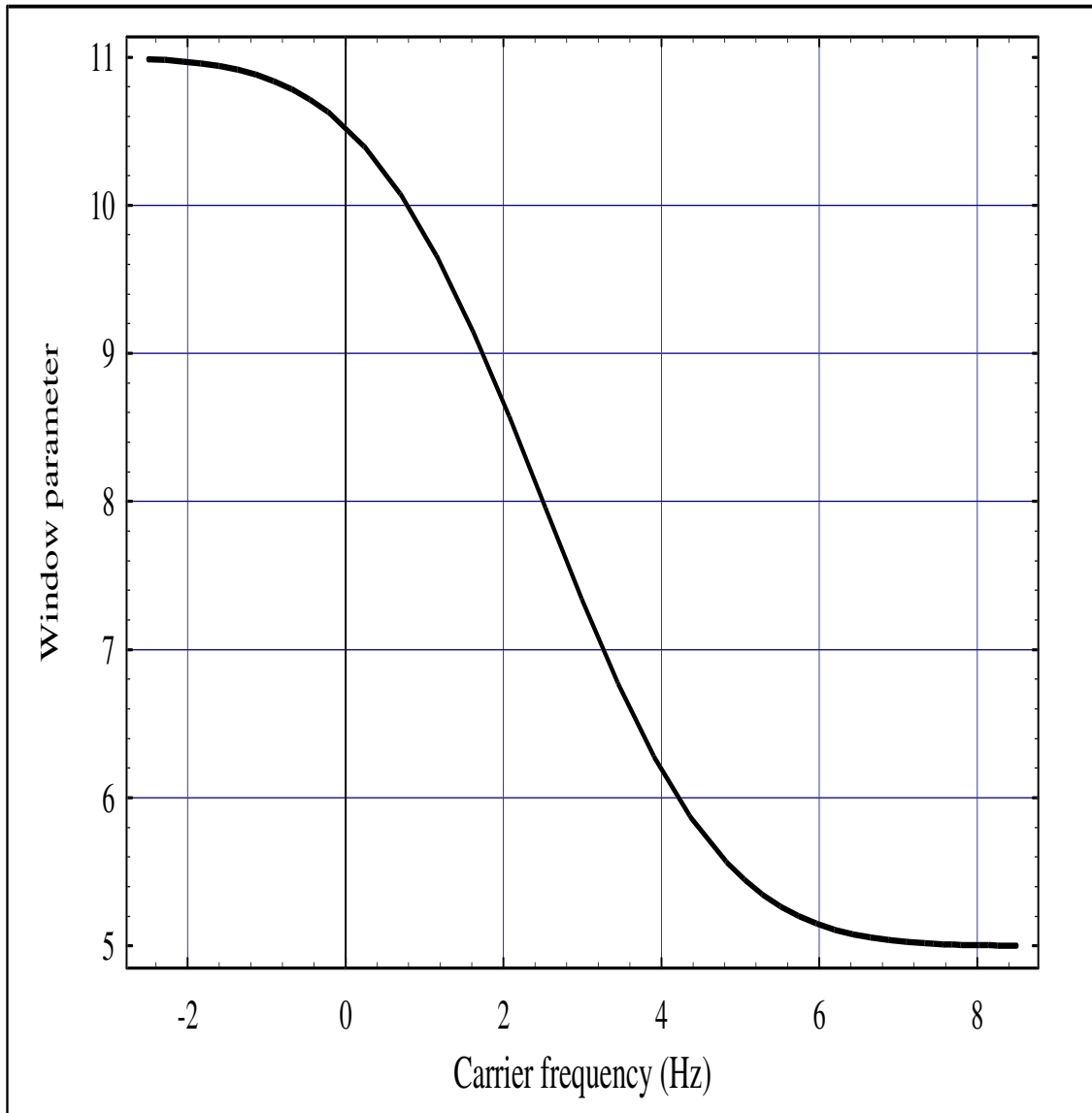


圖 3.1 代表波浪減衰之參數 $\omega_0(a)$ 與載頻之關係曲線。此處的取法尚是一個相當直覺的假設。另圖中亦隱示其各常數之選定邏輯，其互補誤差函數調整的主要考量為：載頻大致分佈範圍、尖峰能量頻率、訊號其頻帶分佈中心位置、減衰參數分佈區間。

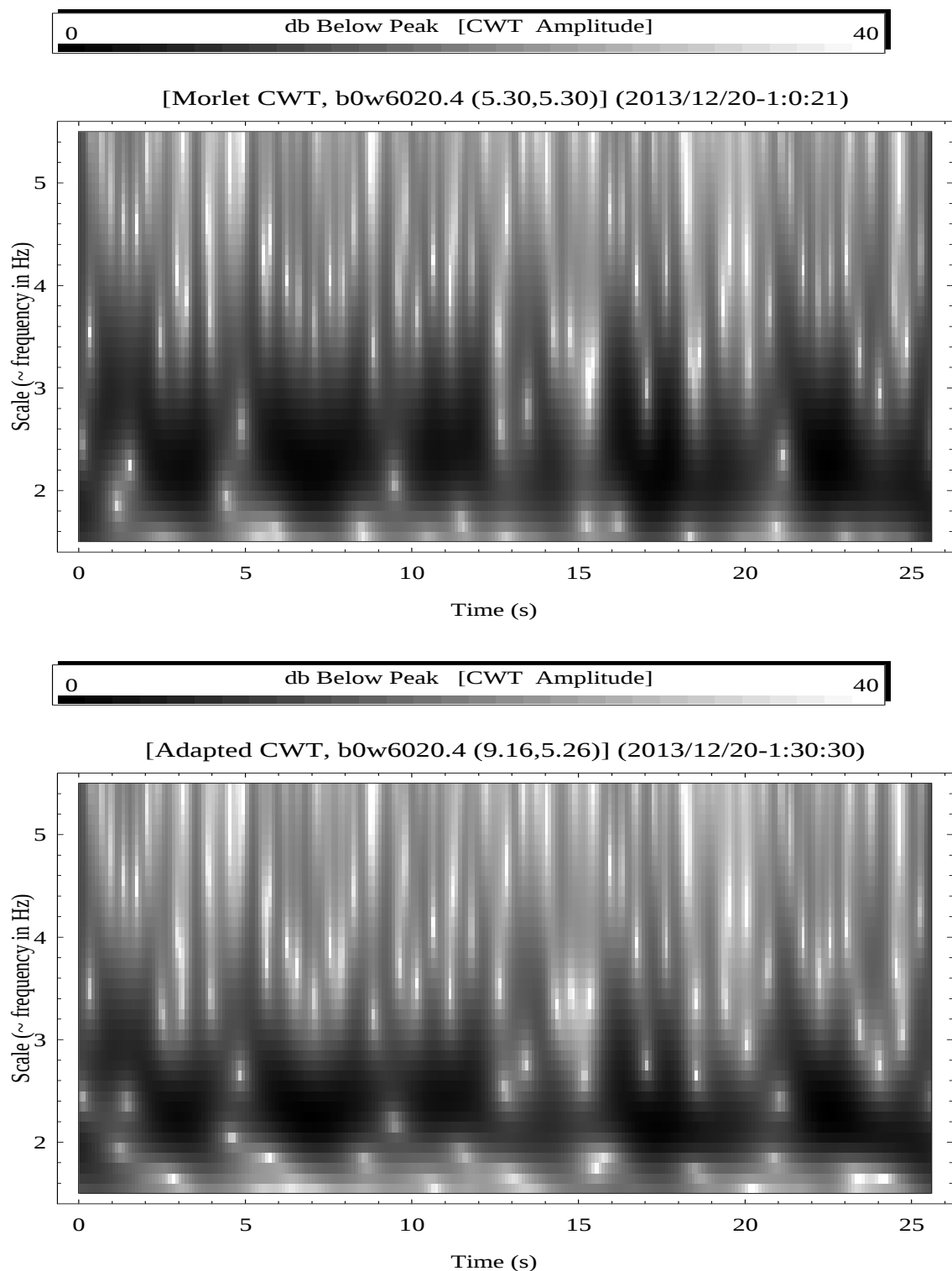


圖 3.2 時頻分佈比較圖。其所用訊號是為試驗室小水槽裡的風生波，這些風生小水波的幻化，相對於一般海洋波浪者，相對甚快。相對於長波而言，針對這些小尺度風生波進行 ω_0 調適可以比較明顯展現一些效益。此時 ω_0 的分佈可以在一個較大的範圍內取用：對其頻帶分佈偏向低頻的部分，可以明顯加大異動範圍，而對頻帶偏向高頻小尺度部分，只需小幅度變化異動。在調適狀態下（下子圖），其明顯能量區帶處的演化，有較清晰的生滅變動性，因模糊效應降減，即明暗對比較突出。這一方面所代表的是，此調適下，轉換效率提高，而熵值變小，蓋因物理符合性大為增進。

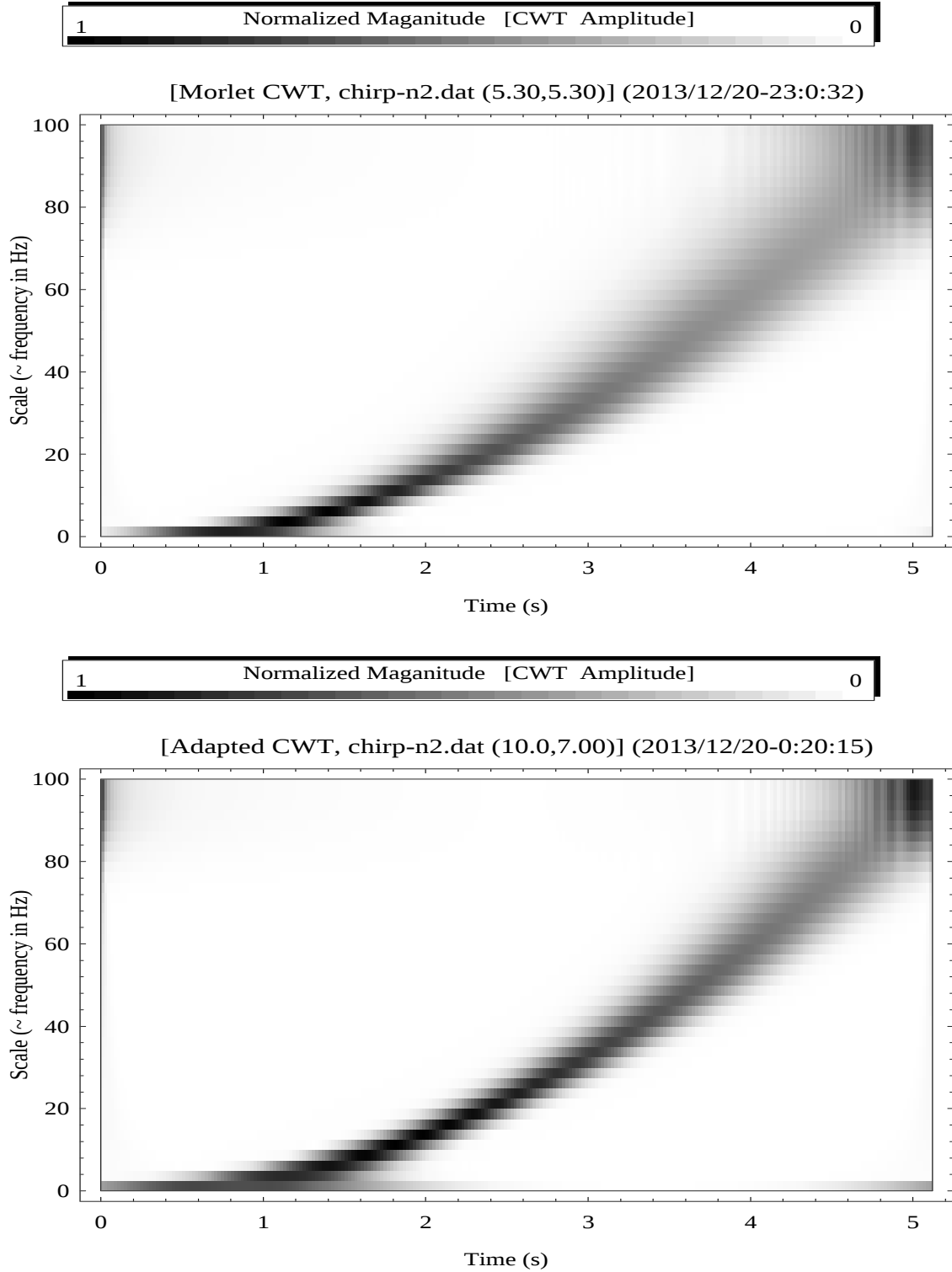


圖 3.3 此圖示一純粹數值模擬訊號之比較圖。此訊號為二次方漸高頻訊號（parabolic chirp），其所含蓋頻率區間為零以迄尼克斯取樣頻率（Nyquist sampling rate），而時頻分析圖其所覆蓋頻率亦為全範圍。 $\omega_0(a)$ 由小尺度端的7 以迄大尺度端的10，另取其為線性改變。而對比之上子圖則用固定的 $\omega_0 = 5.3$ 。由圖可見，除了最低的兩個載頻帶以外，所有其它載頻都有比較局部化的時頻分佈。

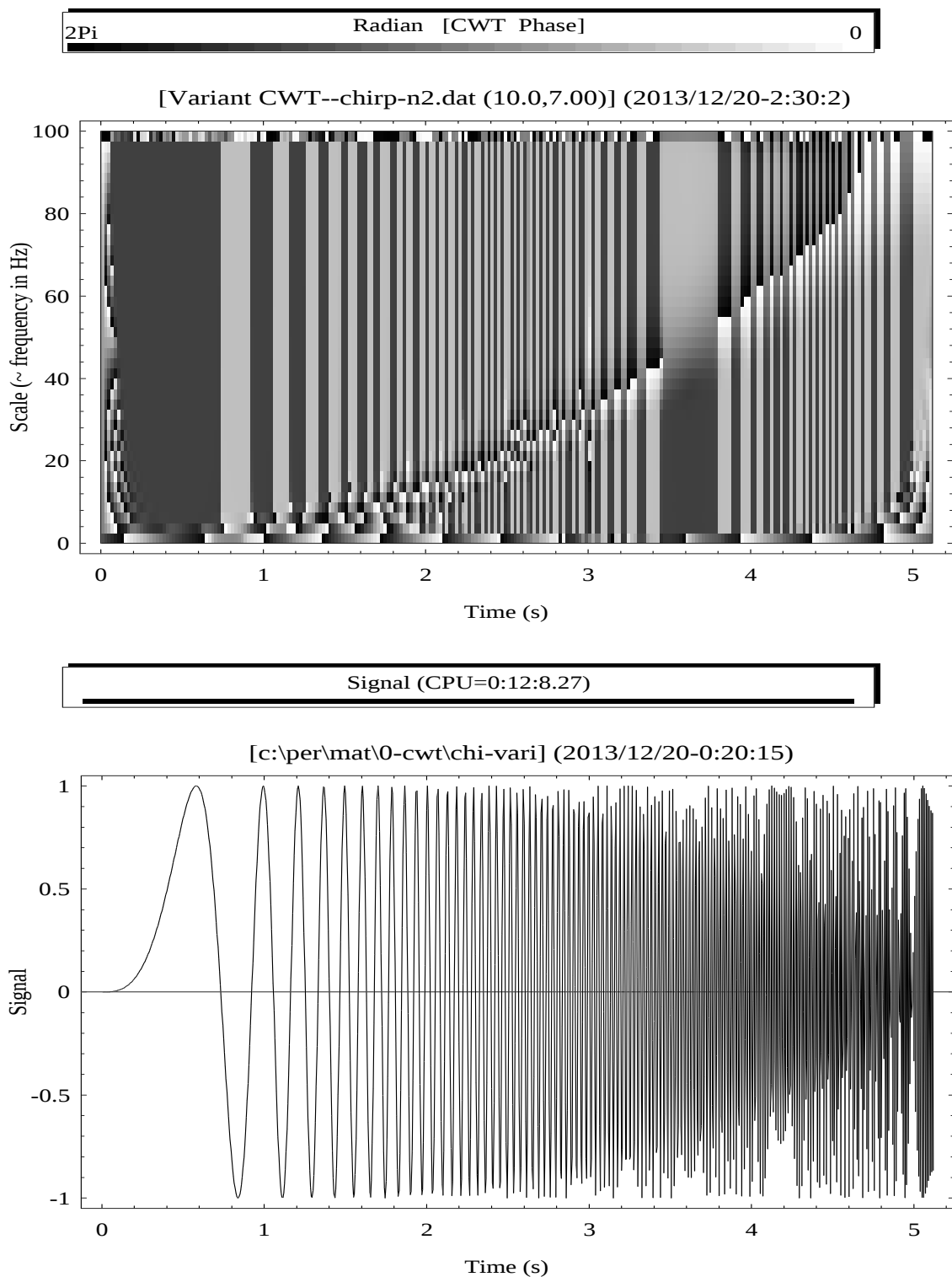


圖 3.4 此圖中的上子圖乃前圖二次方漸高頻訊號其相位分佈圖，其係以吾人先前所提之類仔波（wavelet variant）為之[9]。而下子圖係為具有全頻域之二次方漸高頻訊號。

3.3 入允條件之驗證

數學轉換的基本重要精神在於「無損性」(lossless)，所謂的無損性是指其反轉換得以完整重現原訊號。對仔波而言，這一無損性就等同仔波的「入允條件」(the admissibility condition)，而滿足入允條件則又等同驗證了有「同等拆析」或「本尊分解」(the resolution of the identity)之存在。在這一節中我們探討此一調適之母仔波其入允條件為何。此處依循Daubechies [5] 之正規流程，處理驗證如下：

先前的調適我們調整母仔波 $\psi(t)$ 的支撐長度，亦即藉由減衰參數 ω_0 之改變為之，並設其為尺度 a 之函數。而載頻為 $\omega = \omega_0(a)/a$ 即 $\omega_0(a) = a\omega$ 。因而此時調適化之母仔波為

$$\psi_{\omega_0}(t) = \psi(t; \omega_0(a\omega)). \quad (3.15)$$

而其縮放與移位之版本為

$$\psi_{a,b;\omega_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}; \omega_0(a\omega)\right). \quad (3.16)$$

此時函數 $f(t)$ 的仔波轉換係數為

$$\begin{aligned} Wf_{\omega_0}(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b;\omega_0} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} f(t) \overline{\psi_{\omega_0}\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|a|} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi_{\omega_0}}(a\omega)} e^{-ib\omega} d\omega, \end{aligned} \quad (3.17)$$

式中 $\widehat{\psi_{\omega_0}}(\omega) = \widehat{\psi}(\omega; \omega_0(a\omega))$ 。而標準的驗證方法就是證明兩個函數 f 跟 g 的內積(inner product)，即 $\langle f, g \rangle$ ，可以由 $Wf(a, b; \omega_0)$ 對 $Wg(a, b; \omega_0)$ 之投影經由對縮

放尺度與移位這兩變數雙重積分而得，即驗證下式的存在

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W f(a, b; \omega_0(a\omega)) \overline{W g(a, b; \omega_0(a\omega))} da db = C_{\psi_{\omega_0}} \langle f, g \rangle, \quad (3.18)$$

式中 $C_{\psi_{\omega_0}}$ 爲一常數。若其存在，則將 g 取爲高斯函數且其變異值（variance）趨向於零值（亦即爲極端三角函數the delta function， $\delta(t)$ ），此時內積 $\langle f(t'), g(t' - t) \rangle = \langle f(t'), \delta(t' - t) \rangle$ 即可重建 $f(t)$ ，從而証明同等拆析條件。

另上一式等號的右側項相關於

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|a|} \widehat{f}(\omega) e^{-ib\omega} \overline{\widehat{\psi}(a\omega; \omega_0(a\omega))} d\omega \right] \times \\ & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|a|} \overline{\widehat{g}(\omega')} e^{ib\omega'} \widehat{\psi}(a\omega'; \omega_0(a\omega')) d\omega' \right] da db. \end{aligned} \quad (3.19)$$

今考慮下面兩個等值式

$$\begin{aligned} & \widehat{F}_a(t, \omega_0(a\omega)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \sqrt{|a|} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega; \omega_0(a\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} F_a(\omega; \omega_0(a\omega)) d\omega, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\widehat{G}_a(t, \omega_0(a\omega))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \sqrt{|a|} \overline{\widehat{g}(\omega)} \widehat{\psi}(a\omega; \omega_0(a\omega)) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \overline{G_a(\omega; \omega_0(a\omega))} d\omega, \end{aligned} \quad (3.21)$$

吾人可得

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{a^2} \widehat{F}_a(t; \omega_0(a\omega)) \overline{\widehat{G}_a(t; \omega_0(a\omega))} da dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{a^2} F_a(\omega; \omega_0(a\omega)) \overline{G_a(\omega; \omega_0(a\omega))} da d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{|a|} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} |\widehat{\psi}(a\omega; \omega_0(a\omega))|^2 da d\omega \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\omega; \omega_0(a\omega))|^2}{|a|} da \\
&= 2\pi \langle f, g \rangle C_{\psi_{\omega_0}}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

因而此時之同等拆析即是存在如下的入允條件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\omega; \omega_0(a\omega))|^2}{|a|} da = C_{\psi_{\omega_0}}. \tag{3.23}$$

至此，我們了解這一調適所需之入允條件為 $\widehat{\psi}(0, \omega_0(u)) = 0$ ，其中 u 為我們所欲探討尺度範圍內的實數。基本上這一條件也很容易滿足，而此處假設亦符合之。

3.4 結語

本章探討水波模擬最適函基數學與水波消能物理之異同，針對其相異之處提出改良舉措。這裡藉由調適母仔波的時頻窗參數，並設其為一互補誤差函數分佈，其結果得以顯示優化之合理性。另亦驗證此一調適之仔波轉換仍得以滿足仔波之入允條件。❖

結論

數據分析首先遇到的問題就是最適分析工具之擇取，這一階段需要一個鑑取作為，它主要依據是數學上的衡量。在訊號成分解析上，這一問題也就是模擬函基的選定。然而，數學不關物理，但物理有待數學加持，而數學則因物理昇華。如是之故，另一層次的問題是：此一最適函基的數學要義與應用對象的物理本質其兩者之間的對應性如何提升。這一提升有可能是一項比較藝術化的作為，它有賴於對相關數學與物理特性都有深入之了解。

本研究探討水波模擬最適仔波函基其在分析應用上進一步優化的手段，研究中我們首先指出先前研究所鑑取得的最適函基是為連續領域中的莫利仔波，並闡述其最適化的各種肇致因子，吾人儘可能地將這些因子的數學與物理作概念化、具體化描述。接著我們比較最適函基數學與水波能量物理的同異之處，並進而提出一個比較直覺的優化手段。最後以一試驗室小水槽風生波及一模擬之漸高頻訊號說明這一優化所帶來的訊息。其主要內容如下：

- 水波模擬最適仔波函基所涉數學與物理因子之具體概念解說，庶幾得以體會分析應用的相關基因與行為。其主要項目有：逆向旋移乘積機制之應用性問題、相位糙音與劇變效應之耦合現象、離散轉換與連續轉換之不同效應、正交與非正交之不同長處、轉換係數贅餘性之價值、尺度與載頻之實用差別、尺度解析度及尺度區間考量自由選定問題。
- 探討函基數學與水波物理的同異之處：依據水波滯性消能其振幅降減之考量，其相似之處乃為，兩者的衰減係數都相依於尺度量之平方的倒數；而其

相異之處則為：兩者對時間的相依性明顯差異，在數學模式中是時間平方冪次相關，而在物理模式中則只是線性時間相關。簡而言之，一個固定形狀的母仔波，其縮放之不同尺度是無法對水波組合成分提供全面性的物理切適性，它不是高估了低頻端成分波的降減，就是低估了高頻端成分波的衰敗，亦或是兩者兼而有之。

- 在實際應用上，特別針對小尺度風生波進行衰減參數之調適，因為相對於大尺度波浪而言，它可以比較明顯展現一些調適效益。蓋因此時衰減參數的分佈可以在一個較大的範圍內取用。另其調適理念為：對其頻帶分佈偏向低頻或大尺度的部分，可以明顯加大參數的異動範圍，而對頻帶偏向高頻小尺度部分，只需小幅度異動。另此處對衰減參數調適的取法尚是一個相當直覺的假設。我們假設其分佈為一適當縮放與移位的互補誤差函數。其比較特別的結果是：雖然我們的調適對主頻帶之低載頻部分特別地將母仔波的時支撐大大增加，但它所帶來的模糊效應卻更低。這一現象必然要歸功於：所進行的調適能比較符合物理。也就是說，在熵值理念上，這一作為代表轉換效率提高，而其熵值變小。另對二次方漸高頻數值模擬訊號之調適則可得比較局部化的載頻分佈。
- 此處之調適法尚是相當主觀，缺乏全盤性適用之準則。❖

參考文獻

- [1] Auscher, P. Wavelet bases for $L^2(\mathbb{R})$ with rational dilation factor. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 439–452. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [2] Cohen, L. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [3] Coifman, R., Y. Meyer, and M.V. Wickerhauser. Size properties of wavelet packets. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 453–470. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [4] Coifman, R., Y. Meyer, and M.V. Wickerhauser. Wavelet analysis and signal processing. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 153–178. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [5] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 1992.
- [6] Froment, J. and, S. Mallat. Second generation compact image coding with wavelets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, pages 655–678. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.
- [7] Lamb, H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, sixth edition, 1932.
- [8] Lee, Y.R. The Wavelet Optimal Basis for Water Wave Modeling – The Ultimate Conclusion. Technical report, MOTC-IOT-100-H2DA00X, Center of Marine Study, Institute of Transportation. (in Chinese), Taichung, Taiwan, 2011.

- [9] Lee, Y.R. A Wavelet Variant and Its Characterizations and Applications. Technical report, MOTC–IOT–101–H2DA003, Center of Marine Study, Institute of Transportation. (in Chinese), Taichung, Taiwan, 2012.
- [10] Mallat, S., and S. Zhong. Wavelet transform maxima and multiscale edges. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 67–104. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [11] Meyer, Y. *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- [12] Phillips, O.M. *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge University Press, New York, USA, second edition, 1977.
- [13] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flennerly. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, New York, USA, second edition, 1992.
- [14] Soumekh, M. *Fourier Array Imaging*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1994.
- [15] Wickerhauser, M.V. Acoustic signal compression with wavelet packets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, pages 679–700. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.

附錄一： 論 wavelet 之「仔」與「小」

附錄： 論 wavelet 之「仔」與「小」

話說小明、小華、小麗、小美是同班同學，參與了全民無所不檢小不點級語文檢定。

小明、小華在試場甲，電腦題庫篩出的單選題有了這兩題：

- (1) 「小波」是

 1. proper noun
 2. common noun
 3. 以上皆是
 4. 以上皆非
 5. 隨便

(2) 「小波」的最適對應你認為是

 1. small wave
 2. minor wave
 3. trivial wave
 4. little wave
 5. tiny wave
 6. insignificant wave
 7. low wave
 8. wavelet
 9. 以上皆可

小麗、小美在試場乙，電腦題庫篩出的單選題有了這兩題：

- (1) 「仔波」是

 1. proper noun
 2. common noun
 3. 以上皆是
 4. 以上皆非
 5. 隨便

(2) 「仔波」的最適對應你認為是

 1. small wave
 2. minor wave
 3. trivial wave
 4. little wave
 5. tiny wave
 6. insignificant wave
 7. low wave
 8. wavelet
 9. 以上皆可

小明、小華從呀呀學語就參加什麼華盛頓、或林肯或什麼 abc 的多才、多元、多藝、多語、等等培育班，程度不錯，每個英文字，除了 wavelet 沒學過外，好像

都有印象，花了甚多時間在這兩題咬文嚼字，又從兩題關聯性邏輯推理下手，更想說班上還有同學是大小明、小小華、、，「小」者非吾獨享。所以就選了2及9。

可小麗、小美是比較屬於「女人無才便是德」的家庭環境成長的，程度普普，遇到這兩題，懂的字不多，心想「仔波」是什麼碗糕？從來也沒聽過，況且人家都是兩個字組成，只有 wavelet 是一個單字，很特別，又心想，班上有「宅」女，很獨特，搞不好此「仔」與彼「宅」是相通，所以很快、就隨便選了1及8。

等到放榜，小明、小華因在這兩題蹉跎太多，不幸以些微差距落榜；但小麗與小美卻驚險過關。可是這些題的出題老師是同一人，而老師對這四小不點也甚熟悉，得知結果甚感意外，自咎誤人子弟。原來仔波題是他早期所出題目，後來感於「積非也可成是」，「吾言如人言，庶幾無大錯」，又對後來題庫補充題中提供了「小波」題，不過卻忘了把「仔波」題給刪了。

言歸正傳。就讓我們來討論一個比較有趣、常被問到、也是最根本的話題，那就是英文的 wavelet 該如何中文稱之？也藉此順便涉略 wavelet 的一些相關概念。

Wavelet 如今似乎最常見的翻譯是「小波」，而本人最早期則習慣叫它為「子波」，然而個人認為最貼切的譯法應該是「仔波」。話說當年，約莫是1993年初，是我在國外初次接觸 wavelet，而比較大規模的自我研習則大概又在一年之後。因為先前在國內並無接觸，自然對它的中文譯法也無從得知。另一方面也因 wavelet 的主要理論與應用學門並不在海洋科技領域，就我所知，學校內並無 wavelet 的課程（包含當時數學系及各研究所所開課程），所認識之老中也無人從事這一課題，所以也無人相詢。如是「子波」的稱呼就建立在我的習慣上了。如果當時有如現在這樣發達且簡易而方便的 Internet，或許也就可以查到它的叫法，從而附會主流。印象深刻的是，那時試驗室所用連接設備是一台鼎鼎名

牌 Hayes Modem，當時撥接速率大家習慣稱為 baud rate（即 bit per second），它是僅僅的 1024，如今再也沒聽過這一名詞了。

接著，也讓我們來說說為何仔波的譯法最為貼切。從英文字義講，-let 是一個名詞附尾，比如我們所常聽到 droplet、piglet、booklet、bracelet。這個附尾代表小、年輕、局部，而有具變動性、發展性、活蹦亂跳的含義。但把英文的 wavelet 稱之為「小波」，我認為最大的致命傷就是中文的「小」跟「波」形成一種非常泛濫的概念，容易讓人聯想它是小小的波（small wave），也不免讓人想起是否有個相對應的大波？它缺乏一種像英文 wavelet 那樣的專有名詞的氣度；另一方面，從數學內涵而論，wavelet 的精神絕對不是在大小方面，它主要的觀念是在強調一種局部性分佈的波，你要它多大就可多大，要多小就多小。此外小波的叫法也缺乏 wavelet 的一些內涵，如多元性（無窮多種）、變異性（各形各色）、勁爆性（奇奇怪怪）。再者，小波的叫法也很難讓人把它與函基（function basis）構成函數作一些關聯連想，而 wavelet 的重要用途無不肇始於它所衍化形成的函基。另外值得一提的是，實際上，數學的分析可以完全不涉單位，而沒有單位，也就無所謂的絕對大小；而在實用上，一般離散數值解析的整個處理流程可說也可完全不涉單位（只涉及序列），只需於最後的結果適當的考慮加入單位即可。如是，這種大小的區別比較就非核心問題所在。

至於第二種稱法「子波」，個人認為，相對於小波，它比較有專有名詞的氣度，不會像小波有著那樣泛濫的意義。事實上子本身就有小的含義，再者它影射仔的年輕與動力，而它似乎亦表示可成長、演化。不過有個缺點，那就是，wavelet 的學門無不在訴說 mother wavelet，可是這 mother wavelet 的中譯法「母子波」，可能給門外漢一種「霧煞煞」的感覺，或者會讓人聯想到跟「子」有相對應的意涵（同樣的，father wavelet「父子波」也容易有所混搖），事實上

此處的「母子」並非比照倫理上或家庭上的的長幼關係，這裡「母」跟「子」必需完全分離，「母」在此處的主要意涵是源頭，也就是說母子波最貼切的說法是源頭子波（用以製造或生成其它子波以便形成一個函基）。

有了上面的論述，似乎「仔波」叫法的優點也已不述自明了。「仔」者小也、子也，但卻毫無小或子的泛泛，「仔波」很自然地形成一個專有的名稱。再者仔也，桀驁不馴、有活力、也可能不按牌理出牌—這顯示它的多元性、變異性、奇特性。而仔也有一種容易呼朋引友，自我膨脹，形成一種特立獨行的群體—這顯示它與函基的意涵有如是密切的關聯。至於「母仔波」、「父仔波」，與「母子波」、「父子波」的差異，我想大概也是不說而自可分明。

附錄二： 簡報資料

The Optimizations of Water Wave Time-Frequency Analyses (1/4) — The Adaptation of the Time-Frequency Window of the Best Wavelet Basis

A basic research of IHMT

水波時頻分析之優化 (1/4) — 最適仔波其時頻窗之調適

李 勇 榮

運輸研究所
港灣技術研究中心
email: ronlee@ms4.hinet.net

<http://www.ihmt.gov.tw/>



1/33



主要內容

- 時頻窗概念與仔波分析 ◡
 - 各類分析法概述
 - 變動或非穩定形態之效應
 - 海參堡定理與加窗之轉換
 - 水波生命期與仔波時頻窗之調適
- 水波分析最適仔波暨其最適因子 ◡
 - 樞點順適仔波 (cardinal spline wavelet) 與莫利仔波 (Morlet wavelet)
 - 離散轉換與連續轉換之不同效應
 - 正交與非正交之不同長處
 - 轉換係數贅餘性之價值
 - 尺度與載頻 (carrier frequency) 之實用差別
 - 尺度變化量及尺度考量區間自由選定問題
- 最適仔波之調適優化 ◡
 - 仔波數學與水波物理
 - 時頻窗調適法
 - 調適效應
 - 入允條件之驗證



2/33



時頻窗概念 (1/2)

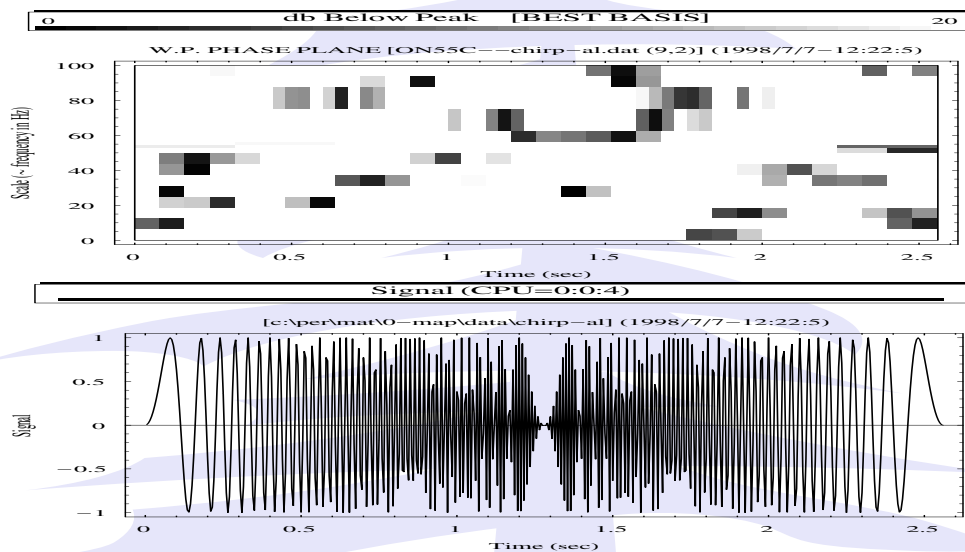


圖 1：時頻窗概念圖示。此圖乃仔波包轉換 (wavelet packet transform) 之時頻窗相位分佈圖 (上圖)，此處仔波包是相應於Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號 (下圖)，其頻率分佈由0至100 Hz，此處因係非足頻取樣 (即取樣率只為Nyquist rate 一半)，故有折誤現象。此外當注意此時頻窗之非對稱分佈及多重頻帶分散性所代表轉換意涵。

時頻窗概念 (2/2)

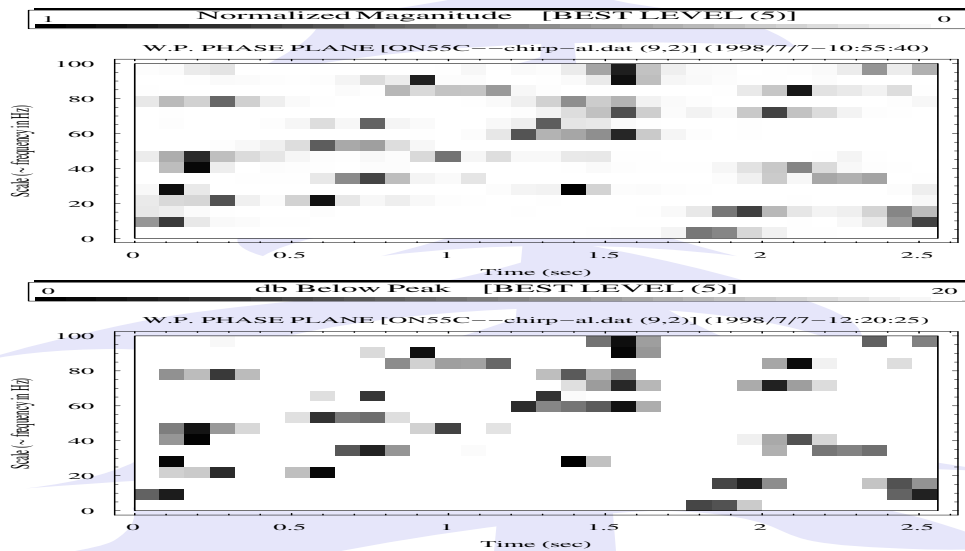


圖 2：另類時頻窗概念圖示。其仍示仔波包轉換時頻窗相位分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖，與前圖綜合起來，我們可以體會到仔波轉換其表現方式的多樣性及其可能帶來的困擾。諸如諸多類屬函基、諸多組合型態、不同最適規範、不同圖示方法、等等。

Deconvolution Mechanism

- 輸入訊號為 $f(t)$ 、輸出訊號為 $g(t)$ 、黑盒子效應函數為 $h(t)$ ，而其富立葉領域之對應函數分別為 $F(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $H(\omega)$ ，旋移乘積及富立葉轉換配對關係式如下：

$$\begin{aligned} h(t) &\Longleftrightarrow H(\omega), \\ h(t) \star f(t) &\Longleftrightarrow H(\omega)F(\omega). \end{aligned}$$

- 黑盒子機制式：

$$F(\omega)H(\omega) = G(\omega), \quad (3)$$

- 黑盒子機制其對各成分波的作用：

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}. \quad (4)$$

- 系統其作用綜合反應函數（impulse response function）是如下的直接逆向旋移乘積函數（direct deconvolution）

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(\omega)}{F(\omega)} \right]. \quad (5)$$

- 非常不可靠、誤差放大器
- 可能是完全不成立

三組波流場訊號之能譜

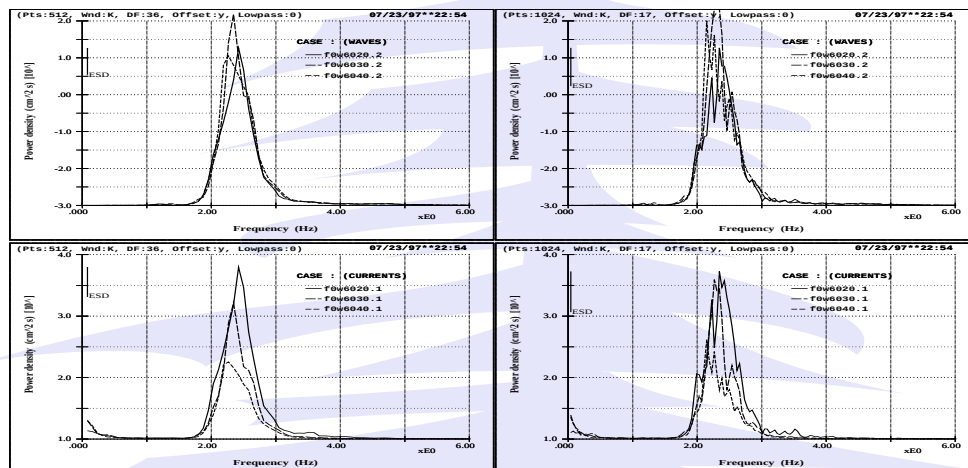


圖 4：相應於表 1 所示三組波流場訊號之能譜，其上部子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之流速訊號能譜。而左右子圖分別是取不同富立葉分析參數，左右子圖其相關於自由度之區段劃分點數分別為 512 與 1024 點。由表 1 與此圖之比較，可甚是明確地看出，即使就零位統計觀點而言，此一波浪場狀況已達到理想的穩定形態。但就波譜觀點而論，這一個穩定形態卻可說是被完全地推翻了。此圖與圖 3 及 6 是互為關聯的，其亦提示波譜共關協振之表現行為，亦且是黑盒子機制或逆向旋移乘積效應所需深加考慮因素。



6/33



8/33



模糊效應與相位糙音

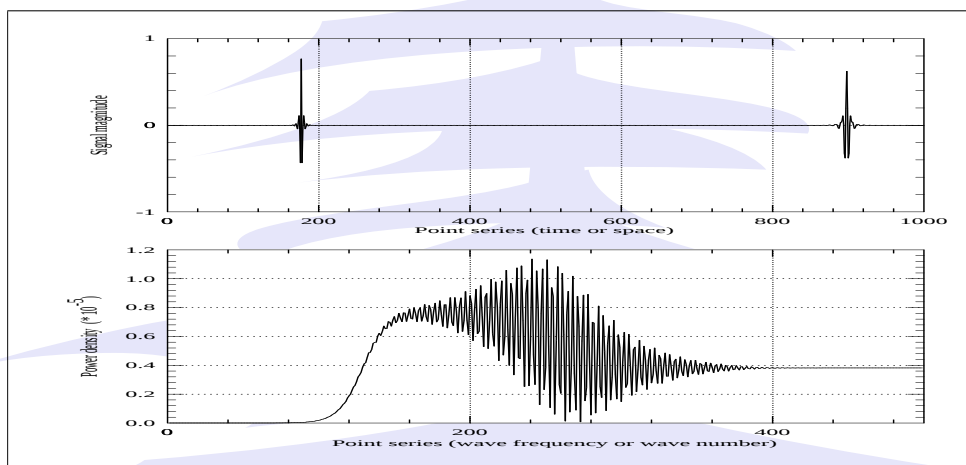


圖 6：本圖以兩個相鄰尺度之仔波合成訊號其富立葉能譜說明模糊效應與相位糙音之影響。上圖示一1024 點序列之最小兩個相鄰尺度之Lemarié 仔波合成訊號，其左脈動係為相應於單位仔波係數元e600 之仔波反轉換，右脈動係為相應於單位仔波係數元e470 之仔波反轉換。下子圖則為合成訊號之富立葉能譜。此圖充份顯示時變性與相位性這兩個因子對富立葉頻譜亦或正交函基其相關應用分析所可能帶來之巨大影響。

尺度與載頻

- 樞點順適仔波是一實數離散仔波，只涉有尺度。莫利仔波帶入了載頻。

$$\psi_a \left(\frac{t-b}{a} \right) = \pi^{-1/4} \left[e^{-i \frac{\omega_0(a)}{a} (t-b)} - e^{-\omega_0(a)^2/2} \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}, \quad (8)$$

- 反應仔波形狀對稱與否之影響。亦或說是，波形有一些改變其轉換係數不致於天差地遠。
- 反應仔波建構衡度函數（scaling function）波形之影響。即衡度函數之全正性及仔波之全振性。
- 糙音及誤差降減作用。藉由贅餘性的作用，得以將誤差及糙音排除。
- 抽象的尺度對照於具體的載頻。載頻的出現得以自然承續前面三個重要因子。

- 補充說明

- 母仔波亦或其任何尺度，幾乎都是由一複雜分佈形狀的富立葉轉換頻譜的合成體。
- 尺度令人迷失。基本母仔波為何、其常規化情形如何、支撐長度多少、振幅隨尺度之變化、移位變量到底是多大、移位變量落於何處。
- a 值解說表示法容易造成混淆或誤導。不同的仔波，亦或不同的數據集錄對策或參數，即使 a 值相同，其實際尺寸也不會一樣。
- 在載頻中的波形衰減的參數 ω_0 ，一般其值都會取大於5，也因此載頻非常精確的對應於仔波尺度。
- 引入了一個非常重要的物理量，即相位。
- 只要針對我們所感興趣的載頻區間計算轉換係數即可。

仔波解析特性與數值行為

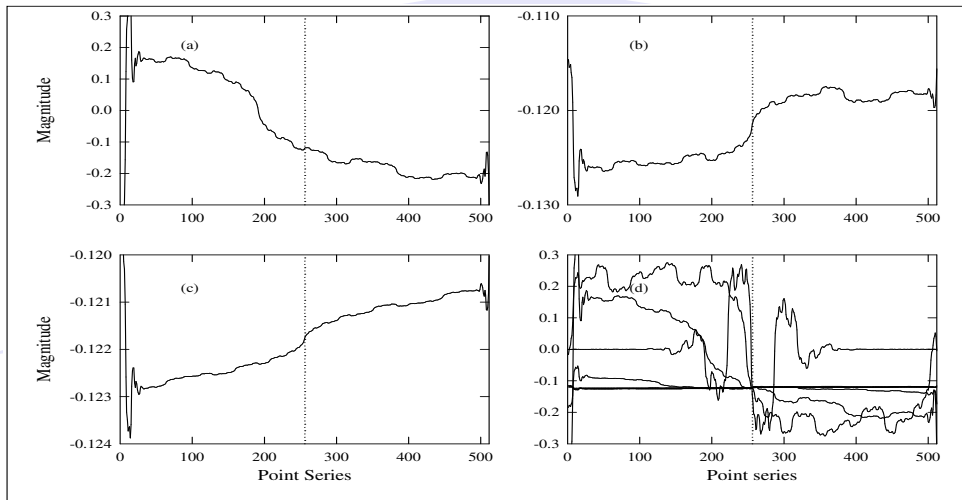


圖 9：此圖亦示解析特性特出之仔波，難以成就水波之物理模擬。此圖為交正交仔波BO350 其某一尺度之波形的局部連續放大（d子圖綜合各曲線），其接力爆展比例為 2^6 ，即放大尺度階為 $(2^6, 2^{12}, 2^{18})$ （a、b、c子圖）。此交正交仔波其所涉濾權係數量為20個，由各子圖可見，爆展過程中的收斂性也不是很理想，而且其曲線傾斜方向性也左右不定。相關爆展資料為：總點數為512點；爆展中心點為256；仔波曲線源始點為階位2下的第12點。

莫利仔波特性時頻窗參數

- 莫利母仔波（Morlet mother wavelet）為

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} (e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2}) e^{-t^2/2} \quad (9)$$

其最高峰值與第二高峰值的比值（最高峰值位在 $t = t_0 = 0$ 而第二高峰值位在 $t = t_2$ ）

$$r = \left| \frac{\psi(t_2)}{\psi(0)} \right| \quad (10)$$

此時

$$\omega_0 \approx \frac{2\pi}{t_2} \approx \pi \left(-\frac{2}{\ln r} \right)^{1/2} \quad (11)$$

- ω_0 越大則 r 值亦越大，而 ω_0 為常數，則 r 此值也維持不變。



15/33





17/33

最適仔波與水波物理- 振幅降減比較

- 莫利仔波的移位及縮放式的波浪減衰：

$$\psi_a\left(\frac{t-b}{a}\right) = \pi^{-1/4} \left[e^{-i\frac{\omega_0}{a}(t-b)} - e^{-\omega_0^2/2} \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}} \quad (12)$$

- 水波黏滯性耗能所引致的波浪減衰 (Lamb 1932; Phillips 1977)：
波能密度時變率

$$\dot{E} = -2\mu\sigma^2 a_w^2 k \quad (13)$$

式中 μ 、 σ 、 a_w 、 k 分別為水之動力滯度、波頻、波幅、波數。

水波振幅之降減

$$a_w = \sqrt{\frac{C_1 2k}{\rho \sigma^2}} e^{-\gamma_v t} = C_2 e^{-2\nu k^2 t} \quad (14)$$

C_1 、 C_2 為常數， ν 為水之運動滯度。

- 同：相依於尺度量之平方的倒數。
異：時間的相依性不同，在莫利仔波中是 t^2 冪次相關，而在物理模式中則是線性相關。
- 一個固定的莫利母仔波它不是高估了低頻端成分波的降減，就是低估了高頻端成分波的衰敗，亦或是兩者兼而有之。



時頻窗調適原則

- 對具有長時間支撐的成分波取較大的 ω_0 ，對短時間支撐的成分波則取較小的 ω_0 ，而設

$$\omega_0 = \omega_0(a) \quad (15)$$

此時經縮放移位的仔波為

$$\psi_a\left(\frac{t-b}{a}\right) = \pi^{-1/4} \left[e^{-i\frac{\omega_0(a)}{a}(t-b)} - e^{-\omega_0(a)^2/2} \right] e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}} \quad (16)$$

其載頻為

$$\omega = \frac{\omega_0(a)}{a} \quad (17)$$

- $\omega_0(a)$ 之調適設為如下分佈：

$$\text{Erfc} \left[\frac{4}{10} \left(\frac{\omega_0}{a} + 2.5 \right) - 2 \right] 3 + 5 = a\omega \quad (18)$$

式中 Erfc 為互補誤差函數 (complementary error function)。

- 水槽風生波的時尺分佈比較
- 數值模擬訊號之時尺分佈比較



18/33



入允條件之驗證

- 調適化之母仔波為

$$\psi_{\omega_0}(t) = \psi(t; \omega_0(a\omega)) \quad (19)$$

其縮放與移位之版本為

$$\psi_{a,b;\omega_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}; \omega_0(a\omega)\right) \quad (20)$$

函數 $f(t)$ 的仔波轉換係數為

$$\begin{aligned} Wf_{\omega_0}(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b;\omega_0} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} f(t) \overline{\psi_{\omega_0}\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|a|} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi_{\omega_0}(a\omega)}} e^{-ib\omega} d\omega \end{aligned} \quad (21)$$

- 即驗證下式的存在

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} Wf(a, b; \omega_0(a\omega)) \overline{Wg(a, b; \omega_0(a\omega))} da db = C_{\psi_{\omega_0}} \langle f, g \rangle \quad (22)$$

式中 $C_{\psi_{\omega_0}}$ 為一常數。

波浪減衰參數與載頻之關係曲線

```
obeg=11.; oend=5.;
fcenter=2.5; fdilation=10/4; fshift=2.;
perfc=Plot[ Erfc[(1/fdilation)*(freq+fcenter)-fshift]*
            (obeg-oend)/2+ oend, {freq, -2.5, 8.5} ]
```

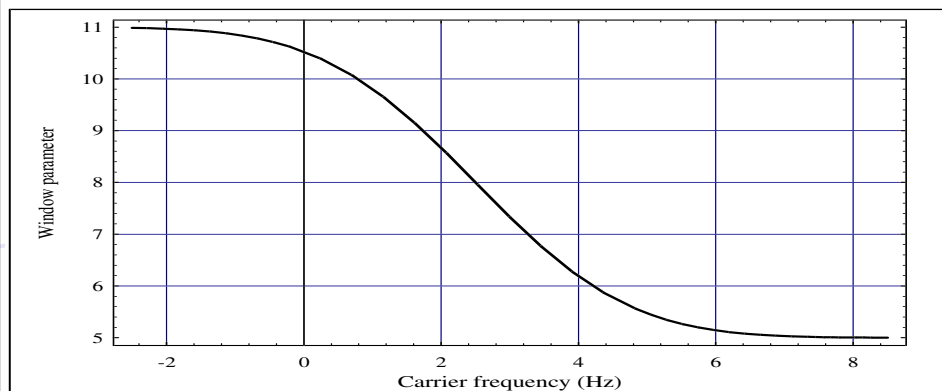


圖 10：代表波浪減衰之參數 $\omega_0(a)$ 與載頻之關係曲線。此處的取法尚是一個相當直覺的假設。另圖中亦隱示其各常數之選定邏輯，其互補誤差函數調整的主要考量為：載頻大致分佈範圍、尖峰能量頻率、訊號其頻帶分佈中心位置、減衰參數分佈區間。



19/33



21/33



水槽風生波時頻分佈比較

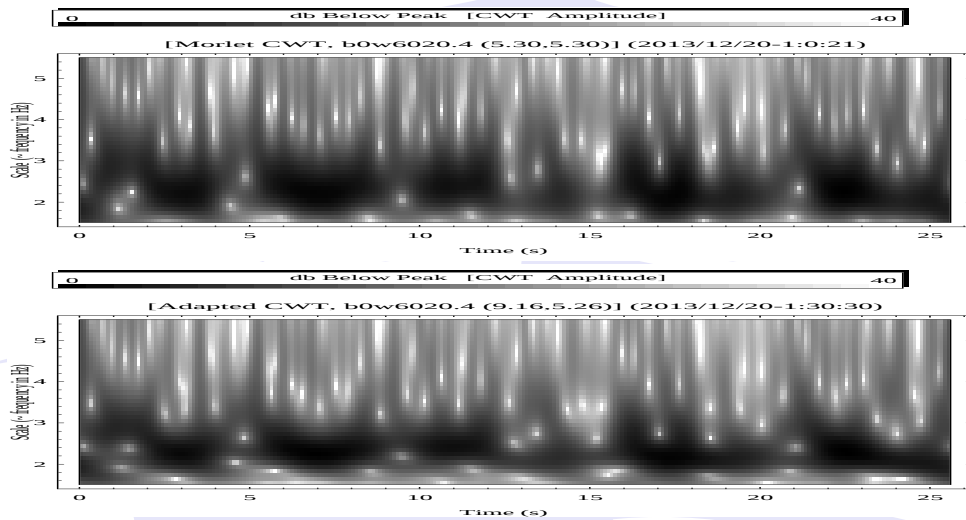


圖 11：時頻分佈比較圖。其所用訊號是為試驗室小水槽裡的風生波，這些風生小水波的幻化，相對於一般海洋波浪者，相對甚快。相對於長波而言，針對這些小尺度風生波進行 ω_0 調適可以比較明顯展現一些效益。此時 ω_0 的分佈可以在一個較大的範圍內取用；對其頻帶分佈偏向低頻的部分，可以明顯加大異動範圍，而對頻帶偏向高頻小尺度部分，只需小幅度變化異動。在調適狀態下（下子圖），其明顯能量區帶處的演化，有較清晰的生滅變動性，因模糊效應降減，即明暗對比較突出。這一方面所代表的是，此調適下，轉換效率提高，而熵值變小，蓋因物理符合性大為增進。

模擬訊號比較圖

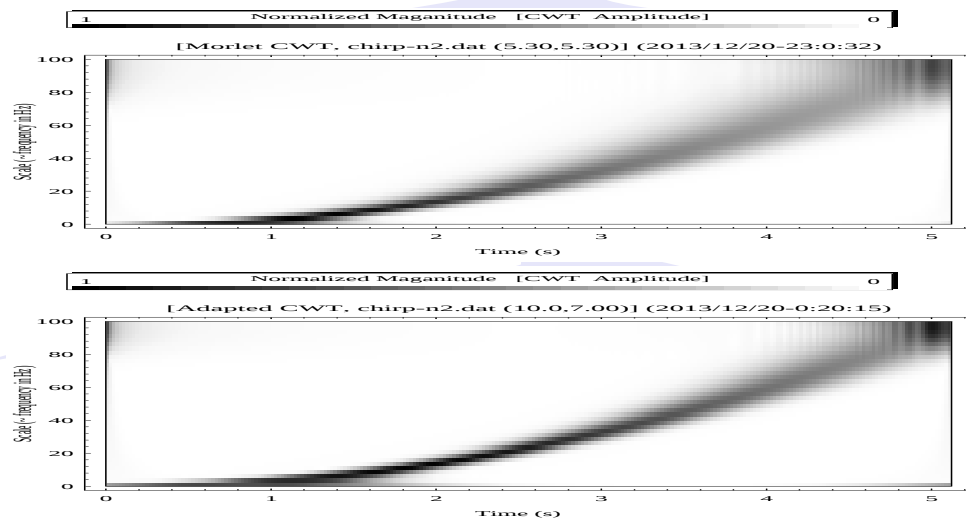


圖 12：此圖示一純粹數值模擬訊號之比較圖。此訊號為二次方漸高頻訊號（parabolic chirp），其所含蓋頻率區間為零以迄尼克斯取樣頻率（Nyquist sampling rate），而時頻分析圖其所覆蓋頻率亦為全範圍。 $\omega_0(a)$ 由小尺度度端的7以迄大尺度度端的10，另取其為線性改變。而對比之上子圖則用固定的 $\omega_0 = 5.3$ 。由圖可見，除了最低的兩個載頻帶以外，所有其它載頻都有比較局部化的時頻分佈。

漸高頻訊號及其相位分佈圖

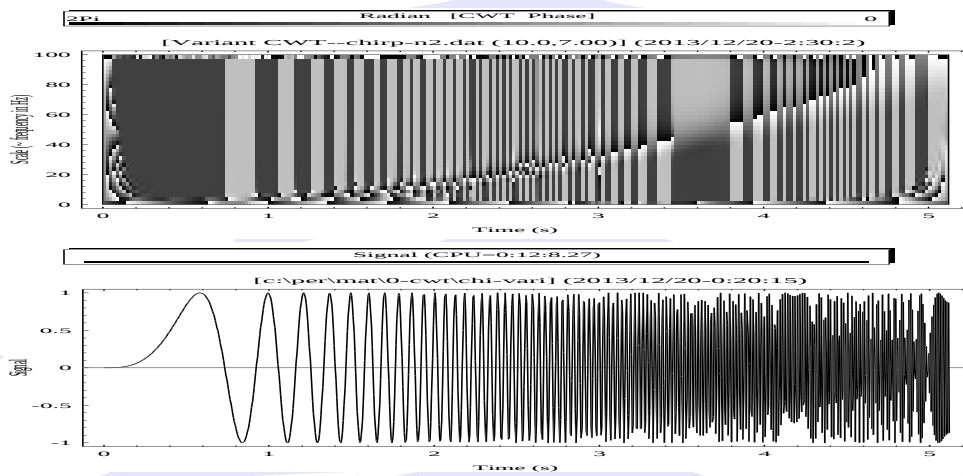


圖 13：此圖中的上子圖乃前圖二次方漸高頻訊號其相位分佈圖，其係以吾人先前所提之類仔波（wavelet variant）為之。而下子圖係為具有全頻域之二次方漸高頻訊號。

結論

- 最適仔波函基所涉數學與物理因子之具體概念解說，體會分析應用的相關基因與行為。
- 依據水波滯性消能其振幅降減之考量，探討函基數學與水波物理的同異之處。
- 在實際應用上，特別針對小尺度風生波進行衰減參數之調適。
- 此處之調適法尚是相當主觀。



24/33



25/33



附錄三： 審查意見回覆表

交通部運輸研究所臺灣技術研究中心

自辦研究計畫期末審查意見回覆表

水波時頻分析之優化（1／4）－ 最適仔波其時頻窗之調適

審查委員及審查意見	意見回覆
梁乃匡委員：	
1. 對仔波作深入研究、是基礎研究，值得繼續研究。未來如能應用在實務上，則更有價值。	由基本研究以迄實際應用的歷程往往需經由試驗之精確掌控及釐定，特別是高階物理訊息之探討。理論之實際應用始終是作者的企盼。作者於多年前，曾為此一方向，規劃並編列較大型且偏重於試驗驗證之四年度長期研究計劃，計劃及經費均經各機關審核通過，並國科會列案。不料幾乎所有預算均遭本中心主任及本科科長在本人未知下挪用一空，遂行其不學無術、搞利益輸送之意圖。其敗壞官箴、斲喪學術研究之風氣，實無以爲甚。再者，多年來中心（甚至說是，各級單位）研究狀況與風氣，只能說不說也罷。

審查委員及審查意見	意見回覆
余進利委員：	
1. 水波時頻分析在海洋科學及物理中有非常重要之實務應用性，但時頻分析有相當多種之方式，分析所得之結果亦有其差異性；因此，如何進行時頻分析之優化或最佳化，有助於了解訊號分析背後所包含之物理意義及實際現象，本研究相當值得肯定。	本研究探討最適函基的數學要義與應用對象的物理本質，及其兩者之間的對應性如何，暨其可能改善方式。這一提升有可能是一項比較藝術化的作為，它有賴於對相關數學與物理特性都有深入之了解。就水波訊號分析研究而言，作者從最早期的越零位統計法以迄近期的仔波法，所研習探討類別有示性波法、富立葉波譜法、短時富立葉分析、蓋博解析訊號法、希伯轉換、連續仔波轉換、離散仔波轉換。個人認知是，不論是在學理本身或技法特性上，所謂一體適用、全能含蓋之解析與技法是不存在的，但就一個特定物理探討問題，某些技法具有明顯特色，同時存在一些改造性。

余進利委員：

2. 現今常用之時頻分析方法有傅利葉轉換（Fourier transformation）、短時傅利葉轉換（Short-time Fourier transform）、仔波轉換（wavelet transformation）及希爾伯特-黃轉換（Hilbert-Huang transform）等，其中後三者可以得出頻率隨時間變化之特性。近年來，水波物理使用Hilbert-Huang transform 亦不乏少數。本報告詳細說明了短時傅利葉轉換與仔波轉換之數學函義及物理意義，並藉以說明優化之必要性。建議將兩者之異同擇要以列表方式呈現，使讀者更容易了解。

基本上，短時富立葉分析與仔波分析都可視為加罩窗之轉換。對短時富立葉分析而言其時頻罩窗之形狀與大小，在不同時頻下都維持不變。至於莫利仔波的時頻窗則是隨尺度而變化，但這些變化只是形狀上的，其面積大小還是不變的，也就是說時頻窗它的寬度與高度成反比，而乘積則固定，另這一特性對離散或連續仔波轉換都是適用的，只是，幾乎所有的離散仔波，其確實時頻窗的性狀是無法具體描繪，只能用表徵法顯示。另其個別優缺點仍依數據特性之不同而無定論。再者，仔波數學比較抽象化，一般離散仔波是無顯性函數表示法（explicit form 或closed-form），難具體描述。另短時傅立葉轉換與仔波轉換也無法說是那個就比較好，仍必須就數據本身之內涵而言。

余進利委員：

3. 承上，建議補充Hilbert-Huang transform 之相關說明，及與其他時頻分析法之差異比較，使報告內容更為完整。	Hilbert-Huang transform 將欲分析資料以經驗模態分解為本質模態函數，然後再作Hilbert transform。與其他數學轉換運算不同，Hilbert-Huang transform 算是一種應用在數據資料上的經驗演算法，而非理論工具。它是把數據資料預處理後再Hilbert transform。大致可以如此說：傅立葉轉換是將一個訊號分解成無限多個弦波來分析資料，但是Hilbert-Huang transform 則是將一個訊號分解成二大部分，其一是數個周期、振幅不固定而近似於弦波的訊號，另一則是一個趨勢函數，由此兩者來做分析。它偏於經驗法則或直覺假設，與其它轉換法具有完整數學理論，可說屬性不同。再者Huang 把其algorithm patented。
--	--

審查委員及審查意見	意見回覆
蕭松山委員：	
1. 建議圖說簡明，詳細說明列於章節內容。 2. 所採用的ω_0 爲 Erfc（互補誤差函數）的理由建議說明。 3. 下年度計畫執行，建議設計一試驗量測水波訊號，分析此一調適法。	本研究延伸於作者多年對仔波之研究心得與結果。另因仔波數學比較抽象與複雜，且一般離散仔波是無顯性函數表示法，較難具體描述。有些圖說所涉數理細節若要深入具體描述，恐大費章節，基本上可參見作者先前報告研究，本報告中儘可能用概念化、可體會化來形容。 一個固定形狀的母仔波，亦或是不變的ω_0，其縮放之不同尺度是無法對水波組合成分提供全面性的物理切適性。簡而言之，一個固定的莫利母仔波它不是高估了低頻端成分的降減，就是低估了高頻端成分的衰敗，亦或是兩者兼而有之。此處之ω_0 調適法尚是相當主觀，其之所以設為互補誤差函數只能說是針對數學上的水波物理吻合性加以增益，亦即針對上述缺點加以改善的直覺手法。 正如回答梁老師所提問題。為期作為多年來對時頻分析研究探討所費心力的進一步昇華，亦聊盡於公於私該盡之責。作者數年前曾構想及規劃一些試驗，也提報部、會、院審核通過執行，然因中心主任及科長之不學無術（還有公務各相關層級之問題），此刻或只能感於無奈、時不我與。

審查委員及審查意見	意見回覆
黃清哲委員：	
1. 報告中可加強說明為什麼莫利仔波之母仔波最適用於水波訊號之轉換。 2. 最適仔波中含有$e^{-t^2/2}$項，是否包含其較適用於快速衰減之訊號？ 3. 本研究提到的分析方法與Hilbert-Huang轉換的差異及比較，或可於後續的研究中討論。	其實，本報告中有超過一半以上的章節是在說明這一情形。這些章節是累積了多年來作者對仔波的研究與習讀心得的產物。另作者此處並以比較非數學性的說明方式，儘量用物理化、概念性、具體式的闡釋方式為之。其每一項目皆有所本，亦有實際驗證，可說，學理上與應用分析上互為參照，其細節則可參考作者多年來的一些互為相關的研究報告。 基本上，最適仔波的原始衰減特性對絕大多數的物理水波而言，有明顯過於偏激的現象，對於一般人們所關注的海洋波浪而言其偏離更屬嚴重，但對甚高頻率的風生小波其偏離相對則較不嚴重。若針對快速衰減之訊號，則其適用性會較理想。 若把仔波轉換視為二維轉換，則Hilbert-Huang轉換與Hilbert轉換同樣都該視為「一維半」的轉換。Hilbert-Huang轉換算是一種應用在數據資料上的經驗演算法，它只是把數據資料用「經驗式」的預處理後再Hilbert轉換。一般來說，其嚴謹物理未知，而其也並未在Hilbert轉換上增加數學內涵，它只是特意避開一些數值分析上的Hilbert paradoxes。另作者曾對Hilbert轉換行應用探討，出過報告，亦是後續研究的選項。另必須考慮Huang的algorithm是patented。