

103-35-2273  
MOTC-IOT-102-EAA011

# 車流理論－車流行為模化



交通部運輸研究所

中華民國 103 年 3 月



103-35-2273  
MOTC-IOT-102-EAA011

# 車流理論－車流行為模化

著者：許書耕、邱雅莉、巫柏蕙

交通部運輸研究所

中華民國 103 年 3 月

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

車流理論：車流行為模化 / 許書耕，邱雅莉，巫  
柏蕙著. -- 初版. -- 臺北市：交通部運研所，  
民 103. 03

面；公分

ISBN 978-986-04-0981-9(平裝)

1. 公路管理 2. 交通流量

557

103006762

車流理論－車流行為模化

著者：許書耕、邱雅莉、巫柏蕙

出版機關：交通部運輸研究所

地址：10548 臺北市敦化北路 240 號

網址：[www.iot.gov.tw](http://www.iot.gov.tw) (中文版>圖書服務>本所出版品)

電話：(02)23496789

出版年月：中華民國 103 年 3 月

印刷者：京峯數位服務有限公司

版(刷)次冊數：初版一刷 100 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所網站

定價：230 元

展售處：

交通部運輸研究所運輸資訊組・電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 臺北市中山區松江路 209 號・電話：(02)25180207

五南文化廣場：40042 臺中市中山路 6 號・電話：(04)22260330

GPN：1010300599 ISBN：978-986-04-0981-9 (平裝)

著作財產權人：中華民國（代表機關：交通部運輸研究所）

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部分內容者，須徵求交通部運輸研究所  
書面授權。



## 交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：車流理論－車流行為模化			
國際標準書號（或叢刊號） ISBN978-986-04-0981-9 (平裝)	政府出版品統一編號 1010300599	運輸研究所出版品編號 103-35-2273	計畫編號 102-EAA011
主辦單位：運輸工程組 主管：許書耕 計畫主持人：許書耕 研究人員：邱雅莉、巫柏蕙 聯絡電話：(02)2349-6826 傳真號碼：(02)2545-0427			研究期間  自 102 年 3 月  至 102 年 12 月
關鍵詞：車流理論、跟車模式、連續流模式、差分近似			
摘要： <p>車流理論是一門研究「行」的科學，也是一門交通運輸學門相當基本而且重要的學科。本書乃針對其最核心的車流行為模化單元，進行系統化的整理與闡明。</p> <p>自從亨利福特(Henry Ford)於 1908 年 10 月推出第一款汽車產品：Model T，並順利於 1914 年生產了 30 多萬輛車以來，汽車已不再只是替代馬車的一種交通工具而已，它更開啟了人類「行」的新紀元。但同時也衍生出許多前所未有的道路交通問題(例如，交通壅塞及交通事故)。為瞭解進而解決各種道路交通問題，如何正確地模化巨觀的車流行為或微觀的汽車運動行為，已成為從事交通運輸研究者必須面對的研究挑戰。</p> <p>Bruce Douglas. Greenshields 教授是最早對車流行為進行理論研究者，自其於 1935 年提出線性巨觀車流模式以來，車流理論的發展迄今已接近 80 年，並陸續發展出許多模型，有類比水流的巨觀模式，亦有奠基於駕駛行為的微觀模式。國內有相當多位學者投身於此一研究領域，並發表許多著作。惟迄今未有以車流行為模化為專題的中文參考書籍問世，實屬可惜。</p> <p>本專題係從數學模化的角度，將車流理論的發展進行一個系統化的回顧，並加入作者過去數年的研究成果，綜合整理成車流理論的數學模化專題，以彌補前述的缺漏。本專題計分為三個單元：第一單元(第二章)介紹巨觀車流模式；第二單元(第三章與第四章)介紹微觀跟車模式；第三單元(第五章至第八章)介紹巨觀的連續流模式，包括簡單連續流模式與高階連續流模式，以及其差分近似法的技術與模擬應用。</p> <p>本專題可作為初學者入門的指引，並期能提供有志於車流研究者在模化方法上的參考。</p>			
出版日期	頁數	定價	本出版品取得方式
103 年 3 月	253	230	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： <input type="checkbox"/> 密 <input type="checkbox"/> 機密 <input type="checkbox"/> 極機密 <input type="checkbox"/> 絕對機密 （解密條件： <input type="checkbox"/> 年 月 日解密， <input type="checkbox"/> 公布後解密， <input type="checkbox"/> 附件抽存後解密， <input type="checkbox"/> 工作完成或會議終了時解密， <input type="checkbox"/> 另行檢討後辦理解密） <input checked="" type="checkbox"/> 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

**PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS  
INSTITUTE OF TRANSPORTATION  
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS**

TITLE: Traffic Flow Theory – The Modeling of Traffic Flow Behaviors			
ISBN(OR ISSN) ISBN 978-986-04-0981-9 (pbk.)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1010300599	IOT SERIAL NUMBER 103-35-2273	PROJECT NUMBER 102-EAA011
DIVISION: Engineering Division DIVISION DIRECTOR: Hsu Shu-Keng PRINCIPAL INVESTIGATOR: Hsu Shu-Keng PROJECT STAFF: Chiu Ya-Li , Wu Po-Huei PHONE: (02)2349-6826 FAX: (02)2545-0427			PROJECT PERIOD FROM Mar 2013 TO Dec 2013
KEY WORDS: traffic flow theory, car-following models, continuum flow models, finite-difference approximation			
<b>ABSTRACT:</b> <p>Traffic flow theory is a social science that studies "traffic behaviors" and a fundamental subject in the field of transportation. This monograph attempts to systematically compile and delineate the core issues pertaining to the modeling aspects of traffic flow theory.</p> <p>Since the launch of the first car model by Henry Ford in 1908, specifically Model T, and its successful manufacturing of over 300,000 units in 1914, cars have no longer been just an alternative to carriages, but also transcended transportation into a new era. However, the rapid popularity of cars also resulted in several unprecedented traffic problems, such as traffic congestion and traffic accidents. To investigate and resolve these traffic problems, how to correctly model macroscopic traffic flow behaviors or microscopic car following behaviors have become major research challenges for transportation researchers.</p> <p>Since the very first macroscopic traffic flow model proposed by Professor Bruce Douglas Greenshields in 1935, research pertaining to traffic flow theory has continued for almost 80 years. Since then, numerous traffic flow models have been proposed and validated, of which several analogously model traffic behaviors based on fluid dynamics have been introduced, and others focusing on microscopic driving behaviors were proposed. In Taiwan, numerous researchers have devoted themselves to the study of traffic flow theory and published numerous related papers. Unfortunately, no Chinese-based textbooks or monographs regarding traffic flow modeling have previously been published.</p> <p>To fill this gap, this monograph aims to introduce the mathematical concepts and insights of traffic flow modeling through a systematical overview and compilation of traffic flow literature, including several of our previous studies. The monograph contains three parts, in which the the first part (Chapter II) introduces macroscopic traffic flow models; the second part (Chapters III and IV) introduces microscopic car-following models; and the third part (Chapters V to VIII) elaborates continuum flow models, which includes simple continuum models and high-order models, as well as finite-difference approximation methods for these models.</p> <p>We hope that this monograph serves as a guideline for elementary researchers and as a reference for advanced researchers in traffic flow modeling.</p>			
DATE OF PUBLICATION  March 2014	NUMBER OF PAGES  253	PRICE  230	CLASSIFICATION <input type="checkbox"/> RESTRICTED <input type="checkbox"/> CONFIDENTIAL <input type="checkbox"/> SECRET <input type="checkbox"/> TOP SECRET <input checked="" type="checkbox"/> UNCLASSIFIED
1. The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications. 2. The budget of this research project is contributed by .			

# 目錄

目錄	III
表目錄	VII
圖目錄	VIII
<b>第一章 緒論</b>	
1.1 研究背景	1-1
1.2 研究目的與範圍	1-2
1.3 章節安排	1-3
<b>第二章 車流參數與巨觀水流模式</b>	
2.1 車流參數	2-1
2.1.1 參數的符號與定義	2-1
2.1.2 參數的量測	2-2
2.2 車流參數的估算與對映關係	2-9
2.2.1 參數巨觀與微觀的對映	2-9
2.2.2 算術平均與調和平均	2-11
2.2.3 其他參數間的關係	2-16
2.3 巨觀水流模式	2-20
2.3.1 速率-密度模式	2-21
2.3.2 流率-密度模式	2-25
2.3.3 速率-流率模式	2-28
2.4 本章小結	2-30
<b>第三章 微觀跟車模式</b>	
3.1 跟車模式早期的發展	3-1
3.2 美國通用汽車公司跟車模式的發展	3-3
3.2.1 Herman 與其團隊	3-4
3.2.2 跟車行為模化的概念架構	3-5
3.2.3 Herman 團隊五代跟車模式	3-9
3.2.4 微觀與巨觀模式穩定狀態下的對映關係	3-14
3.3 微觀與巨觀模式對映的問題	3-21
3.3.1 從微觀模式導出巨觀模式的問題	3-21
3.3.2 應用微觀跟車模式進行跟車模擬時的問題	3-23
3.4 跟車模式參數的校估	3-28
3.4.1 以微觀跟車資料校估跟車模式參數	3-28
3.4.2 以巨觀車流資料校估跟車模式參數	3-30
3.5 本章小結	3-36

## 第四章 跟車模式安定性分析

4.1 跟車模式的局部與漸近安定性	4-1
4.1.1 跟車的局部安定性	4-2
4.1.2 車隊跟車的漸近安定性	4-4
4.2 各種線性跟車模式及其安定性	4-6
4.2.1 等比控制-無反應延遲	4-6
4.2.2 等比控制-有反應延遲	4-7
4.2.3 等車間程	4-8
4.2.4 加州安全跟車規範	4-9
4.2.5 線性跟車模式安定性的綜合檢討	4-10
4.3 線性跟車模式安定性模擬分析	4-11
4.3.1 線性跟車模式的局部安定性	4-11
4.3.2 線性跟車模式的漸近安定性	4-13
4.3.3 線性跟車模式安定性分析小結	4-24
4.4 非線性微觀跟車模式安定性模擬分析	4-24
4.4.1 非線性跟車模式的漸近安定性	4-25
4.4.2 非線性跟車模式符合漸近安定性條件的 $T-k$ 關係	4-30
4.5 本章小結	4-31

## 第五章 簡單連續流模式

5.1 車波-衝擊波法	5-1
5.1.1 車波-衝擊波理論	5-1
5.1.2 車波-衝擊波數學解	5-8
5.1.3 車波-衝擊波的應用	5-12
5.2 紙上剪力圖	5-24
5.2.1 明渠水流運動的數學表示	5-24
5.2.2 明渠水流運動的紙上剪力圖表示	5-25
5.2.3 紙上剪力圖法與車波-衝擊波法的比較	5-30
5.3 車波-衝擊波的其他應用	5-33
5.3.1 單向單車道的慢速車	5-33
5.3.2 單向雙車道的慢速車隊	5-36
5.4 本章小結	5-41

## 第六章 高階連續流模式

6.1 簡單連續流模式	6-1
6.1.1 簡單連續流模式的定式	6-1
6.1.2 簡單連續流模式的數學解	6-4
6.1.3 簡單連續流模式的特性	6-6
6.1.4 簡單連續流模式所遭受的批評	6-7
6.2 高階連續流模式的發展	6-9

6.2.1 高階模式的研發	6-9
6.2.2 高階模式的困境	6-10
6.3 高階模式的改良	6-12
6.3.1 排除車流向後退的改良	6-12
6.3.2 高階連續流的通用型模式	6-13
6.3.3 通用型高階連續流模式的特性	6-15
6.4 高階連續流模式的比較與評論	6-15
6.4.1 連續流模式的比較	6-15
6.4.2 高階連續流模式的評論	6-17
<b>第七章 連續流模式有限差分</b>	
7.1 有限差分原理與各種差分法	7-1
7.1.1 有限差分原理	7-1
7.1.2 各種有限差分方式	7-7
7.2 一階線性連續流模式之有限差分模擬	7-10
7.2.1 線性模式之有限差分式	7-10
7.2.2 車流起始條件與邊界條件均為連續函數	7-12
7.2.3 起始條件或邊界條件為不連續函數	7-14
7.3 一階準線性連續流模式有限差分之比較	7-17
7.3.1 一階準線性連續流模式之有限差分式	7-17
7.3.2 起始條件與邊界條件為連續函數	7-18
7.3.3 起始條件或邊界條件為不連續函數	7-19
7.4 一階準線性連續流模式嚴苛交通案例分析	7-21
7.4.1 產生向上游回溯衝擊波的有限差分模擬	7-21
7.4.2 長停等車隊起動向前疏解的有限差分模擬	7-26
7.4.3 獨立停等車隊不向後退的有限差分模擬	7-29
7.5 本章小結	7-31
<b>第八章 高階連續流模式的有限差分模擬</b>	
8.1 高階連續流模式的有限差分	8-1
8.1.1 Payne 高階連續流模式	8-1
8.1.2 Payne 高階連續流模式的有限差分式	8-2
8.1.3 相關研究對高階連續流模式有限差分式的評論	8-4
8.2 高階連續流模式的 LAX-F 有限差分式	8-5
8.2.1 密度及流率公式的 Lax-F 有限差分式	8-5
8.2.2 速率公式的 Lax-F 有限差分式	8-6
8.3 高階連續流模式的數值模擬	8-7
8.3.1 參數與模擬環境設定	8-8
8.3.2 產生向上游回溯衝擊波的有限差分模擬	8-9
8.3.3 長停等車隊起動向下游疏解的有限差分模擬	8-17

8.3.4 獨立停等車隊不向後退的有限差分模擬 -----	8-21
8.4 本章小結 -----	8-26
<b>第九章 結論與建議</b>	
9.1 結論 -----	9-1
9.2 建議 -----	9-6
<b>參考文獻</b> -----	<b>參-1</b>

## 表目錄

表 2-2-1	不同取樣方式獲得樣本的組成比較 -----	2-18
表 3-2-1	第一代模式跟車實驗結果 -----	3-10
表 3-2-2	滿足 $u_f, k_j$ 至少一個車流邊界條件的 $l-m$ 矩陣 -----	3-16
表 3-2-3	既有巨觀水流模式對映的 $l-m$ 矩陣 -----	3-19
表 3-3-1	線性微巨觀模式對映關係的模擬基本設定 -----	3-24
表 3-3-2	非線性微巨觀模式對映關係模擬的基本設定 -----	3-26
表 3-4-1	$l-m$ 跟車模式最可靠的參數推估結果 -----	3-29
表 3-4-2	整數與非整數車流模式解的比較 -----	3-35
表 4-2-1	各種線性跟車模式定式與安定性分析結果 -----	4-10
表 4-3-1	線性跟車模式局部安定性模擬的各項設定 -----	4-11
表 4-3-2	線性跟車模式漸近安定性模擬的各項設定 -----	4-14
表 4-3-3	線性跟車模式受 $T$ 及最大允許加速度影響模擬的各項設定 ----	4-17
表 4-3-4	線性跟車模式各種密度( $K$ )下的最大允許加速度 -----	4-18
表 4-3-5	漸近安定下線性跟車模式不同 $T$ 的各項模擬設定 -----	4-19
表 4-4-1	非線性跟車模式漸近安定性模擬的各項設定 -----	4-25
表 4-4-2	非線性跟車模式在各種密度( $K$ )下的最大允許加速度 -----	4-27
表 4-4-3	非線性跟車模式符合漸近安定的條件 -----	4-29
表 5-1-1	各種車波線的名稱與編號 -----	5-17
表 5-1-2	波推進公式 -----	5-21
表 5-1-3	兩波相交的判定與相交後產生的新波 -----	5-23
表 5-1-4	號誌綠燈轉紅燈時不同到達車波產生的停止波 -----	5-23
表 6-1-1	一階連續流方程式之分類 -----	6-2
表 6-1-2	設定不同水流模式之 LWR 連續流模式 -----	6-3
表 6-4-1	不同高階連續流模式的兩特性根值 -----	6-17
表 7-1-1	一階連續流模式各顯式有限差分式 -----	7-9
表 7-2-1	一階線性連續流模式各顯式有限差分式及其收斂條件 -----	7-11
表 7-2-2	起始與邊界條件均為連續函數各有限差分法的誤差評比 -----	7-13
表 7-2-3	起始條件為不連續函數各有限差分法的誤差評比 -----	7-16
表 7-3-1	LWR 連續流模式三種顯式有限差分法 -----	7-18
表 8-1-1	莊國欽以有限差分模擬匝道儀控的結果 -----	8-5

## 圖目錄

圖 2.1.1	手動計數器 -----	2-3
圖 2.1.2	氣壓管偵測器佈設於雙車道公路實例 -----	2-3
圖 2.1.3	微波偵測器佈設示意圖 -----	2-4
圖 2.1.4	紅外線偵測器佈設示意圖 -----	2-5
圖 2.1.5	錄影處理系統示意圖 -----	2-5
圖 2.1.6	RFID 佈設示意圖 -----	2-6
圖 2.1.7	磁感應線圈偵測器佈設示意圖 -----	2-6
圖 2.1.8	兩組磁感應線圈偵測速率與車長示意圖 -----	2-7
圖 2.1.9	浮動車法的步驟與調查項目 -----	2-8
圖 2.2.1	Wardrop 車輛隨機到達與互不干擾的假設 -----	2-11
圖 2.2.2	Wardrop 車輛隨機到達空間取樣示意圖 -----	2-13
圖 2.2.3	Wardrop 車輛隨機到達時間取樣示意圖 -----	2-13
圖 2.2.4	連續車輛通過定點微觀與巨觀流率的關係 -----	2-15
圖 2.2.5	某瞬間路段內連續車輛微觀與巨觀密度的關係 -----	2-16
圖 2.2.6	圓周跑道不同車速樣本分布圖 -----	2-17
圖 2.3.1	Greenshields 設計的車流量測設備與量測範例 -----	2-21
圖 2.3.2	Greenshields 建立與校估的速率-密度模式 -----	2-22
圖 2.3.3	Greenberg 速率-密度模式 -----	2-23
圖 2.3.4	各種速率-密度模式示意圖 -----	2-24
圖 2.3.5	車流基本圖 -----	2-25
圖 2.3.6	各種流率-密度模式示意圖 -----	2-26
圖 2.3.7	多倫多市某道路四天的流量-占量資料 -----	2-27
圖 2.3.8	Greenshields 建立與校估的流率-速率模式 -----	2-28
圖 2.3.9	速率-流率模式型式的演變 -----	2-29
圖 3.1.1	Reuschel 與 Pipes 跟車行為關係圖 -----	3-2
圖 3.1.2	Forbe 跟車行為關係圖 -----	3-3
圖 3.2.1	Herman 跟車實驗量測車間距離的纜線捲軸設備 -----	3-4
圖 3.2.2	跟車行為的控制理論架構 -----	3-5
圖 3.2.3	跟車行為的簡化控制理論架構 -----	3-6
圖 3.2.4	相對速率刺激與隨時而變的加權函數 -----	3-7
圖 3.2.5	第一代跟車模式敏感係數與車間程倒數的關係 -----	3-11
圖 3.2.6	30 次隧道實車實驗的增益因子與時差的關係 -----	3-12
圖 3.2.7	荷蘭隧道與林肯隧道實車實驗的增益因子與時差的關係 -----	3-13
圖 3.2.8	常態化後的流率與密度關係圖( $m=0$ ) -----	3-17
圖 3.2.9	常態化後的流率與密度關係圖( $m=-1$ ) -----	3-17



圖 3.2.10	常態化後的流率與密度關係圖( $m=1$ )	3-18
圖 3.2.11	不同 $l-m$ 跟車模式對映的巨觀車速-密度關係	3-18
圖 3.2.12	既有巨觀水流模式在 $l-m$ 空間上的分布	3-19
圖 3.3.1	線性跟車模式微觀與巨觀模式間之關係	3-21
圖 3.3.2	非線性跟車模式微觀與巨觀模式間之關係	3-22
圖 3.3.3	線性微巨觀模式對映關係模擬的起始設定	3-24
圖 3.3.4	線性微觀跟車模式模擬的兩車時空軌跡圖	3-25
圖 3.3.5	線性微巨觀模式對映關係模擬結果	3-25
圖 3.3.6	非線性微巨觀模式對映關係模擬結果	3-27
圖 3.4.1	非整數指數參數對 $u-k$ 關係式的影響	3-31
圖 3.4.2	平均車速等離差曲線圖	3-31
圖 3.4.3	等最大流率曲線	3-32
圖 3.4.4	等自由流與臨界車速及等壅塞及臨界密度曲線	3-33
圖 3.4.5	各項準則重疊結果	3-34
圖 4.1.1	跟車之局部安定性(兩車車間程的變化)	4-3
圖 4.1.2	車隊的漸近安定性檢驗範例(非漸近安定)	4-5
圖 4.3.1	線性跟車模式局部安定性模擬結果	4-12
圖 4.3.2	線性跟車模式局部安定性模擬結果車軌跡圖	4-13
圖 4.3.3	線性跟車模式漸近安定性模擬結果	4-15
圖 4.3.4	線性跟車模式漸近安定性模擬結果車軌跡圖	4-16
圖 4.3.5	線性跟車模式最大允許加速度模擬結果( $\lambda=1/2, K=70$ )	4-18
圖 4.3.6	漸近安定下線性跟車模式不同 $T$ 的模擬起始設定	4-19
圖 4.3.7	漸近安定下不同 $T$ 線性跟車模式模擬結果( $K=40$ )	4-21
圖 4.3.8	漸近安定下不同 $T$ 線性跟車模式模擬結果車軌跡圖( $K=40$ )	4-22
圖 4.3.9	漸近安定下線性跟車模式不同 $K$ 模擬結果車波軌跡圖	4-23
圖 4.4.1	非線性跟車模式漸近安定性三種模擬結果	4-26
圖 4.4.2	非線性跟車模式符合漸近安定條件最大允許加減速率	4-28
圖 4.4.3	非線性跟車模式符合漸近安定條件之 $K-T$ 分布圖	4-30
圖 5.1.1	車波在流率-密度曲線上與時空圖上的表示	5-2
圖 5.1.2	以衝擊波描繪車流峰時空推進示意圖	5-3
圖 5.1.3	瓶頸容量大於到達流率的車波行進變化圖	5-4
圖 5.1.4	瓶頸容量小於到達流率的車波變化圖	5-5
圖 5.1.5	均勻到達流停止一段時間再起動的時空圖	5-7
圖 5.1.6	未飽和號誌路口的車流時空圖	5-7
圖 5.1.7	推導守恆式的封閉路段與測站	5-8
圖 5.1.8	衝擊波界面示意圖	5-10
圖 5.1.9	車速與衝擊波、車波在 $Q-K$ 曲線上的意義	5-11
圖 5.1.10	受號誌干擾的車波示意圖	5-13

圖 5.1.11	起動波扇形模化示意圖 -----	5-13
圖 5.1.12	路段受上下游號誌干擾的車波線示意圖 -----	5-17
圖 5.1.13	各種波線運動軌跡示意圖 -----	5-18
圖 5.2.1	紙上剪力圖向前流動解 -----	5-25
圖 5.2.2	紙上剪力圖出現二個水位不合理的狀況 -----	5-26
圖 5.2.3	紙上剪力圖向後衝擊波解 -----	5-26
圖 5.2.4	紙上剪力圖起始解 -----	5-27
圖 5.2.5	向後起動波追上向後衝擊波瞬間 -----	5-28
圖 5.2.6	向後起動波追上向後衝擊波以後的變化 -----	5-28
圖 5.2.7	Greenshields 巨觀水流模式在 LWR 模式對映上的角色 -----	5-31
圖 5.2.8	紙上剪力圖起動模化與扇形車波的對映 -----	5-32
圖 5.2.9	紙上剪力圖起動波追上停止波與車波-衝擊波處理的對映 -----	5-32
圖 5.3.1	故障車在單車道上的影響 -----	5-34
圖 5.3.2	慢速車在單車道上的影響 -----	5-35
圖 5.3.3	移動座標系統上的流率-密度關係 -----	5-37
圖 5.3.4	移動座標系統上的衝擊波軌跡 -----	5-38
圖 5.3.5	固定座標系統上的衝擊波軌跡 -----	5-40
圖 6.1.1	黎曼問題的解 -----	6-4
圖 6.1.2	黎曼問題的衝擊波解 -----	6-5
圖 6.1.3	黎曼問題的扇形波解 -----	6-5
圖 6.2.1	高階連續流模式會令車隊倒車後退範例 -----	6-11
圖 6.4.1	高階連續流模式的比較範例 -----	6-16
圖 7.1.1	單變數函數差分近似範例 -----	7-2
圖 7.1.2	差分的時空網格狀切割 -----	7-3
圖 7.1.3	FTFS 有限差分法的格點選取 -----	7-8
圖 7.1.4	Lax-F 有限差分法的應變數值域 -----	7-10
圖 7.2.1	一階線性連續流問題起始與邊界條件均連續範例 -----	7-12
圖 7.2.2	一階線性連續流問題起始條件不連續範例 -----	7-14
圖 7.3.1	LWR 模式起始與邊界條件均連續的有限差分解 -----	7-19
圖 7.3.2	LWR 模式起始條件不連續的有限差分解 -----	7-20
圖 7.4.1	LWR 模式產生向上游回溯衝擊波的起始與邊界條件範例 -----	7-22
圖 7.4.2	Leapfrog 模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波(側面圖) -----	7-23
圖 7.4.3	Lax-W、Lax-F 模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波(側面圖) -----	7-24
圖 7.4.4	Lax-W、Lax-F 模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波(鳥瞰圖) -----	7-25
圖 7.4.5	LWR 模式產生向前稀釋波的起始與邊界條件範例 -----	7-26
圖 7.4.6	LWR 模式向前起動稀釋波的二種模化 -----	7-27
圖 7.4.7	Lax-F 模擬 LWR 模式向前起動稀釋波 -----	7-28
圖 7.4.8	LWR 模式車流不向後退的起始與邊界條件範例 -----	7-29

圖 7.4.9	Lax-F 驗證 LWR 模式車流不向後退 -----	7-30
圖 8.3.1	Ross 模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果 -----	8-10
圖 8.3.2	Payne、Liu 等與 Zhang 改良 Ross 模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果 -----	8-11
圖 8.3.3	Zhang 模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果 -----	8-12
圖 8.3.4	各種高階連續流模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果 -----	8-14
圖 8.3.5	向上游回溯衝擊波理論解析解與 Lax-F 有限差分解之比較 ----	8-16
圖 8.3.6	Ross 模式長停等車隊起動的模擬結果 -----	8-18
圖 8.3.7	Payne、Liu 等與 Zhang 改良 Ross 模式長停等車隊起動的模擬結果 -----	8-19
圖 8.3.8	Zhang 模式長停等車隊起動的模擬結果 -----	8-20
圖 8.3.9	Ross 模式獨立等候車隊起動的模擬結果 -----	8-22
圖 8.3.10	Payne、Liu 等與 Zhang 改良 Ross 模式獨立等候車隊起動的模擬結果 -----	8-23
圖 8.3.11	Zhang 模式獨立等候車隊起動的模擬結果 -----	8-24
圖 8.3.12	各高階連續流模式對獨立等候車隊起動的模擬結果 -----	8-25



# 第一章 緒論

車流理論是研究「行」的科學，係僅見於交通運輸學門相當基本、重要的學科，本研究嘗試針對其最核心的車流行為模化單元，作有系統的整理與闡明。本章首先說明本研究的背景，其次說明本研究的目的與範圍，最後依序說明本研究各章的安排及內容的簡介。

## 1.1 研究背景

亨利福特(Henry Ford)在 1908 年 10 月推出 Model T (最高時速可達 45 英哩)，1913 年 10 月量產，1914 年全年共生產 30 多萬輛車，比同期其他 299 家汽車製造廠生產的總和還多。從此，汽車不再只是陸路運輸替代馬車的一種選項，它開啟了人類「行」的新紀元，但也衍生出許多前所未有的道路交通問題，例如交通壅塞等。而為掌握進而解決各種道路交通問題，要如何模化整體的車流行為，更深入的，要如何模化人類駕駛下的汽車運動行為？便成為人類必須面對的挑戰，而由於都是一種流動，很自然地，一開始研究者都將車流視如水流來模化。

Greenshields 係最早對車流行為進行理論研究者。從其在設計交通調查設備時的慎重與嚴謹態度，可以讓人充分瞭解在面對一個全新的科學，早期研究者是如何的戒慎恐懼(Greenshields,1933)。當然，在統計觀念尚未普及，科學家習以少數樣本來驗證其已定論點的那個年代，不論在方法上或在實驗與推論上都有許多需要改進之處，但只要想到 Model T 大量生產時中華民國才剛誕生，Greenshields 提出巨觀水流模式時，中華民國剛完成北伐、正推動「新生活運動」，就能體會並讚歎，在當時從事這樣的研究是多麼的先進與創新。

車流行為研究最關鍵的問題--人類如何駕駛汽車，要一直等到 1950 年代末，在 Herman 團隊研發出微觀跟車模式才有了重大突破。Herman 團隊劃時代的貢獻，不僅在於以簡單的數學式及少數的參數即構建出人類複雜跟車行為的基本雛型，更在於此一微觀模型在達均衡時竟然與過去發展了數十年的巨觀水流模式呈一對一對映的關係。從此，人類不僅能掌握整體上似水流的車流行為，亦可以掌握其個別車輛的跟車行為，專屬於交通的一門新的科學—「車流理論」，於焉誕生，其歷經這麼多年發展的重要研究歷程與成果，實值得有系統的介紹。

## 1.2 研究目的與範圍

車流理論的發展依時間先後順序有幾個重要的階段：

- (1) 1950 年以前，主要的研究是建構水流模式(stream models)，最具代表性的是 Greenshields(1935)水流模式，其主要目的是建立車流的流率-密度-速率三參數間兩兩的關係，並據以找出道路交通的最大流率，即容量(capacity)。
- (2) 1950 年代有兩個重要的發展，一是跟車模式(car-following models)的成功研發，最具代表性的是 Robert Herman 領導的 GM 研究團隊發展出來的 *l-m* 跟車模式；另一則是車流連續流模式(continuum models)的發展，最具代表性的是 Lighthill and Whitham(1955)及 Richards(1956)提出的一階連續流模式，後人簡稱之為 LWR 模式。
- (3) 然後要跳到 1970 年代，主要是高階連續流模式的發展，最具代表性的是 Payne(1971)提出的高階連續流模式，往後二十餘年，相關研究主要是以該模式為基礎，提出不同的變化或修正版本。
- (4) 1990 年代，車流理論的發展出現一個重大的轉折。Daganzo(1995)為文嚴厲批判過去以 Payne(1971)模式為基礎發展出的各型高階連續流模式，多出現車流會在道路上倒車後退的理論錯誤。從此，車流研究的重點工作，遂變成「找出不會令車流倒車後退的高階連續流模式」，這個方向的努力很快就有好的結果，最具代表性的是 Zhang(1998)提出的新高階連續流模式。

由上述說明知，車流理論自 Greenshields(1935)提出線性巨觀水流模型以來已接近 80 年，其間並已發展出許多模型，有類比水流的巨觀模型，亦有基礎於駕駛行為的微觀模型，而國內亦有許多相關研究，惟迄今一直未見以車流行為模化為專題的中文參考著作，實有不足。

本研究的目的，即係從數學模化的角度，將車流理論的發展做一個有系統的回顧，並加入作者過去數年有關跟車模式安定性及高階模式近似解等的研究成果，綜合整理成車流理論的數學模化專題，以彌補前述的缺漏，期能作為初學者入門的指引，並提供有志於車流研究者在模化方法上的參考。

本研究的範圍，只專注於車流行為的模化，且只限於互有對映關係的單元，例如巨觀水流模式、微觀跟車模式，及巨觀的連續流模式等。除模式的發展外，本研究亦會闡述各種模式的應用，例如衝擊波理論的應用，及連續流模式的差分技術與模擬分析等。

## 1.3 章節安排

本報告除第一章緒論及第九章的結論與建議外，共分三個單元。第一單元(第二章)介紹巨觀水流模式及其參數，並說明空間平均速率與時間平均速率在調查取樣與計算公式上應如何配合；第二單元(第三章與第四章)介紹微觀跟車模式及其安定性(Stability)的條件，並說明微觀跟車模式在穩定狀態(steady-state)下與巨觀水流模式一對一靜態對映的關係。第三單元(第五章至第八章)介紹連續流模式，係與微觀跟車模式具動態對映關係的巨觀模式，包括只能模化穩定狀態下車流行為的簡單連續流模式，與亦能模化非穩定狀態車流行為的高階連續流模式。茲簡要介紹各章的內容如下：

### 第一章 緒論

說明本研究的背景、目的、範圍，及章節安排。

### 第二章 車流參數與巨觀水流模式

先定義各種車流參數，再說明各參數的量測與估算方式，最後說明早期車流理論相關研究陸續建立的，以巨觀參數為基礎的各種巨觀水流模式。

### 第三章 微觀跟車模式

回顧跟車模式的發展歷程，並說明微觀跟車模式與巨觀水流模式在穩定狀態下的對映關係。另亦回顧跟車模式的參數校估方法(模式確認)。

### 第四章 跟車模式安定性分析

任何模式在實際應用之前，均須通過兩個層次的檢驗，一係模式驗證(verification)，係檢驗模式本身的特性是否符合原設計者的本意；另一則係模式確認(validation)，係檢驗模式對所模化系統的真實代表性。跟車模式安定性分析係屬模式驗證，因份量較多，故特闢專章來說明。

### 第五章 簡單連續流模式

介紹簡單連續流模式，即一般所稱的 LWR 模式，是能動的巨觀車流模式中最簡單的一種。會依序介紹衝擊波理論與紙上剪力圖技術，並以 Greenshields 巨觀水流模式為例，比較衝擊波理論與紙上剪力圖法的異同。

### 第六章 高階連續流模式

高階連續流模式不但能巨觀模化車流均衡狀態下的(等速)運動，亦能模化非均衡時的(加減速)運動。係以數學而非圖解方式來介紹，依由簡至繁順序，先以簡單連續流模式的數學分析作暖場，再介紹較為複雜的高階連續流。

## **第七章 連續流模式有限差分解**

先介紹有限差分(finite difference)的原理及有效地有限差分需滿足的條件；接著回顧求解一階連續流模式的各種有限差分法，及實際模擬應用於一階線性與準線性連續流模式的成效；最後針對 LWR 模式爭議性課題，包括到達車流接近停止車隊產生向上游回溯衝擊波、無限長車隊起動向下游疏解，以及獨立等候車隊是否向後退等，進行有限差分模擬。

## **第八章 高階連續流模式的數值模擬**

先回顧檢討相關研究用於高階連續流模式的有限差分方法，再提出高階連續流模式適用的有限差分聯立公式，接著以各種高階連續流模式的有限差分式，依序模擬到達車流接近停止車隊產生向上游回溯衝擊波、無限長車隊起動向下游疏解，以及獨立等候車隊是否向後退等狀況，並與前章 LWR 模式的解析解及有限差分近似解作比較。

## **第九章 結論與建議**

綜合整理車流行為模化各單元的精要，提出後續研究「深」的建議。並對微、巨觀車流行為模化均隱含的假設--單車道公路，提出後續研究「廣」的建議。



## 第二章 車流參數與巨觀水流模式

車流行為可以透過其巨觀或微觀參數的觀測一窺其貌，其需要的量測方式不同，平均值推估方式各異，參數間亦存有特殊的對映關係。本章首先定義各種車流參數，其次說明各參數的量測與估算方式，最後說明早期車流理論相關研究陸續建立的、以巨觀參數為基礎的各種巨觀水流模式(stream models)。

### 2.1 車流參數

車流的重要參數，計有流率、密度、速率、占量、集中度、車頭距、車間程等，除後二者屬微觀量測值外，其餘均為巨觀量測值。本節說明其慣用符號與定義，及各種參數量測技術與可取得參數的種類。

#### 2.1.1 參數的符號與定義

##### 1. 流率( $q$ , flow rates)

流率( $q$ )定義為「車流在單位時間內通過道路某定點的車數」，單位為「車/小時」。流率定義上的特殊處在於「某定點」，由於須指出觀測定點，因此不能問中山高速公路上午 10 時的流率是多少，但可以問上午 10 時通過泰山收費站的流率。習慣上，觀測時間連續 1 小時者係稱為流量(volume)，小於 1 小時但轉換成一小時者方稱為流率(flow rates)。後者如 1985 年美國公路容量手冊(Highway Capacity Manual，簡稱 HCM) 建議公路容量及服務水準分析採連續 15 分鐘的量，但應用上均轉換成 1 小時的量以利比較。值得說明者，由於流率係在定點上觀測車流，其每一樣本內車輛的多寡決定於取樣時間的長短，因此本研究稱此觀測方式為「定點-長時間」法。

##### 2. 密度( $k$ , density)

密度( $k$ )定義為「車流某瞬間分布在道路單位長度內的車輛數」，單位為「車/公里」。密度定義上的特殊處在於「某瞬間」，可以想像對公路空中照相的結果，而同段道路的交通，不同時間的空照相片內涵均不同，其每一瞬間取得的都是個別的樣本。值得說明者，由於密度係以瞬間來觀測車流，其每一樣本內車輛的多寡決定於取樣空間的長短，因此本研究稱其觀測方式為「瞬間-長距離」法。

##### 3. 速率( $u$ , speeds)

速率分成微觀的現點速率( $v_i$ , spot speed)，及巨觀的時間平均速率( $u_t$ , time mean speed)與空間平均速率( $u_s$ , space mean speed)，不論是微觀或巨觀的速率，單位均為「公里/小時」，另為特殊研究課題方便，亦可採「公尺/秒」。現點速率定義為「個別車輛通過道路某定點的速率」，由於車輛行經道路任一點的速率可能均不同，因此必須指出觀測定點；時間平均速率定義為「車流在單位時間內通過道路某定點各車輛速率的平均值」，係針對一組微觀現點速率樣本取其算術平

均的結果；空間平均速率定義為「車流分布在道路某段範圍內某瞬間各車輛速率的平均值」，係針對取樣範圍(某長度路段)內各車輛某瞬間的速率樣本取其算術平均的結果，由於各車取樣地點不同，故其樣本並非微觀現點速率。由以上的說明知，平均車速有 2 種定義，其取樣方式，時間平均速率係採「定點-長時間」法，空間平均速率係採「瞬間-長距離」法，二者均採算術平均求平均值。此外，現點速率係一特定名詞，專指時間平均速率的個別車輛樣本，空間平均速率的樣本則無特定名詞。

#### 4. 占量( $O_T$ , occupancy)

占量( $O_T$ )定義為「車流在單位時間內占有道路某短距區段的時間比例」，不論觀測時間多長，其單位均為「百分比(%)」。由於密度的取得係採「瞬間-長距離」法，其最精確與直接的方式係採空中照相，惟在日常的交通管理上要持續不斷的進行空中照相實務上相當困難，故一般以「定點-長時間」法取得占量資料，再經適當轉換可得相當的密度值。所以，占量可稱為時間上的密度。

#### 5. 集中度(concentration)

此一名詞過去一直是密度的另一種稱謂，現在則為密度與占量的統稱。

#### 6. 車頭距( $h$ , headway)

車頭距( $h$ )定義為「連續兩輛車之同一參考點通過道路某定點的時間差」，單位為「秒」。車輛參考點一般可取車輛的最前緣(前緩衝桿)或最後緣(後緩衝桿)；道路定點依用途而不同，如設於號誌交岔路口的停止線，則此一觀測值反映車輛連續起動間隔時間的分布，可用以估算綠燈疏解時的飽和流率(saturation flow rate)。值得說明者，由於數學上車頭距的倒數即為流率，因此一般稱車頭距的倒數為微觀的流率。

#### 7. 車間程( $s$ , spacing)

車間程( $s$ )定義為「連續兩輛車之同一參考點某瞬間在道路上的間隔距離」，單位為「公尺」。車間程包含前車的全長，及前車後緣與後車前緣的間隙(gaps)，且可以是運動中或停止狀態。值得說明者，由於數學上車間程的倒數即為密度，因此一般稱車間程的倒數為微觀的密度。

### 2.1.2 參數的量測

車流參數的量測方式可分成短距量測(over a short section, < 10 公尺)與長距量測(over a length of road, > 500 公尺)等。短距量測屬前節所稱的「定點-長時間」法；固定長距量測則屬「瞬間-長距離」法。本節說明各種量測方式的技術與原理。

## 1.短距量測

顧名思義，係在一定點或小區間上來觀測車流，其既有的量測技術包括：

- (1) 手動計數器(hand tallies)：如圖 2.1.1 所示，係以人員站在路側，手動累積按壓計數器的方式量測車輛通過某參考線的交通量。通常一個人同時操作手動計數器的有效數量是 4 具，可以計數 4 個車道或 4 車種的通過量。



圖 2.1.1 手動計數器

- (2) 氣壓管(pneumatic tube)：為可攜式交通資料蒐集設施，適合短期交通工程研究。以直徑 1 公分的氣壓管橫向埋設在道路各車道上，當車輛壓過時累積量測其車軸數。如佈設雙管，亦可以量測車速，如圖 2.1.2 所示。

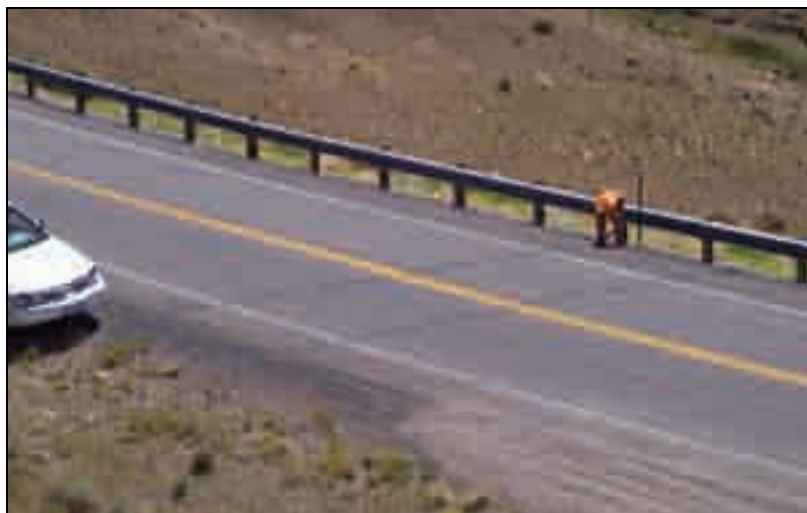
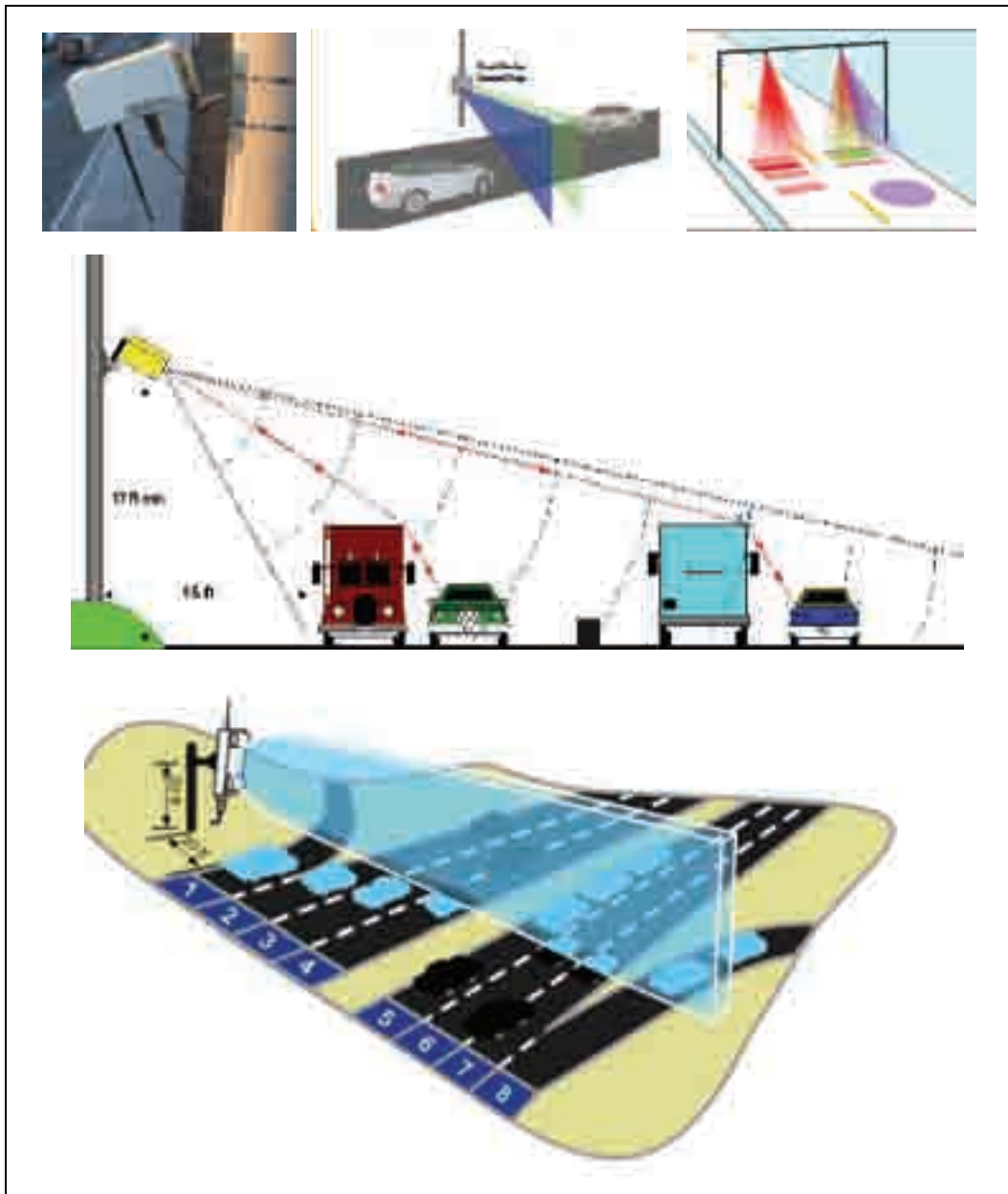


圖 2.1.2 氣壓管偵測器佈設於雙車道公路實例

資料來源：McGowen, P. and M. Sanderson, "Accuracy of Pneumatic Road Tube Counters," A report prepared for the 2011 Western District Annual Meeting Institute of Transportation Engineers Anchorage, AK.

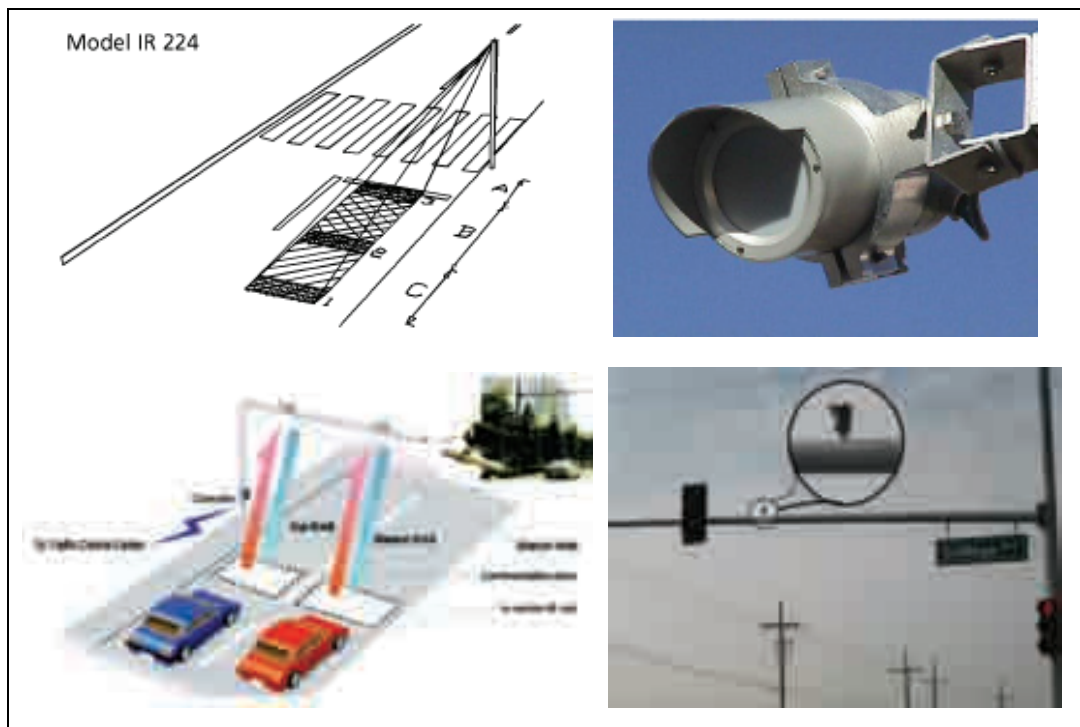
- (3) 微波(microwave): 係一微型雷達(a miniature radar), 以調頻連續波(frequency modulated continuous wave, FMCW)持續放射 2 道低功率微波信號, 形成一個固定的扇形光束, 在道路上畫出一個橢圓形的足跡, 如圖 2.1.3 所示。任何背景外的標的物行經該處均會被偵出並量測, 其測量分辨率為 2 公尺。應用時允許將橢圓足跡切成 32 片, 使用者可自行定義 1~8 個檢測區, 每區由一個或多個切片組成。除可量測流量外, 該技術藉車輛通過兩道光束的時間差, 亦號稱可量測車速。



**圖 2.1.3 微波偵測器佈設示意圖**

資料來源：Muench, S, "Traffic Detection Systems," CEE 320, Winter 2006.

- (4) 紅外線(Infrared)：藉由量測車輛通過時的溫度差異來量測流量，如能區隔出雙組，亦可量測車速，如圖 2.1.4 所示。



**圖 2.1.4 紅外線偵測器佈設示意圖**

資料來源：Muench, S, "Traffic Detection Systems". CEE 320, Winter 2006.

- (5) 錄影處理系統(Video Image Processing System, VIPS)：係以攝錄影機配合影像辨識與處理軟體，在螢幕上劃設取樣範圍，可取得即時的流率、速率、占量等資料，如圖 2.1.5 所示。



**圖 2.1.5 錄影處理系統示意圖**



- (6) 無線射頻(radio-frequency identification, RFID)：係目前用於車輛辨識的核心技術，可設於收費站，作為自動收費之用，目前我國高速公路 ETC 收費即採用該技術。RFID 係使用無線電波來交換貼於車上電子標籤(electronic tag)與設於路側讀寫機(Reader)之間的訊息。當貼有電子標籤的車輛通過偵測點時，路側讀寫機即辨識其唯一的身份(ID)並記錄時間，如圖 2.1.6 所示。除用於收費、計算流率外，追蹤其 ID 可掌握每輛車使用公路的起迄(o-d)，利用車輛在各區間的行駛時間，則可估算各區間的空間平均速率。

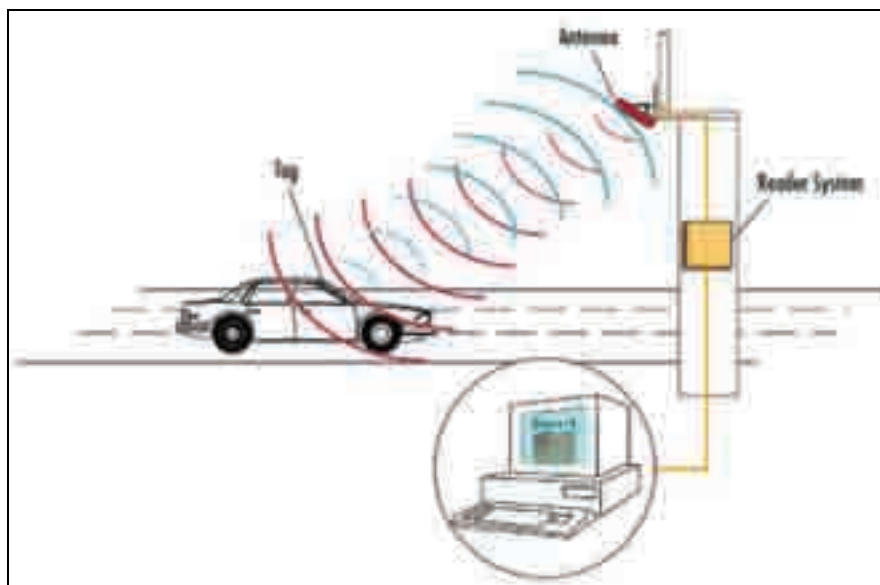


圖 2.1.6 RFID 佈設示意圖

- (7) 磁感應線圈(inductive loop)。係以埋設於道路鋪面上的線圈，以磁感應的方式偵測通過的車輛。可取得流率、速率(雙組佈設)、占量等資料，如圖 2.1.7 所示。

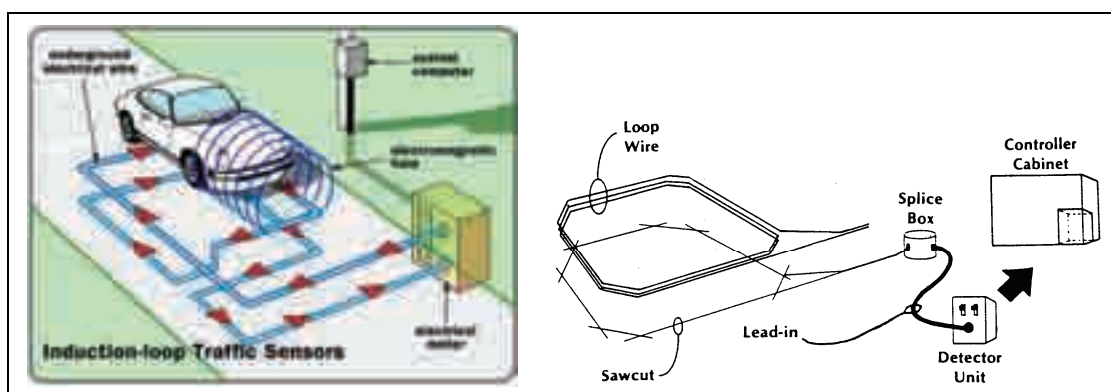


圖 2.1.7 磁感應線圈偵測器佈設示意圖

如同時佈設兩組磁感應線圈偵測器，可精確量測出速率及車長(速率與車長互為相依，知其一即得其二)，後者可用以辨識車種。其量測速率與車長的方法，如圖 2.1.8 所示，圖中， $ot_1$ 、 $ot_2$  分表車輛占有上、下游偵測器的時間(被磁感應到的時間，從車前端接觸偵測器最上游端起，至車後端離開偵測器最下游端止)， $d$  表偵測器的寬度， $D$  表兩偵測器的間隔， $L$  表車長， $T=t_1, t_2$  分表車輛被上、下游偵測器偵測到的最早時間。則速率與車長的公式為：

速率：
$$v = D / (t_2 - t_1) \quad (2-1-1)$$

車長：
$$L + d = v \times (ot_1 + ot_2) / 2 \quad (2-1-2)$$

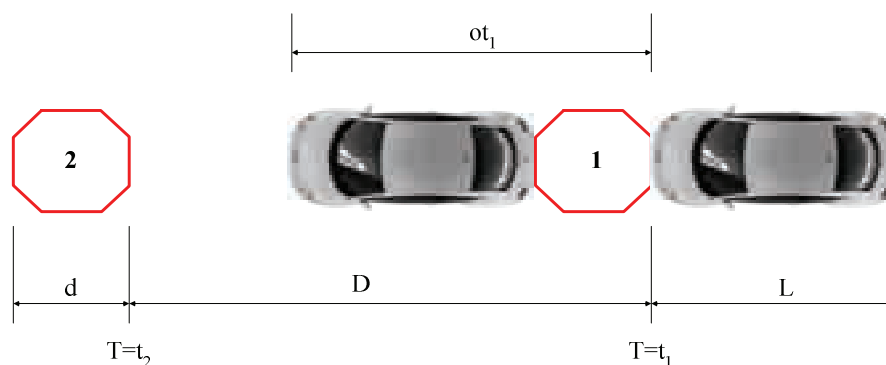


圖 2.1.8 兩組磁感應線圈偵測速率與車長示意圖

綜合以上說明，短距量測可獲得的車流參數及技術，整理如下：

- (1) 流率
  - 1) 最早使用：手動計數器，氣壓管；
  - 2) 最常使用：磁感應線圈；
  - 3) 最新技術：錄影處理系統、微波、紅外線、無線射頻；
- (2) 速率：氣壓管、磁感應線圈(2 組)、錄影處理系統、微波、紅外線；
- (3) 密度：短距量測不能取得密度資料，一般藉流量等於速率乘以密度( $q=ku$ )理論公式，在取得流量與速率(平均值)後，轉換而得；
- (4) 占量：磁感應線圈、錄影處理系統、微波等均可獲得占量。占量可說是時間上的密度，惟因與密度的定義不盡相符，故只有在符合某些條件下(如均質)，占量與密度方有對映關係，方具密度的代表性。

## 2.長距觀測

長距觀測可分成固定長距觀測與移動長距觀測兩種。前者屬瞬間-長距離法，量測方法包括空中照相與高處設置攝影機等方式，量測範圍至少宜有 0.5 公里。其可取得的資料型態，單張相片可得密度，多張相片可得各車速率。以空中照相方式欲取得流率資料反而變得較為困難，惟可藉  $q=ku$  理論公式，在取得密度與速率後，轉換而得流率。

移動長距觀測可取得小區域或局部路段的流率與平均速率資料，一般採浮動車法(floating car method)，令測試車以車流的平均速率行駛，沿途記錄到達各控制點的時間。此種方式取得的速率較不精確，不適合有大交岔路口路段，且應用時需多作數次取其平均，但仍不失為量測公路運轉品質簡易的方法。

其方法如圖 2.1.9 所示，步驟為：

- (1) 由 A 點出發南行，計算逆向車道迎面而過的北向車數  $M_s$ ；
- (2) 至折返點 B，記錄南向行駛的時間  $T_s$ ，單位為「分鐘」。
- (3) 轉北行，計算同向車道所有超過測試車的車輛數  $O_n$ ，與被測試車超過的車輛數  $P_n$ ；
- (4) 返回出發點 A，記錄北向行駛的時間  $T_n$ ，單位為「分鐘」。

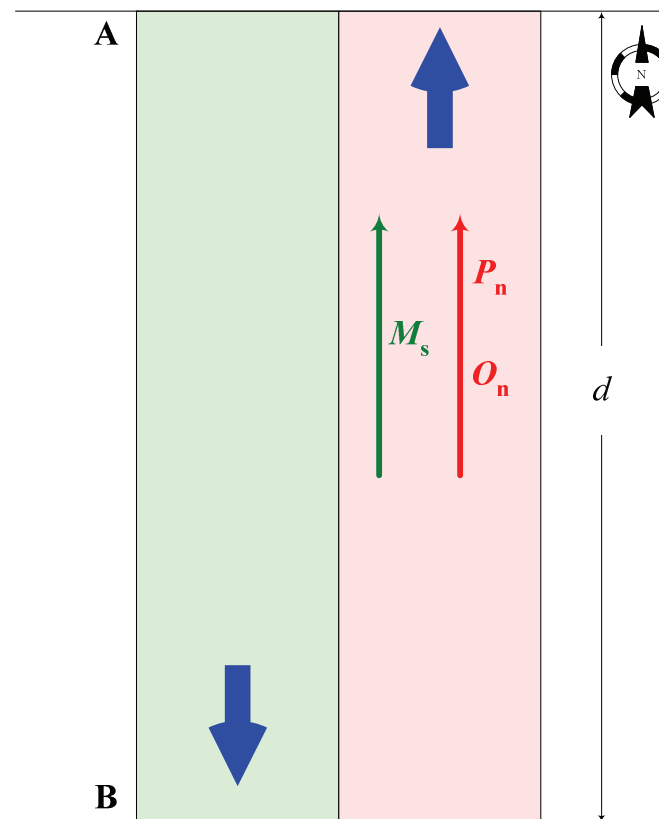


圖 2.1.9 浮動車法的步驟與調查項目



其取得的調查參數及公式為：

$$(1) \text{ 北向流率: } q_n = \frac{60(M_s + O_n - P_n)}{T_s + T_n} \quad (2-1-3)$$

$$(2) \text{ 北向平均旅行時間: } \bar{T}_n = T_n - \frac{60(O_n - P_n)}{q_n} \quad (2-1-4)$$

其中， $60/q_n$ =平均車頭距(分)

$$(3) \text{ 北向空間平均速率: } u_n = \frac{60d}{\bar{T}_n} \quad (2-1-5)$$

## 2.2 車流參數的估算與對映關係

車流參數中，流率、速率與密度均屬平均值。其中，流率的車輛樣本數係依取樣時間來決定其大小，密度的車輛樣本數係依取樣空間來決定其大小，速率平均值最為特殊，有時間平均速率與空間平均速率兩種不同的定義，其平均值的車輛樣本數各依取樣時間或空間來決定其大小。本節說明各參數平均值的估算方法，及巨觀與微觀參數的對映關係。

### 2.2.1 參數巨觀與微觀的對映

流率( $q$ )、密度( $k$ )、速率( $u$ )為車流巨觀 3 參數，其三者可建立  $q=ku$  守恆式關係。本節說明其取樣估算方式及與微觀參數間的對映關係。

#### 1. 流率(flow rates)

流率係以「定點-長時間」法取得樣本，其估算公式為：

$$q = \frac{N}{T} = \frac{N}{\sum_i h_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_i h_i} = \frac{1}{\bar{h}} \quad (2-2-1)$$

其中：

$q$ =流率，單位為「車/小時」

$N$ =調查時間  $T$  中，通過調查地點的車數

$T$ =調查時間，一般為 1 小時，如小於 1 小時者亦均轉換成 1 小時

$h_i$ =連續車輛之同一參考點通過調查點的時差，即車頭距，單位為「秒」，但與流率對映時轉換成 1 小時

由上式知，巨觀的流率與微觀車頭距平均值的倒數互為對映。

## 2. 密度(density)

密度係以「瞬間-長距離」法取得樣本，其估算公式為：

$$k = \frac{N}{D} = \frac{N}{\sum_i s_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_i s_i} = \frac{1}{\bar{s}} \quad (2-2-2)$$

其中：

$k$ =密度，單位為「車/公里」

$N$ =調查距離  $D$  範圍內，某瞬間的車數

$D$ =調查距離(公路長度)，一般為 1 公里，如小於 1 公里者亦均轉換成 1 公里

$s_i$ =連續車輛之同一參考點某瞬間的空間距離，即車間程，單位為「公尺」，但與流率對映時轉換成公里單位

由上式知，巨觀的密度與微觀車間程平均值的倒數互為對映。

## 3. 速率(speeds)

平均速率分成時間平均速率(time mean speed)與空間平均速率(space mean speed) 2 種定義。現對時間平均速率採「定點-長時間」法取樣，即站在路側一定點，以長時間蒐集通過該定點車輛的車速；對空間平均速率採「瞬間-長距離」法取樣，即以空照方式，以間隔 1 秒(或其他短間隔)連續拍攝兩張相片，獲得取樣路段上(至少 500 公尺以上)車輛樣本的瞬間車速，則其平均值的估算方式如下：

(1) 時間平均速率：
$$\bar{u}_t = \frac{1}{N} \sum u_i^t \quad (2-2-3)$$

(2) 空間平均速率：
$$\bar{u}_s = \frac{1}{N} \sum u_i^s \quad (2-2-4)$$

其中：

$u_i^t$ =以「定點-長時間」法取樣之第  $i$  車速率，即現點速率

$u_i^s$ =以「瞬間-長距離」法取樣之第  $i$  車速率

$N$ =調查取得之樣本車數

由式(2-2-3)知，微觀現點速率的算數平均即為巨觀的時間平均速率。

式(2-2-3)與(2-2-4)式均為算數平均數(arithmetic mean)，均為統計上平均值的不偏推估。惟必須說明的是，只有空間平均速率才符合  $q=ku$  公式中速率平均值的定義( $q=k\bar{u}_s$ )，如果代入時間平均速率，則  $q \neq k\bar{u}_t$ 。

## 2.2.2 算術平均與調和平均

研究車流特性，甚而建立巨觀水流模式均需要空間平均速率，惟其樣本欲以「瞬間-長距離」法取得，不但技術上非常困難且亦不經濟，而實務上簡單可行的取樣方式係「定點-長時間」法，問題是以「定點-長時間」法取樣並予算術平均並不能獲得空間平均速率。事實上，此一問題在車流理論發展的早期，曾困擾研究者相當一段時間。

Weiner(1974)曾回顧說明以「定點-長時間」法取樣獲得空間平均速率的理論，本節詳述之。

### 1. Wardrop 的均質離散型車流模式

Weiner(1974)說明，Wardrop(1952)曾定義均勻車流(uniform traffic)，即任何瞬間觀測相當長範圍的道路，及任何位置觀測相當長的時間，車流均呈均質(homogeneous)，據以發展出許多重要的關係。其考慮三個需要量測的基本變量--流率、密度與速率，其整體車流的速率 $\{V\}$ 可視為由  $C$ (有限個)個子車流 $\{S\}$ 所組成，並提出下列假設(參閱圖 2.2.1)：

- (1) 每輛車只有一個恆速  $v_i$ ；
- (2) 唯有其速率恰為  $v_i$  的車輛，方屬於第  $i$  子車流；
- (3) 車輛被視為一運動點(參考點如車前懸)，其行動不受其他車輛的干擾；
- (4) 車輛在雙向四車道道路上行駛於兩線車道的右線，只有超車時才會使用左線車道，並在完成超車後立即併回右線；
- (5) 任何子車流，其車輛的到達均係在非常長道路的尾端以完全隨機的波松程序(Poisson process)進入。

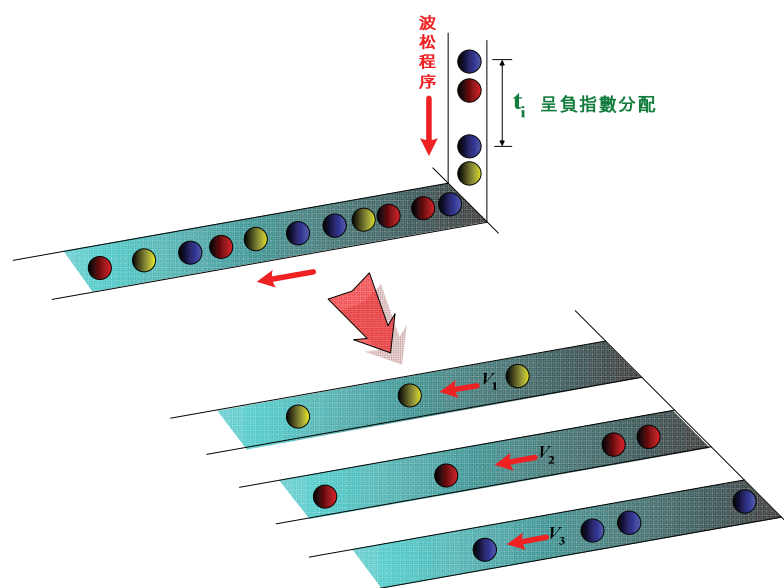


圖 2.2.1 Wardrop 車輛隨機到達與互不干擾的假設

上述假設中，車流經一段時間而達均質者稱為時間均質(time-homogeneous)，意即任何取樣時間的平均值均會趨於一長時間取樣的極限平均值(limiting average)。相似的，只有在道路任何取樣長度的平均值均會趨於一長距離取樣的極限平均值時，車流方稱為空間均質(space-homogeneous)。Breiman(1969)闡明，空間與時間均質的極限平均(limiting averages)，二者相當。

## 2.有關空間平均速率的關係式

Wardrop 關係式可以統計方式表示。首先注意個別子車流  $S_i$  的車輛程序，因車輛在該子車流中係依波松程序完全隨機的到達，故在某定點觀測到該子車流的  $q_i$  (每小時車數)係與車流到達率有關，而子車流  $S_i$  到達率呈波松分配者其對應的到達車頭距(headway) $t_i$  係遵循指數分配，則  $t_i$  期望值，即平均車頭距為  $1/q_i$ 。在此時距中，子車流  $S_i$  的各車輛均係以固定車速  $v_i$  行駛，因此兩車間隔  $1/q_i$  車頭距對應的車間程(spacing)即為  $v_i/q_i$ ，如圖 2-2-2。意即，平均言，第  $i$  子車流車輛任一瞬間的平均車間程為  $v_i/q_i$ ，據此，子車流  $i$  的平均密度可由此一平均間程的倒數估得：

$$k_i = (v_i / q_i)^{-1} = q_i / v_i \quad (i=1,2,\dots,C) \quad (2-2-5)$$

如  $k = \sum k_i$  表整體車流的密度，則車速為  $v_i$  的車輛在空間上的離散頻次分配可由多項式機率(multinomial probability)來定義(即在取樣空間中取得車速為  $v_i$  樣本的機率)：

$$p_s(i) = \text{Prob}(V_s = v_i) = k_i / k \quad (i=1,2,\dots,C) \quad (2-2-6)$$

則總體車流的車速期望值，即空間平均速率，可由下式獲得：

$$\bar{v}_s = E(V_s) = \sum_1^C v_i p_s(i) = \sum_1^C v_i k_i / k$$

$$\bar{v}_s = \sum_1^C q_i / k \quad (\text{應用式(2-2-5)})$$

$$\bar{v}_s = q / k \quad (2-2-7)$$

其中， $q = \sum_1^C q_i$  為所有子車流的流率加總

式(2-2-7)最早由 Wardrop 導出，該式說明，如以「瞬間-長距離」取樣( $p_s(v_i)=k_i/k$ )，並將獲得的速率樣本予以算數平均(即得空間平均速率)，則可建立平均流率、平均密度與平均速率間唯一有效的關係式( $q=ku$ )。

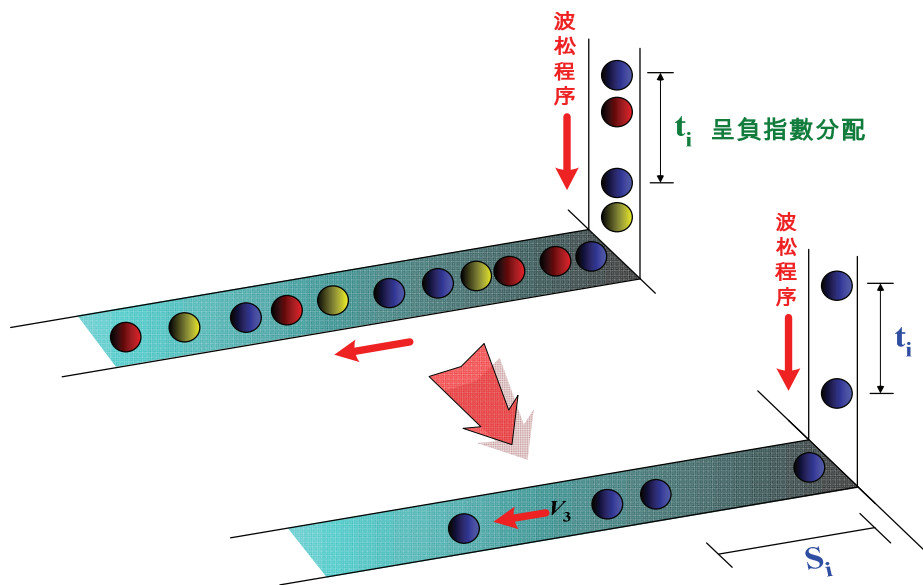


圖 2.2.2 Wardrop 車輛隨機到達空間取樣示意圖

### 3. 有關時間速率調和平均的關係式

如每一子車流的  $k_i/k$  均有無偏誤的推估值，藉式(2-2-7)可直接用來獲得空間平均速率。惟 Breiman(1974)指出，就算以空照取得空間車流資料，其每一瞬間涵蓋的道路仍不夠長，仍無法獲得平均密度無偏誤的估算值，需考慮其他方式，如定點觀測(取樣時間可以無限長)，來估算空間平均速率。

考慮車流各車在一段長時間通過道路某一定點的速率量測，如圖 2.2.3 所示。

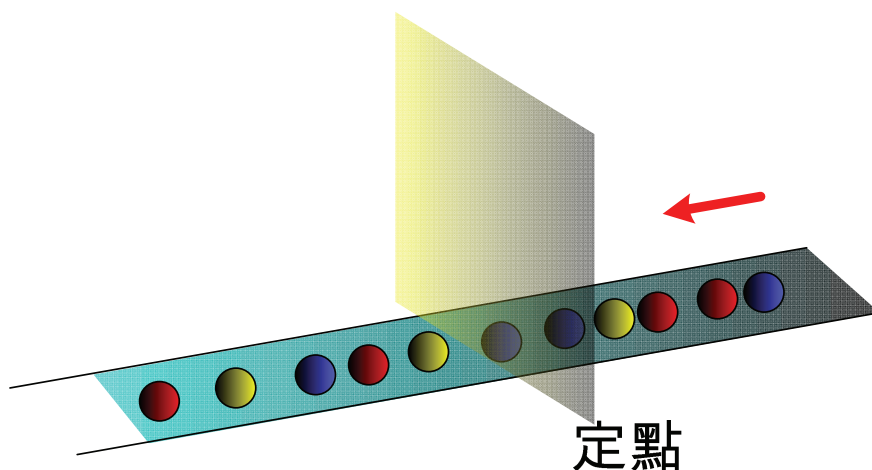


圖 2.2.3 Wardrop 車輛隨機到達時間取樣示意圖

令此一時間速率程序(time-speed process)為 $\{V_t\}$ ，以有別於空間速率程序。以任一車輛通過該點的頻次來解釋 $V_t=v_i$ 的機率，可寫成(在取樣時間中取得車速為 $v_i$ 樣本的機率)：

$$Prob \{V_t=v_i\}=p_t(i) \quad (2-2-8)$$

其中， $p_t(i)$  近似  $n_i/n$ ，而  $n_i$  係速率為  $v_i$  車輛在取樣時間中到達該定點的數量，總樣本數  $n = \sum_1^C n_i$ ，因此，可得近似的  $p_t(i)$ ：

$$\hat{p}_t(i) = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i/T}{n/T} = \frac{\hat{q}_i}{\hat{q}} \quad (2-2-9)$$

其中， $T$  為觀測時間， $\hat{q}_i$  為觀測到達率，當  $T$  很長時，可假設  $\hat{q}_i$  與  $\hat{q}$  相當於  $q_i$  與  $q$ ，因此得：

$$p_t(i)=q_i/q \quad (i=1,2,\dots,C) \quad (2-2-10)$$

現考慮  $V_t^{-1}$  的期望值：

$$E\{1/V_t\} = \sum_1^C \frac{1}{v_i} p_i(i)$$

將式(2-2-10)與式(2-2-5)代入上式，得：

$$E\{1/V_t\} = \sum_1^C \frac{1}{v_i} \frac{q_i}{q} = \frac{1}{q} \sum_1^C k_i = \frac{k}{q} \quad (2-2-11)$$

由式(2-2-11)知，時間取樣個別速率的倒數的期望值是對  $k/q$  的不偏推估，或：

$$q = k[E\{1/V_t\}]^{-1} \quad (2-2-12)$$

亦即將時間程序獲得的速率樣本予以調和平均(harmonic mean)，即可近似推估空間平均速率，而調和平均的速率公式為：

$$\bar{v}_s = \left[ \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{v_i} \right]^{-1} \quad (2-2-13)$$

其中， $v_i$  為以「定點-長時間」取樣獲得車輛通過某定點的車速樣本。此種樣本，在車流達均質的條件下，透過調和平均的運算(速率倒數平均的倒數)，即可近似推估空間平均速率。

#### 4.其他與調和平均有關的關係式

除空間平均速率的估算應用外，調和平均亦可用於微觀與巨觀的流率及密度間關係。

##### (1) 流率-車頭距

Weiner(1974)曾回顧說明，考慮通過某定點連續  $N$  輛車的情形，令  $h_i$  與  $q_i$  分表每輛車的車頭距與由車頭距的倒數換算的微觀流率，即  $q_i=1/h_i$ ，如圖 2.2.4 所示，則流率可寫成：

$$q = \frac{1}{h} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum h_i} = \left( \frac{1}{N} \sum \frac{1}{q_i} \right)^{-1} \quad (2-2-14)$$

式(2-2-14)說明，如果將連續車輛通過定點的每一車頭距  $h_i$  轉換成微觀流率  $q_i(=1/h_i)$ ，則要總和成巨觀流率時，不能直接將  $q_i$  以算術平均( $q=\sum q_i/N$ )，而須採上示的調和平均。事實上，式(2-2-14)中間式整理後即為  $N/\sum h_i=N/T=q$ 。

現以一簡例說明誤用算術平均的問題。假設調查時間由第一輛車前懸接觸到觀測線起，至第 4 輛車前懸接觸到觀測線止，共 20 秒通過 3 輛車，含 3 個連續車頭距，分別為 3 秒、12 秒、5 秒。如每一車頭距的倒數即為微觀流率，可分別得 3 個微觀流率為 1200 車/小時、300 車/小時、720 車/小時，如直接予以算術平均，得  $q=(1200+300+720)/3=740$  車/小時，但實際是 20 秒內通過 3 輛車，即 540 車/小時 $=[(1/1200+1/300+1/720)/3]^{-1}$ ，即微觀流率的調和平均。

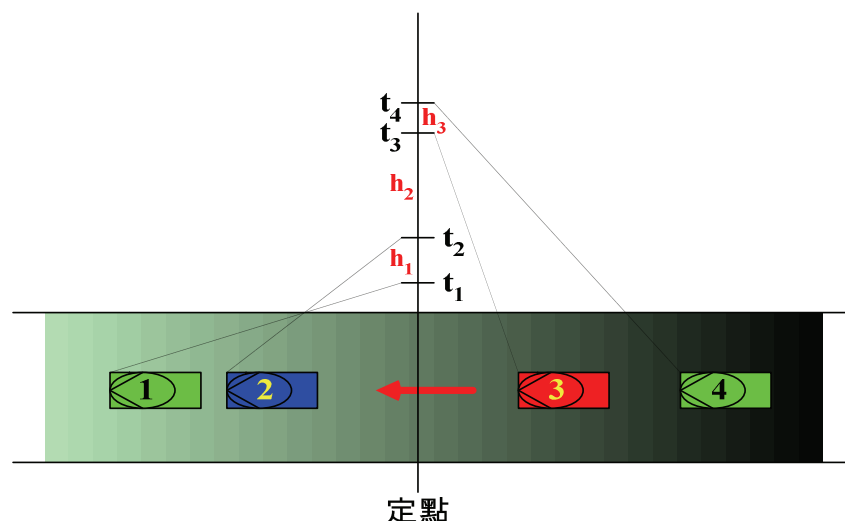


圖 2.2.4 連續車輛通過定點微觀與巨觀流率的關係

## (2) 密度-車間程

比照前例，考慮某瞬間觀測路段內連續  $N$  輛車的情形，令  $s_i$  與  $k_i$  分表連續車輛的每一車間程與由車間程的倒數換算的微觀密度，即  $k_i=1/s_i$ ，如圖 2.2.5 所示，則密度可寫成：

$$k = \frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum s_i} = \left( \frac{1}{N} \sum \frac{1}{k_i} \right)^{-1} \quad (2-2-15)$$

式(2-2-15)說明，微觀密度須以調和平均才能正確算出巨觀密度。

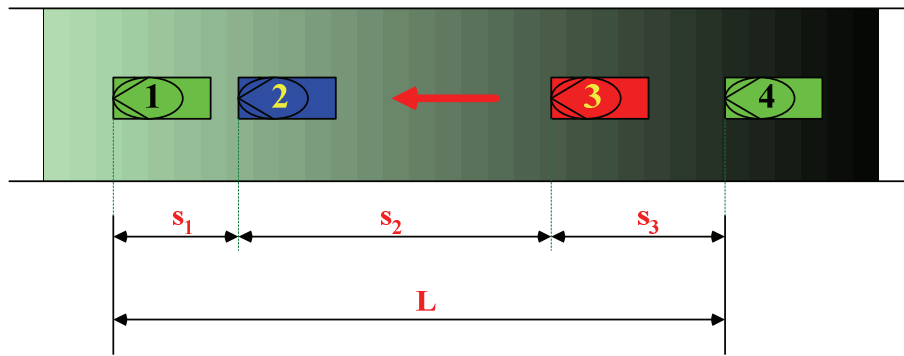


圖 2.2.5 某瞬間路段內連續車輛微觀與巨觀密度的關係

值得說明者，圖 2.2.4 與圖 2.2.5 流率與密度微觀與巨觀關係的取樣範例，均採 Breiman (1974)所稱的同步程序(synchronous process)，即取樣的起始與結束的時間或空間均定在有事件同步發生的狀況，例如流率範例中以車頭碰觸觀測定點當作起迄時間。此種取樣可獲得完整的車頭距與車間程。

另一種取樣方式，稱為非同步取樣(asynchronous process)，係設定一取樣框格(時隔或間隔)，車輛落入取樣框格才予計數。例如設定取樣時隔為 5 秒(或 10 公尺)，每一樣本包含的到達車數不一，但可以確定的是，每一樣本均會包含前後兩個破碎的車頭距(或車間程)，在樣本數較少時，以非同步樣本作任何推估會得到較大的離散結果(平均值仍為不偏推估，但變異可能較大)。

## 2.2.3 其他參數間的關係

本節分析說明包括空間與時間平均速率及占量與密度等的關係。

### 1. 空間平均速率—時間平均速率

時間平均速率與空間平均速率有下列的關係：



$$\bar{u}_t = \bar{u}_s + \frac{\sigma_s^2}{\bar{u}_s} \quad (2-2-16)$$

$$\sigma_s^2 = \sum_i p_i (u_i - \bar{u}_s)^2 = \frac{\sum_i k_i (u_i - \bar{u}_s)^2}{k} \quad (2-2-17)$$

其中：

$\bar{u}_t$  = 以「定點-長時間」取樣並予算術平均的時間平均速率

$\bar{u}_s$  = 以「瞬間-長距離」取樣並予算術平均的空間平均速率

$\sigma_s^2$  = 以「瞬間-長距離」取樣的速率樣本的變異數(variance)

$k_i$  = 「瞬間-長距離」取樣，速率為  $u_i$  樣本的平均密度

$u_i$  = 第  $i$  群樣本的速率

$k$  = 在取樣空間中，不分速率樣本的平均密度

式(2-2-16)說明，時間平均速率必大於等於空間平均速率，只有二種情況二者才會相等(或接近相等)，即個別車輛的車速均相同，或平均速率接近無限大。

現以一範例來說明，如圖 2.2.6 所示。假設有一長 10 公里之圓周跑道(每次瞬間取樣均可得母體全樣本)，跑道上設有 3 車道，第一車道有 4 輛車均以時速 120 公里行駛，第二車道有 8 輛車均以時速 60 公里行駛，第三車道有 16 輛車均以時速 30 公里行駛。各車禁止變換車道，須在指定車道上行駛並保持相同車間程(spacing)，亦即第一車道各車間隔 2.5 公里，第二車道各車間隔 1.25 公里，第三車道各車間隔 625 公尺。

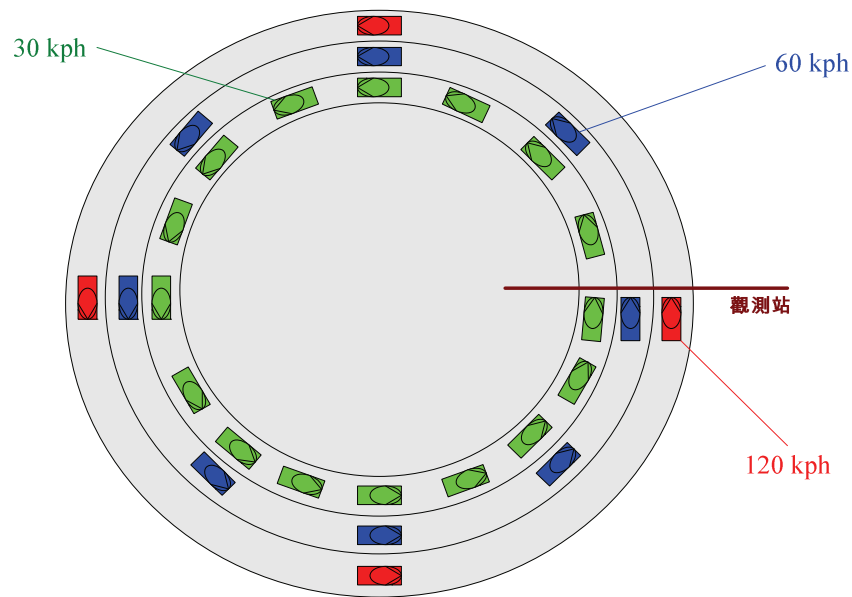


圖 2.2.6 圓周跑道不同車速樣本分布圖

現分成「定點-長時間」與「瞬間-長距離」兩種取樣方式。「定點-長時間」取樣係在圖上的觀測站進行，令取樣時間為 1 小時(令為更長時間，並不改變其平均速率的估算)，則各車道取得樣本數分別為：

第一跑道：(120/10)×4 =48 輛，車速 120 kph

第二跑道：(60/10)×8 =48 輛，車速 60 kph

第三跑道：(30/10)×16=48 輛，車速 30 kph

「瞬間-長距離」取樣的樣本為(每次均為全樣本)：

第一跑道：4 輛，車速 120 kph

第二跑道：8 輛，車速 60 kph

第三跑道：16 輛，車速 30 kph

$\bar{u}_s^t$  與  $\bar{u}_s^s$  值各組樣本中，時速 120、60、30kph 車輛的樣本數如表 2-2-1 所示。

**表 2-2-1 不同取樣方式獲得樣本的組成比較**

速率 (kph)	定點 -長時間		瞬間-長距離	
	樣本數	占比	樣本數	占比
120	48	1/3	4	1/7
60	48	1/3	8	2/7
30	48	1/3	16	4/7

令  $\bar{u}_t^t$ 、 $\bar{u}_s^t$  分表以「定點-長時間」法取得的樣本，分別代入算術平均(式(2-2-3))與調和平均數(式(2-2-13))，獲得的時間與空間平均速率； $\bar{u}_s^s$  表以「瞬間-長距離」法取樣，代入算術平均(式(2-2-4))獲得的空間平均速率，則代入各樣本後得：

$$\bar{u}_t^t = (48 \times 120 + 48 \times 60 + 48 \times 30) / (3 \times 48) = 70 \text{ kph}$$

$$\bar{u}_s^t = (48 \times 3) / ((48/120) + (48/60) + (48/30)) = 51.42857143 \text{ kph}$$

$$\bar{u}_s^s = (4 \times 120 + 8 \times 60 + 16 \times 30) / (4 + 8 + 16) = 51.42857143 \text{ kph}$$

將空間樣本代入式(2-2-17)得：

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= [4 \times (120 - 51.43)^2 + 8 \times (60 - 51.43)^2 + 16 \times (30 - 51.43)^2] / (4 + 8 + 16) \\ &= 955.1020408 \end{aligned}$$

將  $\sigma_s^2$  代入式(2-2-16)，可證明  $\bar{u}_t^t = \bar{u}_s^t + \sigma_s^2 / \bar{u}_s^t$ ，即：

$$70 = 51.42857143 + 955.1020408 / 51.42857143$$

得證#

上示計算結果印證兩件事，其一是時間平均速率確實高於空間平均速率 ( $\bar{u}_t > \bar{u}_s$ )，其二是以「定點-長時間」法取樣，但透過調和平均的估算，亦能不偏推估空間平均速率 ( $\bar{u}_s = \bar{u}_s$ )。

事實上，時間平均速率高於空間平均速率由樣本的組成即可充分說明。由表 2-2-1 知，空間平均速率以空間取樣，速率 120kph 的樣本只占總樣本數的 1/7，但如以時間取樣，則速率 120kph 的樣本占總樣本的比例增加為 1/3，明顯會高估平均速率。此一現象的原因很簡單，站在路側取樣，因為高速車會超越低速車，很自然會比瞬間同時取樣取到較多高速車的樣本，其算術平均值便高估空間取樣的平均值。此一現象另意味在無法超車的路段(如隧道內)，以「定點-長時間」法取得的樣本，因為高速車無法超越低速車，所有車輛均須魚貫而行，車速被迫相近(變異數接近零)，致空間平均速率與時間平均速率幾乎相等，因此所得樣本可直接採算術平均來估算空間平均速率。

## 2. 占量-密度

Weiner(1974)曾回顧說明車流只有單一車種及兩車種時，其占量與密度間的關係，以下分別說明之。

### (1) 單一車種

假設車道上設有偵測器，經  $T$  時間的蒐集，則可定出下列計算式：

$$\text{占量：} \quad O_T = \frac{\sum t_i}{T} \quad (2-2-18)$$

$$\text{個別車速：} \quad v_i = (L + d) / t_i \quad (2-2-19)$$

$$\text{空間平均速率：} \quad \bar{v}_s \approx N_T \frac{(L + d)}{\sum t_i} = \bar{v}_h \quad (2-2-20)$$

$$\text{流率：} \quad q \approx N_T / T \quad (2-2-21)$$

其中：

$N_T$  =  $T$  時間內通過偵測器的車數；

$t_i$  = 第  $i$  車被偵測到的時長；

$L$  = 平均車長

$d$  = 車輛偵測器長

將上示各式代入密度公式中，得：

$$k \approx q / \bar{v}_h = \frac{N_T}{T} \frac{\sum t_i / (L + d)}{N_T} = \frac{\sum t_i}{T(L + d)} = O_T / (L + d) \quad (2-2-22)$$

式(2-2-22)的右側分母項為車長加偵測器長，相當於停車下的車間程，而車間程的倒數即為密度，故右側項係一接近壅塞的密度乘以占量，可得實際的密度值。占量與密度關係的另一種表示法為：

$$O_T = k \times (L + d) = \frac{k}{k_{L+d}} \quad (2-2-23)$$

當  $d$  相當小時，占量相當於某車流狀態下的密度與壅塞密度的比。

## (2) 多車種

假設偵測器可由車長分辨小型車與大貨車兩車種， $T$  時間內到達的車數分別為  $n_1$ 、 $n_2$ ，車長分別為  $L_1$ 、 $L_2$ ，令密度分別為  $k_1$ 、 $k_2$ ，則：

$$\begin{aligned} O_T &= \frac{n_1 \sum t_{1i} + n_2 \sum t_{2i}}{T} = \frac{(L_1 + d)}{T} \sum \frac{1}{u_{1i}} + \frac{(L_2 + d)}{T} \sum \frac{1}{u_{2i}} \\ &= \frac{(L_1 + d)}{T} \frac{n_1}{\bar{u}_{1s}} + \frac{(L_2 + d)}{T} \frac{n_2}{\bar{u}_{2s}} = (L_1 + d)k_1 + (L_2 + d)k_2 \end{aligned} \quad (2-2-24)$$

多車種同理可得：

$$O_T = \sum (L_i + d)k_i = \sum w_i k_i \quad (2-2-25)$$

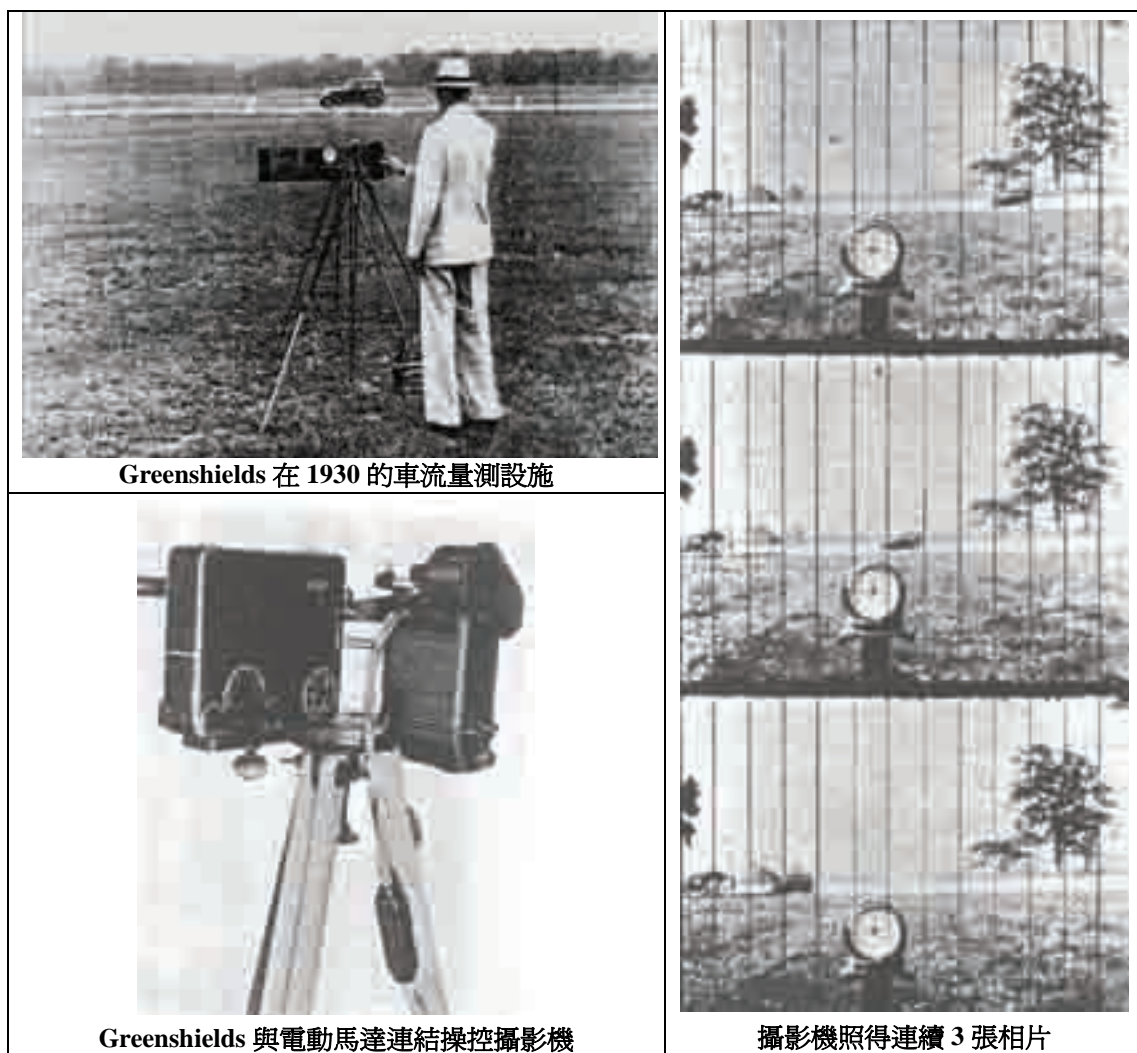
由式(2-2-25)知，占量為各車種子密度以車長加權的平均值。

## 2.3 巨觀水流模式

依守恆原理，車流三參數，流率( $q$ )、速率( $u$ )、密度( $k$ )，可成立  $q=ku$  關係式。其中， $u$  係空間平均速率(為方便說明，以下免去  $s$  的下標)。由於  $q=ku$  關係式係類比流體的物理特性，因此相關研究稱以三參數建立的車流模式為水流模式(stream models)。而由  $q=ku$  關係式知，只要  $u \sim k$  關係確定，三參數間的關係即確定，基於此，本節依序回顧說明相關研究建立的  $u \sim k$ 、 $q \sim k$  與  $q \sim u$  模式。

### 2.3.1 速率-密度模式

Kühne(2011)回顧說明，早在 1933 年 Greenshields 即開始觀察並描繪公路上的車流行為，並以照相法來量測流率、密度與速率。圖 2.3.1 係 Greenshields 設計的车流量測設備與量測範例，其係採用 16-mm 單眼電影攝影機，並藉電動馬達操控使曝光間隔(1/2~2 秒間)固定。為使運動中的車輛能在連續兩張相片上均出現，攝影取景範圍必須是車輛在曝光間隔行駛長度的二倍以上，而藉由連續相片上標示的垂直參考線即可量測車速。



**圖 2.3.1 Greenshields 設計的车流量測設備與量測範例**

資料來源：Kühne, R. D., "Foundations of Traffic Flow Theory: The Fundamental Diagram, Greenshields' Legacy," Transportation Research Circular E-C149, 2011.

Greenshields 在 1935 年即建立一個最簡單的速率-密度模式，如式(2-3-1)所示。

$$u = u_f(1 - k/k_j) \quad (2-3-1)$$

其中：

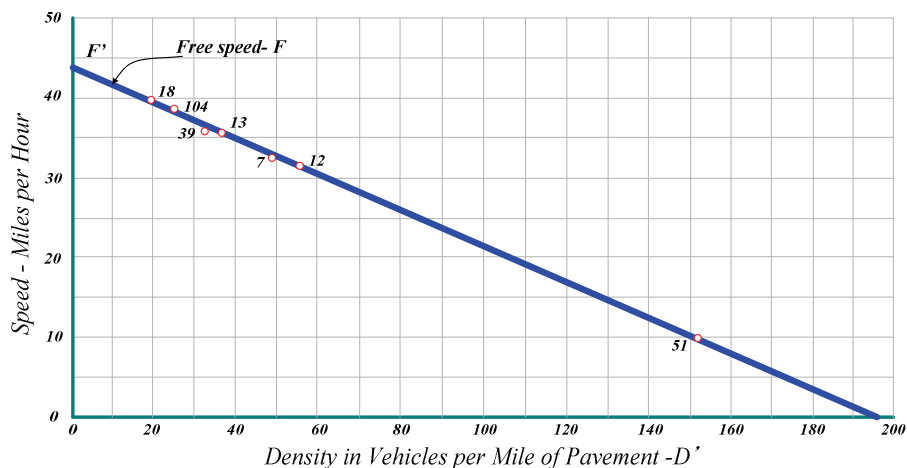
$u$  = 空間平均速率

$u_f$  = 自由流時的平均車速

$k$  = 密度

$k_j$  = 壅塞時的密度

Greenshields(1935)曾進行模式校估，其流量與速率資料係量測而得，密度則由  $q=ku$  轉換獲得，如圖 2.3.2 所示。由 Hall(2001)的回顧說明知，圖中資料點旁的數字表以 100 輛車為一樣本的編號，惟其係每隔 10 輛車即為一樣本起頭，亦即連續兩組樣本有 90%車輛重疊取樣。除樣本不獨立外，其車輛樣本多落在非壅塞區，只有一筆由不同道路取得的資料落在壅塞區(51 號)。Greenshields 則說明，因為速率-密度模式係呈線性，因此只需精確量測出兩點即可建立。



**圖 2.3.2 Greenshields 建立與校估的速率-密度模式**

資料來源：1. Greenshields, B. D., "A Study of Traffic Capacity," Highway Research Board Proceedings 14, 448-477, 1935.

2. Hall, F. L., "Traffic Stream Characteristics, Chapter 2 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," Transportation Research Board, 2001.

Hall(2001)指出 Greenshields 建立模式的方式有三個問題：

- (1) 雖然其調查的單車道路段條件似與高速公路同(基本路段，無出入口)，惟實際的交通特性與高速公路並不相符；
- (2) 其以重疊取樣及採事前平均以符合曲線等的分析方法令人難以接受；
- (3) 其建立模式的資料大部分係假日，現今研究的重點則主要針對工作日。

值得說明者，Greenshields 線性的速率-密度模式之所以能被接受長達 50 年，原因係其數學最為簡單，同時卻已包含人類駕駛行為的基本特性，即行車速度會隨交通逐漸擁擠而降低，甚而完全停止，其中且會出現一臨界狀況使流率最大。此外，該模式有完整的邊界條件，如自由流車速與壅塞密度等，可供模式現場調查校估之用。

May 與 Keller(1967)回顧說明，Greenberg 基於 Lighthill 與 Witham(1955)的研究，在 1959 年將車流類比成單維流體，提出一巨觀車流模式，利用流體的連續性(式(2-3-2))與運動公式(式(2-3-3))，可將速率與密度的關係寫成式(2-3-4)：

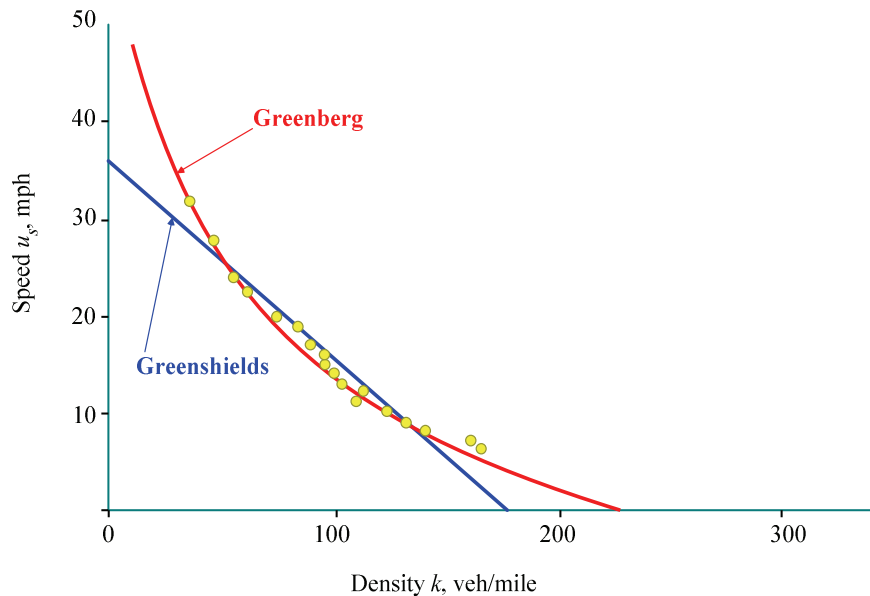
$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2-3-2)$$

$$\frac{du}{dt} = -c^2 \left( \frac{1}{k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \quad (2-3-3)$$

$$u = c \ln(k_j / k) \quad (2-3-4)$$

其中， $c=u_0$ ，係發生最大流率時的臨界速率。

Hall(2001)指出，Greenberg(1959)曾進行模式校估，如圖 2.3.3，由圖知，Greenberg 的對數模式似較符合樣本，惟 Greenshields 線性模式的適合度已達  $R^2=0.97$ ，故對數模式的改善空間有限。此外，Greenberg 的對數模式有一個最大的缺點，即其在接近自由流車況時，平均速率會趨近無限大(無定義)，致其模式只適用壅塞狀況，現場調查得的平均自由流速率無法作為模式的邊界條件。



**圖 2.3.3 Greenberg 速率-密度模式**

資料來源：Dhingra, S. L., “Foundations of Traffic Flow Theory: The Fundamental Diagram, Traffic Flow Theory Historical Research Perspectives,” Transportation Research Circular E-C149, 2011.

May 與 Keller(1967)另回顧 Underwood(1961)·Drew(1965)·及 Drake, May, 與 Schofer(1965)等提出的速率-密度公式，經適當設定邊界條件，可將各模式繪在同一張圖上以利比較，如圖 2.3.4 所示。

Underwood(1961)提出一指數型式的速率-密度公式：

$$u = u_f e^{-k/k_0} \quad (2-3-5)$$

其中， $k_0$  係發生最大流率時的臨界密度。

Drew(1965)採用 Greengerg 流體類比的方式，但將運動公式改為更通案的型式(式(2-3-6))，提出式(2-3-7)的速率-密度公式：

$$\frac{du}{dt} = -c^2 k^n \frac{\partial k}{\partial x} \quad (2-3-6)$$

$$u = u_f \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \quad \text{for } n > -1 \quad (2-3-6)$$

Drake, Schofer, and May (1967)分析發現鐘型(bell-shaped)的速率-密度模式與實證資料配適良好：

$$u = u_f e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k}{k_0} \right)^2} \quad (2-3-7)$$

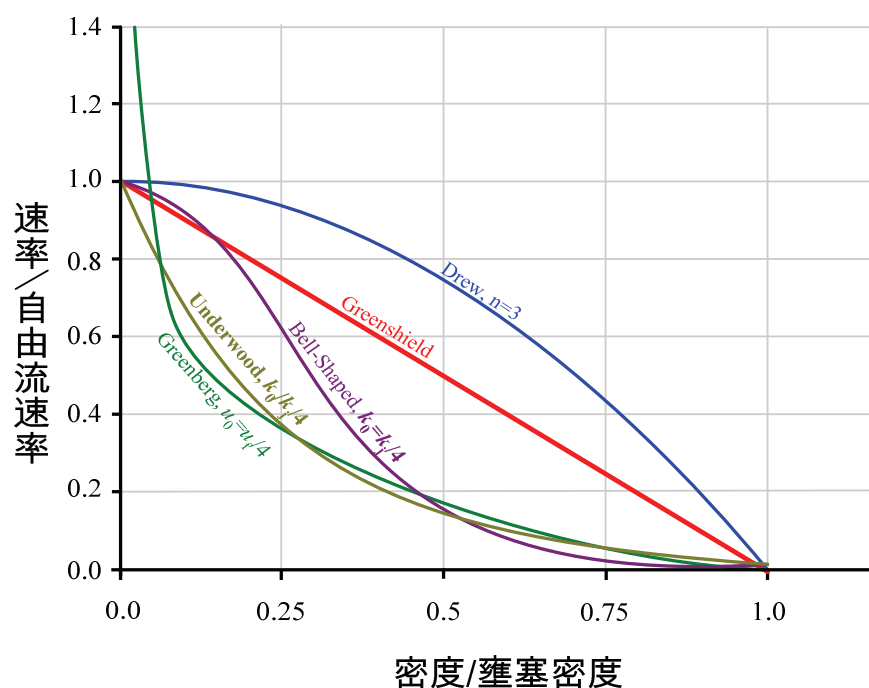


圖 2.3.4 各種速率-密度模式示意圖



由圖 2.3.4 知，Underwood、bell-shaped 模式對  $k_j$  無定義，Greenberg 模式對  $u_f$  無定義。Drew 與 Greenshields 模式則有  $u_f$ 、 $k_j$  的邊界值。

Drake, Schofer, and May (1967) 曾以 1,224 個 1 分鐘車流樣本分析比較七種模式，即 Greenshields 模式，Greenberg 模式，其他五種為二或三段式的 Underwood(1961)，Edie(1961)不連續指數模式(Greenberg 與 Underwood 模式的混合)，及鐘型模式。結果，該研究認為 Edie 模式最佳，是唯一能重現容量點的模式，而七種模式沒有一種特別符合樣本。此外，該研究並指出相關研究一般採用的方法，即取得流率與速率資料，轉換得密度，建立速率-密度曲線，再由速率-密度曲線轉換得速率-流率曲線，而經兩次轉換後，速率-流率曲線與原始的速率、流率資料不符。Duncan(1979)指出，速率-密度函數些微變化，會導致速率-流率曲線大的改變，故上述轉換須慎重。

### 2.3.2 流率-密度模式

早期，流率-密度模式在水流模式中一直占有舉足輕重的地位。美國 1975 年的車流理論專輯(Gerlough and Huber,1975)即曾說明流率-密度關係式的重要性：「早期公路容量的研究有二個主要方法，一係檢測低密度時的速率-密度關係，另一係檢測高密度時的車頭距現象。Lighthill and Whitham(1955)則提出流率-密度關係以統一上述二種方法」，由於此種統一性及其在交通控制上的多用途，Haight(1963)甚而稱流率-密度曲線為車流基本圖(the fundamental diagram)，如圖 2.3.5 所示。

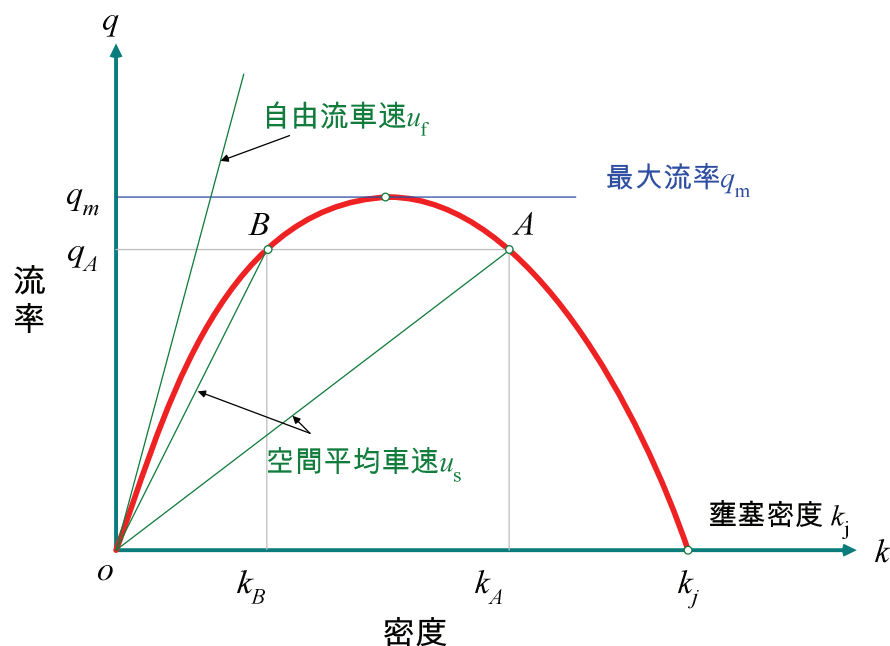


圖 2.3.5 車流基本圖

資料來源：Dhingra, S. L., "Foundations of Traffic Flow Theory: The Fundamental Diagram, Traffic Flow Theory Historical Research Perspectives," Transportation Research Circular E-C149, 2011.

由圖 2.3.5 知，在流率-密度關係圖上，不但呈現全域的流率與密度值(由 0 至最大值)，亦同時看得到自由流與壅塞兩不同車況區，更可清楚表現出最大流率( $q_m$ )，以及一個流率( $q_A$ )有二個可能的車流狀態(不壅塞  $k_B$  與壅塞  $k_A$ )等。最重要的，除流率與密度外，圖上亦可表現平均速率(連接原點與曲線上任一點弦的斜率， $u=q/k$ )，亦即車流三參數全員到齊，可謂具全方位的表現能力。

圖 2.3.6 為相關研究曾提出的各種流率-密度關係曲線，由圖知，在人類駕駛下的車流巨觀行為，一開始流率會隨密度增加而逐次增加，但到達一最大值以後，反而係逐次降低，最後當密度達最大值時，車流壅塞不動，流率會降為零。只要是由人類駕駛，就會呈現此種特徵。

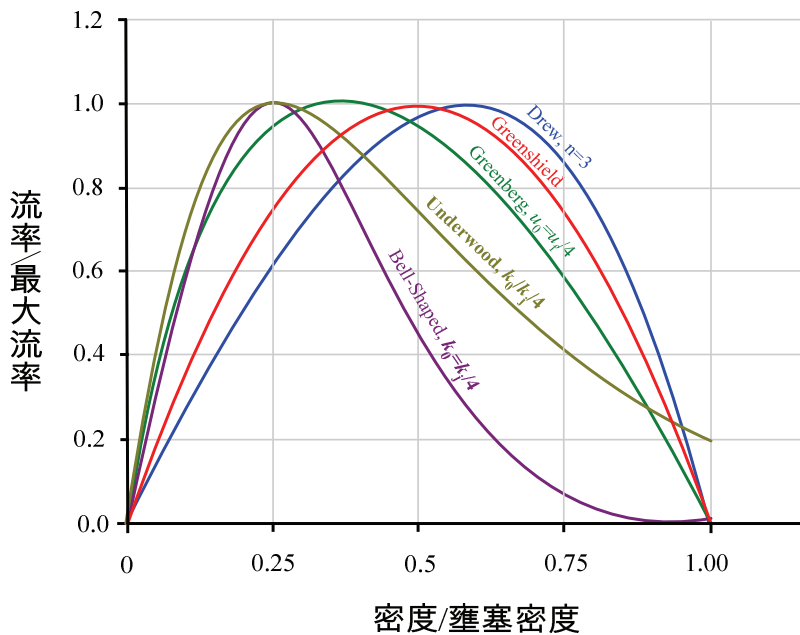


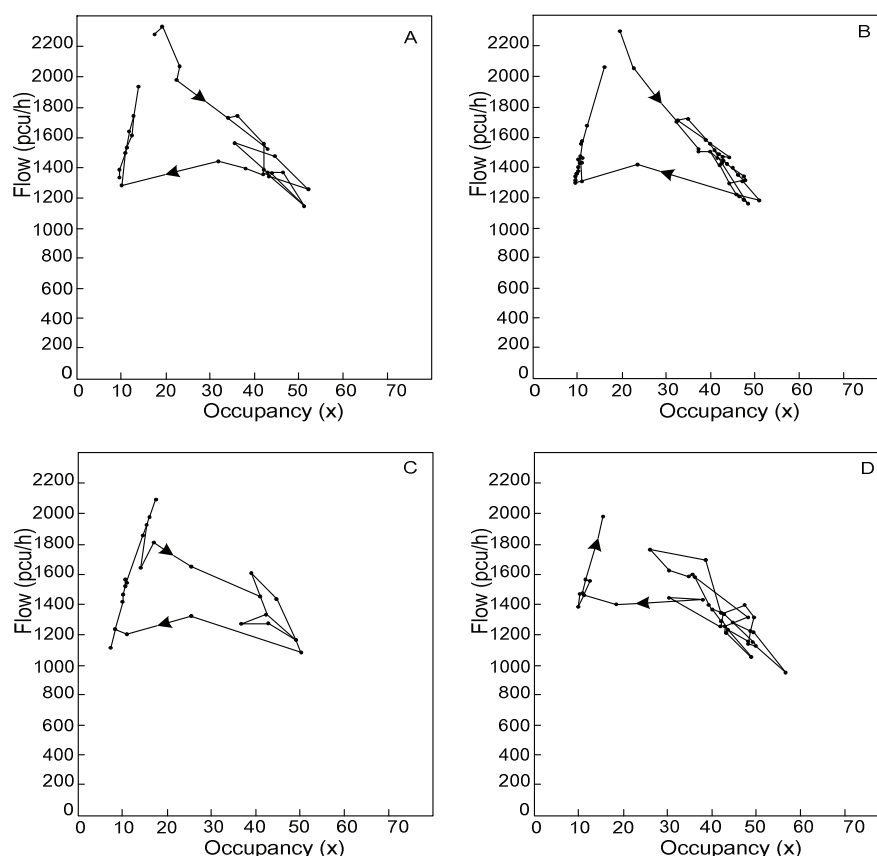
圖 2.3.6 各種流率-密度模式示意圖

圖 2.3.6 所示的各種流率-密度模式均為單態模式(single-regime model)，即模式適用整個密度值域，惟相關研究發現，在流率達最大值的前後密度區域車流巨觀行為並不相同。Hall(2001)即指出，Edie 可能是第一個發現流率-密度資料會在最大流率處不連續者，此種論點引起後續許多相關研究，如 Ceder(1975), Ceder and May(1976), Easa and May(1980) 即提出雙態模式(two-regime model)。

Koshi, Iwasaki, and Okhura(1983)以實證為基礎建議流率-密度關係應呈反 $\lambda$ (亦即鏡中 $\lambda$ ，如同中文的人字)。Athol(1965)提出占有率(而非密度)及流率關係的應用，以鑑別壅塞的發生，及流率低於容量時由非壅塞至壅塞的轉變(transition)，並以時間軌跡圖(連續發生的樣本)深入瞭解車流運轉的現象。Hall, Allen, and Gunter (1986)採用 Athol(1965)的時間軌跡圖法，分析加拿大多倫多市某道路主要瓶頸上游 4 公里處四天的車流資料，其最左車道(最高速)的五分鐘車流資料如圖 2.3.7 所示，說明如下：

- (1) D 圖：在資料蒐集前交通已堵塞了；
- (2) C 圖：在流率明顯低於容量下，不經容量點，直接轉至高占有率狀況；
- (3) A, B 圖：流率增至容量點後才轉至堵塞狀況；
- (4) 四張圖由壅塞回復至非壅塞狀況的路徑，均不經容量點。亦即交通運轉可以不留在流率-密度曲線上，而係由一側跳至另一側；
- (5) 四張圖各有一個樣本點係落在兩側曲線的中間(不在曲線上)。作者認為因資料係五分鐘的平均，該點可能是五分鐘車流狀況恰介於曲線兩側所致，惟 Persaud 與 Hall(1989)以 30 秒資料亦發現相同的現象。

Lighthill 與 Whitham(1955)曾以「衝擊波所到之處，密度突然改變」隱含說明上述現象；Newell(1982)的等候模式亦指出「等候車隊向上游延伸時，車隊尾部所到之處，速率會立即在速率-流量曲線上由非壅塞區跳至壅塞區」。Hall, Allen, and Gunter (1986)研究的結論係流量-占有率曲線呈 $\Lambda$ 型，Banks(1989)等後續基於大量資料的研究亦均支持此一結果。



**圖 2.3.7 多倫多市某道路四天的流量-占量資料**

資料來源：1.Hall, F. L., B. L. Allen, and M. A. Gunter, "Empirical Analysis of Freeway Flow-Density Relationships," Transportation Research 20A, 197-210,1986.  
2.Hall, F. L., "Traffic Stream Characteristics, Chapter 2 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," , Transportation Research Board, 2001.

### 2.3.3 速率-流率模式

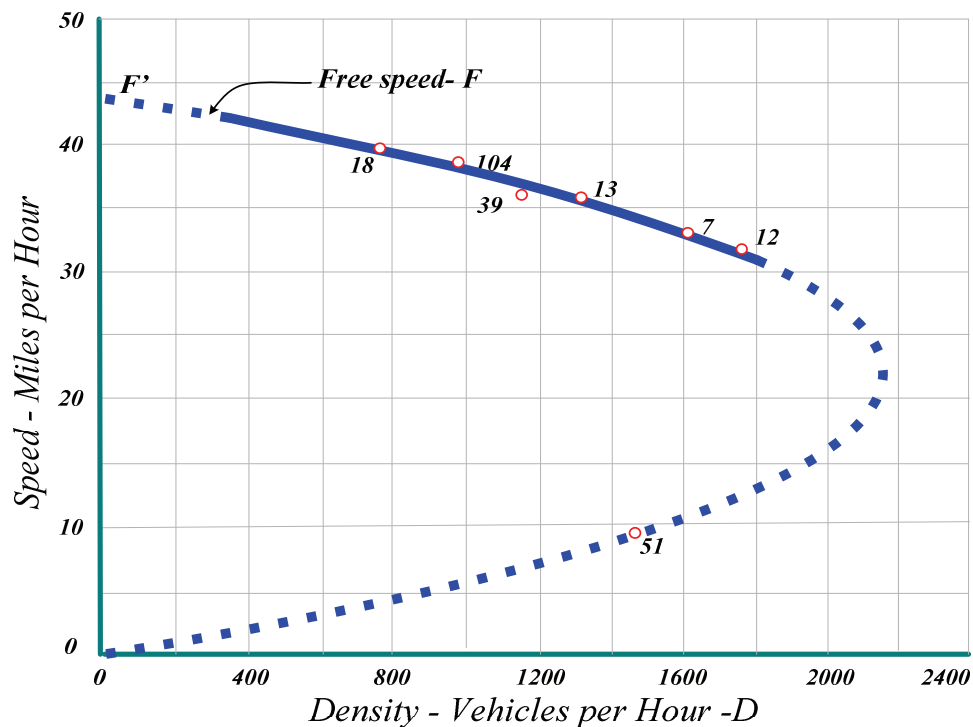
Greenshields(1935)以線性的速率-密度關係式，配合  $q=ku$  恆等式，導得拋物線型的速率-流量關係式，如圖 2.3.8：

$$q = k_j \left( u - \frac{u^2}{u_f} \right) \quad (2-3-8)$$

$k_j$ =壅塞密度

$u_f$ =自由流車速

與圖 2.3.2 同，圖 2.3.8 資料點旁的數字表以 100 輛車為一樣本的編號，而過飽和的樣本點(51 號)實際係從不同的道路取得。



**圖 2.3.8 Greenshields 建立與校估的流率-速率模式**

資料來源：1.Greenshields, B. D. ,“A Study of Traffic Capacity,” Highway Research Board Proceedings 14, 448-477, 1935.

2.Hall, F. L., “Traffic Stream Characteristics, Chapter 2 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report,” Transportation Research Board, 2001.

上示拋物線型的速率-流率模式數十年來一直被採用為適當的型式，美國公路容量手冊(highway capacity manual, HCM) 1965 年版至 1985 年版均採用此型，直到 1994 年版才改採不同的型式，如圖 2.3.9 所示。

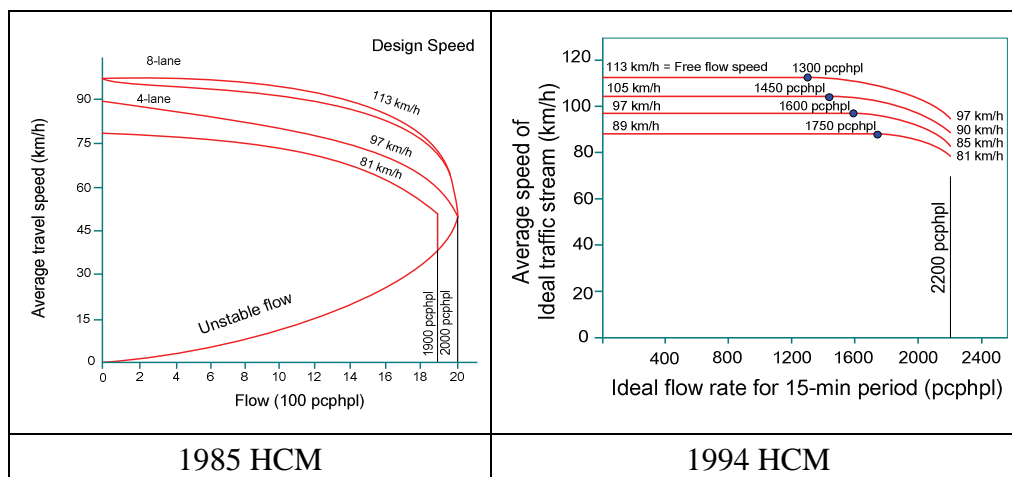


圖 2.3.9 速率-流率模式型式的演變

值得說明者，速率-流率關係式長期以來一直受到相關研究的忽視，例如美國 1975 年第一版的車流理論專輯(Gerlough and Huber, 1975)即聲明：「一旦建立速率-密度關係，則速率-流率關係即可確定」。造成此一現象的起源，當係速率-流率模式並不具函數型態(定義域每一值只對映值域的一個函數值)所致，而一個流率值會對映兩個速率值。此外，密度的倒數即駕駛人可直接感受的車間程(spacing)，亦即密度愈大，駕駛人會直接感受車流愈壅塞，致過去相關研究太偏重密度理論上的重要性，強調密度是衡量公路服務水準最好的指標(理論上)，美國早期的公路容量手冊甚而將密度全域切割成 A~F 區間來衡量公路各級的服務水準。

但密度甚難直接量測，相關研究在密度參數的取得上多以經  $q=ku$  守恒式來轉換，惟每經一次轉換，其真正的特性即多一次的失真。相對的，以「定點-長時間」法蒐集交通資料，最直接可得的是流率與速率資料，藉適當的取樣與平均，不必經任何不必要的轉換，即可直接建立速率-流率關係式。此外，在累積多年的研究與使用公路的經驗後，車流研究者發現，決定公路容量最關鍵的參數是自由流速率，因為一條公路品質的優劣，可由駕駛人在不受任何管制下自由行駛的結果來驗證判明。鋪面破損，幾何設計不良，轉彎半徑不足等的公路特性，一定會反映在自由流速率的降低。基於此，1994 年版的美國公路容量手冊即有明顯的變革，過去的容量手冊係先有一理想的最大服務流率，再由修正因子來改變(通常是降低)該值，1994 年版則將基準參數改為公路的自由流速率(調查所得或規劃設定)，所有影響容量的修正因子均直接降低自由流速率，再間接影響最大流率。總而言之，目前各方已認知，速率-流率關係實為高速公路管理策略重要的因素，遠較其他兩個關係式( $u-k$ ,  $q-k$ )更為重要。

## 2.4 本章小結

車流的流率、密度、速率三個巨觀參數中，密度是技術上最難取得的參數，而速率則係理論上爭議最大的參數。車流三參數間存在流率=密度×速率的守恆式，惟其速率必需為空間平均速率等式方成立。實務上，欲以「瞬間-長距離」法取得速率樣本以估算空間平均速率，不但技術上非常困難且亦不經濟(如空照)，而實務上簡單可行的取樣方式係「定點-長時間」法，問題是以「定點-長時間」法取樣並予算術平均並不能獲得空間平均速率。此一問題在車流理論發展的早期，曾困擾研究者相當一段時間，後經學者理論推導證實，在車流達均質時，採「定點-長時間」法取得的個別車輛車速樣本，經調和平均亦可不偏推估空間平均速率。本章亦說明調和平均的其他許多應用。

車流行為的模化，理所當然的，最初的觀察係從巨觀出發。事實上車流有些面相還真的像水流，這也難怪早期的車流模式多類比水流，所建立的多屬所謂的水流模式(stream models)。但不論如何簡單，早期建立的水流模式基本上已掌握車流整體的基本特性，當時相關研究學者最有興趣的議題是道路最大流率(容量)的發生以及值的大小，而所構建水流模式中，流率-密度關係式曾被稱為車流基本圖而廣受重視，惟近年來流率-速率關係式漸獲應有的重視，其二參數均可以「定點-長時間」法直接取得，關係圖又代表公路運轉的經驗，可據以推估公路的容量。

## 第三章 微觀跟車模式

車流微觀的行為模式係基於跟車行為來發展，一般稱為跟車模式(car-following models)，係建構個別車輛與整體車流間關係的橋梁。本章回顧其發展沿革，並專注在單車道公路上一輛車跟隨前車的行為。

### 3.1 跟車模式早期的發展

#### 1. 1950 年以前的研究

Rothery(2001)回顧說明跟車行為中一個有趣的面向，即車速  $V$  跟隨前車時與平均車間程  $S$  (average spacing)的關係。美國 1924 至 1941 年的 23 篇有關容量的研究，其容量推估即以跟車的平均車間程為基本單元。美國第一版公路容量手冊(1950)，以及早期所有單車道公路容量的推估公式為：

$$C=(1000) V/S \quad (3-1-1)$$

其中：

$C$ =單車道容量(車/小時)

$V$ =速率(公里/小時)

$S$ =連續兩車車尾緩衝桿間的平均距離=平均車間程(公尺)，  
1000 係轉換成公里的乘數

其單車道的車間程-速率關係可以下式表示：

$$S = \alpha + \beta V + \gamma V^2 \quad (3-1-2)$$

其中：

$\alpha$ =有效車長， $L$

$\beta$ =反應時間， $T$

$\gamma$ =兩倍後車最大平均減速率的倒數( $=1/2a$ )

依煞停距離的物理公式  $V^2=2aD_{break}$  ( $a$ =減速率， $D_{break}$ =煞停所需距離)知，即便前車瞬間停止(撞到牆)， $\gamma V^2$  項亦可提供後車不碰撞前車的足夠距離。 $\gamma$  典型的值為  $0.023 \text{ 秒}^2/\text{英呎}$ ，較不保守的模式可寫成： $\gamma = (a_f^{-1}-a_l^{-1})/2$ ， $a_f$ 、 $a_l$  分表後車與前車的減速率。即

$$\gamma V^2 = V^2/2a_f - V^2/2a_l = (D_f - D_l)_{break} \quad (3-1-3)$$

當前車不是瞬間停止，而是正常的煞停，假設前、後兩車煞停距離相同( $D_f=D_l$ )，即可令  $\gamma=0$ ，而依  $S=\alpha+\beta V$  即可組構出許多所謂「優良駕駛(安全跟車距離)」規則。例如加州機動車輛行車規範：「與前車保持(自己車速除以 10 mph)個車長的

距離」。

## 2.Reuschel(1950)與 Pipes(1953)

該研究之概念係基於加州機動車輛行車規範，即安全跟車原則=與前車保持自己車速除以 10 mph 個車長，例如時速 60 英哩時，與前車保持 6 個車長距離，如圖 3.1.1。依上述概念，其跟車模式之數學式可寫成：

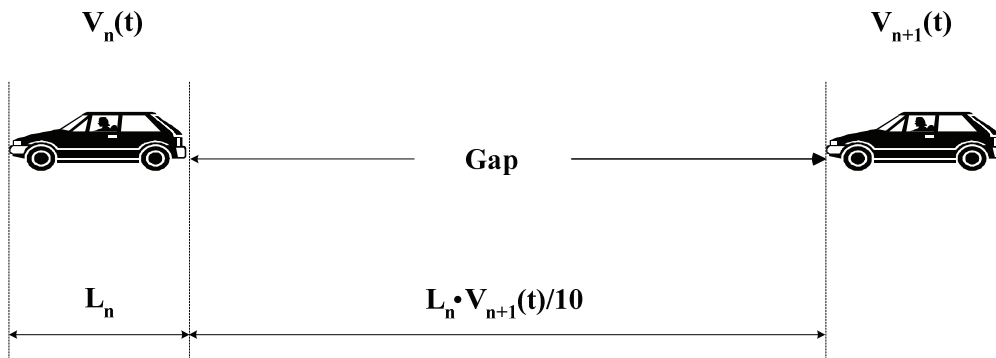


圖 3.1.1 Reuschel 與 Pipes 跟車行為關係圖

$$d_{\min} = L_n [V_{n+1}(t)/(1.47 \times 10)] + L_n \quad (3-1-4)$$

其中：

$d_{\min}$  = 跟車最小車間程，單位為英尺

$L_n$  = 車長，單位為英尺

$V_{n+1}(t)$  = 後車之車速，單位為英尺/秒

假設車長 20 英尺，即隱含最小車頭時距(headway)為 1.36 秒(相當於最小反應時間)：

$$\text{跟車最小車間程： } d_{\min} = 1.36 \times V_{n+1}(t) + 20$$

$$\text{跟車最小車頭距： } h_{\min} = 1.36 + 20/V_{n+1}(t)$$

Reuschel 與 Pipes 跟車模式的特性為：

- (1) 最小安全車間程係隨車速而線性增加；
- (2) 當車速增至無限大時，最小車頭距等於 1.36 秒；
- (3) 現場觀測結果車速中等者與模式相當一致，高、低速者則有明顯差異；
- (4) 模式相當簡單，但卻能與現場觀測結果有相當程度的吻合，令人驚訝。



### 3. Forbe 的跟車理論(1958 年)

該研究之概念係基於後車跟車行為係反映進行加、減速前所需之反應時間，亦即前、後車的間隙(gap)(前車車尾至後車車頭的距離)，須大於後車反應所需時間的行駛距離，如圖 3.1.2 所示。依上述概念，其跟車模式之數學式可寫成：

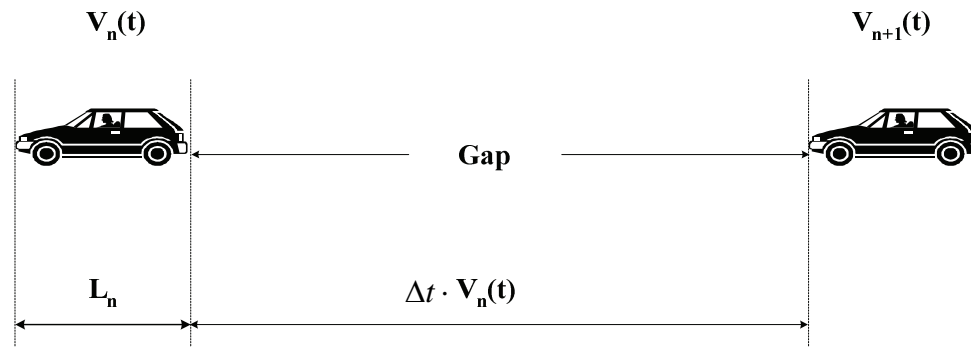


圖 3.1.2 Forbe 跟車行為關係圖

$$h_{\min} = \Delta t + L_n / V_n(t) \quad (3-1-5)$$

其中：

$h_{\min}$  = 跟車最小車頭距，單位為秒

$\Delta t$  = 最小反應時間，單位為秒

假設車長 20 英尺，最小反應時間=1.5 秒，則

$$\text{跟車最小車頭距： } h_{\min} = 1.5 + 20 / V_n(t)$$

$$\text{跟車最小車間程： } d_{\min} = 1.5 \times V_n(t) + 20$$

Forbe 的跟車模式之特性為：

- (1) 跟 Reuschel 與 Pipes 模式相同，最小安全車間程亦隨車速而線性增加；
- (2) 現場觀測結果車速中等者與模式相當一致，高、低速者則有明顯差異。

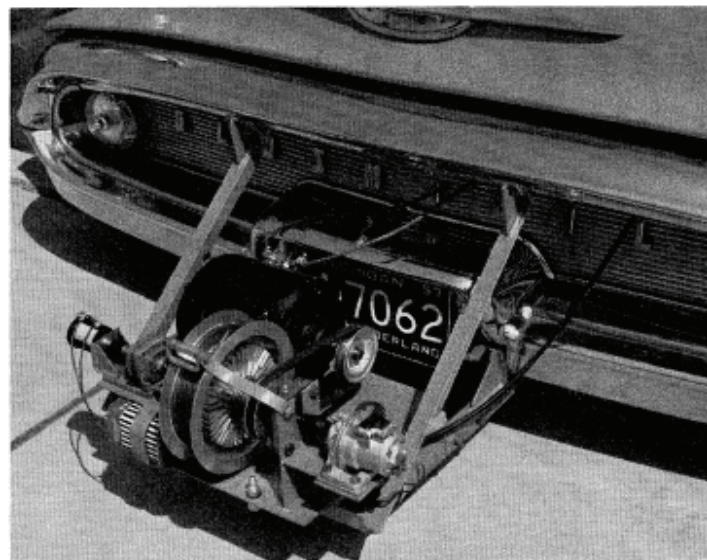
### 3.2 美國通用汽車公司跟車模式的發展

由前節的回顧知，早期跟車行為的研究主要仍基於巨觀現象的觀察，以巨觀參數間的關係來表現微觀的跟車行為，此種概念在研究發展上有其侷限性。跟車模式的發展，要等到 Herman 等人在通用汽車(General Motors，簡稱 GM)研究室自 1958 年起陸續進行的一系列研究，方有重大的突破，而其間，Kometani 與 Sasaki(1958)亦在日本進行獨立且類似的研究。

### 3.2.1 Herman 與其團隊

Gazis(2002)回顧車流理論的發展時指出，1950 年中期，車流行為的模化吸引許多著名學者如 Elliott Montroll 等的注意。1956 年通用汽車公司雇用 Larry Hafstad 成為其研究實驗室新的執行長，Larry Hafstad 的背景係核子物理學家，企圖使該研究實驗室成為基礎科學(basic science)的領導者，其後聘請 Robert Herman 與 Elliott Montroll 合作組成研究團隊，進行迄今仍堪稱偉大的車流基礎研究。

Gazis(2002)特別指出，Herman 與其團隊在車流理論的研究上遵循二個基本原則，第一，車流理論本身係一實驗科學(experimental science)，須以實驗方式進行；第二，必須針對特定研究現象來挑選最適用的數學模式，而非逕予套用研究者熟悉的數學模型。前者，為達成模式的驗證，Herman 與其團隊在通用汽車的測試車道(test track)上進行一系列的跟車實驗。Herman 堅持，只有親自設計並執行實驗，諸如車流行為模化的實驗科學才可能有所進步。當時的實驗以現今的標準來看，顯得相當原始，如圖 3.2.1 所示。由於當時量測兩車行進中車間程變化的遙感技術並不存在，因而係在後車前保險桿安裝彈性捲軸並以纜線連接前車後保險桿的方式來量測前後兩車間的動態距離，再以設於後車行李廂內的設備來自動記錄調查資料。



**圖 3.2.1 Herman 跟車實驗量測車間距離的纜線捲軸設備**

資料來源：Chandler, R.E., R. Herman, and E.W. Montroll, "Traffic Dynamics Studies in Car Following," Operations Research 6, 165-184, 1958.

### 3.2.2 跟車行為模化的概念架構

Cumming(1963) 將駕駛分成數個子單元，並將駕駛者角色視為一資訊處理者(information processor)。其中，跟車子單元比起其他駕駛單元相對簡單，且已成功的以數學模化。但即便只是跟車，其行為亦已相當複雜，為求簡化，模化上仍需作下列的假設：

- (1) 車輛係在單車道(無法變換車道)的環境下行駛；
- (2) 駕駛人的跟車原則是：一直緊隨前車，並避免碰撞；
- (3) 跟車者是人-車-路系統中主動且可預測的控制單元；
- (4) 跟車時需對連續刺激不斷作出機動反應，此駕駛作業稱為心理-機動(psychomotor)或覺察-機動(perceptual-motor)技術，包括：
  - 1) 覺察(Perception)：透過視力蒐集週遭的相關資訊。包括速度、加速度、車間程、相對車速、發生碰撞前的尚餘時間等；
  - 2) 決策(Decision Making)：理解資訊並予適時整合；
  - 3) 控制(Control)：平順、協調的執行控制指令。

跟車行為可以傳統控制理論來表示，如圖 3.2.2 所示。由圖知，跟車過程中，後車行為係受前車行車狀態影響，前車的任何變化，經後車駕駛人覺察-資訊蒐集與決策判斷-執行的反應，透過方向盤、油門或煞車踏板的動作來操作車輛動態，並依車輛實際動作回饋修正其車輛的操控，此一反覆的程序決定後車的行為動向。

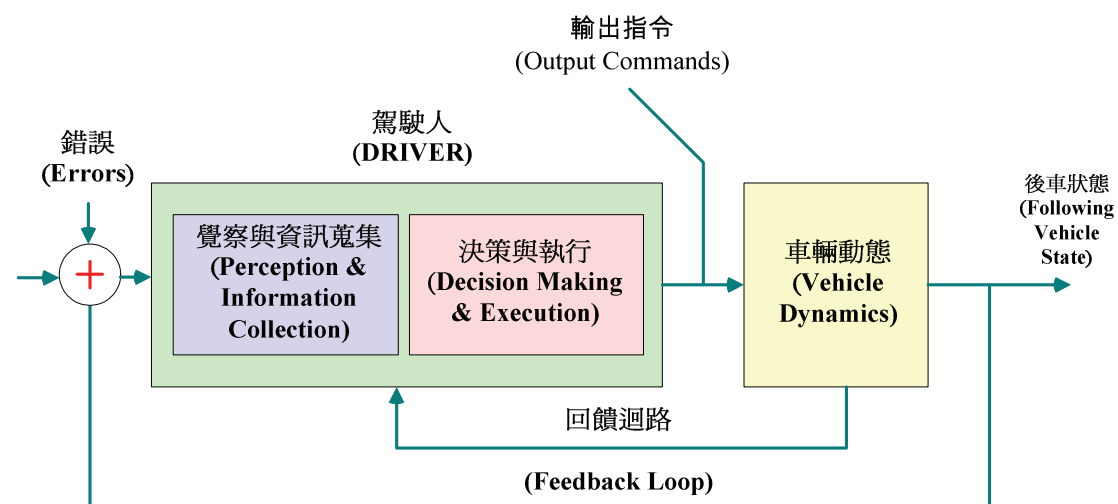


圖 3.2.2 跟車行為的控制理論架構

資料來源：Rothery, R. W., "Car Following Models," Chapter 4 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," Transportation Research Board, 2001.

圖 3.2.2 的架構並未將各駕駛因素全盤納入考慮，但即便如此，在數學模化上即已太複雜。而在單車道的假設下，後車駕駛人的決策判斷不包含變換車道或轉向的選項，只有加、減速及其額度的考量。基於此，可再進一步簡化，如圖 3.2.3 的線性控制架構。

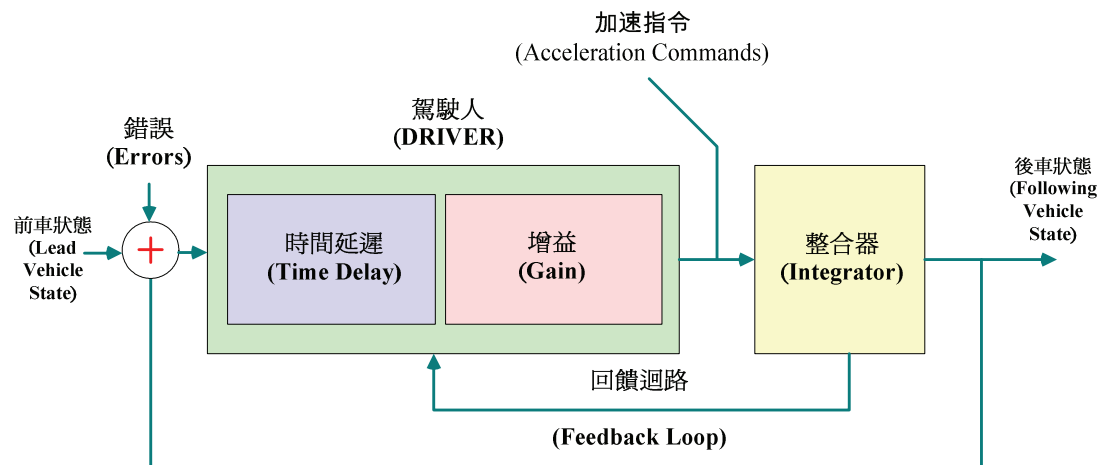


圖 3.2.3 跟車行為的簡化控制理論架構

資料來源：Rothery, R. W., “Car Following Models,” Chapter 4 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report,” Transportation Research Board, 2001.

圖 3.2.3 的跟車行為控制架構，以數學表示，可寫成下列刺激反應模式：

$$Response(反應) = \lambda \times stimulus(刺激) \quad (3-2-1)$$

其中：

$\lambda$ =跟車模式的敏感係數，係控制理論中的增益因子

茲說明上示模式的各單元如下：

### 1. 刺激函數

刺激函數包含許多因素，如車速、相對速度、車間程(spacing)、加速度、車輛操作特性，及駕駛門檻(driver thresholds)等。假設駕駛人會「一直緊隨前車」，並「避免碰撞」，為達成此兩原則，駕駛人在短時間( $\delta t$ )內會與前車保持非常小的相對車速  $U_{rel}$

$$E(U_l - U_f) = E(U_{rel}) = \frac{1}{\delta t} \int_{t-\delta t/2}^{t+\delta t/2} U_{rel}(t) dt \quad (3-2-2)$$

其中：

$U_l$ 、 $U_f$ =前、後車的車速

$\delta t$  可以覺察時間的函數來表示

較小的相對車速會拉長車間程為  $S$  的碰撞時間( $t_c$ , collision time)，如下式，亦使在  $\delta t$  的短時間內，車間程不會變大：

$$t_c = \frac{S(t)}{U_{rel}} \quad (3-2-3)$$

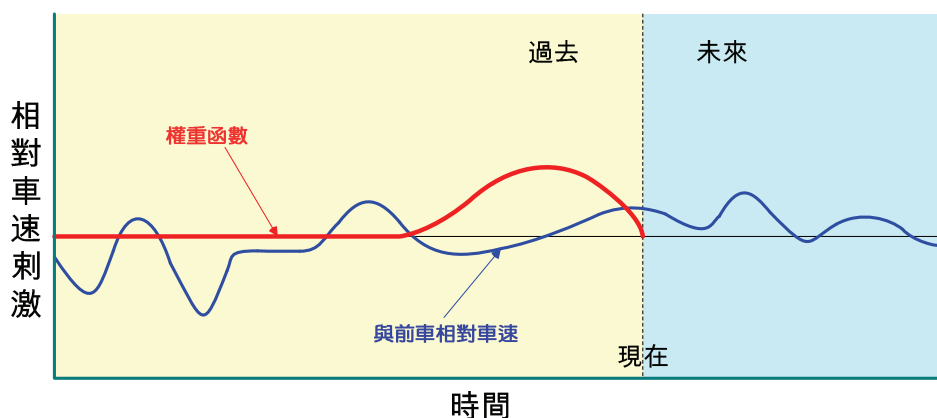
由以上的分析知，由於相對速度同時具備保有較長碰撞時間及避免前車逸走(drifting away)的雙重功能，符合「一直緊隨前車」並「避免碰撞」的跟車行為假設，故刺激函數一開始即是以相對車速為引數。

然而，跟車時係對連續刺激不斷作出機動反應，即在  $t$  時間以前發生的所有事件均可能產生刺激，亦即式(3-2-2)可改寫成所有較早相對車速的加權和型式：

$$E(U_I - U_f) = E(U_{rel}) = \frac{1}{\delta t} \int_{t-\delta t/2}^{t+\delta t/2} \sigma(t-t') U_{rel}(t-t') dt \quad (3-2-4)$$

其中， $\sigma(t)$  是 Chandler, Herman, Montroll (1958) 所稱的，反映駕駛者對早期資訊進行估測、評估、處理的加權函數(weighting function)。駕駛者係對過去與現在的資訊加權，綜整後在未來某適當時間再作出適當反應。

圖 3.2.4 即為加權函數的一般面貌，由圖知，太久前(5 秒前)的事件對現況的駕駛行為影響甚少，而甚短前(0.1 秒)發生的事件，駕駛人還來不及反應，其權重均甚小。



**圖 3.2.4 相對速率刺激與隨時而變的加權函數**

資料來源：Rothery, R. W., "Car Following Models," Chapter 4 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," Transportation Research Board, 2001.

為展現駕駛人對過去短暫時間內發生各種資訊的處理方式，可以假設：

$$\sigma(t) = \delta(t-T)$$

其中：

$$\delta(t-T) = 0, \text{ 當 } t \neq T$$

$$\delta(t-T) = 1, \text{ 當 } t = T$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-T) dt = 1$$

在此狀況下，刺激函數變成：

$$Stimulus(t) = U_l(t - T) - U_f(t - T) \quad (3-2-5)$$

其中： $T$ =反應時間

式(3-2-5)說明，駕駛人係隨時觀察外來刺激並在未來作出反應。加入反應時間，一方面反映駕駛人作出反應的延遲 (delay the response)，另一方面反映駕駛人作出決策前會需要取得前置資訊(advanced information)。

## 2. 反應函數

直行車輛可以作的反應，不外維持原速不變(加速度為 0)，或改變車速(加速度為正或負)，在數學上均可以加速度表示。基於此，反應函數一般係以後車的加速度為引數：

$$Response(t) = a_f(t) \quad (3-2-6)$$

## 3. 跟車模式的雛型

將式(3-2-5)與式(3-2-6)整合至式(3-2-1)中，Chandler, Herman, Montroll (1958) 率先提出近似刺激-反應架構的線性跟車模式：

$$\ddot{x}_f(t) = \lambda [\dot{x}_l(t - T) - \dot{x}_f(t - T)] \quad (3-2-7)$$

或相當於：

$$\ddot{x}_f(t + T) = \lambda [\dot{x}_l(t) - \dot{x}_f(t)] \quad (3-2-8)$$

其中：

$x_l(t)$ ， $x_f(t)$ =前、後車於時間  $t$  在道路上的位置

上式與圖 3.2.3 比較知，線性跟車模式之駕駛者單元係由時間延滯(time delay)與增益因子(gain factor)組成，其數學表示，前者為  $T$ ，後者為  $\lambda$ 。其中，增益因子係一物理名詞，用於處理訊號(外來刺激)接收後被放大(或縮小)的效果，而跟車模式中的增益因子，一般認為係反映駕駛人對外來刺激的敏感度。

上示車流模式與 Reuschel 及 Pipes 提出者外型類似，但數學上卻有明顯的差異。Chandler, Herman, Montroll (1958)的模式認為後車的加速率與前後兩車的相對車速成比例，但有反應的時差(time lag)。換言之，該模式假設後車駕駛人在前車拉遠時會嘗試趕上，而當前車逐漸靠近時會減慢下來，但後車駕駛人係在一特定時差後才會做出上述行為，而時差係與其反應時間(reaction time-lag)及車輛的物理特性有關。

### 3.2.3 Herman 團隊五代跟車模式

由前節的回顧說明知，Herman 團隊研發跟車模式的程序為：

- (1) 構建數學模式：後車跟車行為係由駕駛者接受外來刺激，依個人之敏感度作出反應的程序決定。其中，反應=後車之加減速；刺激=前後車間之相對車速。其數學模式型式均為：反應= $F$ (敏感度，刺激)；
- (2) 實車實驗：兩車以伸縮纜線相連，記錄行動中之車間距(spacing)。前車以一預設之行程表行駛(含加、減速)；後車在無任何預警下，以保持最小安全間距的方式跟車，並記錄每一時點的速率與加速率。共有兩種實車測試實驗：
  - 1) 初期測試車道(test track)跟車實驗  
係 Chandler, Herman, Montroll (1958)為驗證跟車模式最早雛型(第一代模式)所進行的實車實驗，用以推估模式的參數，並作模式效用的初步評估。實驗場所為通用汽車公司 1 英哩長的測試車道，共有 8 名男性駕駛參與跟車實驗；
  - 2) 後期隧道實車實驗  
為進一步確認跟車模式的有效性(validity)，選擇車流特性已被充分瞭解的實際道路交通環境來進行實際車流跟車實驗。實驗場所係選擇紐約市的幾條隧道，包括林肯(Lincoln)隧道、荷蘭(Holland)隧道及皇后城中區(Queens Mid-Town)隧道等，共有 10 位駕駛參與 30 次測試；
- (3) 模式驗證與修改。

依上述程序，Herman 團隊在 1958 年至 1964 年間，共發展五代的跟車模式，分述如下：

#### 1. 第一代模式：線性模式(the linear case)

- (1) 跟車模式

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \lambda[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad , \quad n=1,2,3,\dots \quad (3-2-9)$$

其中：

$\dot{x}_n(t)$ ,  $\ddot{x}_n(t)$ =依行車向順序編號為第  $n$  車在  $t$  時間的速率與加速率  
 $\lambda$ =跟車駕駛人對前方刺激的敏感度  
 $T$ =跟車駕駛人對前方刺激作出反應的時差(以下簡稱反應時間)

## (2) 實驗

- 1) 該實驗係在通用汽車公司的 1 英哩測試車道進行，共有 8 位男性駕駛參與。實驗結果的原始資料係先以等時距的方式整理，再以相關分析 (correlation analysis) 推估線性跟車模式的兩參數  $\lambda$  與  $T$ ，在資料為離散型式下，反應時差  $T$  亦採離散值。對個別駕駛的實驗結果而言，反應時間取整數時一般在 1 秒時可得最大相關係數，多數實驗的結果是落在 0.85~0.95 秒之間；
- 2) Chandler, Herman, Montroll(1958)的初步實驗結果整理如表 3-2-1 與圖 3.2.5 所示，推估項包括敏感度  $\lambda$ ， $C=\lambda T$ ，及平均車間程  $S$  與平均車速  $U$ ，敏感度  $\lambda$  的平均值為 0.368 秒<sup>-1</sup>。其中，車間程是取兩輛車在跟車實驗中車間程的平均； $\lambda T$  的平均值接近 0.5，接近漸近安定 (asymptotically stable) 的邊界(有關漸近安定，詳第四章)。
- 3) 圖 3-2-5 明顯呈現跟車間程愈大、敏感度愈低的傾向。雖然資料很零散，Gazis, Herman, Potts(1959)重建其迴歸式(圖上圈出的樣本不納入迴歸)，獲得  $\lambda=40.2/S$  ( $S$  的單位為英呎)。

## (3) 驗證與修改：

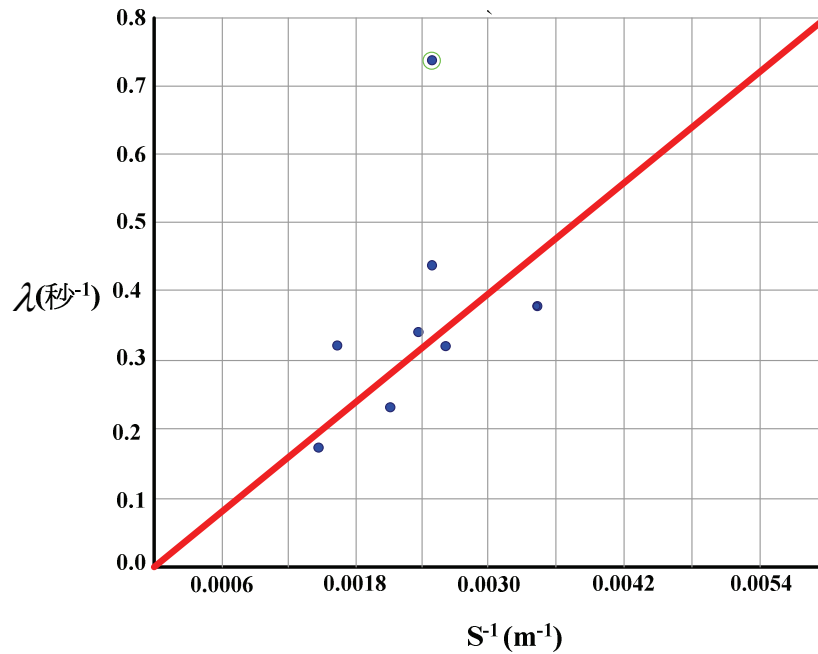
由實驗結果知，跟車的敏感度與兩車車間程的倒數有線性關係，亦即車間程較小(跟得較近)時，跟車者對前車行為的刺激較敏感。基於此，跟車模式中的敏感度，不宜為常數，而需隨車間程大小而有不同。

表 3-2-1 第一代模式跟車實驗結果

駕駛人	$\lambda$ 1/秒	$U$ 公尺/秒	$S$ 公尺	$\lambda T$
1	0.74	19.8	36.0	1.04
2	0.44	16.0	36.7	0.44
3	0.34	20.5	38.1	1.52
4	0.32	22.2	34.8	0.48
5	0.38	16.8	26.7	0.65
6	0.17	18.1	61.1	0.19
7	0.32	18.1	55.7	0.72
8	0.23	18.7	43.1	0.47
平均	0.37	18.8	41.5	0.69

資料來源：Rothery, R. W., "Car Following Models," Chapter 4 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," Transportation Research Board, 2001.





**圖 3.2.5 第一代跟車模式敏感係數與車間程倒數的關係**

資料來源：Gazis, D.C., R. Herman, and R.B. Potts, "Car-Following Theory of Steady-State Traffic Flow," Operations Research 7(4), 499-505, 1959.

註：圖上圈出的樣本不納入迴歸；原圖為英制，Rothery(2001)改為公制。

## 2. 第二代模式：車間程愈短愈敏感

(1) 跟車模式：車間程短時，敏感度用  $\lambda_1$ ，否則，用  $\lambda_2$ 。

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \begin{cases} \lambda_1 [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \\ \lambda_2 [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \end{cases} \quad (3-2-10)$$

(2) 驗證與修改：

由於模式變成不連續，選用  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  時需主觀判斷，甚難應用及發展，故再改回單一敏感度項，以不同型式表示。

## 3. 第三代模式：非線性模式(Non-linear Models)

線性跟車模式假設加速的反應與車間程完全無關，常理上，車間程愈小(後車距前車愈近)，後車加減速的反應會愈大。為納入上述效果，將參數  $\lambda$  由常數改為與車間程的倒數成正比的型式：

$$\lambda = \lambda_0 / [x_n(t) - x_{n+1}(t)] \quad (3-2-11)$$

其中：

$x_n(t)$  = 依行車向順序編號為第  $n$  車在  $t$  時間的位置

$\lambda_0$  = 新的常數，稱為敏感係數(sensitivity coefficient)

(1) 跟車模式修改成：

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_0}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (3-2-12)$$

(2) 實驗

- 1) 本實驗係在紐約市幾座隧道實際交通環境下進行。車行隧道為雙向雙車道(單向各一車道)，隧道內禁止超車。為調查非線性跟車模式的合理性，研究團隊展開一系列實驗，共 30 次測試，16 次在林肯隧道，10 次在荷蘭隧道，4 次在皇后城中區隧道。
- 2) 圖 3.2.6 即 30 次隧道實車實驗的增益因子( $\lambda=a_{0,0}$ )與時差  $T$  的關係。圖中實線將兩參數空間切成漸近安定與不安定兩個區域(右上為不安定)，值得注意的是，有很多駕駛人的行為似落在不安定區，或有相對較大的增益因子及時差；

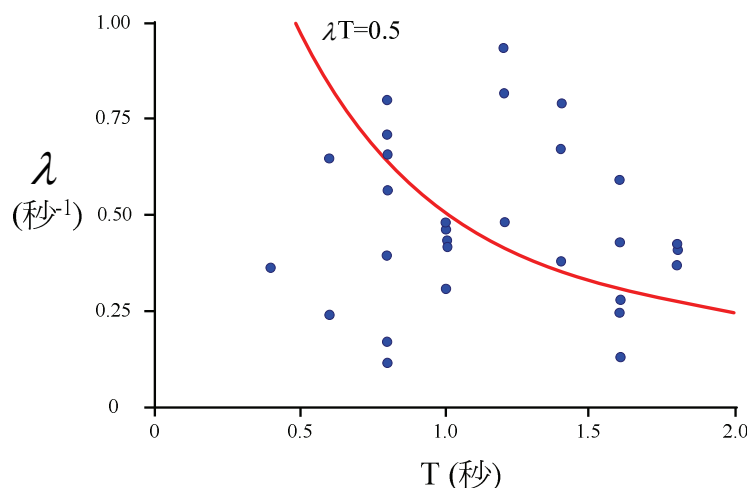


圖 3.2.6 30 次隧道實車實驗的增益因子與時差的關係

資料來源：Rothery, R. W., "Car Following Models," Chapter 4 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," Transportation Research Board, 2001.

- 2) 圖 3.2.7 係荷蘭隧道與林肯隧道實車實驗的增益因子與車間程倒數的關係圖，其直線為過原點的迴歸線，因強迫過原點，其斜率即對  $\lambda(=a_{1,0})$ ，見圖 3.2.7 的註)參數的推估值，結果分別為 29.21 公里/小時與 32.68 公里/小時，雖然差異僅  $\pm 3$  公里/小時以內，惟已足以反映此兩隧道巨觀車流特性的不同；

(3) 驗證與修改：

- 1) 由公路隧道實際車流的跟車實驗知，敏感度確與車間程倒數有關；
- 2) 常理上，車速愈高，駕駛人警覺性會愈高，對外來刺激會愈敏感，加減速的反應會愈大。基於此，跟車模式中的敏感度，宜再加入跟車的車速。

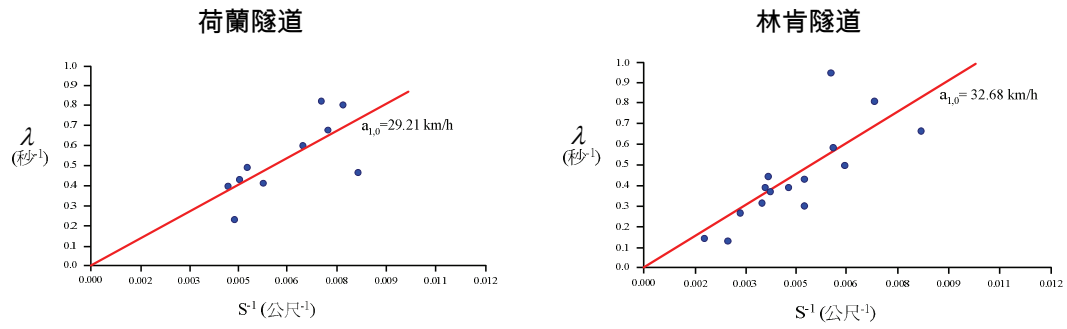


圖 3.2.7 荷蘭隧道與林肯隧道實車實驗的增益因子與時差的關係

資料來源：Herman, R. and R. B. Potts, "Single Lane Traffic Theory and Experiment," Proceedings Symposium on Theory of Traffic Flow. Ed. R. Herman, Elsevier Publications Co., 120-146, 1959.

註：圖中斜線  $a_{1,0}$  即本文的  $\lambda$ ，其下標分表  $l, m$  值， $1, 0$  表第三代模式。

#### 4. 第四代模式：敏感度加入車速

將車速納入後，敏感度包含一個常數項、二車之車間程與後車之車速三項：

$$\lambda = \lambda' \dot{x}_{n+1}(t+T) / [x_n(t) - x_{n+1}(t)] \quad (3-2-13)$$

其中：

$\lambda'$  = 新的敏感係數

(1) 跟車模式修改成：

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda' \dot{x}_{n+1}(t+T)}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (3-2-14)$$

(2) 模式缺點：雖已有大幅改善，惟模式中敏感度項內之兩參數仍限制為一次方型式，不具通用性(generalization)，故需再作改善處理。

#### 5. 第五代模式：通用型模式(Generalized Model)

(1) 跟車模式修改成：敏感度項內加入  $l-m$  兩參數

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_{l,m} \dot{x}_{n+1}(t+T)^m}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^l} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (3-2-15)$$

(2) 許多模式均為第五代模式之特例。

### 3.2.4 微觀與巨觀模式穩定狀態下的對映關係

本節說明跟車模式與巨觀水流模式在穩定狀態下對映關係的發現與推導。

#### 1. 跟車模式與巨觀水流模式對映關係的發現

除在實驗場所進行跟車調查外，Herman 團隊亦在美國紐約 3 條隧道實際車流中進行跟車實驗(方式仍採伸縮纜線連接二車)，共分析 11 種前車速率變化，每種變化平均約進行 4~16 次，每次 4 分鐘。當時在同一地點(林肯隧道)，紐約港埠管理局亦在進行類似研究，但係採用巨觀 Greenberg 模式，調查巨觀車流資料來校估其參數。此二研究採用之微觀與巨觀模式分別為：

$$\text{微觀：第三代跟車模式：} \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_0}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀：Greenberg 車流模式：} u = u_c \times L_n(k_j/k)$$

實驗結果，Herman 團隊獲得的跟車資料與新的  $m=0; l=1$  模式有很好的配適度， $R^2$  值介於 0.8~0.98，平均反應時間  $T=1.2$  秒，新的常數  $\lambda_0=19.8$  英呎/秒 ( $=19.8 \times 3600/5284=13.48$  英哩/小時)。紐約港埠管理局獲得的 Greenberg 模式最佳車速  $u_c$ (達容量時之車速)為 17.2 英哩/小時。微觀模式參數  $\lambda_0$  與巨觀模式參數  $u_c$  校估值接近，且此兩參數之單位及意義亦相同(均為速率)。此種巧合引起 Herman 團隊的注意，開始進行巨觀、微觀模式關連性之推導分析。

依 Gazis(2002)的回顧，1959 年 Potts 從澳洲來通用汽車公司短期參訪，參與 Herman 團隊的研究，當時的研究課題是：「當車流由一穩定狀態轉變成另一穩定狀態的過程中，跟車模式會顯現出什麼?」。該研究團隊在將跟車模式積分後，發現一有趣的結果，即只要增益因子(或敏感度)係與車間程成反比，則從跟車模式可導得 Greenberg 巨觀水流模式，且與跟車實驗資料相當一致。此一重大發現所發表的論文(Gazis, Herman, and Potts, 1959)，與其他兩篇優秀的論文(Chandler, Herman, and Montroll, 1958; Herman, Montroll, Potts, and Rothery, 1959)，共同得到 1959 年 OR 期刊(Operations Research Journal)的蘭徹斯特獎(Lanchester Prize)，並從此開啟了車流理論研究在 OR 期刊的一席之地。

欲重建上述微、巨觀車流模式互為對映的重大發現，可將第三代跟車模式以時間  $t$  積分，得：

$$\dot{x}_{n+1}(t+T) = \lambda_0 \ln[L^{-1}(x_n(t) - x_{n+1}(t))]$$
$$\text{其中：} L^{-1}=k_j, [x_n(t) - x_{n+1}(t)] = 1/k$$

在車流「穩定」的條件下，反應時間  $T$  可以忽略，上式可改寫成：

$$\dot{x}_{n+1}(t) = u = \lambda_0 \ln[k_j/k]$$

上示模式即 Greenberg 水流模式。

在後續的論文中，Herman, Rothery, Gazis (1961)將跟車模式通式化，即在原模式增益因子的分子項(後車車速)加上指數參數  $m$ ，分母項(前後兩車的間程)加上指數參數  $l$ ，構成了後來大眾普遍所稱的  $l$ - $m$  模式的通式。改變  $l$ 、 $m$  值，將此通式積分，可得到任何想得到的巨觀車流關係式。從此，微觀與巨觀車流模式間有了完全的相容性。

## 2.通用型跟車模式的推導

式(3-2-15) 如處於穩定狀態(steady-state)則有許多簡化，如反應時間可以忽略，車間程變成穩定狀態的常數車間程等。如個別車輛的速率亦等於整體車流的速率，則式(3-2-15)可簡化成：

$$\frac{\ddot{x}_{n+1}(t+T)}{\dot{x}_{n+1}(t+T)^m} = \frac{\lambda[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^l} \Rightarrow \frac{du}{u^m} = \frac{\lambda ds}{s^l} \quad (3-2-16)$$

值得說明者，乍見式(3-2-15)的人或許會覺得奇怪，為何跟車模式右側各項中，會出現含時差的車速項，也就是說，駕駛人加減速的反應，與做出反應當時瞬間的車速有關，此與前述刺激加權函數的觀念不符(過近的刺激，不影響決策)。直到出現式(3-2-16)，一切都明白了，原來式(3-2-15)定式的不合理，其實是一種數學處理上的機巧，經處理後，式(3-2-16)式左右兩側均為相同變量的微分式，即可進行積分，否則，式(3-2-16)左側分子項有  $T$ ，分母項卻沒有，變量不同是無法積分的。

式(3-2-16)的解為(Gazis, Herman, and Rothery, 1961)：

$$f_m(u) = c f_l(s) + c' \quad (3-2-17)$$

其中  $f_p$  ( $p=m$  或  $l$ ) 為：

$$f_p(x) = x^{1-p}, \quad (p \neq 1)$$

與：

$$f_p(x) = \ln x, \quad (p = 1)$$

積分常數， $c'$ ，可應用下列兩個邊界條件之一求解：

$$\begin{array}{ll} 1 & u = u_f \quad \text{at} \quad k = 0 \\ 2 & u = 0 \quad \text{at} \quad k = k_j \end{array}$$

上式中， $u_f$  為自由流車速， $k_j$  為壅塞密度，且  $s = 1/k$ 。

可應用第一個邊界條件( $k=0$ ,  $u=u_f$ )的唯一狀況是  $l > 1$ ，例如：

當  $l=1$  時：  $f_l = \ln(s) = \ln(1/k)$ ,  $k=0$  時無定義

當  $l < 1$  時：  $f_l = s^{1-l} = \frac{1}{k^{1-l}}$ ,  $k=0$  時無定義

當  $l > 1$  時：  $f_l = s^{1-l} = k^{l-1}$ ,  $k=0$  時,  $u=u_f$

$$\therefore f_m(u_f) = cf_l(s_0) + c' = c'$$

可應用第二個邊界條件( $u=0, k=k_j$ )的唯一狀況是  $m < 1$ ，例如：

當  $m = 1$  時：  $f_m = \ln(u)$ ,  $u=0$  時無定義

當  $m > 1$  時：  $f_m = u^{1-m} = \frac{1}{u^{m-1}}$ ,  $u=0$  時無定義

當  $m < 1$  時：  $f_m = u^{1-m}$ ,  $u=0$  時,  $k=k_j$

$$\therefore f_m(0) = cf_l(k_j) + c' = 0 \rightarrow c' = -cf_l(k_j)$$

因此，積分常數  $c'$  的推估為：

$$c' = f_m(u_f) \quad l > 1$$

$$c' = -cf_l(k_j) \quad m < 1$$

值得說明者，Gazis, Herman, Rothery(1961)在推導過程中，曾誤以為滿足邊界條件的組合為：

$$c' = f_m(u_f) \quad (m > 1, l \neq 1; \text{ 或 } m = 1, l > 1)$$

$$c' = -cf_l(k_j) \quad (\text{除 } m = 1, l < 1 \text{ 外, 所有其他 } l-m \text{ 組合})$$

May 與 Keller(1967)亦曾延用這種錯誤，直到 Byrne(1980)才獲得更正。綜合言之，滿足至  $u_f, k_j$  少一個邊界條件的  $l-m$  組合，如表 3-2-2 所示。

**表 3-2-2 滿足  $u_f, k_j$  至少一個車流邊界條件的  $l-m$  矩陣**

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	$m < 1$	$m = 1$	$m > 1$
$l < 1$	$u^{1-m} = ck_j^{l-1} + ck^{l-1}$	X	X
$l = 1$	$u^{1-m} = c \ln(1/k_j) + c \ln(k)$		
$l > 1$	$u^{1-m} = ck_j^{l-1} + ck^{l-1}$		$u^{1-m} = u_f^{1-m} + ck^{l-1}$

註：  $l > 1$  滿足  $k=0, u=u_f$  邊界條件；  $m < 1$  滿足  $u=0, k=k_j$  邊界條件。

圖 3.2.8 至圖 3.2.10 係不同  $l-m$  值導出的各種穩定狀態公式。圖中的流率已經常態化(最大流率為 1)，且對所有  $l-m$  組合，其壅塞密度均設為相同並亦常態化(壅塞密度為 1)。

圖 3.2.11 為 May 與 Keller(1967)整理的不同  $l-m$  跟車模式對映的巨觀水流模式(速率-密度曲線)；表 3-2-3 與圖 3.2.12 則為過去相關研究陸續研提的巨觀水流模式與跟車模式  $l-m$  矩陣對映的關係。

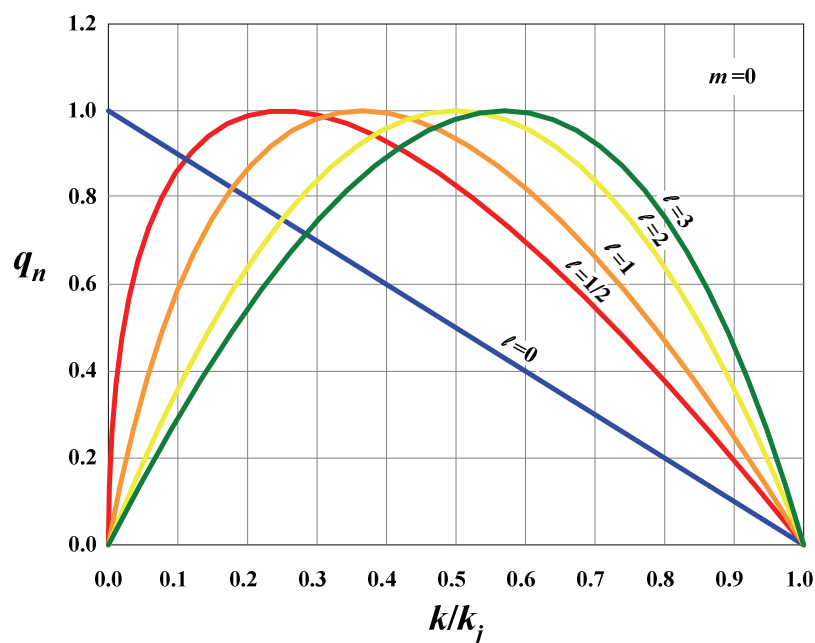


圖 3.2.8 常態化後的流率與密度關係圖( $m=0$ )

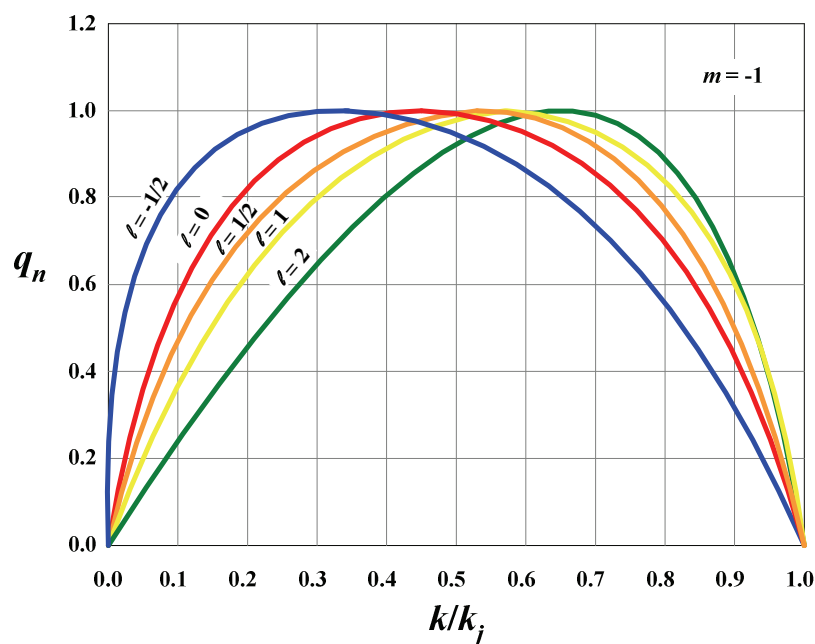


圖 3.2.9 常態化後的流率與密度關係圖( $m=-1$ )

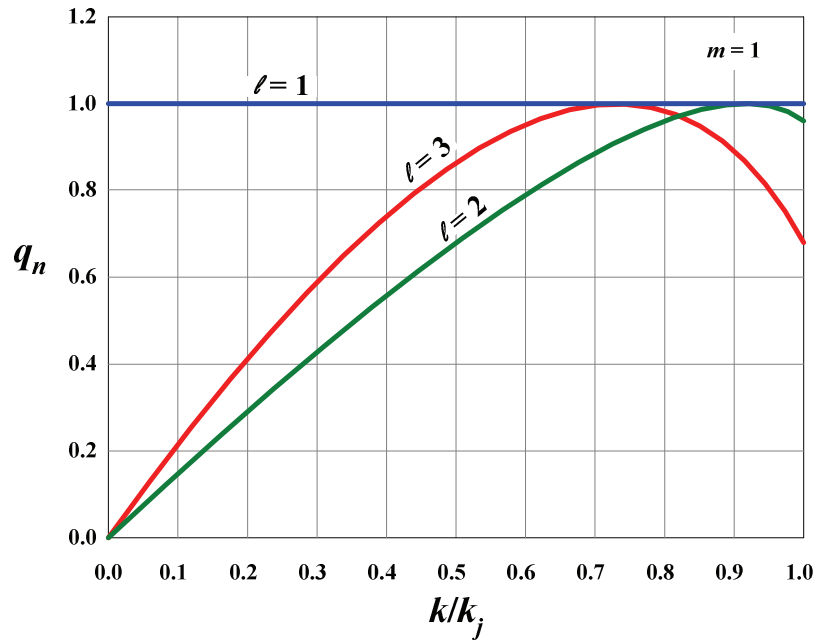


圖 3.2.10 常態化後的流率與密度關係圖( $m=1$ )

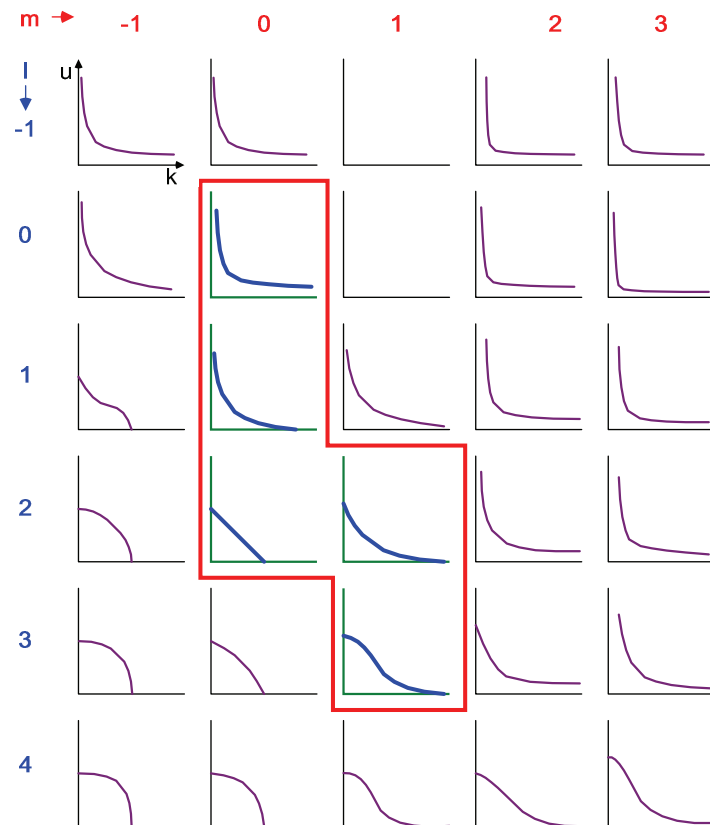


圖 3.2.11 不同  $l$ - $m$  跟車模式對映的巨觀車速-密度關係

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.



表 3-2-3 既有巨觀水流模式對映的  $l$ - $m$  矩陣

$\begin{smallmatrix} m \\ l \end{smallmatrix}$	$m=0$	$m=1$
$l=0$	Pipes, Reuschel: $u = \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k_j} \right]$	-
$l=1$	Greenberg: $u = u_0 \ln \left( \frac{k_j}{k} \right)$	-
$l=1.5$	Drew: $u = u_f \left( 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$	-
$l=2$	Greenshields: $u = u_f \left( 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right) \right)$	Underwood, Edie: $u = u_f e^{-\frac{k}{k_0}}$
$l=3$	-	Drake, May: $u = u_f e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k}{k_0} \right)^2}$

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

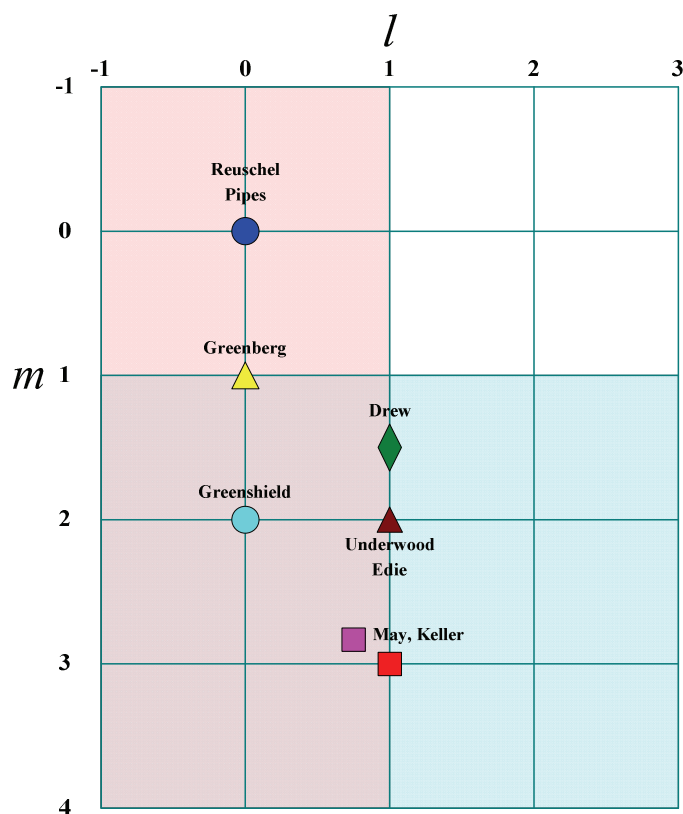


圖 3.2.12 既有巨觀水流模式在  $l$ - $m$  空間上的分布

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

## 2.其他跟車模式的推導

一旦指定  $l$ - $m$  參數後，跟車模式即與某特定巨觀水流模式有一對一對映的關係，現以 Greenshields 模式為例，說明其微觀與巨觀模式對映的推導程序，其他  $l$ - $m$  值的跟車模式，只要先確定可用邊界條件的數量及項目，依本節的程序，亦可比照辦理。

### (1) 由 Greenshields 巨觀水流模式推導跟車模式

Gazis, Herman, Rothery(1961)曾以 Greenshields 巨觀水流模式反推對映的跟車模式。Greenshields 巨觀水流模式的速率-密度關係式為  $u=u_f(1-k/k_j)$ ，令  $k=l/S$ ， $k_j=l/L$ ，得  $u=u_f(1-L/S)$ ，兩側以  $t$  微分，得：

$$\dot{u} = (u_f L / S^2) \dot{S} \quad (3-2-18)$$

加反應時間  $T$ ，改寫成跟車模式，得：

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{(u_f / k_j)}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (3-2-19)$$

上述係早期相關研究發展跟車模式採用的方法。

### (2) 由 $m=0, l=2$ 跟車模式推導 Greenshields 巨觀水流模式

Greenshields 巨觀水流模式係少數同時滿足  $u_f, k_j$  兩個邊界條件的跟車模式，依前節通案型跟車模式的推導，亦可由  $l=2, m=0$  跟車模式推導出 Greenshields 巨觀水流模式(其他模式滿足的邊界條件並不相同)，步驟如下：

1) 列出微觀跟車模式( $m=0, l=2$ )之公式：

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_{2,0}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

2) 積分得速率公式：

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\lambda_{2,0}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} d[x_n(t) - x_{n+1}(t)] = -\frac{\lambda_{2,0}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]} + C \\ &= -\lambda_{2,0}k + C \end{aligned}$$

3) 由車流邊界條件，解積分之常數項  $C$  與敏感度常數  $\lambda$

∵ 邊界條件： $u=0 \rightarrow k=k_j$  (壅塞密度)

∴  $0 = -\lambda_{2,0}k_j + C \rightarrow C = \lambda_{2,0}k_j \rightarrow u = -\lambda_{2,0}k + \lambda_{2,0}k_j$

∵ 邊界條件： $k=0 \rightarrow u=u_f$  (自由流車速)

∴  $u_f = \lambda_{2,0}k_j \rightarrow \lambda_{2,0} = u_f / k_j$

$\rightarrow u = u_f/k_j (k_j - k) = u_f(1 - k/k_j)$ ，即為 Greenshields 巨觀水流模式。

### 3.3 微觀與巨觀模式對映的問題

#### 3.3.1 從微觀模式導出巨觀模式的問題

由前節知，透過以下程序，可將微觀模式轉換成巨觀模式：

- (1) 假設達均衡狀態，忽略跟車模式中的反應時間  $T$ 。
- (2) 將跟車模式積分，並代入必要的邊界條件，如  $u_f$ 、 $k_j$ ，以解出積分常數。

本節以最簡單的跟車模式--線性跟車模式( $l=0, m=0$ )，及非線性跟車模式中最簡單的 Greenshields 模式( $l=2, m=0$ )，來說明從微觀模式導出巨觀模式的問題。

##### 1. 線性跟車模式

線性跟車模式定式及其對映的巨觀水流模式定式如下：

$$\text{微觀跟車模式：} \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \lambda [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀車流模式：} q = q_{\max} \left[ 1 - \frac{k}{k_j} \right]$$

圖 3.3.1 即線性跟車模式微觀與巨觀模式間的關係。由圖知：

- (1) 線性微觀跟車模式的敏感度項參數會代入巨觀水流模式中( $\lambda=q_{\max}$ )。
- (2) 巨觀水流模式尚需要  $k_j$  的邊界條件來定型，對於線性微觀跟車模式言，就相當於設定車輛停止時的車間程為  $1000/k_j$ ，以該值為跟車的起始條件。
- (3) 線性微觀跟車模式的反應時間  $T$  並未代入巨觀水流模式中，而是在推導前，假設跟車達均衡時可以忽略  $T$ ，而先予以剔除。

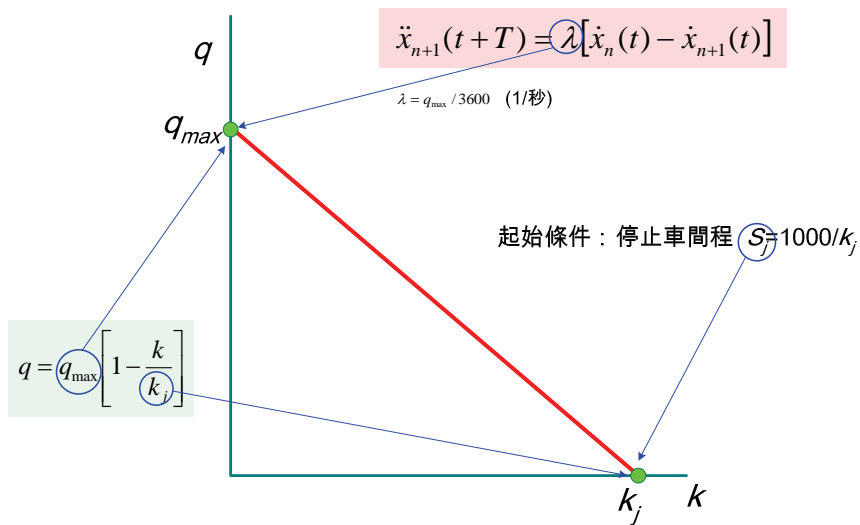


圖 3.3.1 線性跟車模式微觀與巨觀模式間之關係

## 2.非線性跟車模式

非線性跟車模式(以  $l=2, m=0$  為例)定式及其對應的巨觀車流模式定式如下：

$$\text{微觀跟車模式： } \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_{2,0}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀車流模式： } q = u_f k \left[ 1 - \frac{k}{k_j} \right]$$

圖 3.3.2 即非線性跟車模式微觀與巨觀模式間的關係。由圖知：

- (1) 微觀跟車模式的敏感度項參數會代入巨觀車流模式中( $\lambda_{2,0}=u_f/k_j$ )。
- (2) 巨觀車流模式在積分時會需要用到  $u_f$ 、 $k_j$  兩邊界條件來消除積分常數，並給予模式定型，對於微觀線性跟車模式言，就相當於車輛停止時設定車間程為  $1000/k_j$ ，以及自由流時設定車速為  $u_f$ ，作為跟車的起始條件。
- (3) 同樣的，微觀跟車模式的反應時間  $T$  亦未代入巨觀車流模式中，而是在推導前，假設跟車達均衡時可以忽略  $T$ ，而先予以剔除。

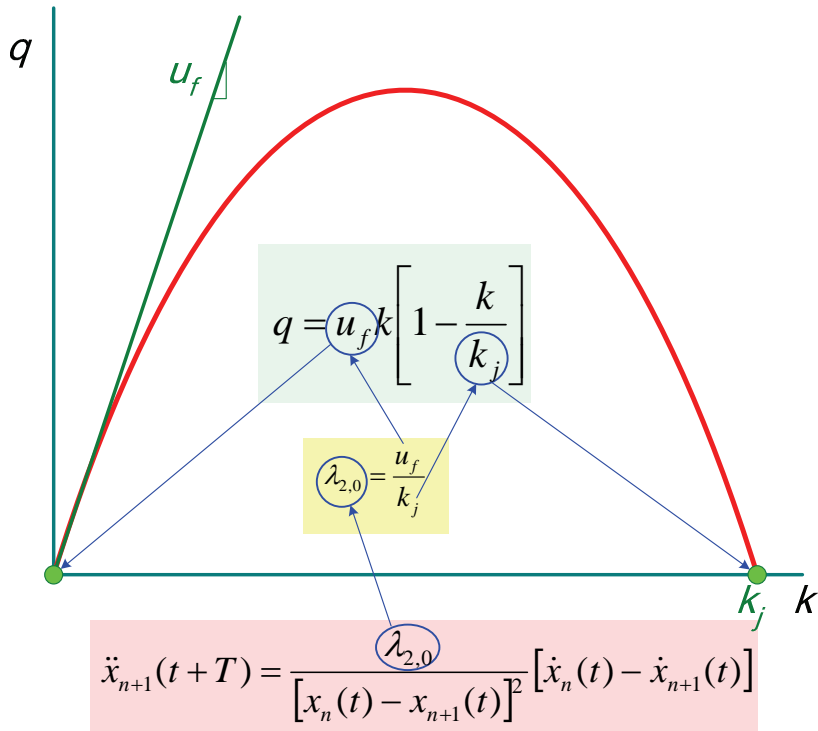


圖 3.3.2 非線性跟車模式微觀與巨觀模式間之關係

### 3.微-巨觀車流模式模化上的缺漏

由前節微觀跟車模式推導巨觀車流模式的過程可以很明顯的發現：

#### (1) 微觀跟車模式

模式定式設有反應時間  $T$ ，事實上，在跟車模式的發展中，在模式中加入反應時間係相當重要的突破。惟在構建完成通案型定式( $l-m$  模式)時，基於數學上容易處理的考量，反應時間  $T$  僅以常數來設定，亦即不論與前車間距遠近，跟車時的車速如何，跟車時的反應時間均相同，對於不同跟車狀況下反應時間應不同的問題並未予以模化上進一步精細的處理。

#### (2) 巨觀水流模式

沒有反應時間  $T$ 。雖然微觀跟車模式的反應時間係設定為常數，已相當簡化，但由微觀模式推導巨觀模式過程中，在均衡狀態的假設下， $T$  仍遭剔除，致巨觀水流模式中完全看不到反應時間參數。此外，過去相關研究一直強調微觀跟車模式與巨觀水流模式的對映關係，卻忽略一個重要的課題，即微觀跟車模式本身即是一加速度公式，具動態性，模式在適當的操作下是可以模化個別車輛以及整體車流的運動行為，但巨觀水流模式根本不會動，只是在均衡狀態下，車流三個巨觀參數-流率、密度、速率間的關係式，總言之，只是一靜態的模式。

### 3.3.2 應用微觀跟車模式進行跟車模擬時的問題

以一個微觀跟車模式模擬車流時，直覺上，在設定模式參數值後，似乎只要令每輛車依循模式來跟車，則在達均衡時(各車加速度為零，車速、車間程均不再改變)，巨觀上就會呈現其對映的某特定  $q-k-u$  巨觀關係。事實不然，除了模式參數須設定外，模擬開始前尚須設定起始條件，例如各車要以何種車速行駛，以及各車的車間程為何等，只要起始條件的設定不同，就會影響其微、巨觀模式間的對映關係，本節以模擬的方式分析說明之。

#### 1.線性微觀跟車模式

由前節的說明知，線性微觀跟車模式與其對映的巨觀水流模式分別為：

$$\text{微觀跟車模式} : \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \lambda [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀水流模式} : q = q_{\max} \left[ 1 - \frac{k}{k_j} \right]$$

$$\text{其中} : \lambda = q_{\max}/3600, k_j \text{ 表壅塞密度}$$

以上示微觀跟車模式模擬車流時，在設定  $\lambda$  值等於  $q_{\max}/3600$ ，並對各車設定一個相同的起始車速  $u_e$ ，是否起始車間程不論如何設定，只要各車是依循指定的微觀跟車模式來跟車，則經些微擾動(令頭車加速再減速恢復成原車速)再達均衡

後，車間程均會恢復等於該均衡車速對應的唯一車間程(巨觀密度的倒數)?

現以模擬線性跟車模式的方式來檢驗此一問題。基本的模擬設定如表 3-3-1 所示，模擬的起始設定是先設定巨觀的  $k$  值，依上示的巨觀水流模式換算出對應的  $q, u_e$  值( $u_e=q/k$ )，再將單位轉換成秒、公尺後，即得微觀跟車模擬的起始車間程與車速值。此外，微觀跟車的反應時間  $T$  設為 1 秒，頭車的加速度  $a$  設為  $\pm 4$  公尺/秒<sup>2</sup>。

圖 3.3.3 即本微觀模擬兩組起始值的設定，其他設定說明如下：

- (1) 均衡狀態模擬：兩車先依表 3-3-1 設定的車間程與車速(微觀  $s=33.33$  公尺， $v=13.095$  公尺/秒)行駛。後車以表 3-3-1 設定的  $\lambda$  及  $T$  代入線性微觀跟車模式來跟隨頭車；頭車先等速行駛 2 秒(此時巨觀上  $k=30$  車/公里)，然後開始減速至巨觀密度變為  $k=60$  車/公里，兩車達均衡後維持一段時間，再令頭車減速至巨觀密度變為  $k=90$  車/公里，達均衡後維持一段時間，再令頭車加速，恢復到巨觀密度變為  $k=30$  車/公里，達均衡後停止，前後共模擬 60 秒。
- (2) 任意設定模擬：維持前述各項設定與模擬程序設計不變，僅令起始時，後車與前車的車間程由 33.33 公尺改為 40 公尺。

表 3-3-1 線性微巨觀模式對映關係的模擬基本設定

項目	對映的巨觀水流模式			線性微觀跟車模式		
參數 設定	$q_{max}=$	1800	車/小時	$\lambda=$	0.5	1/秒
	$k_j=$	140	車/公里	反應時間 $T=$	1	秒
起始 設定	$k=$	30	車/公里	車間程 $s=$	33.33	公尺
	$q=$	1414	車/小時	車速 $v=$	13.095	公尺/秒
	$u_e=$	47.1	公里/小時	加速度 $a=$	$\pm 4$	公尺/秒 <sup>2</sup>

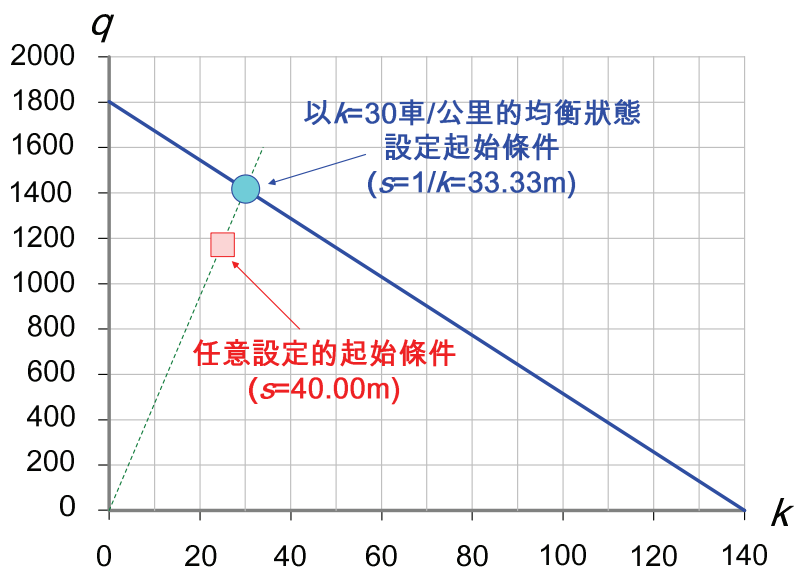


圖 3.3.3 線性微巨觀模式對映關係模擬的起始設定

模擬過程中，需要判定何時達均衡，所幸這很容易。後車跟隨前車達均衡時，兩車的加速度均為零、均為等速行駛，且其車間程不再變化，如圖 3.3.4 所示，圖中達均衡的狀況有四處，其車間程分別為 33.33、16.67、11.11、33.33 公尺，分別對應的巨觀車密度為 30、60、90、30 車/公里。

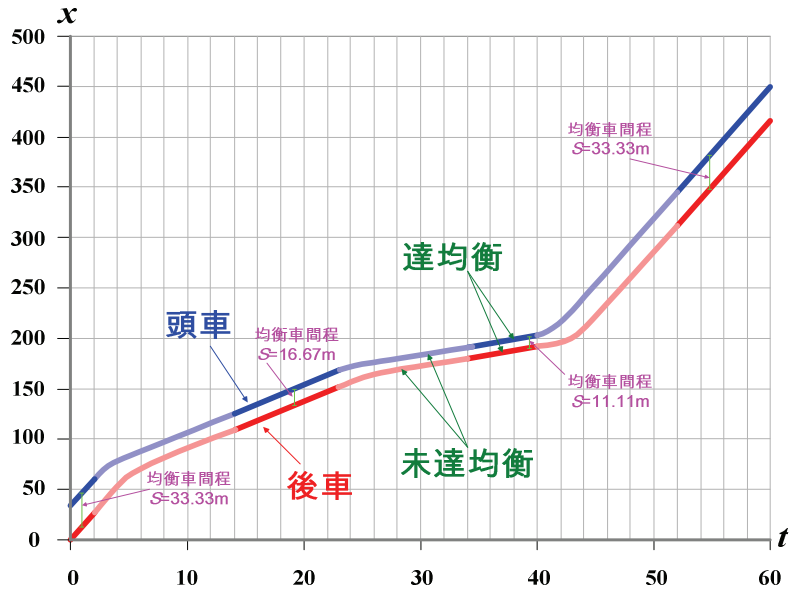


圖 3.3.4 線性微觀跟車模式模擬的兩車時空軌跡圖

圖 3.3.5 為兩車跟車模擬達均衡的結果，由圖知，以某均衡狀態來設定模擬的起始值，不論其車速後來如何變化，只要再達均衡，巨觀上均會落在其對映的巨觀水流模式  $q-k$  曲線上；當起始值是任意設定時，其達均衡的點將落在另一條  $q-k$  曲線上。由於本模擬採用相同的  $\lambda$ ，故兩條  $q-k$  曲線的  $q_{max}$  值相同。

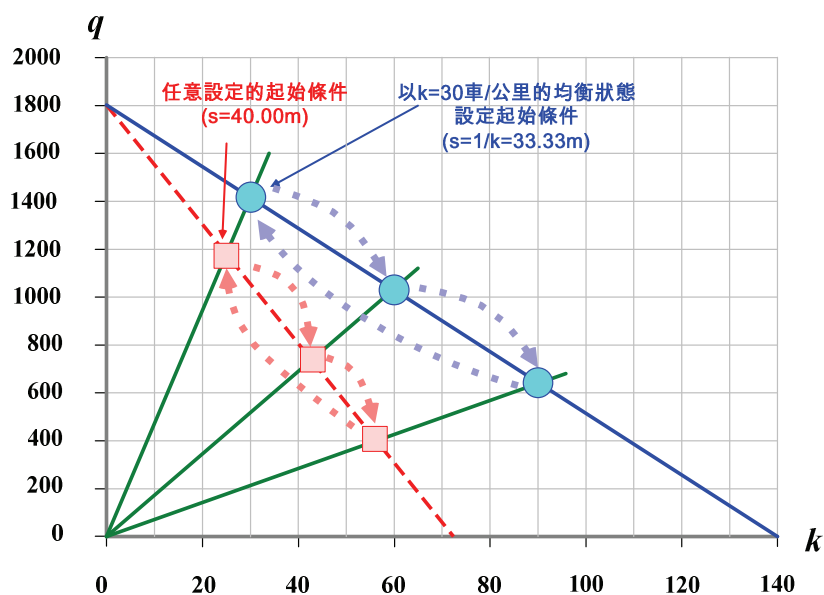


圖 3.3.5 線性微巨觀模式對映關係模擬結果

上述結果的原理是，巨觀水流模式的另一參數  $k_j$  並未顯現在線性微觀跟車模式的定式中，事實上  $k_j$  是在由微觀轉成巨觀的積分過程中，為解出積分常數時才加入，換言之，只設定  $\lambda$  值的線性微觀跟車模式會對應無限多條截距相同(由  $\lambda=q_{max}/3600$  指定)但斜率不同的  $q-k$  曲線，須藉  $k_j$  的設定方能定型。當然並非一定須以  $k_j$  來定型，只要是均衡狀態均能給予線性微觀跟車模式定型，方法係藉  $u_e=f(k)$  的均衡關係式同時設定各車起始的速率(車速  $v$ )與跟車間程( $s=1/k$ )。以  $k_j$  來設定起始條件只是較為簡便，因車速為 0，只需將跟車間程設定為  $s_j=1000/k_j$ (車輛因壅塞而完全停止時兩車的車間程)，可免去同步設定車速的困擾。

## 2.非線性微觀跟車模式

為簡化，非線性跟車模式採所對映巨觀模式中最簡單的 Greenshields 模式。即非線性微觀跟車模式( $l=2, m=0$ )及其對映的巨觀水流模式之定式分別為：

$$\text{微觀跟車模式} : \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_{2,0}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀水流模式} : q = u_f k \left[ 1 - \frac{k}{k_j} \right]$$

其中 :  $\lambda_{2,0}=u_f/k_j$  ( $u_f$  表自由流車速， $k_j$  表壅塞密度)

上示非線性跟車模式的參數  $\alpha$  雖包含其對映巨觀水流模式的兩邊界參數  $u_f, k_j$ ，惟因只確定其比例關係( $\lambda_{2,0}=u_f/k_j$ )，仍未予個別定量，故對前節相同的問題：「是否只要依指定的微觀跟車模式跟車，達均衡時，不論起始的車間程如何設定，每一車速最終只會對應一個車間程？」仍有待分析澄清。

此一問題同樣可以模擬的方式來檢驗。基本的模擬設定如表 3-3-2 所示，同樣是先設定  $k$  值，依上示的巨觀水流模式換算出對應的  $q, u_e$  值，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程與車速值。此外，微觀跟車的反應時間  $T$  設為 0.5 秒，頭車的加速度  $a$  設為  $\pm 4$  公尺/秒<sup>2</sup>。

**表 3-3-2 非線性微巨觀模式對映關係模擬的基本設定**

項目	對映的巨觀水流模式			線性微觀跟車模式	
參數 設定	$u_f =$	80	車/小時	$\lambda_{2,0} =$	158.73 公尺 <sup>2</sup> /秒
	$k_j =$	140	車/公里	反應時間 $T =$	0.5 秒
起始 設定	$k =$	30	車/公里	車間程 $s =$	33.33 公尺
	$q =$	1886	車/小時	車速 $v =$	17.5 公尺/秒
	$u_e =$	62.9	公里/小時	加速度 $a =$	$\pm 4$ 公尺/秒 <sup>2</sup>



本模擬實驗亦分成兩組，說明如下：

- (1) 均衡狀態模擬：兩車先依表 3-3-2 設定的車間程與車速值(微觀  $s=33.33$  公尺， $v=17.5$  公尺/秒)行駛，後車以表 3-3-2 設定的 $\lambda_{2,0}$ 及 $T$ 代入非線性微觀跟車模式來跟隨頭車；頭車先等速行駛 2 秒(此時巨觀上  $k=30$  車/公里)，然後開始減速至巨觀密度變為  $k=60$  車/公里，兩車達均衡後維持一段時間，再令頭車減速至巨觀密度分別為  $k=90$ 、 $120$ 、 $127$ 、 $135$  車/公里，達均衡後維持一段時間，再令頭車加速，直到其巨觀密度變為  $k=4$  車/公里，達均衡後停止，前後共模擬 240 秒。
- (2) 任意設定模擬：維持前述各項設定與模擬程序設計不變，僅令起始時，後車與前車的間程由 33.33 公尺改為 40 公尺。

圖 3.3.6 為模擬達均衡的結果，由圖知，以某均衡狀態來設定起始值(如  $k=30$ ,  $u_e=62.9$ )，不論車流如何變化，只要再達均衡，其巨觀上的均衡點均會落在對映巨觀水流模式的  $q-k$  曲線上；當起始值是任意設定時，其均衡點組成的將是規模等比例縮減的另一條  $q-k$  曲線，而此兩條  $q-k$  曲線只會在  $u_f$  點( $k=0, q=0$ )重合。

上述結果說明，非線性微觀跟車模式即便已包含巨觀模式所有邊界參數，惟如只有比例而無定量，則任意設定起始條件，其微觀跟車模式達均衡時對映的巨觀模式仍會不同。由此知，微觀模擬前必須審慎設定起始條件，起始條件本身在巨觀上代表一個均衡狀態點，須在模擬前確定係落在指定的巨觀水流關係曲線上。

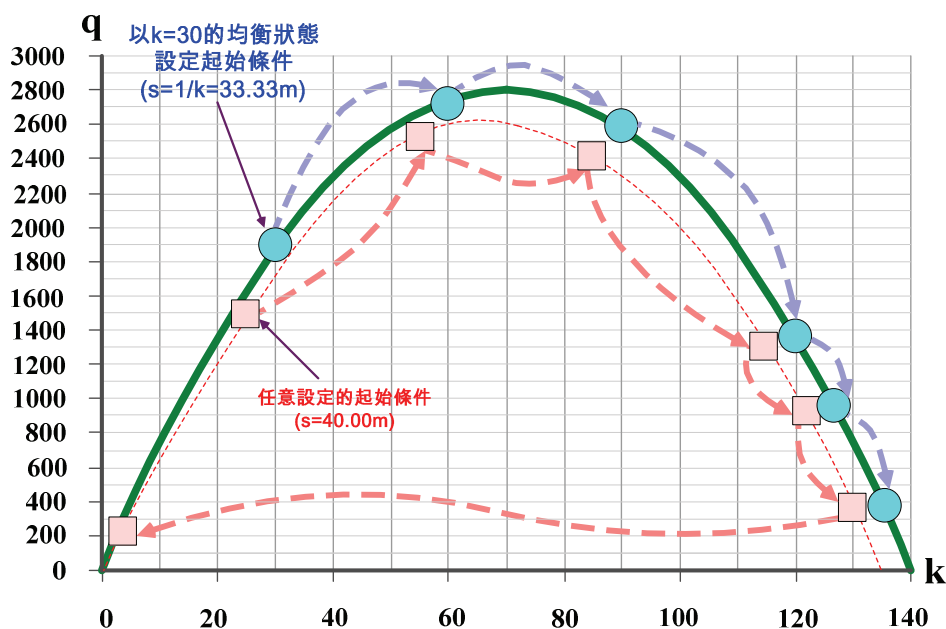


圖 3.3.6 非線性微巨觀模式對映關係模擬結果

### 3.4 跟車模式參數的校估

$l$ - $m$  微觀跟車模式有兩個指數參數及一個常數參數有待校估。直覺上，要建立微觀跟車模式，理應進行跟車實驗，蒐集微觀跟車資料來校估模式參數，以建立符合某特定地區與駕駛環境的跟車模式。實務上，跟車行為有時處於非穩定狀態(即非等速，有加減速)，有時處於穩定狀態(等速)，前者的資料變動較大，後者則明顯較為均一。由於跟車模式本質上係一加速度公式，故參數校估直覺上會針對非穩定狀態時的跟車資料來取樣。惟以不穩定的跟車資料欲校估出穩定的參數值，其出發點即互相矛盾，亦不符統計原則，其結果也往往不如人意。

相對的，巨觀水流模式的三個參數在取樣上均為平均值(例如連續數車的空間平均車速)，以統計迴歸的方式建立最配適的  $q$ - $k$  或  $u$ - $k$  關係式，係以平均值樣本來估算平均參數值，其結果當然較為穩定，這亦係早期相關研究對車流行為的觀察，多以建立巨觀水流模型為產出的主因。

本節首先回顧說明相關研究以微觀方式校估參數、建立跟車模式的成果，再說明如何以巨觀車流資料來校估參數，據以建立微觀跟車模式。

#### 3.4.1 以微觀跟車資料校估跟車模式參數

Brackstone, McDonald (1999)曾回顧相關研究在微觀跟車模式參數校估上的努力。除 Herman 團隊在發展跟車模型過程進行的實車實驗與參數校估外，Edie (1961)採用類似 Gazis, Herman, Potts (1959)的方法，嘗試以新蒐集的巨觀資料來配適  $m=0$ ;  $l=1$  模式，結果發現敏感度常數需要進一步修改，需引進跟車者的速率項，因而產生  $m=1$ ;  $l=1$  另一新的模式。

Gazis, Herman, Rothery (1961)對跟車公式敏感度的  $v$  與  $s$  項分別引進  $m$ 、 $l$  兩指數參數。藉 18 組實車測試資料的分析發現，所有  $m$ 、 $l$  組合的配適度均有類似的  $R^2$  值，配適最好的組合落在  $m=0\sim 2$ ，及  $l=1\sim 2$ 。

接下來的 15 年陸續有許多類似的研究嘗試定義出最佳的  $m$ 、 $l$  組合。其中最值得注意的有：

- (1) May, Keller (1967)採用新的資料，發現最佳整數組合  $m=1$ ;  $l=3$ ，最佳非整數組合  $m=0.8$ ;  $l=2.8$ ，常數項  $c=1.33\times 10^4$ ；
- (2) Heyes, Ashworth (1972)嘗試建立一般化  $l$ - $m$  跟車模式與當時相關研究提出的感知模式(perceptual models)的關係，並產出新的關係式，其刺激項為  $\Delta v/s^2$ ，敏感常數為  $\Delta t^P$ ，係有指數係數的車頭距。該敏感常數採英國 Mersey 隧道的資料校估得 0.8，可對應  $m=-0.8$ ;  $l=1.2$  模式。
- (3) Ceder, May (1976)採用前所未見的大規模資料，結果發現最佳組合為  $m=0.6$ ;  $l=2.4$ 。其主要先進之處係提出以雙態(two regime)法配適觀測資料會比單態(single regime)獲得較佳結果。其中，適用非壅塞車流的模式為  $m=0$ ;  $l=3$ ，

壅塞車流的模式為  $m=0$ ;  $l=0\sim 1$ 。

Treiterer, Myers (1974)採用空照法以觀察大量車輛的行駛軌跡，藉此萃取出速率  $v$  與車間程  $s$  的量測值。該研究假設駕駛人在不同車況下的行為有異，遂將其分成跟車加速與跟車減速兩相，分別決定其跟車關係式。結果，加速相  $m=0.2$ ;  $l=1.6$ ，減速相  $m=0.7$ ;  $l=2.5$ 。如將此結果與 Hoefs (1972)的研究比較會很有趣。Hoefs (1972)的研究係加速相  $m=1.5$ ;  $l=0.9$ ，非煞車減速相  $m=0.2$ ;  $l=0.9$ ，煞車減速相  $m=0.6$ ;  $l=3.2$ 。

自 70 年代末以後，有關  $l$ - $m$  跟車模式的研究與使用逐漸減少，只有兩個研究值得注意：

- (1) Aron (1988)使用一輛儀裝車輛(an instrumented vehicle)在巴黎的不同交通環境下蒐集跟車資料，獲得平均車速 7 公尺/秒，平均車間程 14 公尺，約 60 分鐘的資料。分析時，該研究將跟車分成三相，結果減速相  $c=2.45$ ;  $m=0.655$ ;  $l=0.676$ ；穩定狀態相  $c=2.67$ ;  $m=0.26$ ;  $l=0.5$ ；加速相  $c=2.46$ ;  $m=0.14$ ;  $l=0.18$ ；
- (2) Ozaki(1993)由某都市 32 層辦公大樓拍攝公路車流，觀測路段長度為 160 公尺，資料共含 2000 部通過車輛，再從錄影帶萃取出 90 分鐘資料。該研究的結論係最佳參數組合為減速相  $c=1.1$ ;  $m=0.9$ ;  $l=1$ ；加速相  $c=1.1$ ;  $m=-0.2$ ;  $l=0.2$ 。應注意的是，在這麼短的觀測區間內，每輛車最多只能萃取小於 10 秒的時間序列資料。

由以上說明知，過去有許多研究針對  $l$ - $m$  跟車模式進行校估與驗證，惟現今卻少有類似研究接續發展，主要原因係各研究對  $l$ 、 $m$  參數值的校估結果往往互相矛盾。Brackstone and McDonald(1999)認為其原因可能有二：

- (1) 跟車行為可能因交通及車流條件而異；
- (2) 許多實證分析係在低速或極端的停行狀況下進行，並不能反映一般的跟車行為。將這些狀況排除後可得表 3-4-1，其結果才值得進一步分析。

表 3-4-1  $l$ - $m$  跟車模式最可靠的參數推估結果

Source	$m$	$l$	Approach
Chandler et al. (1958)	0	0	Micro
Herman and Potts (1959)	0	1	Micro
Hoefs (1972) (dcn no brk/dcn brk/acn) <sup>a</sup>	1.5/0.2/0.6	0.9/0.9/3.2	Micro
Treiterer and Myers (1974) (dcn/acn) <sup>a</sup>	0.7/0.2	2.5/1.6	Micro
Ozaki (1993) (dcn/acn) <sup>a</sup>	0.9/-0.2	1/0.2	Micro

註<sup>a</sup>: dcn/acn: deceleration/acceleration; brk/no brk: deceleration with and without the use of brakes.

資料來源：Brackstone, M. and M. McDonald, "Car-following: a historical review," Transportation Research 2F, 181-196, 1999.

即便限縮在這一小群範圍內，跟車模式參數值仍有顯著的變異。其中，表 3-4-1 所列前 2 個研究未考慮不同車流狀態，意味其參數值係一平均結果；後 2 個研究則可能存有實驗誤差(experimental error)，因其資料不是空照便是由大樓頂攝影取得，在如此遠的觀測距離攝入影片中的車輛影像甚小，量測其行駛距離及車間程時不可避免會產生誤差，尤其對加速率的估算影響最大。

綜合以上說明知，值得信賴的資料似僅剩 Hoefs(1972)，其指出減速時敏感度隨自己的車速增加而增加，以反映此種狀態下增加行車安全的重要性；加速時敏感度隨  $1/\Delta x$  增加而增加，以反映此種狀態下向前續進的重要性。這些與車速有關的發現與 Treiterer 與 Myers，及 Ozaki 等的研究一致，惟與  $1/\Delta x$  有關的發現則與相關研究間有很大的差異。

缺少一致的結論使跟車模式逐漸讓位，雖然 Low 與 Addison(1995)曾使之復活，該研究對一個  $l$ - $m$  跟車模式( $c=0.3$ ;  $m=0$ ;  $l=1$ )增加額外項，即實際與期望車間程差的 3 次方( $c_2=30$ )，惟至今無人對該模式進行校估。

### 3.4.2 以巨觀車流資料校估跟車模式參數

直接以不穩定的加減速跟車資料來校估跟車模式，本質上就違反統計要求「觀測無誤差」的基本假設，而經相關研究多年來的嘗試，其結果亦不盡如人意，甚而在 1970 年代後就少有人嘗試。

但既然已證實  $l$ - $m$  跟車模式在穩定狀態下(steady-state)與巨觀水流模式有一對一對映關係，而巨觀水流模式的建立，不但在資料蒐集上較簡易，在模式校估上亦較符合統計的基本假設，則從巨觀模式參數的校估來著手似較合理。

May 與 Keller(1967)曾提出一套跟車模式參數校估嚴謹的程序。該研究選擇速率-密度關係，而非流率-密度或速率-流率關係，來進行校估，優點是數學上較易操作。經由  $l, m$  值的選擇可獲得各式各樣的模式，如圖 3-4-1，為定義出特定模式，式(3-2-17)中的  $l, m, c, c'$  四個參數就必須確定。獲得這些參數的方法，是以迴歸分析來配適出最佳的  $c, c'$  值，再藉相關分析，以最大相關來決定  $l, m$  值。

#### 1. 評估的統計程序

如圖 3.2.11 所示，只有  $l=2, m=0$  時，速率與密度方呈線性關係，對其他  $l, m$  組合，當運用迴歸式來求取最佳值時，模式勢必作一些轉換方能符合迴歸為線性關係的限制(例如當  $u=f(\exp(k))$  時，取  $\log$  可成線性式)。惟一旦經此轉換，其  $u, k$  間的相關性便與未轉換前的原關係不同。

為解決大部分模式為非線性的問題，May 與 Keller(1967)設定模式校估的適合度指標  $GoF$ (Goodness of fit)如下：

$$GoF = \sqrt{\sum (u - u_{estimated})^2 / n} \quad (3-4-1)$$

上式中， $GoF$  係理論公式推估值與樣本間的平均離差。May 與 Keller(1967)採用式(3-4-1)校估一組含 118 個樣本的一分鐘時間平均速率與平均密度現場調查資料

(取自芝加哥高速公路監控系統)，該資料取自艾森豪快速公路西向三車道路段的中央車道，其量測到的最高平均車速為 52.3 英哩/小時，最低為 8.2 英哩/小時；計算出來最高的密度為 118.4 車/英哩，最低為 14.2 車/英哩。

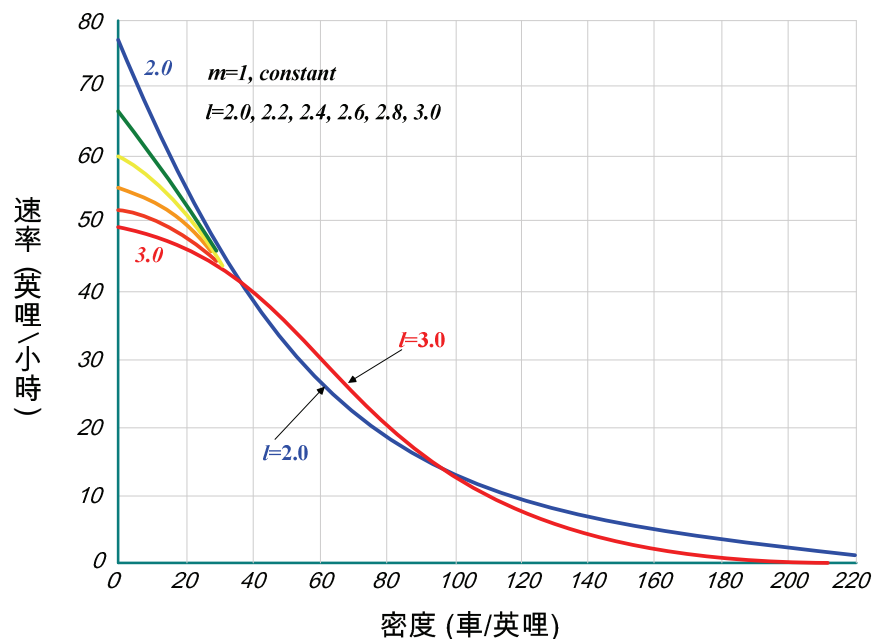


圖 3.4.1 非整數指數參數對  $u-k$  關係式的影響

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

將分析結果以等離差線(a contour map of equal deviation)繪製在  $l, m$  座標上如圖 3.4.2 所示(圖上只繪出  $(-1 \leq m \leq 3)$  與  $(-1 \leq l \leq 4)$  範圍，包含最小離差)。

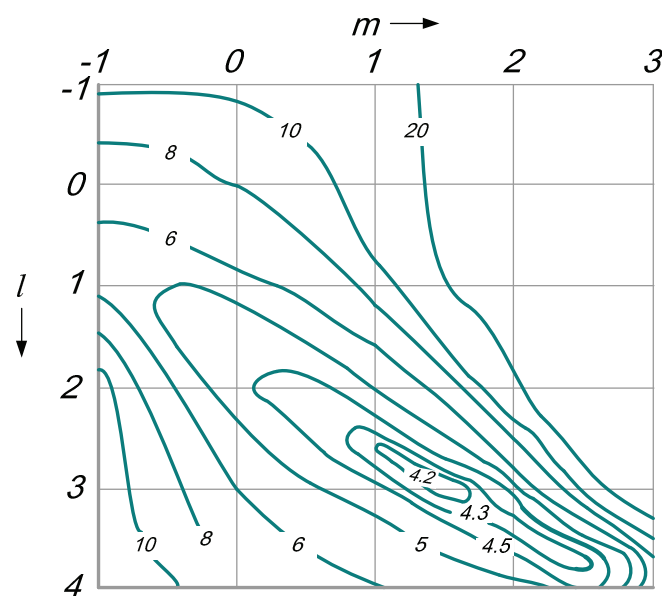


圖 3.4.2 平均車速等離差曲線圖

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

## 2.以車流特性作為評估指標

經由上述統計程序求取最小離差的  $l, m$  模式，結果仍不能令人滿意。原因是不同  $l, m$  模式的最小離差間差異不大，在這麼小的差異下想找出最佳的模式，實在相當困難。惟由公路與車輛的實體限制，加上現場觀測的經驗知，合理的車流模式係有些車流特性的條件限制。

速率-密度關係中重要的車流特性有自由流速率  $u_f$  (當  $k=0$ )，以及壅塞密度  $k_j$  (當  $u=0$ )；流率-密度關係中重要的車流特性有最大流率  $q_{\max}$  (當  $k=k_0$ ； $u=u_0$ ，為發生最大流率時之密度與速度)。利用這些特性，可用來選擇最適的  $l, m$  組合。

依艾森豪快速公路實際特性，各車流特性合理範圍為：

- (1) 自由流速率： $u_f=50\sim55$  英哩/小時；
- (2) 壅塞密度： $k_j=185\sim250$  車/英哩；
- (3) 臨界速率： $u_0=28\sim38$  英哩/小時；
- (4) 臨界密度： $k_0=48\sim65$  車/英哩；
- (5) 最大流率： $q_{\max} \geq 1800$  車/小時；

圖 3.4.3 為等最大流率  $q_{\max}$  曲線。圖 3.4.4 之 a 與 b 顯示自由流車速  $u_f$  與壅塞密度  $k_j$  的配適結果。圖中清楚顯示自由流車速僅在  $l > 1$  的模式方存在，壅塞密度則僅在  $m < 1$  的模式方存在。由圖知，在  $l, m$  座標平面中，自由流車速與壅塞密度對應的只有很窄的  $l, m$  範圍。圖 3.4.4 之 c 與 d 分別為等臨界速率  $u_0$  與密度  $k_0$  曲線。

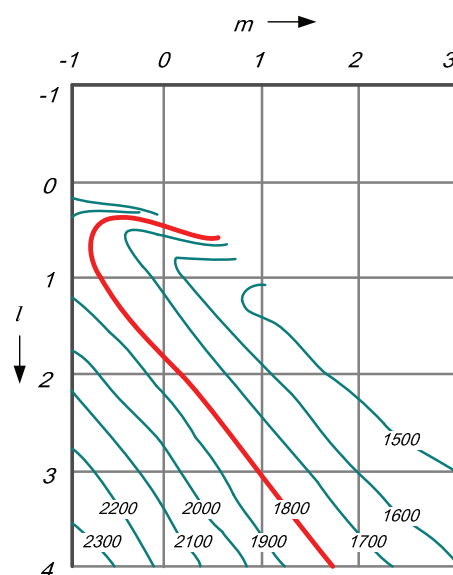


圖 3.4.3 等最大流率曲線

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

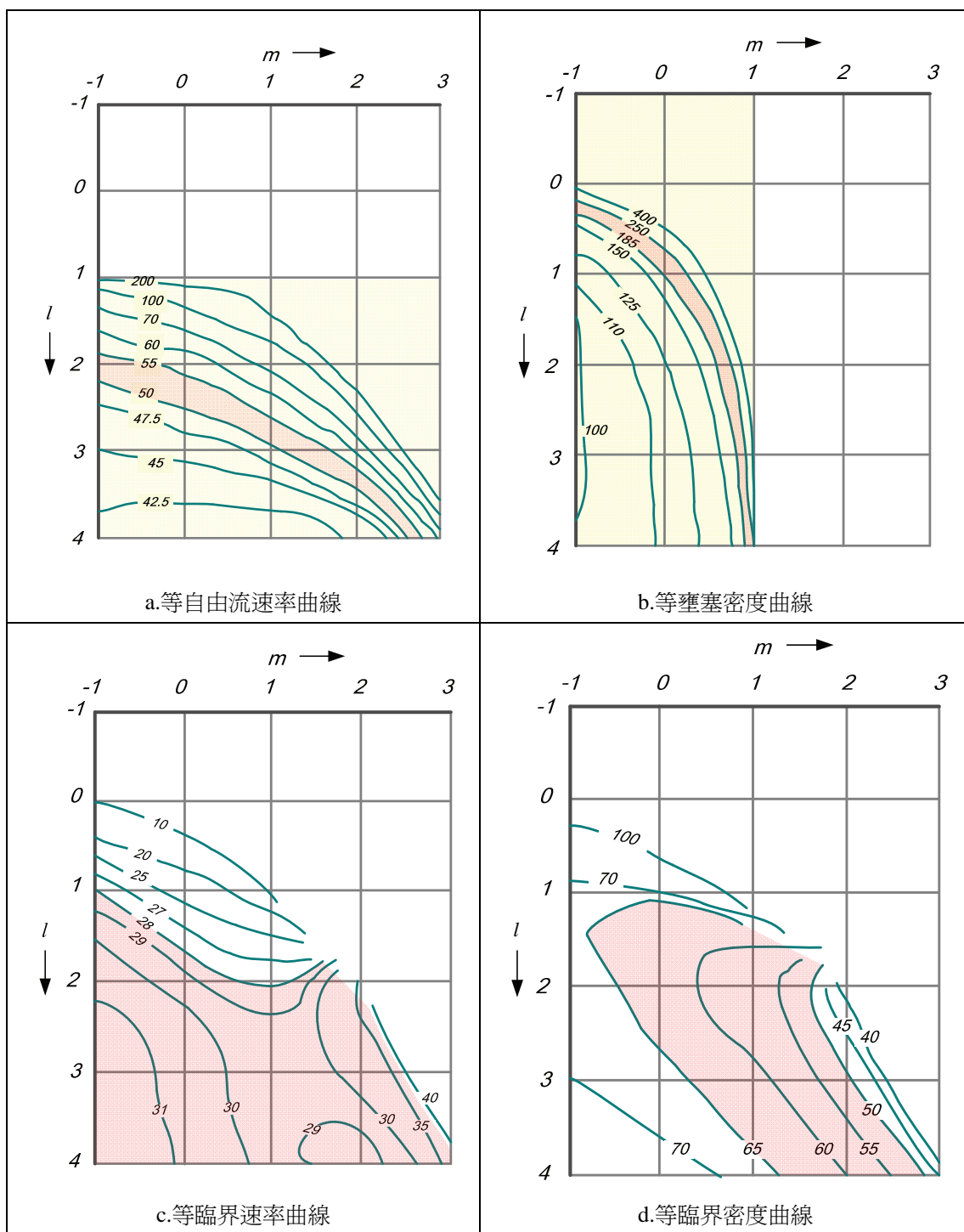


圖 3.4.4 等自由流與臨界車速及等壅塞及臨界密度曲線

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

將其結果套疊在一起，如圖 3.4.5 所示。由圖知，滿足自由流速率與壅塞密度的合理範圍，係對  $l, m$  組合形成**最強**的限制，**次強**的限制則係滿足最大流率。臨界速率與密度的平均離差範圍較大，則非關鍵的限制。令所有限制全部滿足，可使  $l, m$  組合限制在  $l=2.8, m=0.8$  很小的範圍(要同時滿足  $u_f, k_j, l>1, m<1$ )，成為最佳組合。表 3-4-2 即為最佳校估結果整數與非整數解的比較。

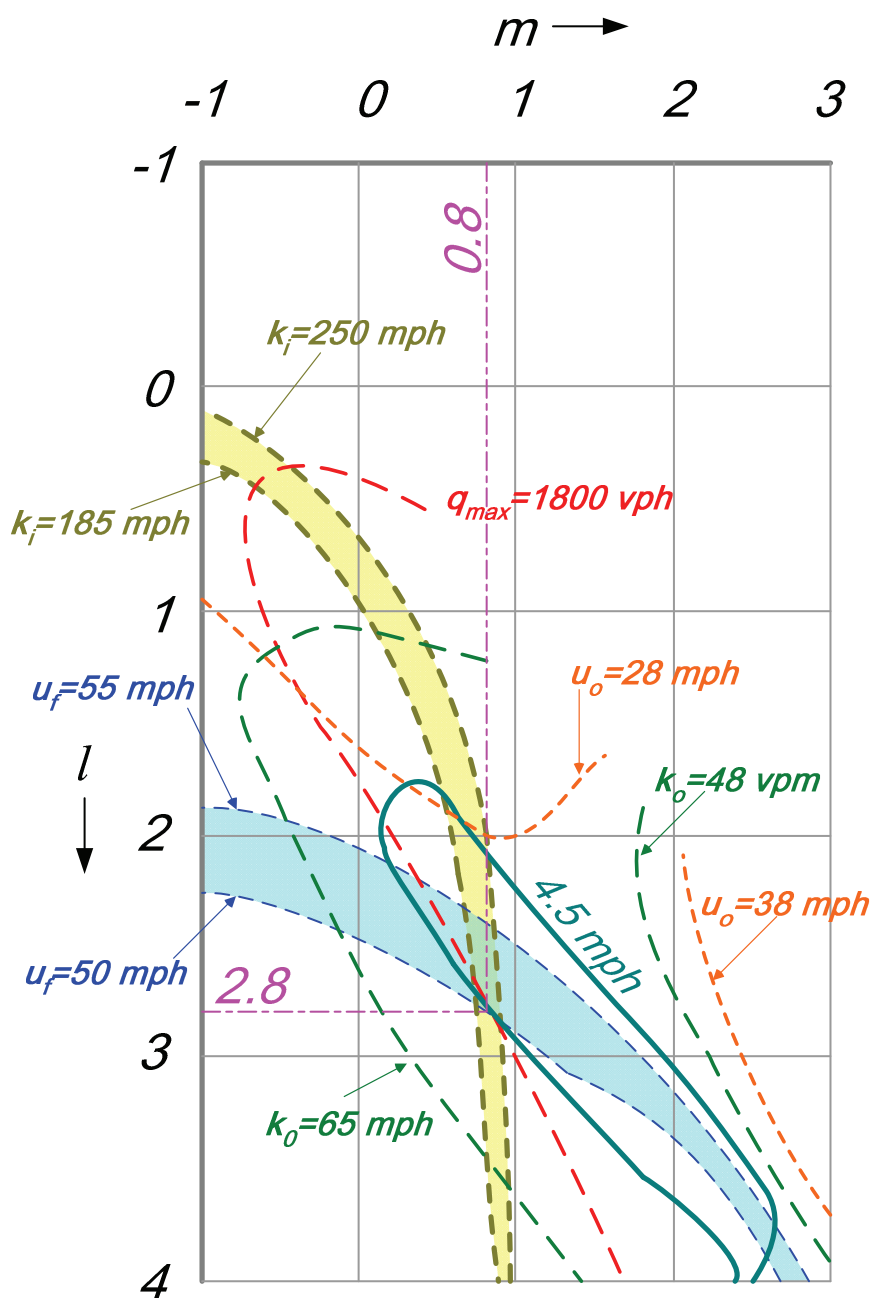


圖 3.4.5 各項準則重疊結果

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.



表 3-4-2 整數與非整數車流模式解的比較

項目	整數解模式	非整數解模式
$m$	1	0.8
$l$	3	2.8
平均離差	4.6 英哩/小時	4.5 英哩/小時
自由車速	48.7 英哩/小時	50.1 英哩/小時
壅塞密度	$\infty$ 車/英哩	220 車/英哩
臨界車速	29.5 英哩/小時	29.6 英哩/小時
臨界密度	60.8 車/英哩	61.1 車/英哩
最大流率	1,795 車/小時	1,810 車/小時
巨觀公式	$u = u_f e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k}{k_o} \right)^2}$	$u = u_f \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^{1.8} \right]^5$
微觀公式	$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t+T)^l}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^3} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$	$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t+T)^{0.8}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^{2.8}} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$
$a$ 值	$1.35 \times 10^{-4}$	$1.33 \times 10^{-4}$

資料來源：May, A.D.JR., and H.E.M. Keller, "Non-Integer Car-Following Models," Highway Research Record 199, 19-32, 1967.

### 3.檢討

- (1) May and Keller(1967)提供實際校估車流模式的程序。該研究強調，單由最小離差(由密度對應的理論平均速率與實際平均速率間的差異)，不足以選出最佳的  $l, m$  組合，需再加上車一路實體特性，才能找出符合實務要求的  $l, m$  組合，定出微觀跟車模式及其對應的巨觀水流模式。
- (2) 惟該研究最後亦承認，實務上可以該文提出的最小平均離差當指標，再加上同時滿足  $u_f, k_j$  為有限值，須  $l > 1, m < 1$  的條件，即可大致找出最佳的  $l, m$  組合。由圖 3-4-2 知， $l > 1, m < 1$ ，且平均離差最小( $GoF=4.2 \sim 4.3$ )的範圍，大概是  $l=2.5 \sim 2.8; m=1 \sim 0.8$  範圍，如果取整數，即  $l=3, m=1$ ；取非整數，則可取  $l=2.5 \sim 2.8; m=0.8 \sim 0.9$ 。這些結果，與該文最後用了  $u_f, k_j, q_{\max}, u_o, k_o$  等為數眾多的車流參數選出的  $l=2.8, m=0.8$ ，實務上可說已無差異。
- (3) 該研究事實上已點出，要  $u_f$  或  $k_j$  均為有限值，須同時滿足  $l > 1$  與  $m < 1$  的條件。當  $m < 1$  不滿足，例如 May 與 Keller(1967)選  $m=1$ ，即會出現  $k_j$  為  $\infty$  (無定義)的結果，而實務上，滿足  $u_f$  為有限值似較滿足  $k_j$  容易，要滿足  $k_j$  為有限值， $m$  參數值勢必要採非整數，否則，就要如 Greenshields 模式般，令  $m=0$ 。

### 3.5 本章小結

跟車模式的基本架構是反應=敏感 $\times$ 刺激。在模式發展的歷程中，反應項一直是後車的加速率，刺激項一直是前後兩車的相對速率，真正花工夫調校的，是敏感項的組成。經由實車實驗~模式修改等反覆的試誤程序，Herman 團隊終於確立了敏感項的組成，即分母的車間程，分子的後車速率，及一個敏感常數，其分母、分子項各有一個指數參數  $l$ 、 $m$ ，後人因此通稱跟車模式為  $l$ - $m$  模式。

但跟車模式發展至今已有 50 餘年，卻甚少有實務的應用，原因之一是其參數校估相當困難，相關研究獲得的校估值彼此差異甚大，致莫衷一是。事實上想藉由蒐集動態的、變異甚大的駕駛行為資料來校估跟車模式的參數，原即不符統計原則(例如迴歸式的自變數須符合無量測誤差的假設)，本研究認為，May, Keller(1967)校估巨觀水流模式再回推微觀跟車模式參數的作法，似較合理可行，應朝此一方向再予精進發展，使得跟車模式能有更多的實務應用。

## 第四章 跟車模式安定性分析

任何模式在實際應用之前，均須通過兩個層次的檢驗，一係模式驗證(verification)，另一則係模式確認(validation)。前者係檢驗模式本身的特性是否符合原設計者的本意，後者係檢驗模式對所模化的真實系統的代表性，通常係以參數校估來複製真實系統，並代入一些邊界條件，如  $u_f$ 、 $k_j$  等。前章 3.4 節跟車模式參數的校估係模式確認，本章跟車模式安定性分析則係模式驗證。按模式研發的進程，本章本應置於 3.4 節之前討論，但由於份量較多，故特闢專章來說明。

跟車模式的安定性(stability)，與車流的穩定狀態(steady-state)意義不同，但中譯卻常混用(大多均譯為穩定)，為避免混淆，特定義此二名詞如下：

- 1.Stability：統一譯為「安定性」，在本文中指某車流模式定式所具備的數學特性。任何車流模式均須在理論上經數學證實具安定性後，方具實用性，否則模式本身即存有理論上的瑕疵；
- 2.Steady：統一譯為「穩定」，在本文中指受干擾一段時間後，整條車流不再有加減速的變化，而呈等速運轉的狀態。車流巨觀的  $q-k-u$  關係傳統上即係建立在此一穩定狀態(steady-state)的基礎上。

線性跟車模式的安定性可以數值分析求得理論結果，非線性跟車模式的安定性則甚難以數值分析，需採模擬的方式來探討。本章首先回顧說明各種線性跟車模式在數理上具安定性的條件；其次以模擬的方式，驗證線性微觀跟車模式的安定性，以其模擬程序作為非線性跟車模擬的基準；最後針對無法以數學理論分析的非線性跟車模式，以模擬的方式分析其安定性。

### 4.1 跟車模式的局部與漸近安定性

一隊車輛行車的安定性決定於其內部擾動在向後傳遞時是被阻滯(damped out)抑或擴大(amplified)。分析跟車模式安定性的目的有二，一係針對特定模式(參數已知)，判定其描繪下的車流行為是否安定(擾動會沉寂，或有限、無限傳遞及擴大)，據以瞭解模式的適用範圍。事實上，界定出擾動不擴大的準則，是建立良好車流模式最關鍵的挑戰；另一則係用以鑑別單車道車流許多特性，並據以界定出影響行車安全的因素。

依 Chandler, Herman, Montroll(1958)的說明，跟車模式安定性的檢驗分為兩種：

- (1) 局部安定性(local stability)：只考慮一前一後兩輛車，前車改變行動下，後車為跟隨前車所作的反應，可能是逐次沉寂，亦可能擴大；
- (2) 漸近安定性(asymptotic stability)：考慮一串車輛組成的車隊，前車行動的變化在後續各車間傳遞的狀況，可能是逐次沉寂，亦可能擴大。

本節以一特定的線性跟車模式(有反應延遲的等比控制模式)為範例，進行局部與漸近安定性的分析回顧。

#### 4.1.1 跟車的局部安定性

有反應延遲-等比控制的線性跟車模式可寫成(Chandler, Herman, Montroll, 1958)：

$$Mdu_n(t+T)/dt = \lambda[u_{n-1}(t) - u_n(t)] \quad (4-1-1)$$

其中：  
 $u_n(t)$ =第  $n$  車在  $t$  時間的車速；  
 $T$ =後車反應前車行為刺激的延時；  
 $\lambda$ =後車反應前車行為刺激的敏感度(增益因子)。

式(4-1-1)中的 $\lambda$ 、 $T$ 兩參數係組成跟車控制機制中的駕駛者單元，如將時間  $t$  寫成反應時間  $T$  的倍數，令  $t = \tau T$ ，並忽略  $M$ ，且以  $l, f$  下標分表前、後車， $x$  表各車的位置，則式(4-1-1)可推導改寫成：

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_f}{d(\tau T + T)^2} &= \frac{d^2 x_f}{T^2 d(\tau + 1)^2} = \lambda \left[ \frac{dx_l}{d(\tau T)} - \frac{dx_f}{d(\tau T)} \right] = \frac{1}{T} \times \lambda \left[ \frac{\bullet}{d\tau} \right] \\ \Rightarrow \frac{d^2 x_f}{d(\tau + 1)^2} &= \lambda T \left[ \frac{dx_l}{d\tau} - \frac{dx_f}{d\tau} \right] \end{aligned}$$

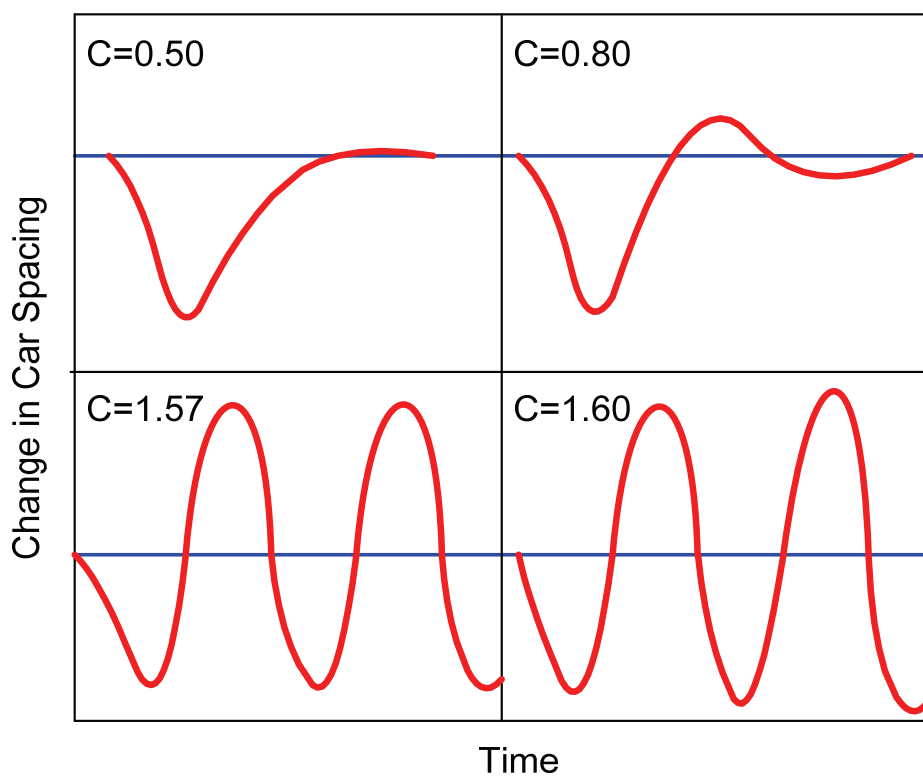
換言之，令  $C = \lambda T$ ，式(4-1-1)線性跟車模式可改寫成：

$$\ddot{x}_f(\tau + 1) = C[\dot{x}_l(\tau) - \dot{x}_f(\tau)] \quad (4-1-2)$$

式(4-1-2)描繪的跟車行為，經過拉氏轉換(Laplace transform)求解，可得兩車的局部安定性條件(Herman, Montroll, Potts, Rothery, 1959)：

- (1)  $0 \leq C (= \lambda T) < 1/e (\approx 0.368)$ ：非振盪(non-oscillatory)，並會指數型沉寂(exponential damping)；
- (2)  $1/e \leq C (= \lambda T) < \pi/2 (\approx 1.571)$ ：振盪(oscillatory)，但會沉寂；
- (3)  $C (= \lambda T) = \pi/2$ ：振盪，且有常數振幅(constant amplitude)；
- (4)  $C (= \lambda T) > \pi/2$ ：振盪，且振幅擴大(increasing amplitude)。

圖 4.1.1 為等速行駛的前後兩車，頭車先減速再加速至原車速後保持等速，後車依式(4-1-2)的跟車原則來行駛，其兩車的車間程變化。由圖知，其車間程的變化與上示數值分析的結果一致。



**圖 4.1.1 跟車之局部安定性(兩車車間程的變化)**

資料來源：R. Herman; E. W. Montroll; R. B. Potts; R. W. Rothery, "Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car Following," Operations Research 7(1), 1959.

### 4.1.2 車隊跟車的漸近安定性

現考慮由一串車輛組成的車隊的跟車行為，假設各車均遵循式(4-1-1)來跟車，其整體車隊的行為，決定於頭車的車速  $u_0(t)$ ，及兩個參數  $\lambda$ 、 $T$ ，求解目的係瞭解車流內的擾動會沉寂抑或擴大。車隊中各車的車速變化可透過傅利葉轉換 (Fourier transform) 改成常數加振盪 (頻率  $\omega$  與振幅  $f_n$ )，以分析其漸近安定性 (Chandler, Herman, Montroll, 1958)：

$$\text{頭車： } u_0(t) = a_0 + f_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{後車： } u_n(t) = a_0 + f_n e^{i\omega t}$$

傅利葉函數轉換後的跟車模式變為：

$$u_n(t) = a_0 + F(\omega, \lambda, T, n) e^{i\Omega(\omega, \lambda, T, n)} \quad (4-1-3)$$

式(4-1-3)的振幅因子(amplitude factor)  $F$  為：

$$F(\omega, \lambda, T, n) = \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 + 2 \left( \frac{\omega}{\lambda} \right) \sin(\omega T) \right]^{-n/2} \quad (4-1-4)$$

而振幅會隨  $n$  的增加而減少的條件為：

$$\frac{\omega}{\lambda} > 2 \sin(\omega T) \quad (4-1-5)$$

要求振動頻率低，會嚴格限制  $\lambda$  參數值。 $\omega \rightarrow 0$  時， $\lambda$  須滿足下列不等式：

$$\lambda T < \frac{1}{2} \left[ \lim_{\omega \rightarrow 0} (\omega T) / \sin(\omega T) \right] \quad (4-1-6)$$

式(4-1-6)右側的值，在車輛運動物理上的合理範圍約為 0.5~0.52。

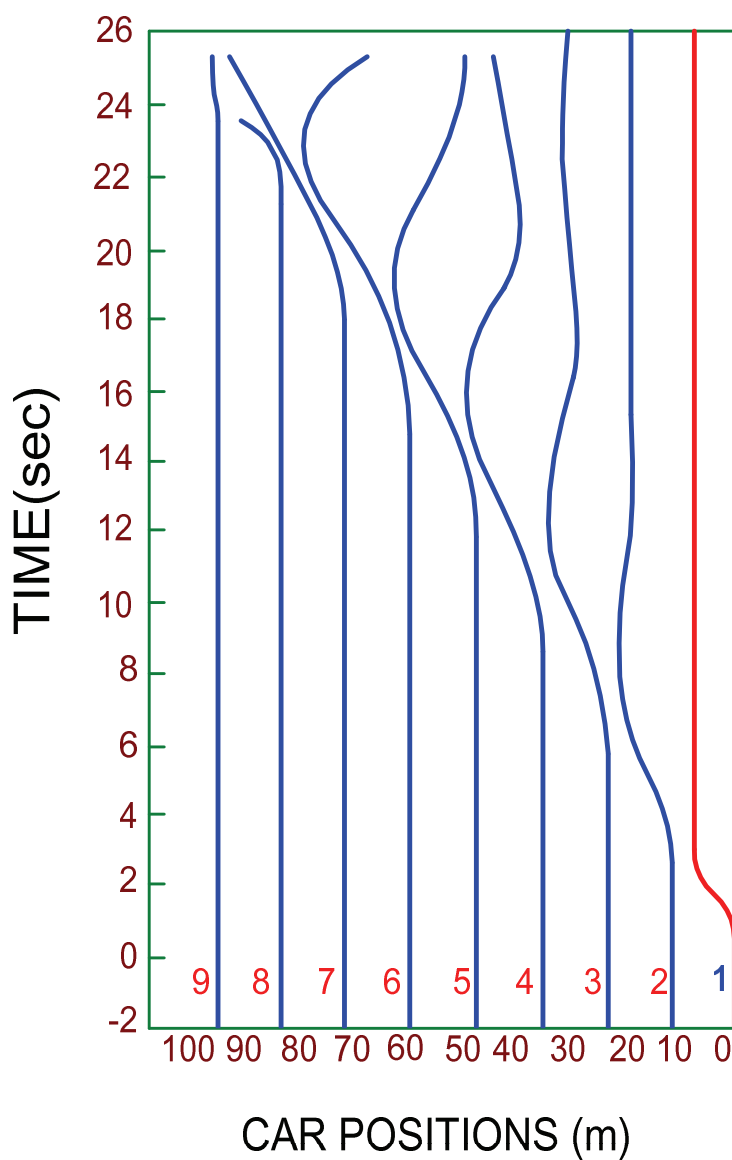
綜合言之，Chandler, Herman, Montroll(1958)獲得的車隊漸近安定條件為：

- (1)  $C = \lambda T < 1/2$ ：車隊會漸近安定；
- (2)  $C = \lambda T = 1/2$ ：車隊會振盪，但前後兩車的車間程變化會以指數型式迅速沉寂，而頭車行動的振盪會以  $\lambda^{-1}$  秒/車的速度向後續各車傳遞，與反應時間  $T$  無關；
- (3)  $C = \lambda T > 1/2$ ：連續兩車的車間程會振盪且振幅會擴大，最終在車隊的某處必會發生追撞。

圖 4.1.2 係檢驗車隊漸近安定的範例( $C = \lambda T = 0.8 \times 2.0 = 1.6$ )，其內容為：

- (1) 一隊 9 輛車，起始時等速行駛，且車與車之間程均為 12 公尺；

- (2) 頭車先減速再加速至原車速後保持等速不變；
- (3) 後續各車經一段反應時間  $T(=2.0$  秒)後，會跟著前車作反應。但車間程的振盪幅度會擴大，至第 7,8 車時發生追撞。



**圖 4.1.2 車隊的漸近安定性檢驗範例(非漸近安定)**

資料來源：R. Herman; E. W. Montroll; R. B. Potts; R. W. Rothery, "Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car Following," Operations Research 7(1), 1959.

## 4.2 各種線性跟車模式及其安定性

考慮一串同質車輛跟隨前車魚貫行進的狀況。令任一時間  $t$  作用在第  $n$  車的加速力，係與其車速  $u_n(t)$ 、前後兩車的車速差  $u_{n-1}(\tau)-u_n(\tau)$  ( $\tau \leq t$ )、兩車之車間程  $y_n(\tau)$  等有關。假設車的質量為  $M$ ，則其運動公式可寫成：

$$M \frac{du_n(t)}{dt} = F\{u_n(t); f_1[u_{n-1}(\tau)-u_n(\tau)]; f_2[y_n(\tau)]\} \quad (4-2-1)$$

式(4-2-1)基本上係一牛頓第二定律公式( $f=ma$ )，是一個力的公式，因係反應外來刺激而產生的力，故可稱為反應力，然而過去並無資料可用以定式出公式中  $F$  函數的組成。

Chandler, Herman, Montroll (1958) 從自動控制(servo- mechanism)角度，視駕駛行為係某種自動控制機制的產物，提出  $F$  函數的各種定式(均為線性)，包括等比控制-無反應延遲、等比控制-有反應延遲、等車間程、加州跟車規範等，並以數學解析其安定性，本節將重點回顧之。值得說明者，本節的安定性均指一串車輛跟車行為的漸近安定性，並不討論較為簡單的、兩輛車之間的局部安定性。

### 4.2.1 等比控制-無反應延遲

如反應力與前後兩車瞬間的車速差成等比，此即自動控制理論中所謂的等比控制(proportionate control)。每輛車質量均為  $M$ ，共  $N$  輛均質車的車隊，其等比控制的運動公式可寫成：

$$M \frac{du_n}{dt} = \lambda (u_{n-1} - u_n), \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (4-2-2a)$$

其中， $\lambda$  係自動控制理論中的增益因子(gain factor)，係用以放大或縮小外來訊號的乘數，亦係相關研究所謂的跟車敏感度(sensitivity)。上式說明，如某時間前車開得比後車快，則後車會在同一瞬間施予加速力跟上，反之亦然(假設加速與減速的敏感度相同)。

線性模式的安定性問題可透過對式(4-2-2a)的傅利葉轉換求解。假設頭車的速度  $u_0(t)$  的變化型式係呈頻率為  $\omega$  的單長波(monochromatic)型式：

$$u_0(t) = e^{i\omega t} \quad (4-2-2b)$$

車隊中任一輛車的速度  $u_n(t)$  亦比照式(4-2-2b)方式辦理，如下式：

$$u_n(t) = f_n e^{i\omega t}, \quad f_0 = 1 \quad (4-2-2c)$$



將式(4-2-2c)代入式(4-2-2a)得：

$$\frac{i\omega M}{\lambda} f_n = f_{n-1} - f_n$$

$$\text{因此： } f_n = (1 + \frac{i\omega M}{\lambda})^{-n} f_0$$

$$\text{以及： } u_n(t) = (1 + \frac{\omega^2 M^2}{\lambda^2})^{-n/2} \exp\{i[\omega t - n \cos^{-1}(1 + \frac{\omega^2 M^2}{\lambda^2})^{-1/2}]\}$$

上式說明，對所有頻率、質量及敏感度言，跟車車輛速度變化的振幅會隨車隊內車輛序數 n 的增加而降低。亦即，任何狀況下，瞬間等比控制是安定的。

#### 4.2.2 等比控制-有反應延遲

式(4-2-2a)可納入反應延遲(response lag)而改寫成：

$$Mdu_n(t)/dt = \lambda[u_{n-1}(t - \Delta) - u_n(t - \Delta)] \quad (4-2-3a)$$

如前，令： $u_0(t) = e^{i\omega t}$ ，並將式(4-2-2c)代入式(4-2-3a)，可得：

$$(i\omega M / \lambda)e^{i\Delta\omega} f_n = f_{n-1} - f_n \quad (4-2-3b)$$

或者，令  $\mu = M / (2\lambda)$ ，得：

$$2i\mu\omega e^{i\Delta\omega} f_n = f_{n-1} - f_n \quad (4-2-3c)$$

$$\text{因此： } f_n = (1 + 2i\mu\omega e^{i\Delta\omega})^{-n} f_0$$

$$\begin{aligned} \text{以及： } u_n(t) &= (1 + 4\mu^2\omega^2 - 4\mu\omega \sin \Delta\omega)^{-n/2} \\ &\times \exp\{i[\omega t - n \cos^{-1}(1 + 4\mu^2\omega^2 - 4\mu\omega \sin \Delta\omega)^{-1/2}]\} \end{aligned} \quad (4-2-3d)$$

由上式知，振幅因子將隨 n 增加而降低的條件為：

$$1 + 4\mu^2\omega^2 - 4\mu\omega \sin \Delta\omega > 1$$

$$\text{亦即： } \mu\omega > \sin \Delta\omega$$

低頻會造成敏感度最大的限制，當 $\omega \rightarrow 0$ ， $\lambda$ 必須滿足下列不等式：

$$\lambda < M/(2\Delta)，或$$

$$\lambda\Delta < M(1/2) \quad (4-2-3e)$$

由式(4-2-3e)知，跟車模式要安定(多車的漸近安定)的條件是敏感度與反應延遲時間的乘積，要小於 1/2。值得說明者，式(4-2-3a)等於式(4-1-1)，而其安定性分析的結果亦相同。

### 4.2.3 等車間程

如駕駛者的跟車法則係嘗試與前車維持固定的車間程(constant spacing)，亦即在擾動發生時，按當時車間程與其要求值的偏離量來調節其加速度，則就算其反應沒有延遲，此種控制方式亦不安定，以下分析說明之。

採用此種駕駛方式的一串車輛其行進的公式可寫成：

$$M \frac{d^2 x_n}{dt^2} = K[x_{n-1} - x_n] \quad (4-2-4a)$$

同樣假設： $x_0(t) = e^{i\omega t}$  (以相對速度為刺激項時， $u_0(t) = e^{i\omega t}$ )

以及： $x_n(t) = f_n e^{i\omega t}$

則： $-M\omega^2 f_n = K(f_{n-1} - f_n)$

因而： $f_n = (1 - MK^{-1}\omega^2)^{-n} f_0$

或者： $x_n(t) = (1 - MK^{-1}\omega^2)^{-n} e^{i\omega t} \quad (4-2-4b)$

由上式知，對任何 $\omega$ 值，當下列條件存在時會產生共振(resonance)，致兩車車間程的擾動會不斷擴大：

$$\omega = (K/M)^{1/2} \quad (4-2-4c)$$

此種狀態相當重要，尖峰時間，在高速公路上常看得見一串車輛無視車速大小，以很小的間程緊隨前車急駛。此時只要某輛車稍有擾動，致與前後車輛的間程有了變化，則只要車隊夠長(一串跟車車輛的車數夠多)，因其擾動會向後不斷擴大，因此最後必會產生追撞事故。

#### 4.2.4 加州安全跟車規範

所謂加州規範(California code)即「車速增加 10 英哩/小時 (=14.67 英呎/秒) 就增加一個車長(約 15 英呎)的跟車距」，此一規範隱含：

$$x_{n-1} = x_n + b + L_n + Tv_n \quad (4-2-5a)$$

其中， $b$  為停止時的標準車間隙(gap)， $L_n$  表第  $n$  車的車長( $b+L_n$  即為車間程 spacing)， $T$  為依加州規範推算得的時間常數( $T \cong 15$  英呎/(14.67 英呎/秒)  $\cong 1$  秒)，假設  $L_n$  對所有車輛均為常數( $L_n = s - b$ ,  $s$  為車間程 spacing)，則上式可寫成：

$$x_{n-1} = x_n + s + Tv_n \quad (4-2-5b)$$

頭車(第  $n-1$  車)行徑的變化，透過反應延遲，會導致式(4-2-5b)被破壞，如：

$$\delta_n(t) = x_{n-1} - x_n - s - Tv_n(t) > 0$$

則第  $n$  車駕駛將加速以恢復式(4-2-5b)的等式(上式如  $< 0$ ，即採減速)，假設任何時間均有與  $\delta_n(t-\Delta)$  等比的力量加諸於第  $n$  車，則一串車的車隊運動公式可寫成：

$$M \frac{d^2 x_n}{dt^2} = K[x_{n-1}(t-\Delta) - x_n(t-\Delta) - s - Tdx_n(t-\Delta)/dt] \quad (4-2-5c)$$

如令  $x_n = x'_n - sT^{-1}$ ，則常數  $s$  可消除，代入上式後得：

$$M \frac{d^2 x'_n}{dt^2} = K[x'_{n-1}(t-\Delta) - x'_n(t-\Delta) - Tdx'_n(t-\Delta)/dt] \quad (4-2-5d)$$

一如從前，欲瞭解是否安定，可令  $x'_n(t) = f_n e^{i\omega t}$ ，則：

$$f_n = (1 + i\omega T - MK^{-1}\omega^2 e^{i\omega\Delta})^{-n} \quad (4-2-5e)$$

由式(4-2-5e)知，跟車安定性的準則為：

$$T^2 + (MK^{-1}\omega)^2 > 2MK^{-1}[\cos \omega\Delta + \omega T \sin \omega\Delta] \quad (4-2-5f)$$

在低頻條件下，即  $\omega \rightarrow 0$  時：

$$T^2 > 2M/K \quad (4-2-5g)$$

亦即只要維持式(4-2-5g)成立，即可確保任何頻率下均為安定，且與反應延遲  $\Delta$  無關。

不等式  $T^2 > 2M/K$  可解釋成，只要常數  $T$  很大(因加速而加碼的距離乘數)，則不論敏感度  $K$  值為何，均有安定性，因為大的  $T$  值隱含車間程更大、更保守。

#### 4.2.5 線性跟車模式安定性的綜合檢討

由前述各小節的分析回顧，關於線性跟車模式的安定性可綜合整理成表 4-2-1，說明如下：

- (1) 如跟車的加減速係以兩車的車速差來調整，也就是後車會想辦法與前車保持相同車速，則無反應延遲時，車流在任何狀況均是安定的；有反應延遲時，只要敏感係數與反應延遲的乘積小於 1/2，車流仍會安定。
- (2) 如跟車的加減速係以兩車的車間程來調整，也就是後車會想辦法與前車保持相同間隔，則即便反應無延遲，車流亦不安定。
- (3) 如跟車的加減速係以兩車的車間程及車速加碼(每增加 10 英哩/小時，就加 1 個車身長)來調整時，在有反應延遲狀況下，車流仍會安定，且加碼愈多，愈安定(例如每增 10 英哩/小時改加 2 個車身長，比加 1 個車身長者更安定)。如沒有車速加碼，則會退化成以兩車的車間程來調整的狀況，車流會不安定。

**表 4-2-1 各種線性跟車模式定式與安定性分析結果**

F 定式	公式	安定條件
等比控制 無反應延遲	$M \, du_n/dt = \lambda (u_{n-1} - u_n)$	任何狀況均安定。
等比控制 有反應延遲	$M \, du_n(t+T)/dt = \lambda [u_{n-1}(t) - u_n(t)]$	$\lambda T < M/2$
等車間程	$M \frac{d^2 x_n}{dt^2} = K [x_{n-1} - x_n]$	$\omega = (K/M)^{1/2}$ 時均會產生共振，致車與車的車間程的擾動會擴大。
加州規範	$M \frac{d^2 x_n}{dt^2} = K [x_{n-1}(t-\Delta) - x_n(t-\Delta) - c - T dx_n(t-\Delta)/dt]$	$T^2 > 2M/K$ $T$ 愈大愈安定。 $T$ 為每增加 10mph 的安全間距增量(換算成時間)； $T=0$ 時退化成 $\omega = (K/M)^{1/2}$ 。

### 4.3 線性跟車模式安定性模擬分析

本節針對 4.2.2 節等比控制-有反應延遲的線性跟車模式，以模擬的方式重建其局部與漸近安定性條件，除再次驗證數學解外，主要的目的是找出模擬作業的標準，供後續模擬非線性跟車模式時的參考。線性跟車模式定式及其對映的巨觀水流模式定式如下：

$$\text{微觀跟車模式：} \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \lambda [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀車流模式：} q = q_{\max} \left[ 1 - \frac{k}{k_j} \right]$$

$$\text{其中} \quad : \quad \lambda = q_{\max}/3600$$

#### 4.3.1 線性跟車模式的局部安定性

由 4.1 節的回顧說明知，等比控制-有反應延遲的線性跟車模式，其局部安定性條件的解析解為(Herman, Montroll, Potts, Rothery, 1959)：

- (1)  $0 \leq C (= \lambda T) < 1/e (\approx 0.368)$ ：非振盪，並會指數型沉寂；
- (2)  $1/e \leq C (= \lambda T) < \pi/2 (\approx 1.571)$ ：振盪，但會指數型沉寂；
- (3)  $C (= \lambda T) = \pi/2$ ：振盪，惟振幅為常數；
- (4)  $C (= \lambda T) > \pi/2$ ：振盪，且振幅會擴大。

本節即針對上示解析解以模擬的方式進行測試，以驗證各種 $(\lambda, T)$ 組合下，線性跟車模式的安定性。本模擬測試的設定如表 4-3-1 所示，如令線性微觀跟車模式的參數 $\lambda = \pi/4 = 0.7861$ ，則反應時間設為 1, 2, 3 秒時，可得  $C = \pi/4$ 、 $\pi/2$ 、 $3\pi/4$ ，故令  $q_{\max} = 3600 \times \lambda = 2830$  車/小時。模擬起始值同樣先設定  $k$  值，依指定的巨觀水流模式換算出對應的  $q$ ,  $u_e$  值( $u_e = q/k$ )，再將單位轉換成秒、公尺後，得跟車模擬的起始車間程與車速值。此外，頭車加速度  $a$  設為 $\pm 4$  公尺/秒<sup>2</sup>，後車只有一輛參與跟車。

**表 4-3-1 線性跟車模式局部安定性模擬的各項設定**

項目	對映的巨觀水流模式		線性微觀跟車模式	
參數 設定	$q_{\max} =$	2830 車/小時	$\lambda = \pi/4 =$	0.7861 1/秒
	$k_j =$	140 車/公里	反應延時 $T =$	1, 2, 3 秒
起始 設定	$k =$	30 車/公里	車間程 $s =$	33.3 公尺
	$q =$	2224 車/小時	車速 $v_e =$	20.6 公尺/秒
	$u_e =$	74.1 公里/小時	加速度 $a =$	$\pm 4$ 公尺/秒 <sup>2</sup>

模擬結果如圖 4.3.1 所示，由圖可清楚看出，跟車安定性條件與 Herman, Montroll, Potts, Rothery (1959)以數學理論分析所得者相同。另可繪成時空軌跡圖，如圖 4.3.2 所示。所謂安定，就是會恢復未擾動前的車間程，而  $C=\lambda T$  分別為  $\pi/4$ 、 $\pi/2$ 、 $3\pi/4$  者，其車間程曾出現相當小(兩車相當接近)的狀態，但由圖知：

(1)  $C=\pi/4=0.786$  的車間程會振盪但迅速沈寂，很快恢復安定；

(2)  $C=\pi/2=1.571$  的車間程會等幅振盪，永不安定；

(3)  $C=3\pi/4=2.358$  的車間程會振盪，且無限擴大。

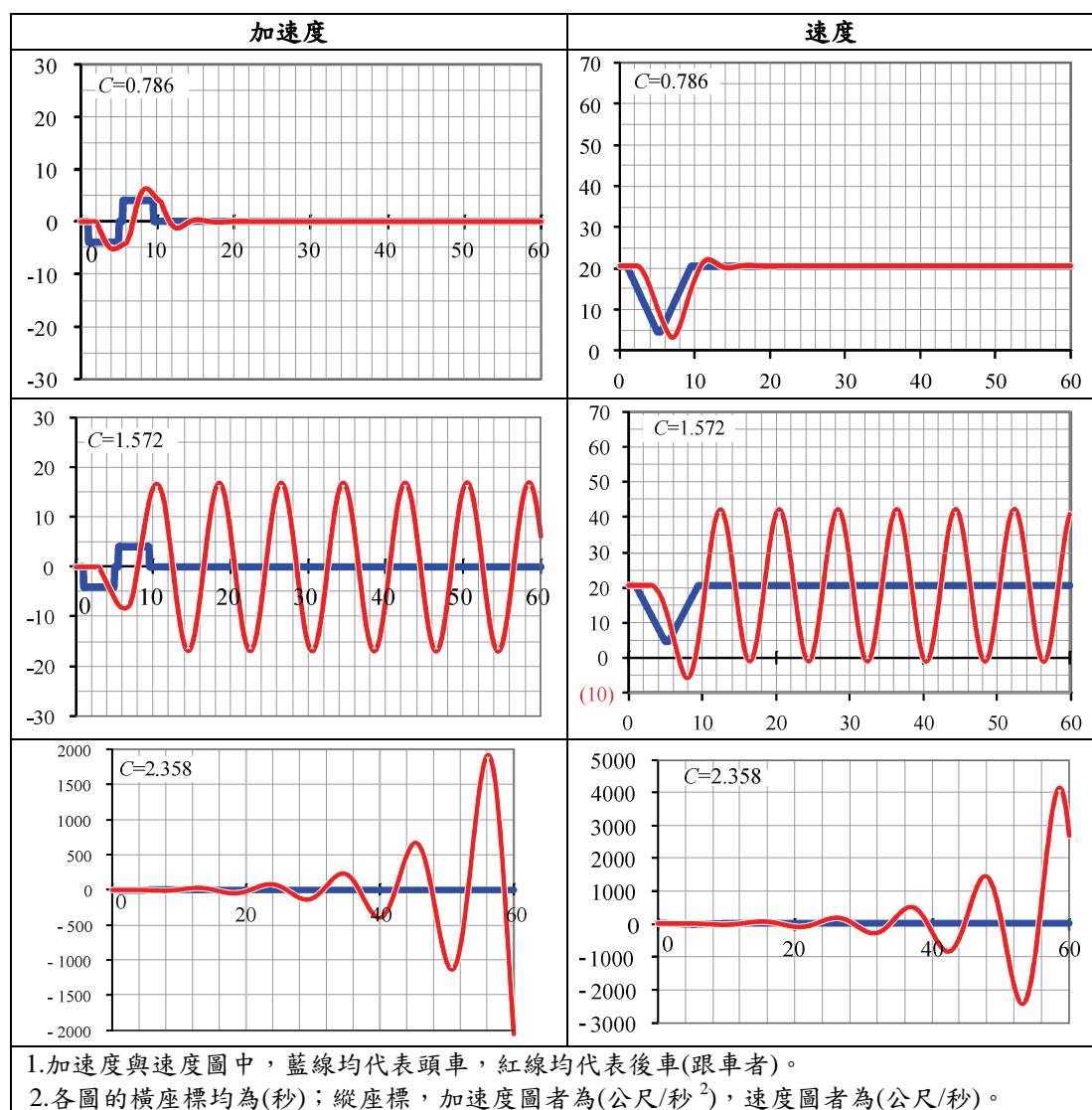


圖 4.3.1 線性跟車模式局部安定性模擬結果

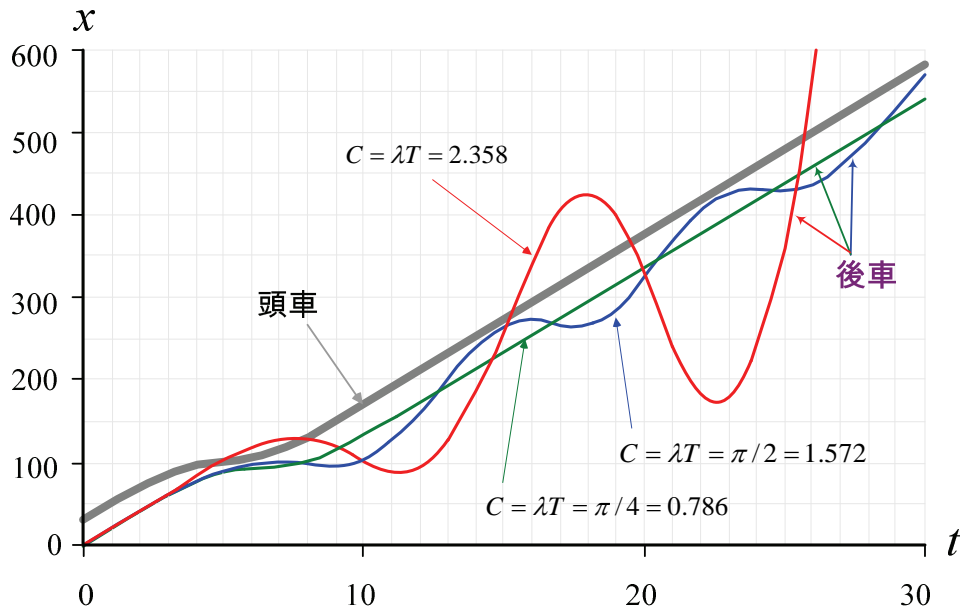


圖 4.3.2 線性跟車模式局部安定性模擬結果車軌跡圖

#### 4.3.2 線性跟車模式的漸近安定性

由 4.2 節的回顧說明知，等比控制-有反應延遲的線性跟車模式，其車隊漸近安定性條件的解析解為(Herman, Montroll, Potts, Rothery, 1959)：

- (1)  $C = \lambda T < 1/2$ ：車隊會漸近安定，亦即振盪的振幅會隨向後傳遞的車次逐次縮減，兩兩車輛間的跟車振盪則以指數型式迅速沉寂；
- (2)  $C = \lambda T = 1/2$ ：車隊會振盪，其振幅在向後傳遞時保持不變，惟兩兩車輛間的跟車振盪仍以指數型式迅速沉寂(因仍小於 $\pi/2$ )；
- (3)  $C = \lambda T > 1/2$ ：車隊內的車間程會振盪，且其振幅會隨向後傳遞的車次不斷擴大，惟只要  $C$  小於 $\pi/2$ ，兩兩車輛間的跟車振盪仍會以指數型式迅速沉寂。

本節即針對上示條件進行模擬測試，以驗證各種 $(\lambda, T)$ 的組合下，線性跟車模式的車隊漸近安定性。

##### 1. 漸近安定理論條件的驗證—對映固定的巨觀水流模式( $\lambda$ 固定)

本模擬係固定 $\lambda$ 來測試  $T$  對安定性的影響，設定條件如表 4-3-2 所示。模擬是假設在不能變換車道的單車道路段進行，含頭車前後共 20 輛車參與跟車。對映的巨觀水流模式固定，參數為  $q_{max}=1800$  車/小時、 $k_j=140$  車/公里。起始值是先設定  $k=40$  車/公里，依指定的巨觀水流模式換算出對應  $u(=32.1$  公里/小時)，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程( $=25$  公尺)與車速( $=8.9$  公尺/秒)。此外，線性微觀跟車模式的參數 $\lambda$ 設為固定的 0.5，以對應固定的  $q_{max}$

( $\lambda=q_{max}/3600$ )，跟車的反應時間  $T$  設為 0.8, 1, 1.2 秒，可得  $C=\lambda T=0.4, 0.5, 0.6$  三種狀態，頭車的加速度  $a$  設為  $\pm 2$  公尺/秒<sup>2</sup>。

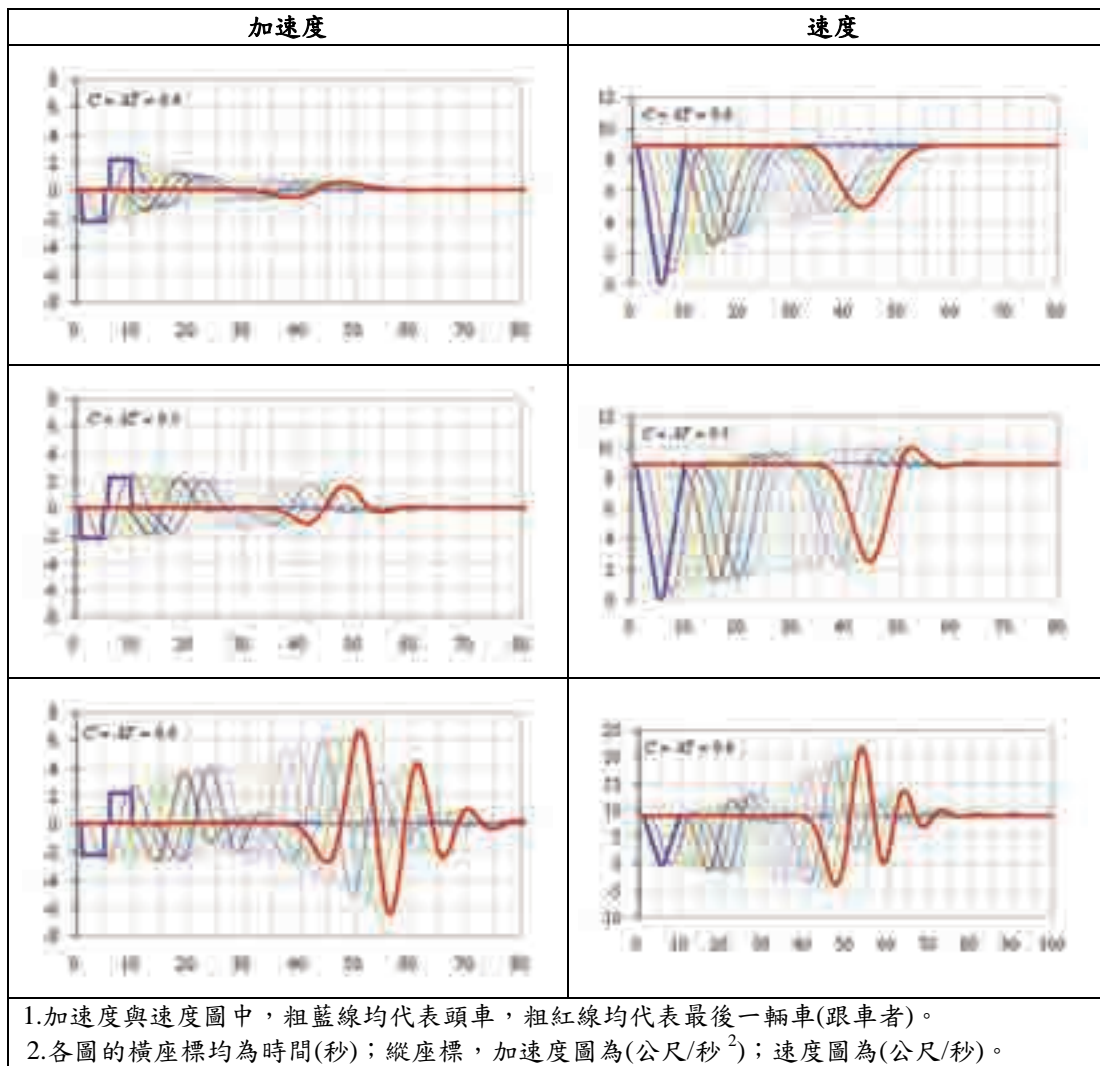
**表 4-3-2 線性跟車模式漸近安定性模擬的各項設定**

項目	對映的巨觀水流模式		線性微觀跟車模式	
參數 設定	$q_{max}= 1800$	車/小時	$\lambda= 0.5$	1/秒
	$k_j= 140$	車/公里	反應時間 $T= 0.8, 1, 1.2$ 秒	
起始 設定	$k= 40$	車/公里	車間程 $s= 25$	公尺
	$q= 1286$	車/小時	車速 $v_e= 8.9$	公尺/秒
	$u_e= 32.1$	公里/小時	加速度 $a= \pm 2$	公尺/秒 <sup>2</sup>

模擬結果如圖 4.3.3 所示，由圖知，線性微觀跟車模式的車流漸近安定性條件與 Herman, Montroll, Potts, Rothery, (1959) 的解析解完全相符；模擬結果另可繪成時空軌跡圖，如圖 4.3.4 所示。茲綜合分析說明如下：

- (1)  $C=\lambda T=0.4<1/2$  時，車隊內各車的加速度與速度變化幅度，在由前車傳遞至後車的過程係逐漸縮小，同一輛車跟隨前車加速度與速度的振盪則係迅速沈寂；而由各車的時空軌跡可看出，頭車的些微擾動(先減速再加速)，在向後傳遞 10 輛車後就幾乎消失，整體車流很快就恢復安定。
- (2)  $C=\lambda T=0.5=1/2$  時，車隊內各車的加速度與速度變化幅度，在由前車傳遞至後車的過程中振幅只略為縮小，大致維持不變，惟同一輛車跟車反應的振盪則仍係迅速沈寂；而由各車的時空軌跡可看出，頭車的些微擾動向後傳遞至第 20 輛車仍未消失，惟整體車流很快就恢復安定。
- (3)  $C=\lambda T=0.6>1/2$  時，車隊內各車的加速度與速度變化幅度，在由前車傳遞至後車的過程中有明顯擴大，導致傳至第 8 輛車以後的車速已出現不合理負值的問題，惟同一輛車跟車反應的振盪則仍係快速遞減(要在  $C>\pi/2=1.57$  時才會無限擴大)；而由各車的時空軌跡可看出，頭車的些微擾動向後傳遞至第 20 輛車時不但未見消失，反而是更加擴大，且最後幾輛車的車行軌跡明顯出現向後退(車速為負)的不合理結果。





**圖 4.3.3 線性跟車模式漸近安定性模擬結果**

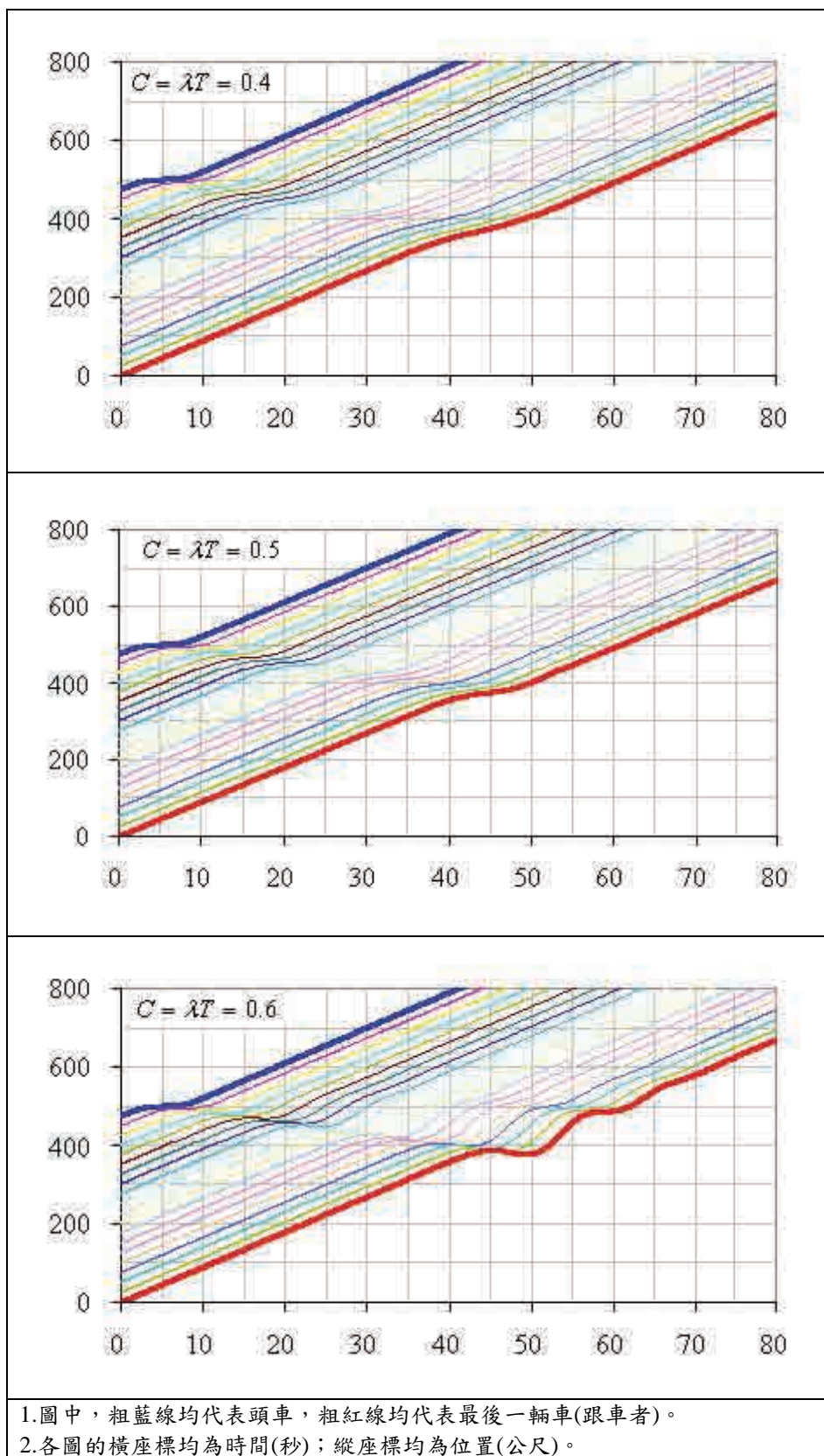


圖 4.3.4 線性跟車模式漸近安定性模擬結果車軌跡圖

## 2.反應時間 $T$ 及最大允許加速度對車流的影響－對映固定的巨觀模式

本模擬係固定 $\lambda$ 來測試 $T$ 與最大允許加速度對安定性的影響，設定條件如表 4-3-3 所示。模擬是假設在不能變換車道的單車道路段進行，含頭車前後共 20 輛車參與跟車。對映的巨觀水流模式設為固定，參數為 $q_{max}=1800$  車/小時、 $k_f=140$  車/公里。起始值是先設定 $k=10,40,70,100,130$  車/公里，依指定的巨觀水流模式換算出分別對應的 $u_e$ ，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程 $s$ 與車速 $v$ 。此外，線性微觀跟車模式的參數 $\lambda$ 設為固定的 0.5，以對應固定的 $q_{max}(\lambda=q_{max}/3600)$ ，跟車的反應時間設為 0.1, 0.5, 0.8, 0.9, 1, 1.2 秒，可得 $C=\lambda T=0.05, 0.25, 0.4, 0.45, 0.5, 0.6, 1$  等 7 種狀態。

各模擬中，頭車的行動均係先維持等速 1 秒鐘，然後以等減速率減速 4 秒鐘，維持等速 1 秒鐘後，再以等加速率加速 4 秒鐘，而等加、減速率的絕對值相等，模擬欲尋求其最大允許值，在該最大值下，頭車可以減速至完全停止，但不會出現負速率。

**表 4-3-3 線性跟車模式受  $T$  及最大允許加速度影響模擬的各項設定**

項目	對映的巨觀水流模式		線性微觀跟車模式	
參數設定	$q_{max}=1800$	車/小時	$\lambda=0.5$	1/秒
	$k_f=140$	車/公里	反應時間 $T=0.1,0.5,0.8,0.9,1,1.2$ 秒	
起始設定	$k=10,40,70,100,130$ 車/公里		車間程 $s=100, 25, 14.3, 10, 7.7$ 公尺	

模擬結果如表 4-3-4 與圖 4.3.5 所示，茲分析說明如下：

- (1) 當  $C=\lambda T \leq 1/2$  時，車隊是安定的。頭車最大允許加減速度隨跟車間程(車密度)的減小而降低，但不受後車跟車反應時間 $T$ 的影響，亦即相同 $k$ (或 $s$ )值下， $T=0.1$ 至 $T=1$ ，其最大允許加減速度均相同。事實上，表中最大允許加減速度 $a$ 與跟車起始均衡車速 $v$ 及模擬設定的頭車減速時間 $t$ (固定為 4 秒)間之關係可寫成運動公式： $0 = v - a \times t$ 。
- (2) 當  $C=\lambda T > 1/2$  時，車隊是不安定的。頭車最大允許加減速度絕對值隨跟車反應時間 $T$ 的加長而明顯縮短，甚而減為 0，且整條車隊的加速度及車速的振幅均隨向後傳遞車次數不斷擴大，明顯呈不安定的狀態，如圖 4.3.5 所示。更重要的是，即便將加減速度降低至接近 0，例如 $T=1.2$ ， $k=10$ 的狀況，將其最大允許加速度由 7.98 降為 0.000000001，上述振幅隨向後傳遞車次數不斷擴大的不安定狀態並不會改變。

表 4-3-4 線性跟車模式各種密度( $k$ )下的最大允許加速度

$k$	$s$	$v$	$T=0.1$	$T=0.5$	$T=0.8$	$T=0.9$	$T=1$	$T=1.2$	$T=2$
			$C=0.05$	$C=0.25$	$C=0.4$	$C=0.45$	$C=0.5$	$C=0.6$	$C=1$
10	100	46.4	11.61	11.61	11.61	11.61	11.61	7.98	0.000142
40	25	8.9	2.23	2.23	2.23	2.23	2.23	1.54	0.000027
70	14.3	3.6	0.89	0.89	0.89	0.89	0.89	0.61	0.000011
100	10	1.4	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.25	0.000004
130	7.7	0.3	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.05	0.000001

註：單位  $k$  為「車/公里」； $s$  為「公尺」； $v$  為「公尺/秒」； $T$  為「秒」。

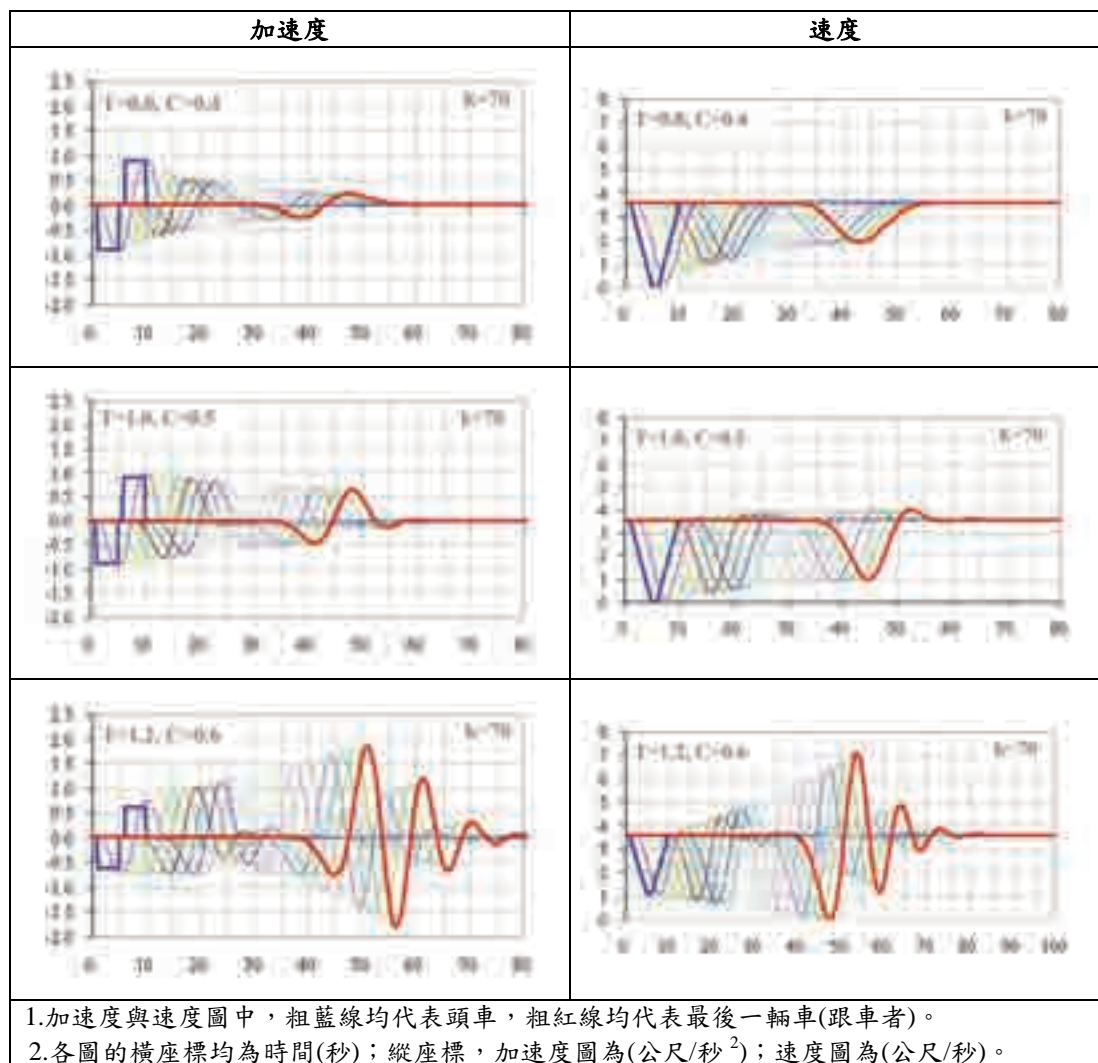


圖 4.3.5 線性跟車模式最大允許加速度模擬結果( $\lambda=1/2, k=70$ )

### 3.符合漸近安定下，反應時間 $T$ 對車流的影響－對映不同的巨觀模式

前節模擬結果已驗證線性跟車模式在多車狀態下能維持漸近安定的條件為  $C=\lambda T \leq 1/2$ ，本節進一步以  $C=1/2$ ，不同  $(\lambda, T)$  的組合，來模擬分析反應時間  $T$  對整體車流的影響。本模擬測試的設定如表 4-3-5 所示。模擬同樣是假設在不能變換車道的單車道路段進行，含頭車共 20 輛車參與跟車。

表 4-3-5 漸近安定下線性跟車模式不同  $T$  的各項模擬設定

項目	對映的巨觀水流模式	線性微觀跟車模式					
參數 設定	$q_{max}= 3600 \times \lambda$ 車/小時	$\lambda=$	5	1	0.5	0.25	1/秒
	$k_j= 140$ 車/公里	反應時間 $T=$	0.1	0.5	1	2	秒
起始 設定	$k= 40$ 車/公里	車間程 $s=$	25	25	25	25	公尺
	$q=q_{max} \times (1-k/k_j)$ 車/小時	加速度 $a=$	$\pm 22$	$\pm 4.4$	$\pm 2.2$	$\pm 1.1$	公尺/秒 <sup>2</sup>
	$u_e=q/k$ 車/公里	車速 $v=$	89.3	17.9	8.9	4.46	公尺/秒
	$c=dq/dk$ 車/公里	波速 $c=$	-35.71	-7.14	-3.57	-1.79	

對映的巨觀水流模式之參數  $k_j$  設定為 140 車/公里， $q_{max}=3600 \times \lambda$  車/小時，起始值是先設定  $k=40$  車/公里，依指定的巨觀水流模式換算出對應  $u_e$ ，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程與車速，如圖 4.3.6 所示。由表 4-3-5 知，線性微觀跟車模式的參數  $\lambda$  設為 5, 1, 0.5, 0.25，在  $C=\lambda T=1/2$  的限制下，對應得  $T$  值為 0.1, 0.5, 1, 2 秒。

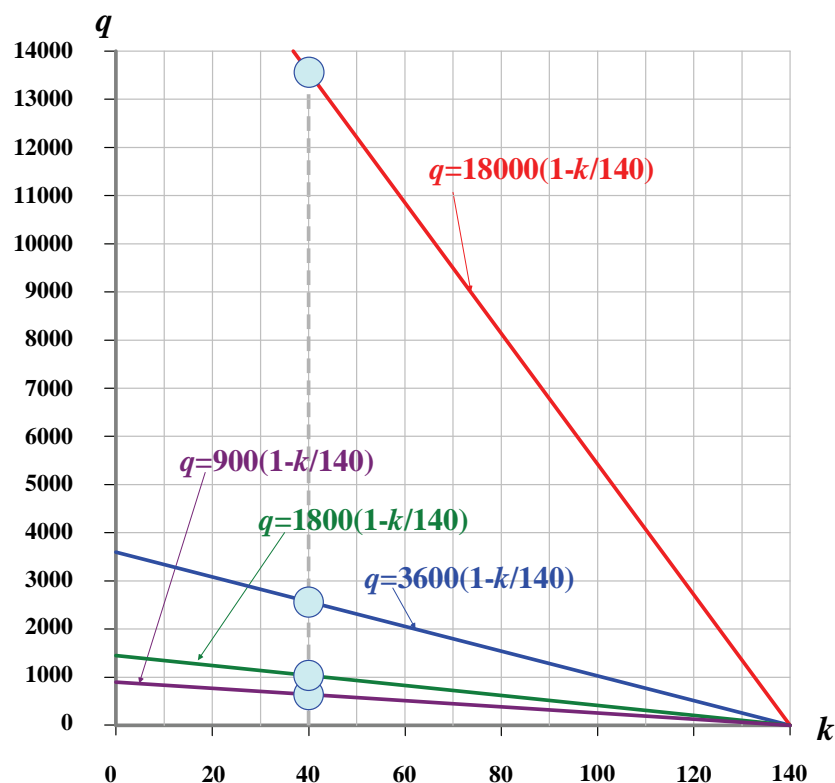


圖 4.3.6 漸近安定下線性跟車模式不同  $T$  的模擬起始設定

各模擬中，頭車的行動均係先維持等速 1 秒鐘，然後以等減速率減速 4 秒鐘，維持等速 1 秒鐘後，再以等加速率加速 4 秒鐘，而等加減速率的絕對值相等，其減速率值設定為令頭車可以減速至完全停止，但不出會出現負速率。

線性巨觀模式之車波速  $c$  不論  $k$  值為何均為一常數，公式為：

$$c = dq/dk = -q_{\max}/k_j \quad (4-3-1)$$

$\lambda$  設為 5, 1, 0.5, 0.25，即  $q_{\max}=3600 \times \lambda = 18000, 3600, 1800, 900$  車/小時，在  $k_j=140$  車/公里固定下，其各模式對應的車波速分別為 -128.6, -25.71, -12.86, -6.429 公里/小時，微觀單位即為 -35.71, -7.14, -3.57, -1.79 公尺/秒，亦即輕微擾動的傳遞均是逆車流方向的向後運動。

起始密度  $k$  固定，不同反應時間  $T$  模擬結果的加速度與速度變化如圖 4.3.7 所示，時空軌跡圖如圖 4.3.8 所示，由圖知：

- (1) 雖然不同  $\lambda$  對映不同的巨觀水流模式，惟在  $C=1/2$  的條件下，即便  $(\lambda, T)$  不同，整體車流仍均保持漸近安定，亦即整條車隊加減速及車速的振幅均隨向後傳遞車次數的增加而縮減，或至少維持不變。
- (2) 在車流可保持漸近安定的前提下，跟車反應時間  $T$  愈長，前車些微擾動向後傳遞的振盪時間就愈長，例如  $T=0.1$  秒者，其擾動在 20 秒內即已完全沈寂，但  $T=2.0$  秒者，其擾動在 100 秒後仍未完全沈寂。惟不論反應時間長短，各模式加速度與速度變化的振幅均會隨向後傳遞車次數的增加而減小。
- (3) 在車流可保持漸近安定的前提下，前車些微擾動的傳遞運動，亦即車波軌跡，模擬結果與由巨觀車流公式(式(4-3-1))估算者完全符合。

由於線性跟車模式對應的巨觀車流  $q-k$  模式亦為線性，其車波速( $c=dq/dk$ )恆為一固定值，以  $T=0.1$  秒， $\lambda=5$ /秒， $q_{\max}=18000$  車/小時， $k_j=140$  車/公里的線性巨觀水流模式而言，其車波速恆為  $c=-35.714$  公尺/秒，亦即不論車流是否壅塞，車波恆向後傳遞。現以反應時間固定為  $T=0.1$  秒，進行不同密度  $k$  的模擬，結果的時空軌跡圖如圖 4.3.9 所示，由圖可清楚驗證不同密度的車波速均相同(三張圖的波軌跡平行)。



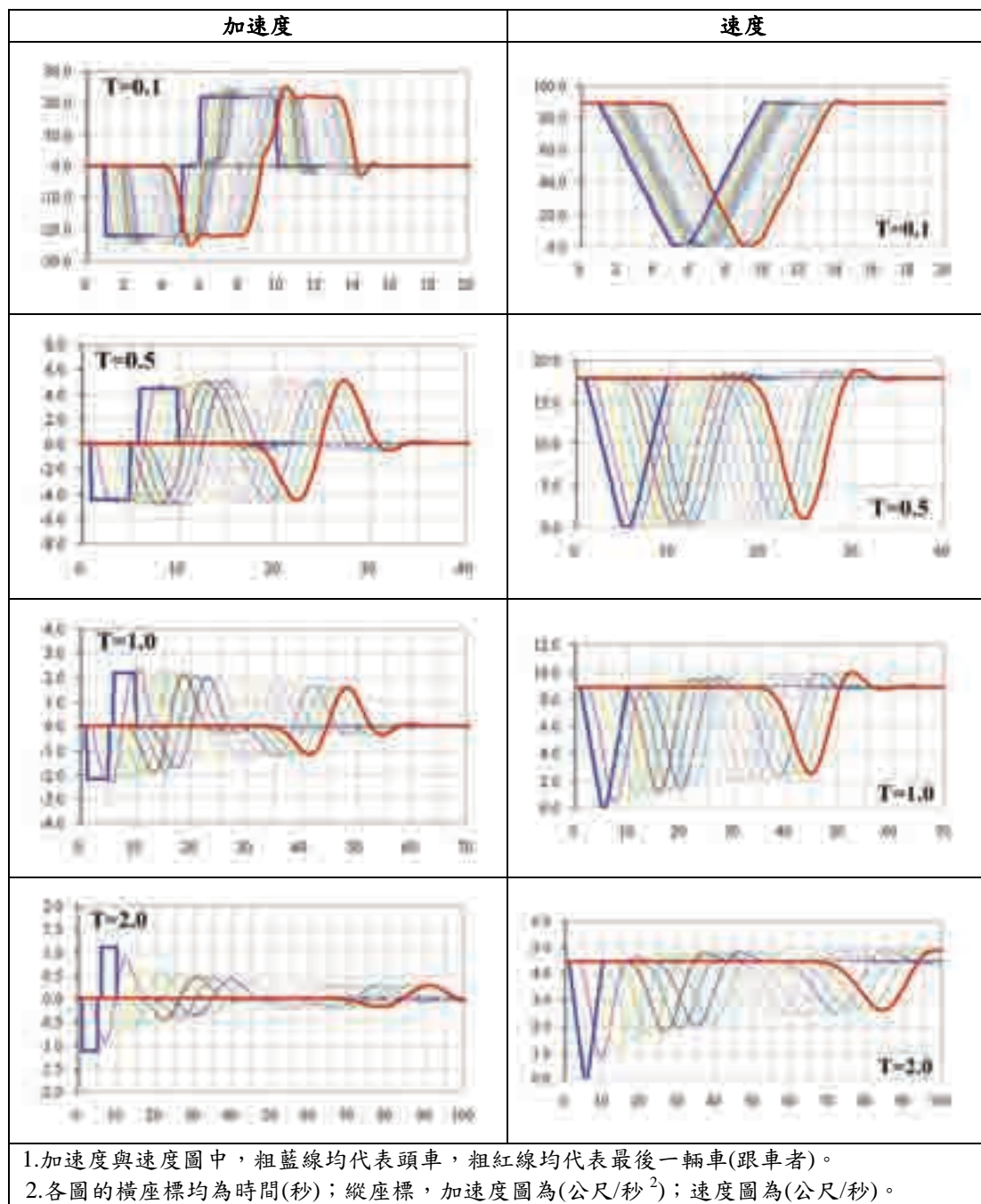


圖 4.3.7 漸近安定下不同 T 線性跟車模式模擬結果(k=40)

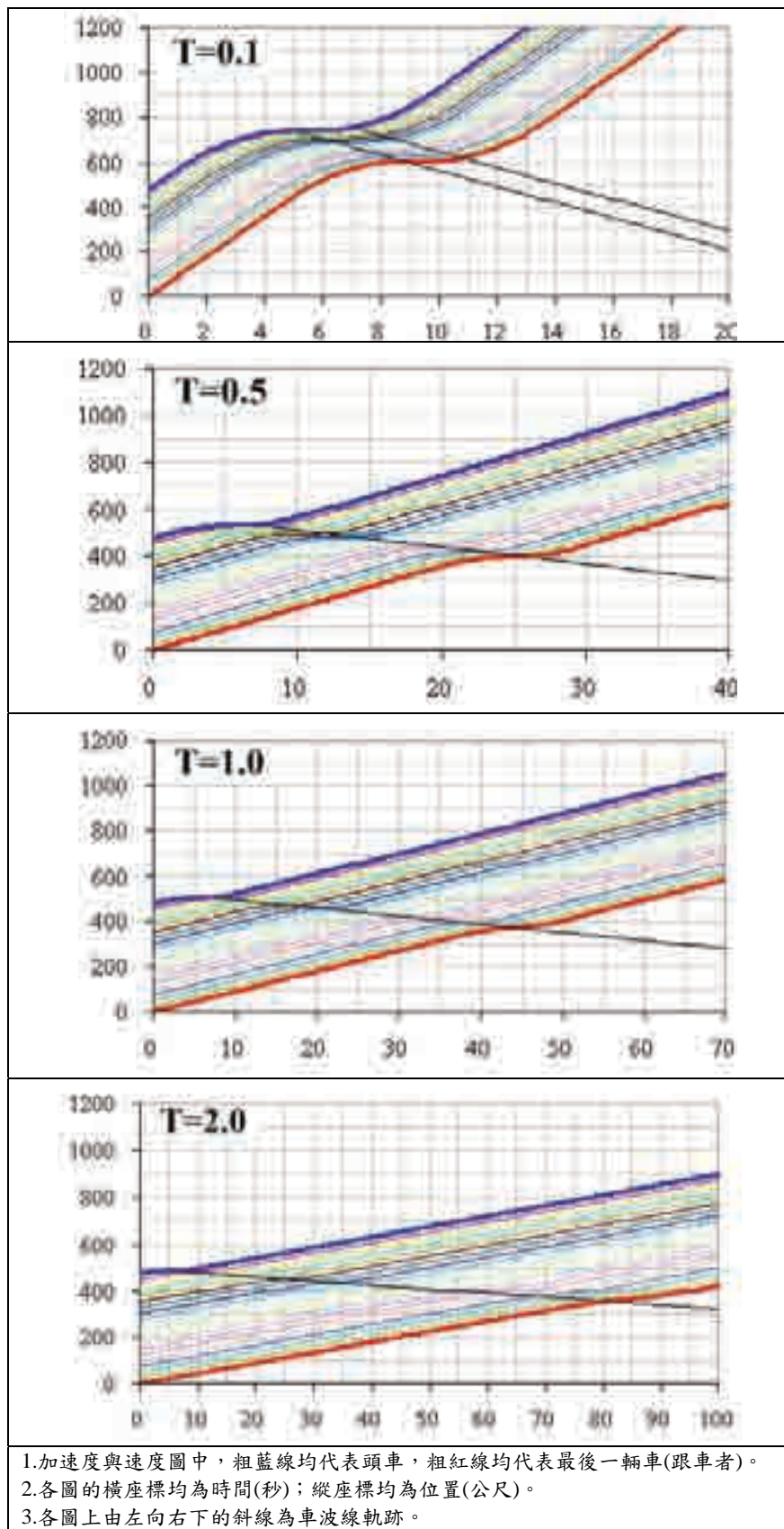
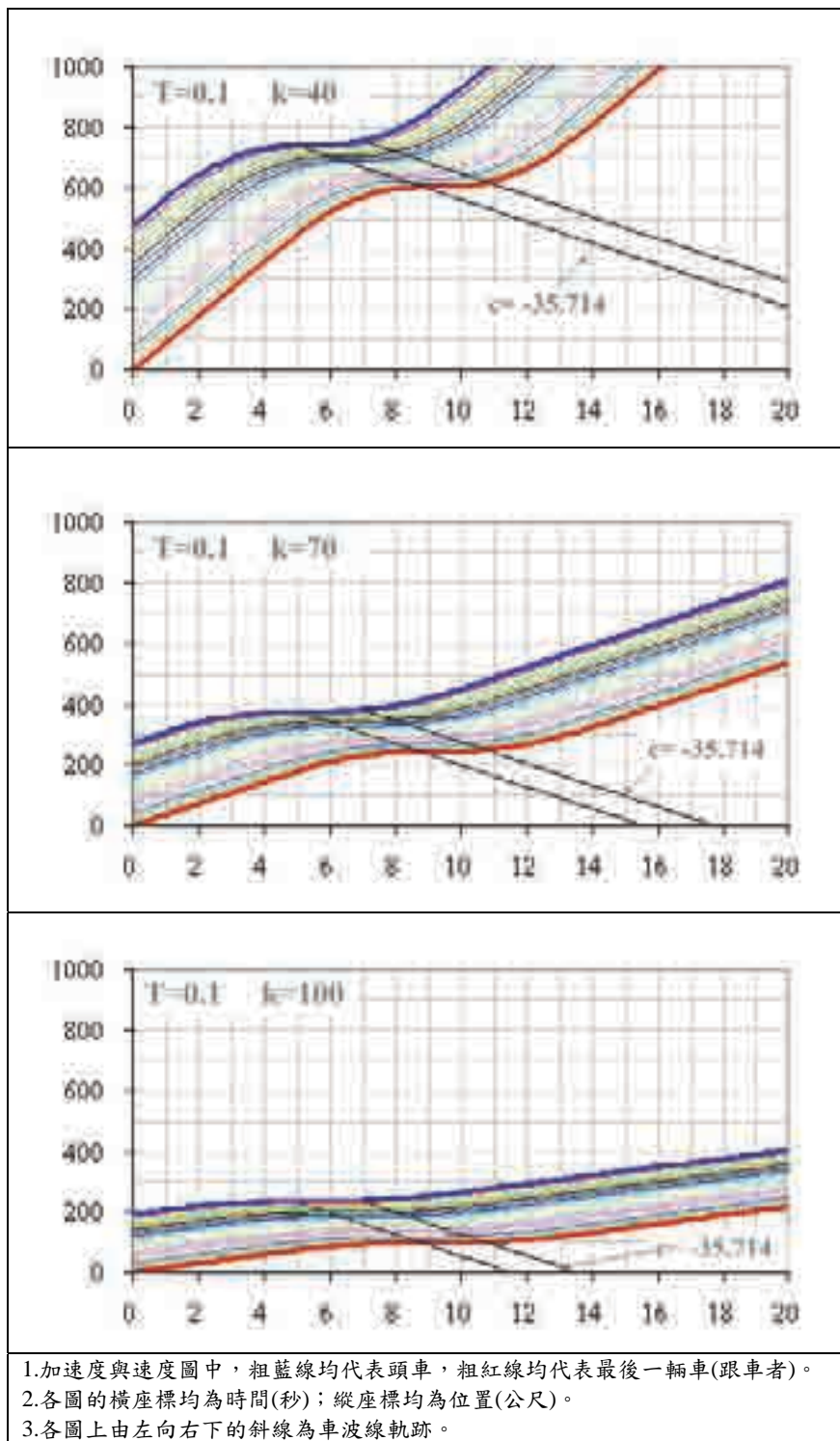


圖 4.3.8 漸近安定下不同  $T$  線性跟車模式模擬結果車軌跡圖( $k=40$ )





**圖 4.3.9 漸近安定下線性跟車模式不同  $k$  模擬結果車波軌跡圖**

### 4.3.3 線性跟車模式安定性分析小結

由本節的分析，可獲得以下重要的結果：

- (1) 兩車跟車具備局部安定性的條件是  $C (= \lambda T) \leq \pi/2$ ，在此條件下，後車因應前車些微擾動所作的加減速反應，其振盪會很快的沉寂。
- (2) 多車跟車具備漸近安定性的條件是  $C (= \lambda T) \leq 1/2$ ，在此條件下，後續各車因應頭車些微擾動所作的加減速反應與車速的變化，其振盪幅度會隨由頭車向後傳遞的車次數逐次縮減，而所有後車本身的車速振盪，因均符合局部安定性條件(小於 $\pi/2$ )，故均會很快的沉寂。
- (3) 微觀跟車模擬，除起始條件必須審慎設定外，擾動的設計亦須有一定的規範，否則將出現模擬上可行但實務上不合理的狀況。最常見的是加減速率的大小及加減速時間的長短，在不當設計下很容易出現車速為負的結果。惟由線性跟車模式的微觀跟車模擬結果知，在滿足  $C \leq 1/2$  的漸近安定性條件下，則只要頭車的車速維持非負(即令起始車速  $v$ 、加減速度  $a$  及減速延時  $t$  滿足  $v \geq at$  條件)，模擬的最大允許加減速  $a$  即不受跟車反應時間  $T$  的影響，此一重大的發現，可作為後續非線性跟車模式模擬分析安定性的參考。
- (4) 由於車流符合漸近安定時，擾動向後傳遞的振盪規模會遞減，因此後續在分析非線性跟車模式的安定性時，須同時檢查頭車的車速是否維持非負(確保模擬的設計合理)，以及擾動向後傳遞的振盪規模是否會遞減(安定性條件)。
- (5) 透過微觀跟車模擬，可以在均衡車流中製造出些微的擾動，來觀察擾動(車波)的傳遞。車波的軌跡一般係無法觀察的，但由前節透過擾動的強化(令行進中的車輛減速至停止後立即加回原車速)，已模擬出車波的行進軌跡。

### 4.4 非線性微觀跟車模式安定性模擬分析

本節以 Greenshields 巨觀水流模式對映的非線性跟車模式，以模擬的方式找出其漸近安定性條件。由前節的分析知，整體車流的漸近安定性條件，遠較只有兩輛車的局部安定性嚴格，故本節不再對非線性跟車模式進行局部安定性的模擬分析。

#### 4.4.1 非線性跟車模式的漸近安定性

Greenshields 巨觀水流模式及其對映的非線性微觀跟車模式定式如下：

$$\text{微觀跟車模式} : \ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{\lambda_{2,0}}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\text{巨觀水流模式} : q = u_f k \left[ 1 - \frac{k}{k_j} \right]$$

$$\text{其中} : \lambda_{2,0} = u_f / k_j$$

本模擬測試的設定如表 4-4-1 所示。模擬是假設在不能變換車道的單車道路段進行，含頭車前後共 20 輛車參與跟車。對映的巨觀水流模式固定，參數為  $u_f=80$  車/小時、 $k_j=140$  車/公里。起始值是先設定  $k$  (如 10, 40, 70, 100, 130 車/公里)，依指定的巨觀水流模式換算出分別對應的  $u_e=u_f(1-k/k_j)$ ，再將單位轉換成秒、公尺後，得微觀跟車模擬的起始車間程與車速。此外，其對應的微觀跟車模式的參數  $\lambda_{2,0}$  依公式設為固定的 158.7 公尺<sup>2</sup>/秒，跟車的反應時間  $T$  設為 0.1, 0.3, 0.5, 1, 2, 3 秒等 6 種狀態。

各模擬中，頭車的行動均係先維持等速 1 秒鐘，然後以等減速率減速 4 秒鐘，維持等速 1 秒鐘後，再以等加速率加速 4 秒鐘，而等加減速率的絕對值相等，其值是模擬欲尋求的最大允許值，在該最大值下，前後共 20 輛車的速度在模擬 100 秒下仍能保持正值，不出會出現負速率。

**表 4-4-1 非線性跟車模式漸近安定性模擬的各項設定**

項目	對映的巨觀水流模式		非線性微觀跟車模式	
參數設定	$u_f = 80$	公里/小時	$\lambda_{2,0} = 158.7$	公尺 <sup>2</sup> /秒
	$k_j = 140$	車/公里	$T = 0.1, 0.5, 0.8, 0.9, 1, 1.2$	秒
起始設定	$k$	車/公里	$s = 1000/k$	公尺
	$u_e = u_f(1 - k/k_j)$	公里/小時	$v = u_e \times 1000 / 3600$	公尺/秒

前節分析線性跟車模式的漸近安定性(對映固定的巨觀水流模式)時，發現結果只有兩種情形，即  $C = \lambda T \leq 1/2$  者安定， $C = \lambda T > 1/2$  者不安定。而所謂安定，是指車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序縮減，所謂不安定者則係依序擴大，而且只要是不安定，不論加減速的規模如何縮減，均不改變振盪向後傳遞時不斷擴大的狀況。簡言之，此種模式的特性相當簡單。非線性跟車模式的漸近安定性就相當複雜，模擬結果如圖 4.4.1 與表 4-4-2 所示，其至少出現三種模擬結果，茲分析說明如下：

- (1) 狀況 1 (安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在頭車，然後就隨向後傳遞的車次而依序縮減；
- (2) 狀況 2 (不安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在 20 輛車的中間(頭車以後，尾車之前)；
- (3) 狀況 3 (不安定)：車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序擴大，即振盪的最大幅度是發生在第 20 輛車。

由於除狀況 1 之外，其餘上述兩種狀況均會發生頭車安全煞停將導致後車(某輛)追撞前車，或者後車的車速因劇烈加減速而出現負值的不合理結果，簡單的說，只要模擬跟車的車數無限增加下去，整條車流必是不安定的。但經模擬分析發現，只要縮小頭車加減速的規模(亦即縮小車流內部擾動的規模)，原屬狀況 2 與狀況 3 的不安定，卻可能變為安定，換言之，非線性跟車模式的安定性，會受頭車加減速規模的影響，這是與線性跟車模式最大的不同。由此亦可瞭解，非線性跟車模式確實相當複雜，甚難以理論求其解析解來設定其漸近安定性的條件。

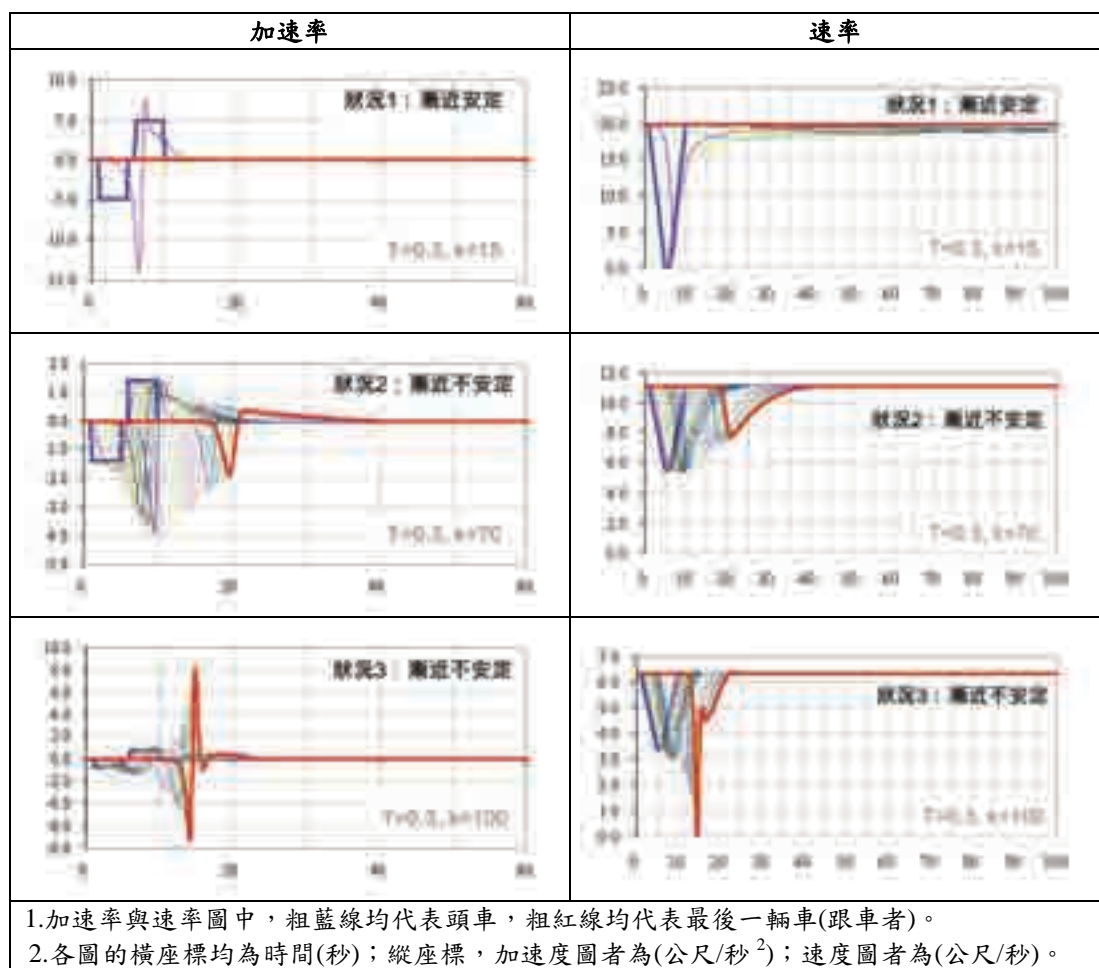


圖 4.4.1 非線性跟車模式漸近安定性三種模擬結果

表 4-4-2 非線性跟車模式在各種密度(k)下的最大允許加速度

密度 (k)	最大允許反應時間 $T$ (秒)					
	0.1	0.3	0.5	1	2	3
0	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50
5	5.35	5.35	5.35	5.35	5.35	5.35
10	5.15	5.15	5.15	5.15	5.10	4.87
15	4.96	4.96	4.72	4.09	3.52	3.21
20	4.76	4.47	4.01	3.34	2.61	2.13
25	4.56	4.18	3.63	2.83	1.88	1.33
30	4.36	3.99	3.43	2.33	1.27	0.66
35	4.16	3.77	3.02	1.86	0.73	0.20
40	3.96	3.49	2.71	1.42	0.34	0.01
45	3.77	3.25	2.37	1.02	0.13	0.00
50	3.57	2.99	2.04	0.66	0.00	0.00
55	3.37	2.72	1.71	0.39	0.00	0.00
60	3.17	2.47	1.37	0.23	0.00	0.00
65	2.97	2.21	1.04	0.12	0.00	0.00
70	2.77	1.95	0.78	0.03	0.00	0.00
75	2.58	1.68	0.59	0.00	0.00	0.00
80	2.38	1.41	0.46	0.00	0.00	0.00
85	2.18	1.15	0.37	0.00	0.00	0.00
90	1.98	0.95	0.28	0.00	0.00	0.00
95	1.78	0.83	0.19	0.00	0.00	0.00
100	1.59	0.75	0.03	0.00	0.00	0.00
105	1.39	0.69	0.00	0.00	0.00	0.00
110	1.19	0.58	0.00	0.00	0.00	0.00
115	0.99	0.38	0.00	0.00	0.00	0.00
120	0.79	0.23	0.00	0.00	0.00	0.00
125	0.59	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00
130	0.40	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
135	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
140	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

註：1.單位： $k$  為「車/公里」；加速度為「公尺/秒<sup>2</sup>」。

2.表中有網底者(紫色)表找不到安定的狀況；紅色表車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序擴大，即振盪的最大幅度是發生在第 20 輛車；藍色表在車速變化振盪的最大幅度是發生在 20 輛車的中間；綠色表在車速變化振盪的最大幅度是發生在前 3 輛；黑色表在車速變化的振盪是隨向後傳遞的車次而依序縮減。

表 4-4-2 中原屬狀況 2 與狀況 3 的不安定者，經將其頭車加減速度的規模縮小後，再模擬(加減速度絕對值相同)找出符合漸近安定條件的加減速度，結果如圖 4.4.2 與表 4-4-3 所示，茲說明如下：

- (1) 由圖與表知，不同反應時間  $T$  允許的最大加減速度(絕對值)並不一致，其共同特性是最大允許加減速率(絕對值)隨密度增加而變小。
- (2) 反應時間  $T$  愈小，符合漸近安定適用的  $k$  值範圍就愈大，例如  $T=0.1$  秒可適用各種密度(跟車間程)的狀況，而隨  $T$  值愈增大，符合漸近安定的適用範圍變得愈小，至  $T=3.0$  秒時，密度  $k>35$  車/公里以上者均不適用，均找不到輕微擾動下而仍能保持安定的加減速度值(加減速度須為 0)。

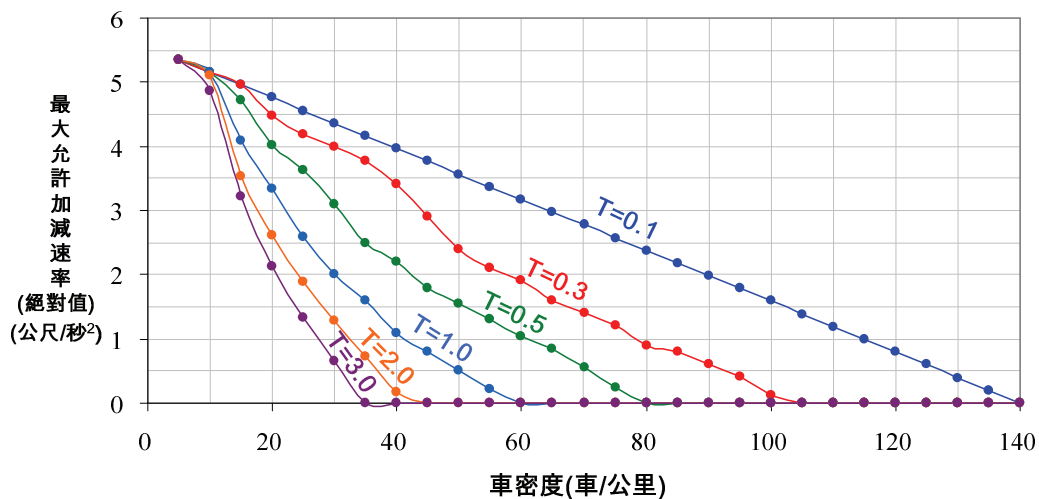


圖 4.4.2 非線性跟車模式符合漸近安定條件最大允許加減速率

表 4-4-3 係經上述分析綜合整理而得的非線性跟車模式符合漸近安定的條件，由表 4-4-3 的右半欄 ( $C=(\lambda_{2,0}/s^2) \times T$ ) 知，符合漸近安定條件，不論  $T$  值為何，均是  $C=\lambda \times T \leq 1/2$ ， $\lambda=\lambda_{2,0}/s^2$ ，與線性跟車模式的理論解析解一致。找出非線性跟車模式的漸近安定條件，是本研究重大的發現與貢獻。

表 4-4-3 非線性跟車模式符合漸近安定的條件

密度 ( <i>k</i> )	最大允許加速度						$C=(\lambda_{2,0}/s^2)\times T$					
	<i>T</i> =0.1	0.3	0.5	1	2	3	<i>T</i> =0.1	0.3	0.5	1	2	3
0	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.35	5.35	5.35	5.35	5.35	5.35	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.012
10	5.15	5.15	5.15	5.15	5.10	4.87	0.002	0.005	0.008	0.016	0.032	0.048
15	4.96	4.96	4.72	4.09	3.52	3.21	0.004	0.011	0.018	0.036	0.071	0.107
20	4.76	4.47	4.01	3.34	2.61	2.13	0.006	0.019	0.032	0.063	0.127	0.190
25	4.56	4.18	3.63	2.60	1.88	1.33	0.010	0.030	0.050	0.099	0.198	0.298
30	4.36	3.99	3.10	2.00	1.27	0.66	0.014	0.043	0.071	0.143	0.286	0.429
35	4.16	3.77	2.50	1.60	0.73	0.00	0.019	0.058	0.097	0.194	0.389	0.583
40	3.96	3.40	2.20	1.10	0.18	0.00	0.025	0.076	0.127	0.254	0.499	0.762
45	3.77	2.90	1.80	0.80	0.00	0.00	0.032	0.096	0.161	0.321	0.643	0.964
50	3.57	2.40	1.55	0.50	0.00	0.00	0.040	0.119	0.198	0.397	0.794	1.190
55	3.37	2.10	1.30	0.22	0.00	0.00	0.048	0.144	0.240	0.480	0.960	1.440
60	3.17	1.90	1.05	0.00	0.00	0.00	0.057	0.171	0.286	0.571	1.143	1.714
65	2.97	1.60	0.85	0.00	0.00	0.00	0.067	0.201	0.335	0.671	1.341	2.012
70	2.77	1.40	0.55	0.00	0.00	0.00	0.078	0.233	0.389	0.778	1.556	2.333
75	2.58	1.20	0.25	0.00	0.00	0.00	0.089	0.268	0.446	0.893	1.786	2.679
80	2.38	0.90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.102	0.305	0.508	1.016	2.032	3.048
85	2.18	0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.115	0.344	0.573	1.147	2.294	3.440
90	1.98	0.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.129	0.386	0.643	1.286	2.571	3.857
95	1.78	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.143	0.430	0.716	1.433	2.865	4.298
100	1.59	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.159	0.476	0.794	1.587	3.175	4.762
105	1.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.175	0.525	0.875	1.750	3.500	5.250
110	1.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.192	0.576	0.960	1.921	3.841	5.762
115	0.99	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.210	0.630	1.050	2.099	4.198	6.298
120	0.79	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.229	0.686	1.143	2.286	4.571	6.857
125	0.59	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.248	0.744	1.240	2.480	4.960	7.440
130	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.268	0.805	1.341	2.683	5.365	8.048
135	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.289	0.868	1.446	2.893	5.786	8.679
140	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.311	0.933	1.556	3.111	6.222	9.333

註：1.單位：*k* 為「車/公里」；加速度為「公尺/秒<sup>2</sup>」。

2.表中紫色表找不到安定的減速率，須設為 0；黑色表在該減速率下是安定的，即車速變化的振盪是隨向後傳遞的車次而依序縮減。

#### 4.4.2 非線性跟車模式符合漸近安定性條件的 T-k 關係

由前節的模擬分析知，非線性跟車模式的漸近安定性條件仍係  $C \leq 1/2$ ，與線性跟車模式的理論解析解一致。惟以 Greenshields 巨觀模式為例，其對應的非線性微觀跟車模式的  $C = (\lambda_{2,0}/s^2) \times T = \lambda_{2,0} \times k^2 \times T$ ，很明顯的， $T$  須隨  $k$  的不同而變，圖 4.4.3 即為符合  $C \leq 1/2$  條件下的  $k$ - $T$  分布圖，而其關係式可寫成：

$$T_{\max} = \frac{1}{2\lambda_{2,0}k^2} \quad (4-4-1)$$

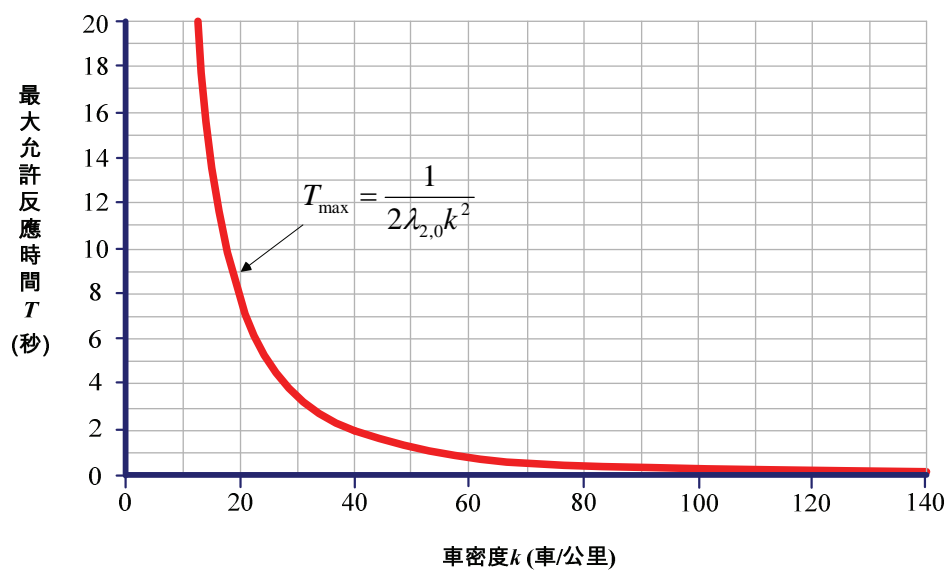


圖 4.4.3 非線性跟車模式符合漸近安定條件之  $k$ - $T$  分布圖

Castillo, Pindato, Benitez(1994)曾仔細研究 Payne(1971)的原始高階模式(詳第六章)，發現其有一不符實際的缺點，即行駛中的車輛會受後方車況的影響。為克服此一缺點，該研究建議鬆弛時間  $\tau$  為密度的函數：

$$\tau(k) = -\frac{1}{2k^2 u_e'} \exp\left(-\frac{u - u_e}{a}\right) \quad (4-4-2)$$

其中， $a$  為常數， $u_e' = du_e / dk$ ，通常為負值。以 Greenshields 模式言， $u_e' = -\frac{u_f}{k_j}$ ，代入式(4-4-2)可得：

$$\tau(k) = \frac{k_j}{2u_f k^2} \exp\left(-\frac{u - u_e}{a}\right) \quad (4-4-3)$$



由此知，本研究以 Greenshields 巨觀水流模式導出微觀跟車模式具安定性條件下的反應時間  $T$ ，其定式與 Castillo, Pindato, and Benitez(1994)提出巨觀高階連續流模式的  $\tau$ ，二者非常相像，值得相關研究持續的關注。

## 4.5 本章小結

跟車模式的安定性分析係發展模式必須的驗證工作，本章針對此一課題，有下列成果與建議。

### 1.線性跟車模式的安定性條件

- (1) 局部安定性(local stability)：只考慮一前一後兩輛車的狀況，其行車的局部安定性條件係反應時間與敏感度的乘積須小於 $\pi/2$ ，此時兩車的車間程會因些微擾動而出現振盪，但振盪會指數型沉寂；
- (2) 漸近安定性(asymptotic stability)：考慮一串車輛組成的車隊的行車狀況，其安定性條件係反應時間與敏感度的乘積須小於 $1/2$ 。當該值等於 $1/2$ 時，車隊會因些微擾動而出現振盪，且其振幅在向後續各車傳遞的過程中維持不變，惟車輛兩兩間跟車間程的振盪均會以指數型式迅速沉寂。

### 2.各種跟車模式的安定性

- (1) 如跟車的加減速係以兩車的車速差來調整，則在無反應延遲的條件下，車流任何狀況均是安定的；
- (2) 如跟車的加減速係以兩車的車間程來調整，即後車會想辦法與前車保持相同間隔距離，則即便反應無延遲，車流亦不安定；
- (3) 如跟車的加減速係以兩車的車間程加上車速加碼(例如車速每增加 10 英哩/小時，便增加一個車身長)來調整時，即便在反應有延遲條件下，車流亦會安定，且加碼愈多，愈安定。

### 3.微、巨觀模式對應關係的模擬結果

- (1) 線性微觀模式：巨觀水流模式的另一參數  $k_j$  並未顯現在線性微觀跟車模式的定式中，只設定 $\lambda$ 值的線性微觀跟車模式會對應無限多條截距相同(由 $\lambda=q_{\max}/3600$ 指定)但斜率不同( $k_j$ 不同)的 $q-k$ 曲線，須藉 $k_j$ 的設定方能定型；
- (2) 非線性微觀模式：微觀跟車模式的參數雖已包含巨觀水流模式兩邊界參數(例如 $\lambda_{2,0}=u_f/k_j$ )，惟因只有比例關係，仍無定量的規範，因此如任意設定起始條件，其微觀跟車達均衡時，對映的巨觀水流模式仍會不同( $u_f$ 與 $k_j$ 可能等比例增加或減少，致 $q-k$ 曲線的型態不同)。由此知，微觀模擬前必須審慎設定起始條件，事實上，起始條件本身在巨觀上係代表一個均衡狀態點，必須在模擬前確定係落在指定的巨觀水流模式曲線上。

#### 4.線性微觀跟車模式安定性的模擬結果

- (1) 兩車跟車的局部安定性條件與多車跟車的漸近安定性條件，模擬結果均與理論解析解的結果完全一致；
- (2) 微觀跟車模擬，除起始條件必須審慎設定外，擾動的設計亦須有一定的規範，否則將出現模擬上可行但實務上不合理的狀況。由線性跟車模式的模擬結果知，在滿足  $C \leq 1/2$  的漸近安定性條件下，則只要頭車的車速維持非負(即令起始車速  $v$ 、加減速度  $a$  及減速延時  $t$  滿足  $v \geq at$  條件)，模擬的最大允許加減速雖隨不同密度  $k$  而不同，但並不受跟車反應時間  $T$  的影響，此係本研究的一項重大發現；
- (3) 車波的軌跡一般係無法觀察的。本研究透過微觀跟車模擬，以在均衡車流中製造些微擾動的方式來分析車波的傳遞，結果確可模擬出車波的行進軌跡。

#### 5.非線性微觀跟車模式安定性的模擬結果

- (1) 線性跟車模式漸近安定性的模擬結果只有  $C = \lambda T \leq 1/2$  者安定， $C = \lambda T > 1/2$  者不安定兩種結果。非線性跟車模式的漸近安定性就相當複雜，其至少出現三種模擬結果：
  - 1) 狀況 1 (安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在頭車，然後就隨向後傳遞的車次而依序縮減；
  - 2) 狀況 2 (不安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在 20 輛車的中間(頭車以後，尾車之前)；
  - 3) 狀況 3 (不安定)：車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序擴大，即振盪的最大幅度是發生在第 20 輛車。
- (2) 將頭車加減速的規模縮小，找出符合漸近安定條件的加減速度，結果發現，符合漸近安定性條件下，最大允許加減速率(絕對值)隨密度增加而變小。此外， $T$  愈小，適用的交通狀況範圍就愈大。例如  $T=0.1$  秒可適用各種密度狀況( $k=0 \sim k_j$ )，當  $T=3.0$  秒時，密度  $k > 35$  車/公里以上者均不適用，均找不到車流能保持安定的加減速度值。
- (3) 以 Greenshields 模式而言，非線性微觀跟車模式漸近安定的條件，不論  $T$  值為何，均為  $C = (\lambda_{2,0}/s^2) \times T \leq 1/2$ ，其中， $(\lambda_{2,0}/s^2)$  係模式的敏感項，相當於線性跟車模式的  $\lambda$ ，亦即非線性跟車模式漸近安定的條件與線性跟車模式理論分析的結果一致。找出非線性跟車模式的漸近安定條件，是本研究的另一重大發現。
- (4) 相對的，符合漸近安定的條件下，不同交通環境適用的最大允許反應時間  $T$  並不同，如以巨觀的方式表現跟車環境，可建立  $k$ - $T$  關係式，以 Greenshields 模式而言，其數學式為：

$$T = \frac{1}{2\lambda_{2,0}k^2} = f(k)$$

簡單的說，在巨觀的車流模式(例如高階連續流模式)中，代表反應時間的參數不應設為常數，而應模化成密度的函數。這亦是本研究的重大發現。

## 6.後續高階連續流模化之相關建議

本研究已確定  $T$  係隨不同的  $k$  而變，因此除非各方能接受車輛駕駛人的反應時間在任何交通環境下均相當小(例如  $T=0.1$  秒，相當於瞬間反應)，否則不論是微觀或巨觀的車流模式，均應審慎處理此一與人因有關的重要參數。本研究找出的  $k$ - $T$  關係，可供後續車流理論模式發展，尤其是為高階連續流模式的改良，提供重要的參考。



## 第五章 簡單連續流模式

第一單元(第二章)我們介紹巨觀水流模式(stream model)及其參數，並說明空間與時間平均速率在調查取樣與計算公式上的配合；第二單元(第三章與第四章)我們介紹微觀跟車模式(car-following model)及其安定性的條件，並說明微觀跟車模式在穩定狀態下與巨觀水流模式有一對一對映的關係。微觀跟車模式係一加速度公式，本質上是運動公式，包含不穩定狀態(加減速不為 0)與穩定狀態。而巨觀水流模式根本不能動，只是靜態的關係式，換言之，與 l-m 微觀跟車模式對映的水流模式，只對映到微觀模式的局部(僅限穩定狀態)，並非全部。

第三單元(本章及後續幾章)要介紹連續流模式(continuum models)，係巨觀且會動的模式，亦係與微觀跟車模式最具對映條件的模式。本章介紹的簡單連續流模式，是會動的巨觀車流模式中最簡單的一種，一般稱為 LWR (Lighthill-Whitham-Richards)模式，其中，Lighthill, Whitham(1955)最早提出簡單連續流模式，並衍生出由純車波來模化動態車流行為的車波-衝擊波理論；Richards(1956)提出以明渠水流來模化車流的紙上剪力圖法，本章將分節說明之。本章最後並以 Greenshields 巨觀水流模式為例，比較車波-衝擊波理論與紙上剪力圖法的異同。

### 5.1 車波-衝擊波法

以連續流來類比車流，係視車流為單向可壓縮液體(one dimensional compressible fluid)。此種類比隱含兩個假設，即車流是守恒的(conservation)，以及速率-密度間或流率-密度間存有一對一的關係。簡單連續流模式即包含守恒式與車流狀態式(state equation，如速率-密度或流率-密度關係式)。如同時解守恒式與車流狀態式，即可求得道路上任一點、任何時間的車流速率、密度與流率值，並進而量測其效用(effectiveness)，如延滯、停車數、旅行數、旅行時間等。因係以時間-空間來描繪車流，因此優於忽略空間的輸入-輸出模式(input-output models)，例如等候模式(Queuing models)等。

#### 5.1.1 車波-衝擊波理論

Lighthill, Whitham(1955)是最早提出以車波與衝擊波來模化車流者，本節重點回顧之。

##### 1. 車波與衝擊波在時空圖上表示

Lighthill, Whitham(1955)指出， $q-k$  曲線上任一點(代表某一交通狀況)的平均車速  $u=q/k$  係座標原點與該點連線的斜率，而該交通狀況些微擾動的車波速  $c=dq/dv$  則為曲線在該點切線的斜率，如圖 5.1.1 之左圖。

道路交通的變化可以時空圖的方式簡單呈現。由於時空圖上任一條線的斜率

( $=dx/dt$ )即代表某種速率，因此車流特性在時空圖上最容易表現的是各種速率。令時空圖之縱座標為道路(空間)，橫座標為時間，則在時空圖上繪出與  $q-k$  曲線上某點的切線平行的直線，即可代表該特定的交通狀態，如圖 5.1.1 之右圖，圖中交通狀況接近容量點的 A 與接近自由流的 B 在時空圖上分別以斜率不同的平行直線表示，且分別與  $q-k$  曲線上 A、B 點的切線平行。

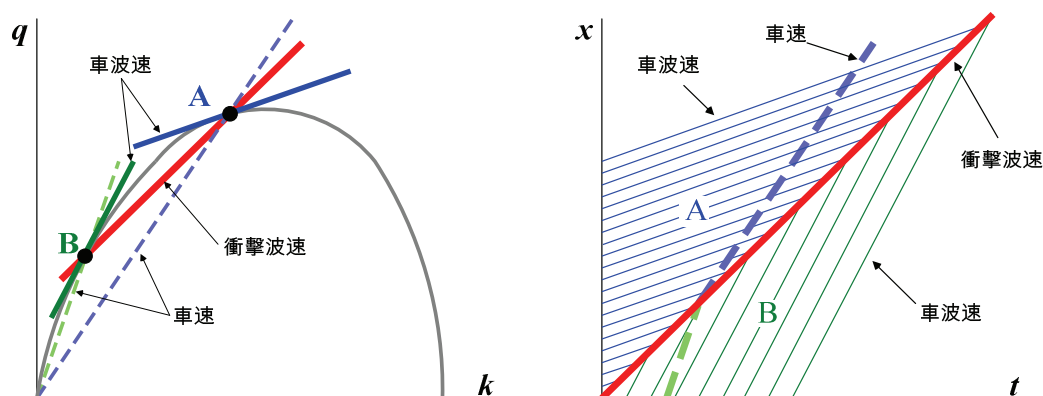


圖 5.1.1 車波在流率-密度曲線上與時空圖上的表示

資料來源：Lighthill, M.J., G.B. Whitham, "On Kinematic Waves: II A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," Proc. Royal Soc., A229, 317-345, 1955.

$q-k$  曲線的第二種用法是道路下游車況較上游擁擠時會發生的不連續波 (discontinuous waves)。由於低密度車流的車速較快，因此上游的車流會追上密度較高的下游車流，此時分別代表兩種車況的車波重合，而產生不連續的車波，稱為衝擊波 (shock waves)。當車輛進入衝擊波時，車速會迅速減低。此波當然並非完全不連續，但其寬度將短於駕駛人踩煞車以降低車速的延時。

Lighthill, Whitham (1955) 指出，衝擊波速  $\Delta q / \Delta k$  等於  $q-k$  曲線上連接兩不同車況點的弦的斜率。圖 5.1.1 的右圖中，時空圖上介於 A、B 二組車波線之間者，即為衝擊波線，係平行  $q-k$  曲線上連接 A、B 兩點的弦。此外， $q-k$  曲線上代表 A、B 兩交通狀況的平均車速係  $q-k$  曲線座標原點與 A、B 兩點的連線，在時空圖上這種車輛的軌跡線係以平行於該連線的點虛線表示。在圖 5.1.1 之右圖可清楚看到，車速一般高於車波速與衝擊波速 (只有自由流時車速方等於車波速)，亦即車輛會由一種交通狀態 (上游車波範圍) 穿越衝擊波至另一種交通狀態 (下游車波範圍)，而在穿越衝擊波界面時，車速會突然改變。

## 2.交通流峰的行進

令道路的端點處為車流產生源，假設係以某固定流率進流，如突然出現高峰，但立即再回復原流率，即產生交通流峰。問題是如何預測該交通流峰在各時空點上的變化？該流峰會漸漸消散抑或更為緊密集聚？變化的速度多快？如何影響車流行為？

Lighthill, Whitham(1955)應用車波、衝擊波解答上述問題，如圖 5.1.2 所示。在圖中，車流產生源發出的車波與  $q-k$  曲線某點的切線平行，該波在交通流峰內的速度低於流峰外的速度，致流峰前頭(下游)的車波呈扇形展開(fan out)，而在尾端(上游)則緊密的靠在一起。

如前所述，車輛的行進速度一般高於車波速(只有自由流時二者相等)，亦即由流峰尾端出發的車輛會穿過該流峰，惟一旦進入流峰，由時空圖知，車波線緊靠在一起表密度漸增，致車輛會迅速減速，但離開流峰後，平均車速會隨車輛通過扇形區而逐漸增加。

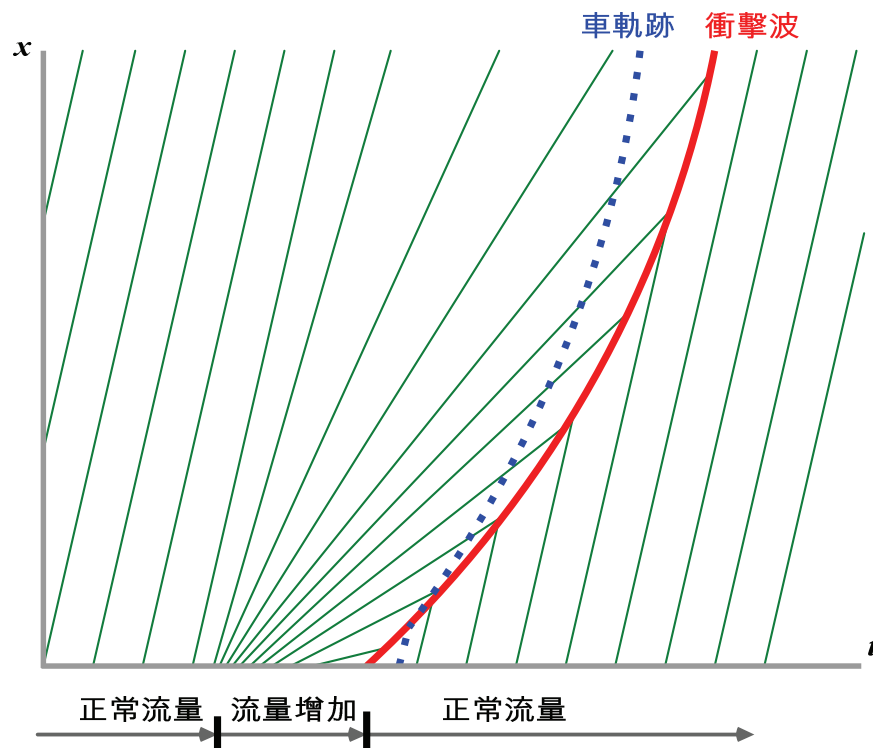


圖 5.1.2 以衝擊波描繪車流峰時空推進示意圖

資料來源：Lighthill, M.J., G.B. Whitham, "On Kinematic Waves: II A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," Proc. Royal Soc., A229, 317-345, 1955.

### 3.交通瓶頸

考慮道路存在交通瓶頸的問題。假設該瓶頸的容量低於主要路段(如車道數不變，但鋪面狀況較差)的容量，此時  $q-k$  曲線在瓶頸處將垂直降低，而通過瓶頸處的最大流率，即該瓶頸的容量。

Lighthill, Whitham(1955)說明，如瓶頸上游主要路段的到達流率低於瓶頸容量，則每輛車通過瓶頸時只會遭遇車速短暫的降低，當然車波速通過瓶頸時亦會降低。由於流率在任何車波線上均維持不變，因此即便車波線因車況在  $q-k$  曲線的位置不同而產生變型，只要仍**連續**，其所代表的流率均會維持不變。基於此，瓶頸附近的車波線，可以令到達流率水準固定不變，即繪水平線劃過兩條分別代表主線與瓶頸處的  $q-k$  曲線，定出流率相同各別的點，再以切線得到各段的車波線，將之平行繪製在時空圖上，如圖 5.1.3 所示。

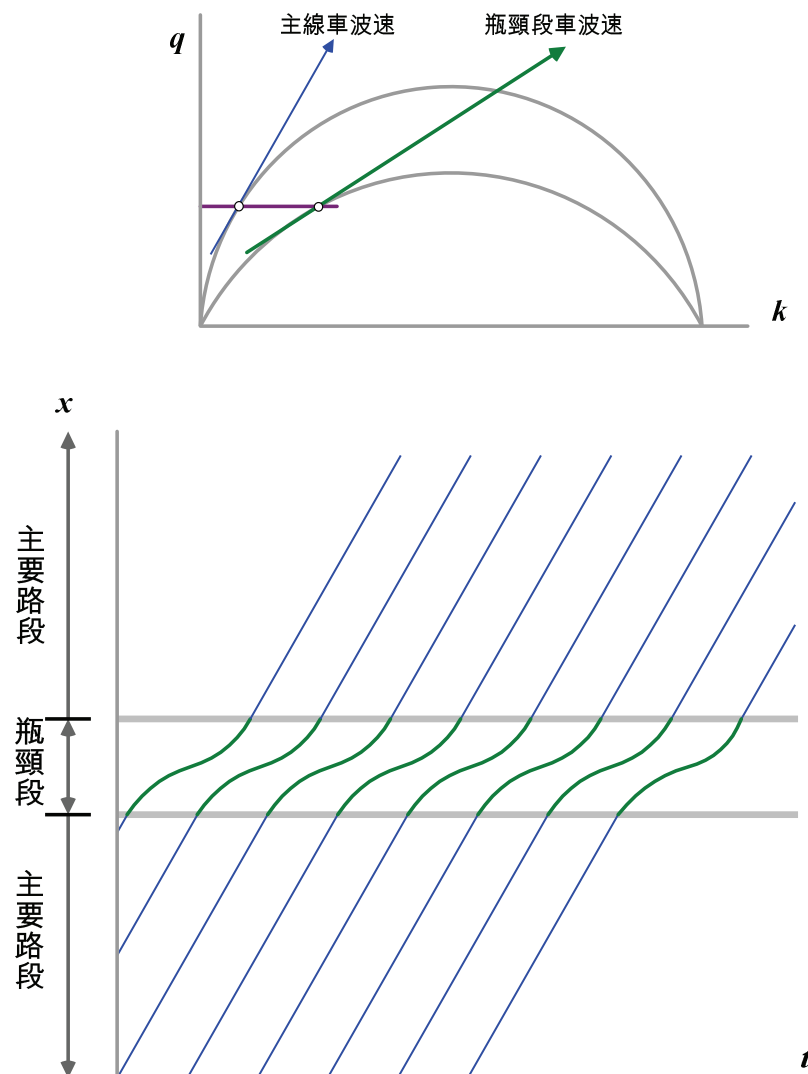


圖 5.1.3 瓶頸容量大於到達流率的车波行进变化图

資料來源：Lighthill, M.J., G.B. Whitham, "On Kinematic Waves: II A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," , Proc. Royal Soc., A229, 317-345, 1955.



Lighthill, Whitham(1955)亦說明到達流率大於瓶頸容量的狀況。值得重申者，不論波線如何變型，每一條連續的車波線均代表相同的流率。但當到達流率大於瓶頸容量時，因為通過瓶頸的流率不可能大於該段的容量，因此，不可能出現一條連續的車波線穿過瓶頸，換言之，此時必會產生車波不連續的狀況，或者，必產生衝擊波，且向上游回溯(速率為負)，如圖 5.1.4 所示。

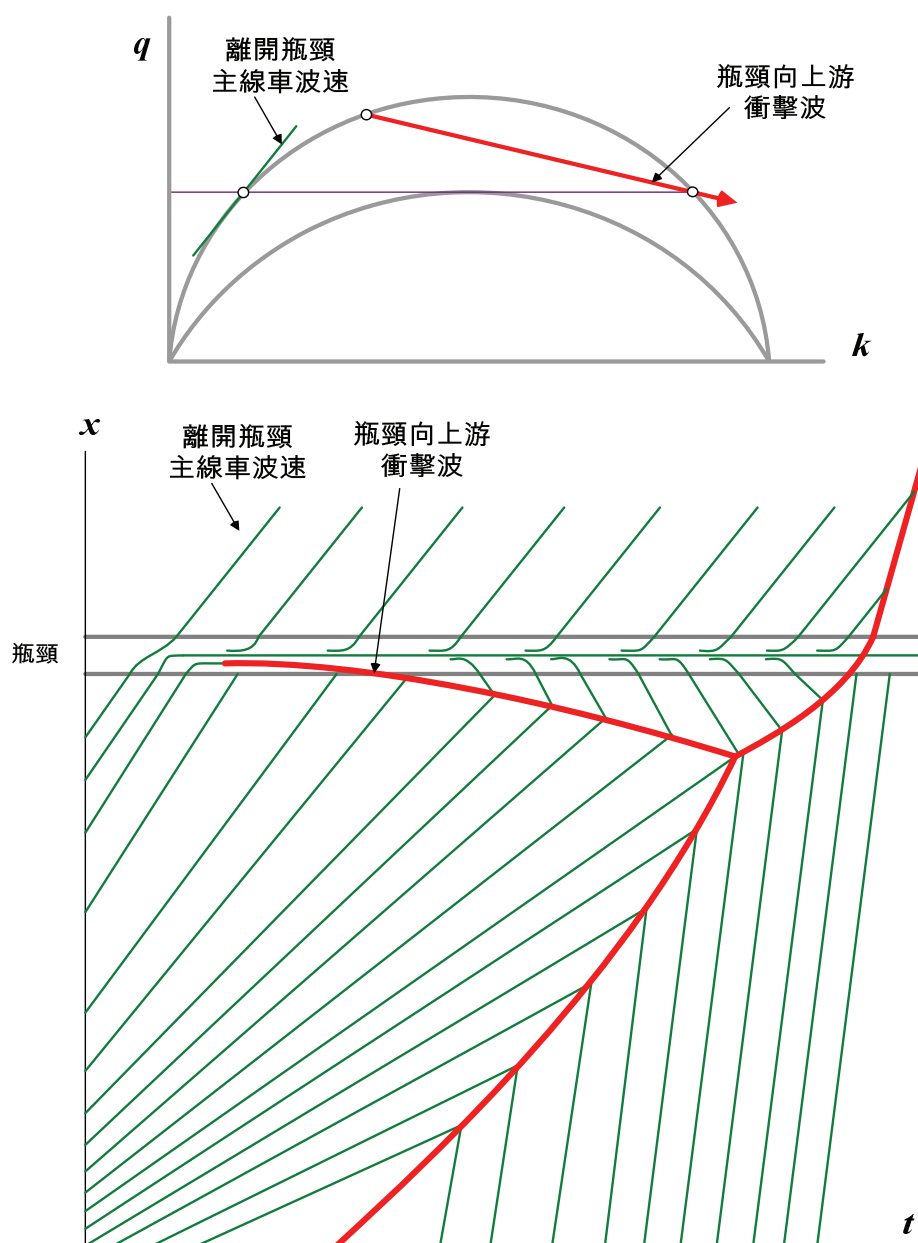


圖 5.1.4 瓶頸容量小於到達流率的车波變化圖

資料來源：Lighthill, M.J., G.B. Whitham, "On Kinematic Waves: II A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," , Proc. Royal Soc., A229, 317-345, 1955.

#### 4. 號誌控制交岔路口車流行為

Lighthill, Whitham(1955)亦模化號誌控制交岔路口的情形。首先考慮一個均勻到達車流遇紅燈而停止的狀況。此時會發出一個帶有流率為零訊息的衝擊波向上游傳遞，而車密度會一直增加到壅塞密度  $k_j$ ，其衝擊波速等於到達車況與壅塞車況在  $q-k$  曲線上連線的斜率，因為此衝擊波所到之處，車輛會停止，可稱之為向後停止波。

紅燈停等車隊向上游延伸可以向後停止波表示，但當號誌變為綠燈，停止車流再度向前流動時會發生何種狀況？Lighthill, Whitham(1955)說明此時頭車可以不受阻撓的加速到道路允許的最高車速，如不考慮車輛起動加速所需要的時間，則等候車隊車流的前端將係瞬間變成自由流車速(free flow Speed)  $u_f$ ，為  $q-k$  曲線原點切線的斜率(自由流時車波速等於車速)；在此同時，亦向後穿透停止車隊發出另一帶有號誌轉綠(可以起動)訊息的車波，其波速為負，等於  $q-k$  曲線上壅塞點切線的斜率。在此二者之間存在各種中間速度的車波，代表介於壅塞與自由流間的各種交通狀況。由於在最前頭的車波速率最大，其後的車波速率依序遞減，彼此不會相交而產生衝擊波，因此可以假設其間只存在著連續型的車波(衝擊波係車波的不連續)。基於此，車速連續的改變，可以由扇形車波線(a fan of waves)來表現(稱為起動波)。

圖 5.1.5 即紅燈產生向後停止衝擊波，綠燈產生向前後起動及其間扇形車波的時空圖。圖中的虛線代表車輛行進軌跡，而在停止線處存在停駐不動的車波，代表該處之車流係在最大流率  $q_m$  狀態。而由圖 5.1.5 可看出，當向後起動波追上向後停止衝擊波時，因為車流會在  $q-k$  曲線上由壅塞狀況逐漸變成最大流率狀況，因此會使該衝擊波速(為負，向後)迅速減低，甚而可能轉向。

號誌時制的設計必須使紅燈停等車隊在綠燈結束前通過停止線，即原本向後衝擊波會重回停止線且穿越停止線後向下游移動，如圖 5.1.6 所示。此時，該停止衝擊波將成為前述流峰的尾端，而在該衝擊波之後，即為原到達車流。圖 5.1.6 中出現無車狀態，其起始時間係到達車流在綠燈時最後一輛通過停止線的時間(等於紅燈始亮時間)，其結束的時間則為綠燈始亮時間。

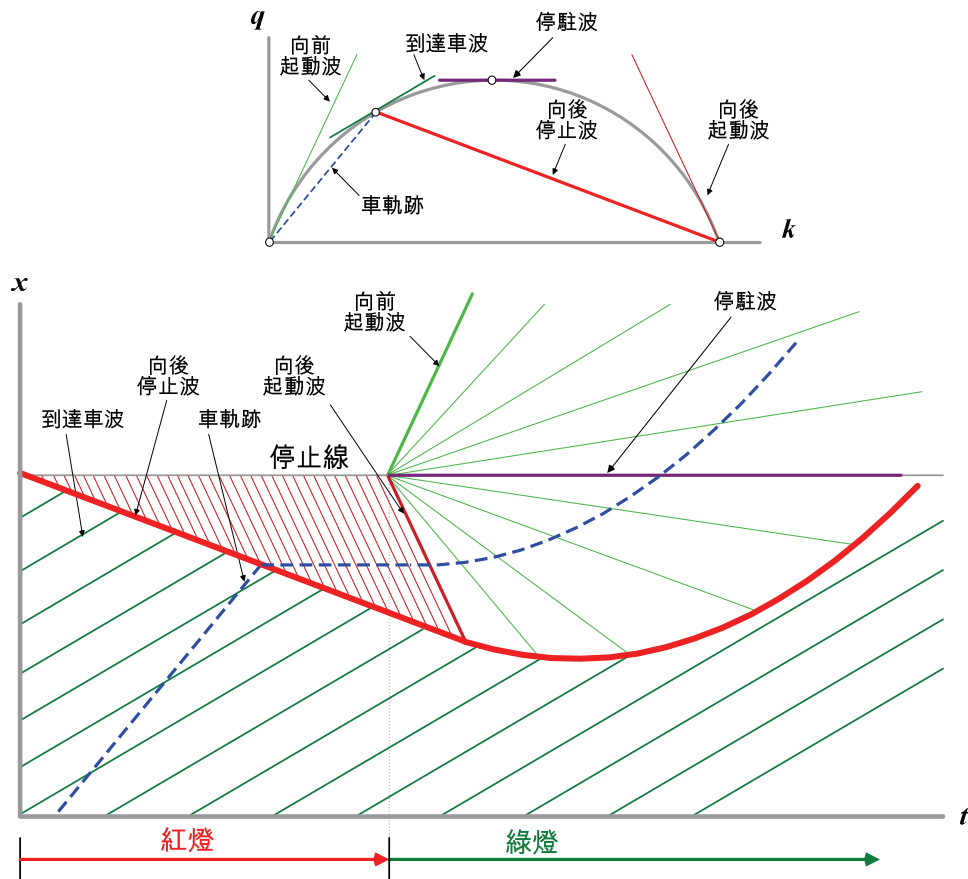


圖 5.1.5 均勻到達流停止一段時間再起動的時空圖

資料來源：Lighthill, M.J., G.B. Whitham, "On Kinematic Waves: II A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," Proc. Royal Soc., A229, 317-345, 1955.

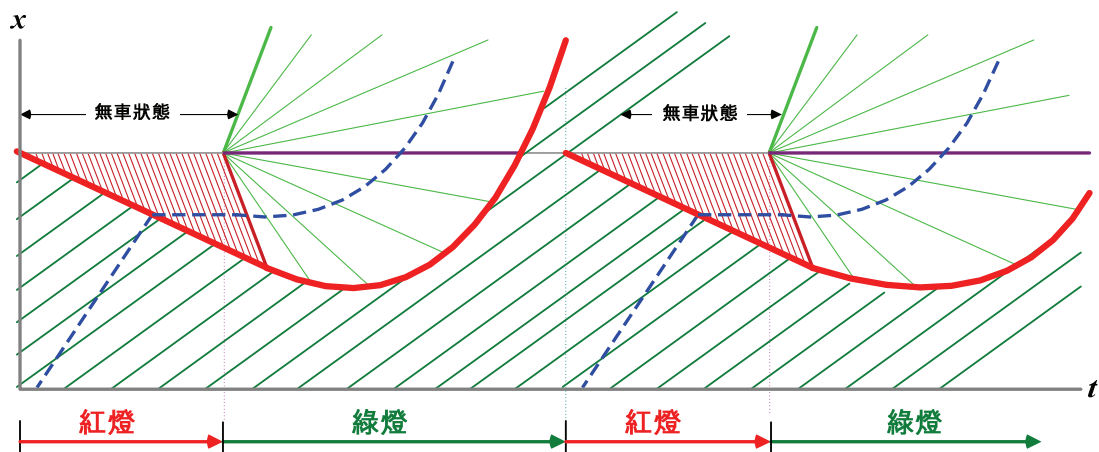


圖 5.1.6 未飽和號誌路口的車流時空圖

資料來源：Lighthill, M.J., G.B. Whitham, "On Kinematic Waves: II A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads," Proc. Royal Soc., A229, 317-345, 1955.

## 5.1.2 車波-衝擊波數學解

前節已展現出簡單連續流模式的外貌(車波與衝擊波圖)，本節則以數學說明之。

### 1. 流體守恆

在一單向連續的路段上設兩個測站，如圖 5.1.7 所示，兩測站間隔 $\Delta x$ ，且其間無流失源與產生源(sink and source)，亦即在其間不會有車流流出或流入。

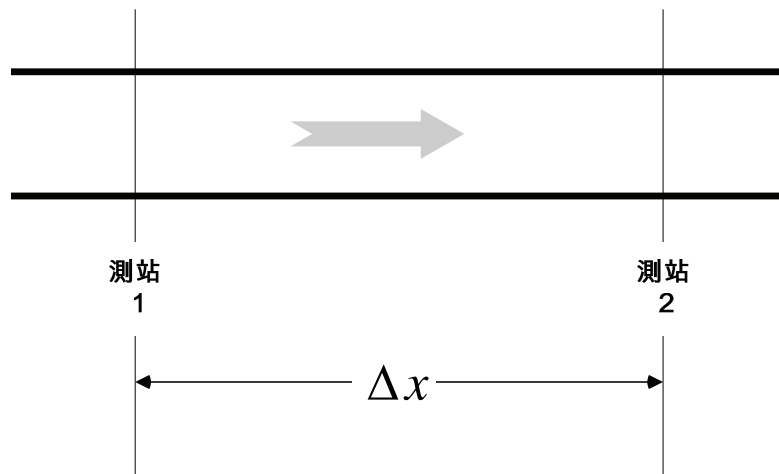


圖 5.1.7 推導守恆式的封閉路段與測站

令  $N_i$  表  $\Delta t$  時間內通過測站  $i$  的車數， $q_i$  則為其流率；測站 1, 2 是同步量測。令  $(N_2 - N_1) = \Delta N$ ，基於上述定義：

$$\text{測站 1 的流率：} N_1 / \Delta t = q_1$$

$$\text{測站 2 的流率：} N_2 / \Delta t = q_2$$

$$\text{令 } \Delta N / \Delta t = \frac{N_2 - N_1}{\Delta t} = q_2 - q_1 = \Delta q \Rightarrow \Delta N = \Delta q \cdot \Delta t \quad (5-1-1)$$

如  $N_1 > N_2$ ，即同時時間內通過測站 1 的車數大於通過測站 2 的車數，由於兩測站間沒有消失源，故尚留在  $\Delta x$  內的車輛數必然增加。亦即在  $\Delta t$  時間內  $\Delta x$  車輛的堆積量為  $-\Delta q \Delta t = -\Delta N = -(N_2 - N_1)$ 。如  $\Delta x$  相當短，其間的密度視為均值，則  $\Delta x$  內經  $\Delta t$  的密度增量  $\Delta k$  為：

$$\Delta k = \frac{-(N_2 - N_1)}{\Delta x} = \frac{-\Delta N}{\Delta x} \quad (5-1-2)$$

上式表示車輛的堆積可寫成：

$$-\Delta N = \Delta k \cdot \Delta x \quad (5-1-3)$$

簡言之，在車流守恆下：

$$-\Delta N = -(\Delta q \cdot \Delta t) = \Delta k \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta x} + \frac{\Delta k}{\Delta t} = 0 \quad (5-1-4)$$

如係連續的狀況，則守恆式可寫成：

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad (5-1-5)$$

如路段中有車流流入或流出，則守恆式右側可加一個車流產生項  $g(x,t)$ ，單位為車/(公里-小時)。

式(5-1-5)可以決定車流在道路任何位置、任何時間的交通狀態。該式吸引人的地方係包含兩個車流狀態變數：流率與密度，及兩個獨立變數：時間與空間。然而須有描述  $q, k$  關係的額外公式或假設方能求解，簡單連續流模式係加入車流狀態公式(state equation)，例如假設速率為密度的函數，即  $u=f(k)$ ，因  $q=ku$  恆成立，因此  $q=f(k)$ 。值得說明者，流率或速率為密度的函數的假設須在車流處於均衡狀態下方成立。

綜合言之，簡單連續流模式係由兩公式聯立組成，一係式(5-1-5)的守恆式，另一則係巨觀的水流模式。

## 2. 解析解

一旦加入  $q=f(k)$ ，令  $dq/dk=c(k)$ ，式(5-1-5)可改寫成：

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{dq}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = c(k) \frac{\partial k}{\partial x} \\ \therefore \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} &= c(k) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = c(k)k_x + k_t = 0 \end{aligned} \quad (5-1-6)$$

一般稱  $c(k)$  為車波(traffic wave)，代表穩定車流些微擾動的傳遞(方向與速度)。

式(5-1-6)偏微分式待解的未知數只剩一個狀態變數  $k$ (代表車流狀態，例如  $k=k_j$  代表壅塞)，稱為一階準線性偏微分公式(first order quasi-linear partial differential equation)，可以特性根法(characteristics method)解析求解。

### (1) 車波

Lighthill, Whitman(1955)提出式(5-1-6)簡單連續流模式的解析解(analytical solution)。如觀察密度的變化，其數學式可寫成：

$$dk = \frac{\partial k}{\partial t} dt + \frac{\partial k}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{dk}{dt} = k_t + k_x \frac{dx}{dt} \quad (5-1-7)$$

當觀察者隨波速前進時，亦即令速度  $dx/dt$  等於波速  $c(k)$ ，上式變為：

$$\frac{dk}{dt} = k_t + k_x \frac{dx}{dt} = k_t + c(k)k_x \quad (5-1-8)$$

由式(5-1-6)知，式(5-1-8)等於 0，亦即隨車波前進，觀察到的密度根本沒有改變。

依數學定義，車波  $c=dq/dk$  係流率-密度曲線上某點的切線，單位為速率(公里/小時)。由以上的分析知，因為沿車波前進，車密度不變，因此車波線可代表某車流狀態由邊界條件發散出來後在時空上的直線擴散或運動，相對的，車波線只要維持直線，即代表車流狀態(密度)維持不變。

## (2) 衝擊波

簡單連續流的解不是恆為車波，有時會有兩條車波相交的狀況。兩條車波線相交，代表同處、同時有兩種不同的車流狀態，因為不可能發生，因此以產生衝擊波(shock wave)解來代表數學上的不連續(車流狀態突然的改變)。

假設沿公路有兩群密度不同之車流(1,2)在行進，其間有一虛擬的垂直線  $W$  分隔，如圖 5.1.8，該分隔線之速率為  $c_{12}$ 。令  $k_i$ 、 $u_i$ 、 $q_i$  分表第  $i$  群車流( $i=1,2$ )的密度、空間平均速率、流率， $u_{iw}=u_i-c_{12}$  為第  $i$  群車流對  $W$  分隔界面的相對速率。

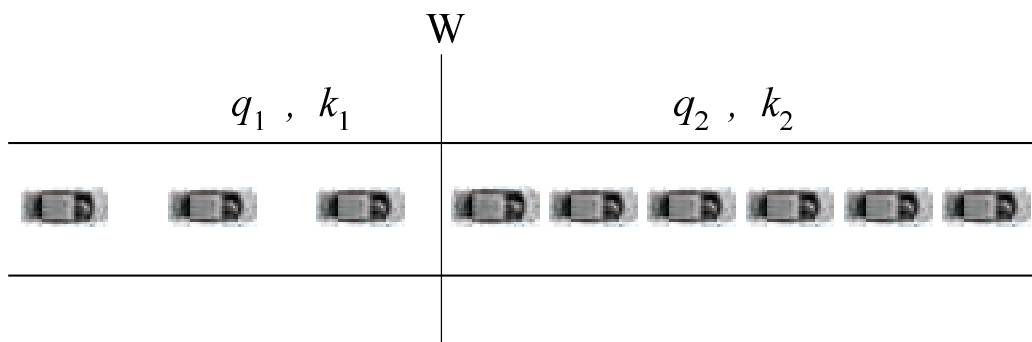


圖 5.1.8 衝擊波界面示意圖

道路上每一輛車均由  $W$  界面分派給不同的車流群，亦即任一時段內，第 1 群車輛數的增加量必等於第 2 群車輛數的減少量。此種車流守恆可以數學式表示，如單位時間  $t$  內穿過  $W$  界面的車輛數為  $N$ ，即：

$$N = u_{1w} \times k_1 t = u_{2w} \times k_2 t \Rightarrow N/t = u_{1w} \times k_1 = u_{2w} \times k_2$$

或者：

$$\begin{aligned} (u_1 - c_{12})k_1 &= (u_2 - c_{12})k_2 \Rightarrow -c_{12}k_1 + c_{12}k_2 = -u_1k_1 + u_2k_2 \\ \Rightarrow c_{12} &= \frac{u_2k_2 - u_1k_1}{k_2 - k_1} = \frac{q_2 - q_1}{k_2 - k_1} \end{aligned} \quad (5-1-9)$$

依數學定義， $c_{12}=(q_2-q_1)/(k_2-k_1)$ ，係流率-密度曲線上任二點(1,2)連線(弦)的斜率，單位亦為速率(公里/小時)，代表分隔兩特定車流狀態的界面沿道路的運動。

$c_{ij}$  為正，衝擊波會沿道路向下游運動；為負則向上游運動。而衝擊波所到之處，車密度會突然改變。

上、下游車流狀態不同，不表示一定會產生衝擊波，只有分表不同車流狀態的兩群車波相交(通常是下游密度高於上游)才會產生衝擊波。如兩不同車流區的密度與流率幾乎相等，即：

$$\frac{\Delta q}{\Delta k} = \frac{dq}{dk} = c_{ii} = c_i \quad (5-1-10)$$

上式說明，車波廣義而言亦是一種衝擊波，但「車波」與「衝擊波」不同，車波是車流些微的擾動，無法以肉眼看見，衝擊波則為車流劇烈的變化，可以肉眼看見，兩車流區密度差異愈大，其衝擊波的運動愈明顯。

### (3) 車軌跡(車速)與衝擊波、車波之意義

流率-密度曲線上任一點與原點的連線，依數學定義係車流的平均速率( $u=q/k$ )，單位為公里/小時，將該線平行繪於時空圖上即代表車流中各車輛的行駛軌跡。而前節已說明，車波、衝擊波亦均為一種速率，現以  $q-k$  曲線圖來說明此三者的解析幾何意義，如圖 5.1.9 所示，綜合整理如下：

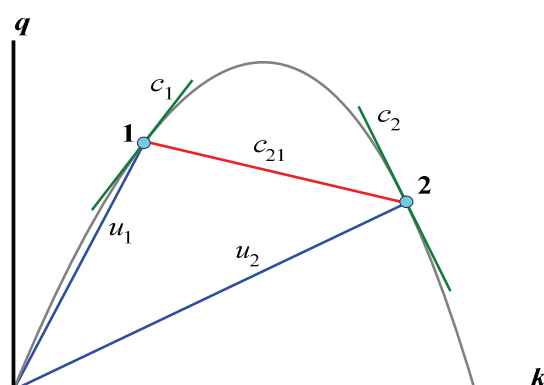


圖 5.1.9 車速與衝擊波、車波在  $q-k$  曲線上的意義

- (1) 車 波： $q-k$  曲線上任一點的切線 (等速)；
- (2) 衝擊波： $q-k$  曲線上任二點的連線 (等速)；
- (3) 車軌跡： $q-k$  曲線上任一點與原點的連線 (等速)；
- (4) 車波無法肉眼看見，衝擊波則可，兩車流區密度差異愈大，衝擊波的運動愈明顯；
- (5) 車軌跡可以穿越車波及衝擊波。亦即如將式(5-1-7)中的速率改為車流的平均速率(空間平均速率)，則：

$$\frac{dk}{dt} = k_t + k_x \frac{dx}{dt} = k_t + u(k)k_x \neq 0 \quad (5-1-11)$$

亦即當觀察者坐在車流中某輛車內隨流前進時，將經歷不同的車流況，有時壅塞，有時不壅塞，碰到前方有完全停止的車隊時，甚而會從行駛狀態變成停車。這些都說明，車軌跡係可以穿越車波及衝擊波。

### 5.1.3 車波-衝擊波的應用

雖然簡單連續流理論早在 50 年代中期已發展出，惟因實際交通問題的邊界及起始條件不易界定及取得，或  $u-k$ 、 $q-k$  關係式不易建立，或號誌交岔路口車流的複雜性等的問題，故直到 70 年代以後才有實務上的應用，如：

- (1) Stephanopoulos, Michalopoulos(1979)以連續流模式處理號誌交岔路口車流行為；
- (2) Stephanopoulos, Michalopoulos(1981); Michalopoulos, Pisharody (1980); Michalopoulos(1988); Michalopoulos et al. (1991)分別應用衝擊波於號誌控制、車隊動態分析、幹道及高速公路車流模擬等；
- (3) 張家祝與許書耕(1985)應用衝擊波理論建立巨觀車流模擬模式，並據以模擬分析號誌化幹道車流行為。

本節回顧張家祝與許書耕(1985)的研究，說明簡單連續流模式在號誌交岔路口實際的模化應用。該研究的車流狀態公式係採用 Greenshields 巨觀水流模式。

#### 1. 號誌路口的車波與衝擊波數學式

茲假設號誌控制車流系統狀況如下：

- (1) 到達車流維持穩定，以車密度  $k_a$  表示；
- (2) 交岔路口停止線下游為非擁擠狀況，不影響車流向下游疏散；
- (3) 起始時間  $t=0$  設定為號誌有效綠燈的開始；
- (4) 座標原點  $x=0$  設於停止線上游  $L$  距離處，等候車隊將不會延伸至該點；
- (5)  $t=0$  時，停止線已有等候車隊，其長度為  $L_1$ 。

現可繪出受號誌干擾的車波線在時空上的變化，如圖 5.1.10 所示。圖中， $k_a$  表到達車密度， $k_j$  表壅塞密度， $k_m$  表飽和流密度，線  $\overline{AC}$  為停止衝擊波， $\overline{BC}$  為起動波， $\widehat{CMD}$  為等候車隊尾部的軌跡，亦為一衝擊波。由圖可看出，在時空座標上，綠燈起動係模化成由停止線發出的扇形車波族(邊界條件)。從 Lighthill, Whitham(1955)以來，起動模化皆以扇形車波來處理，惟亦一直係爭議的焦點。Preparata(1972)更將起動狀況模化成以停止線為中心，上下游對稱的扇形車波，如圖 5.1.11 所示。



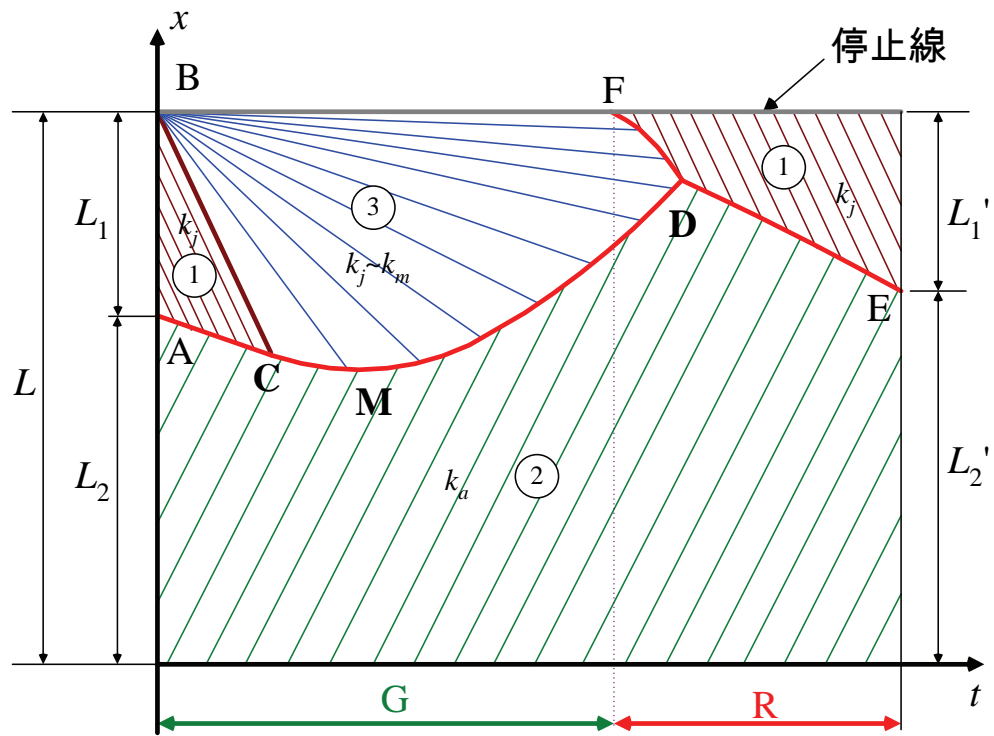


圖 5.1.10 受號誌干擾的車波示意圖

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。本圖略作局部修改。

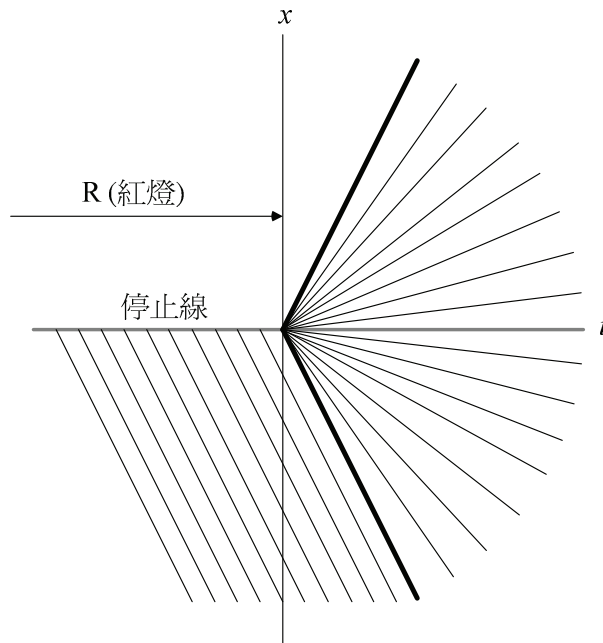


圖 5.1.11 起動波扇形模化示意圖

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。本研究略作局部修改。

由圖 5.1.10 可知，如能掌握各種波線任一時間的軌跡，就可以模化號誌干擾的車流行為。而仔細觀察圖 5.1.10 可發現，模化上僅需掌握直線  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{DE}$ ，及曲線  $\widehat{CMD}$ 、 $\widehat{FD}$  等的公式即可。如以 Greenshields 巨觀水流模式為例，各直線與曲線的公式分別為：

(1)  $\overline{AC}$ 、 $\overline{DE}$  公式

$\overline{AC}$ 、 $\overline{DE}$  均為停止線在紅燈始亮時向上游發出的衝擊波(令車輛停止)，依衝擊波公式，得：

$$u_{AC} = u_{DE} = \frac{q_j - q_a}{k_j - k_a} = -u_f \frac{k_a}{k_j} \quad (5-1-12)$$

$$\therefore x_{AC} = L_0 + u_{AC} \times t = (L - L_1) - u_f \frac{k_a}{k_j} t \quad (5-1-13)$$

(2)  $\overline{BC}$  公式

$\overline{BC}$  線實際上是代表壅塞狀態下一群車波線的最後一條，由車波公式得：

$$u_{BC} = \left. \frac{dq}{dk} \right|_{k=k_j} = u_f (1 - 2k_j / k_j) = -u_f \quad (5-1-14)$$

$$\therefore x_{BC} = L - u_f t \quad (5-1-15)$$

(3)  $\widehat{CMD}$ 、 $\widehat{FD}$  公式

由圖 5.1.10 知， $\widehat{CMD}$  起點 C 為  $\overline{AC}$  與  $\overline{BC}$  的交點，這是  $\widehat{CMD}$  曲線的起始條件，可由兩公式聯立解得，座標為：

$$x_C = L - L_1 \frac{k_j}{k_j - k_a} \quad (5-1-16)$$

$$t_C = \frac{L_1}{u_f} \times \frac{k_j}{k_j - k_a} \quad (5-1-17)$$

在扇形區中，密度是在  $k_j \sim k_m$  間變化，如令密度為一變數  $k$ ，則  $\widehat{CMD}$  曲線衝擊波公式為：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_f}{k_j} (k_j - k_a - k) \quad (5-1-18)$$

再者， $\widehat{CMD}$  曲線上任一點都與扇形車波中的某一條相交，因此：

$$\frac{x - x_B}{t - t_B} = u_f \left( 1 - 2 \frac{k}{k_j} \right) \quad (5-1-19)$$

其中：

$x_B$ =扇形車波波源的  $x$  座標值= $L$

$t_B$ =扇形車波波源的  $t$  座標值=0

將  $x_B, t_B$  代入上式得：

$$k = \frac{1}{2} k_j - \frac{1}{2} \frac{k_j}{u_f} \times \frac{x - L}{t} \quad (5-1-20)$$

將式(5-1-20)代入式(5-1-18)，解微分方程並代入  $x_C, t_C$  等起始條件可得：

$$x = \left[ \frac{x_C - L}{t_C} - w_a \right] \times \sqrt{t \times t_C} + w_a t + L \quad (5-1-21)$$

$\widehat{FD}$  公式除了起始條件及衝擊波所分隔的密度區與  $\widehat{CMD}$  不同外，二者具有相同的數學型態，即一般式如下：

$$x = \left[ \frac{x_0 - x_{f,b}}{t_0 - t_{f,b}} - w_a \right] \times \sqrt{(t - t_{f,b}) \times (t_0 - t_{f,b})} + w_a t + x_{f,b} \quad (5-1-22)$$

上二式中：

$x_0$ =衝擊波起始位置

$t_0$ =衝擊波起始時間

$x_{f,b}$ =扇形車波波源發生的位置

$t_{f,b}$ =扇形車波波源發生的時間

$w_a$ =衝擊波所分隔到達車流的波速(非扇形區)，等於  $u_f(1-2k_a/k_j)$

由式(5-1-21)知，只要  $k_a \geq 1/2 k_j$ ，衝擊波將一直向後延伸而不會重回停止線。如設  $k_a < 1/2 k_j$ ，且令  $x=L$ ，將可得衝擊波回到停止線的時間  $t_{min}$ ：

$$t_{min} = \frac{\left[ \frac{L - x_C}{t_C} + w_a \right]^2 \times t_C}{w_a^2} \quad (5-1-23)$$

如果交岔路口是受定時、二時相號誌控制，其時制為  $C=G+R$ ，其中， $C$  表周期長度， $G$ 、 $R$  分表有效綠、紅燈時間。令  $t_{min}=G$ ，則存在一臨界的到達車密度( $k_c$ )，使衝擊波(車隊尾部)能在有效綠燈結束前通過停止線，即：

$$k_c = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{R}{C}} \right) \times k_j \quad (5-1-24)$$

值得說明者，到達流  $k_a < k_j/2$  係向後衝擊波會重回停止線的必要條件，而對 Greenshields 巨觀水流模式言， $k_j/2$  對應的流率等於容量  $q_m$ 。惟欲令號誌控制處於未飽和狀態(號誌控制的基本假設)，向後衝擊波不僅須重回停止線，且須在有效綠燈結束前通過停止線，此時其最高允許到達流率遠低於容量( $q_c < q_m$ )。

如圖 5.1.10 所示，在有效綠燈開始後，停止線上的車波速恆為 0，代表以最大流率在疏散。換言之，號誌控制下通過停止線的流率存在一個最大值，即：

$$F_{\max} = \frac{1}{4} u_f k_j \times \frac{G}{C} \quad (5-1-25)$$

因為有一個最大的通過流量，當到達車密度  $k_a$  稍大於臨界值  $k_c$  時，隨時間累積，到達車密度將由  $k_a > (1 - \sqrt{R/C})k_j/2$  變成  $k_a = (1 + \sqrt{R/C})k_j/2$ ，平均速率亦隨之降低。

## 2. 模擬模式理論架構

對一條上下游皆受號誌控制的路段言，因車流在交岔路口區域可流出、流入，無法滿足流體守恆公式，因此模化工作只處理車流在路段中的行為。而因上游號誌係決定車流的到達型態，下游號誌則直接控制車流的行止，因此路段車流行為的量度是以下游號誌為基準。

以車波及衝擊波描繪上、下游皆受號誌控制路段的車流行為是相當複雜的，如圖 5.1.12 所示，需要模擬技巧來協助。張家祝與許書耕(1985)應用衝擊波理論建立一巨觀的模擬模式，其架構為：

- (1) 簡化號誌時制為  $C = G_m + l_m + G_b + l_b$  的循環，其中， $C$  為號誌周期長度， $G_m$ 、 $G_b$  分表主、支道有效綠燈長度， $l_m$ 、 $l_b$  分表主、支道綠燈間的損失時間。
- (2) 確定各號誌時間轉換點應產生的波線種類，利用模擬技巧給予時間的推進。波推進過程中可能產生新波，由於唯有當衝擊波線或車波線相交時才會組合成新的衝擊波線或車波線，且由圖 5.1.12 可看出，兩波線會相交，其間必有一共同的車況(密度區)，因此，可以建立一個相交判定表以決定兩波線是否相交及相交後應產生的新波線種類。
- (3) 張家祝與許書耕(1985)以 40 種車波線模化所有狀況，各種波線的名稱與編號如表 5-1-1 所示，各種波線軌跡如圖 5.1.13 所示。各種波線的公式是以 Greenshields 巨觀水流模式來推導，並按編號建立一個公式表，如表 5-1-2 所示，是否相交及相交後應產生的新波線判定如表 5-1-3 所示。其中， $k_1$  為各路段之平均到達密度， $k_2$  為上游號誌為有效紅燈時支道轉入主道的平均密度， $k_j$  表下游號誌為有效紅燈時等候車隊區的壅塞密度， $S, F$  分表綠燈開始時向後及向前起動波扇形區， $S_b, S_f$  是考慮受轉向流動干擾，使疏散率(departure rate)未飽和的狀況，模化上係以一平均值表示，在圖 5-1-13 中以  $k_{sb}, k_{sf}$  分表此二區的平均密度。一般言，在交岔路口轉向比不為 0 的狀況(即通過停止線車流並非全為直行)， $k_{sf}$  小於  $k_{sb}$ 。最特殊的要屬“0”密度區了，其代表路段上游在損失時間中短暫無車的狀況。

- (4) 路段下游在有效紅燈開始時應產生停止衝擊波，但波的種類需由最後到達停止線的波線決定，同樣可建立一判定表，如表 5-1-4 所示。路段上游在有效綠燈期間亦需由上游路段車流的疏解來判斷到達型態，但如任由波線穿過數個交岔路口，模化上顯然不可行。可令上游路段在車隊尾部通過停止線以後，下游路段的到達型態為平均到達流  $k_1$  (車隊尾部通過停止線以前的到達型態為  $k_{sf}$ )，如此，即不需建立另一個到達車波種類的判定表。

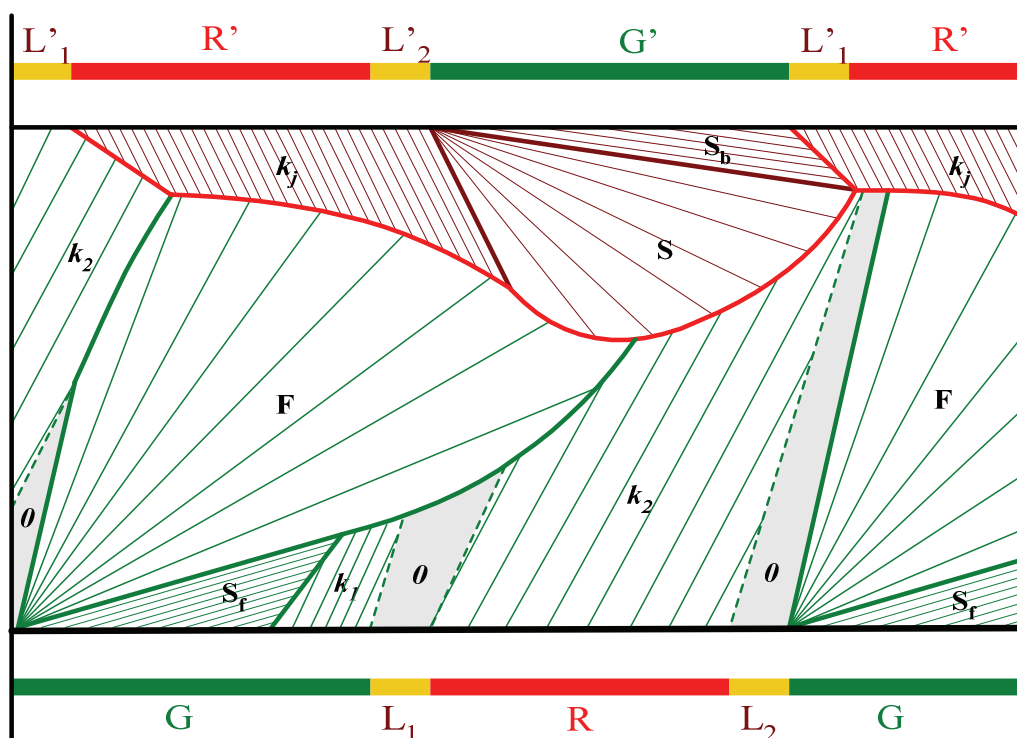


圖 5.1.12 路段受上下游號誌干擾的車波線示意圖

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。本研究略作局部修改。

表 5-1-1 各種車波線的名稱與編號

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
車波	0,F	F,S <sub>f</sub>	0,k <sub>1</sub>	0,k <sub>2</sub>	k <sub>1</sub> ,0	k <sub>2</sub> ,0	S <sub>f</sub> ,0	F,0	k <sub>j</sub> ,S	S,S <sub>b</sub>
編號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
車波	F,F	F,k <sub>1</sub>	F,k <sub>2</sub>	S <sub>f</sub> ,F	S <sub>f</sub> ,k <sub>1</sub>	S <sub>f</sub> ,k <sub>2</sub>	k <sub>1</sub> ,F	k <sub>1</sub> ,S <sub>f</sub>	k <sub>1</sub> ,k <sub>2</sub>	k <sub>2</sub> ,F
編號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
車波	k <sub>2</sub> ,S <sub>f</sub>	k <sub>2</sub> ,k <sub>1</sub>	k <sub>1</sub> ,k <sub>j</sub>	k <sub>2</sub> ,k <sub>j</sub>	F,k <sub>j</sub>	S <sub>f</sub> ,k <sub>j</sub>	k <sub>1</sub> ,S	k <sub>2</sub> ,S	F,S	S <sub>f</sub> ,S
編號	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
車波	k <sub>1</sub> ,S <sub>b</sub>	k <sub>2</sub> ,S <sub>b</sub>	F,S <sub>b</sub>	S <sub>f</sub> ,S <sub>b</sub>	S <sub>b</sub> ,k <sub>j</sub>	S,k <sub>j</sub>	0,k <sub>j</sub>	0,S	0,S <sub>b</sub>	S,S

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。

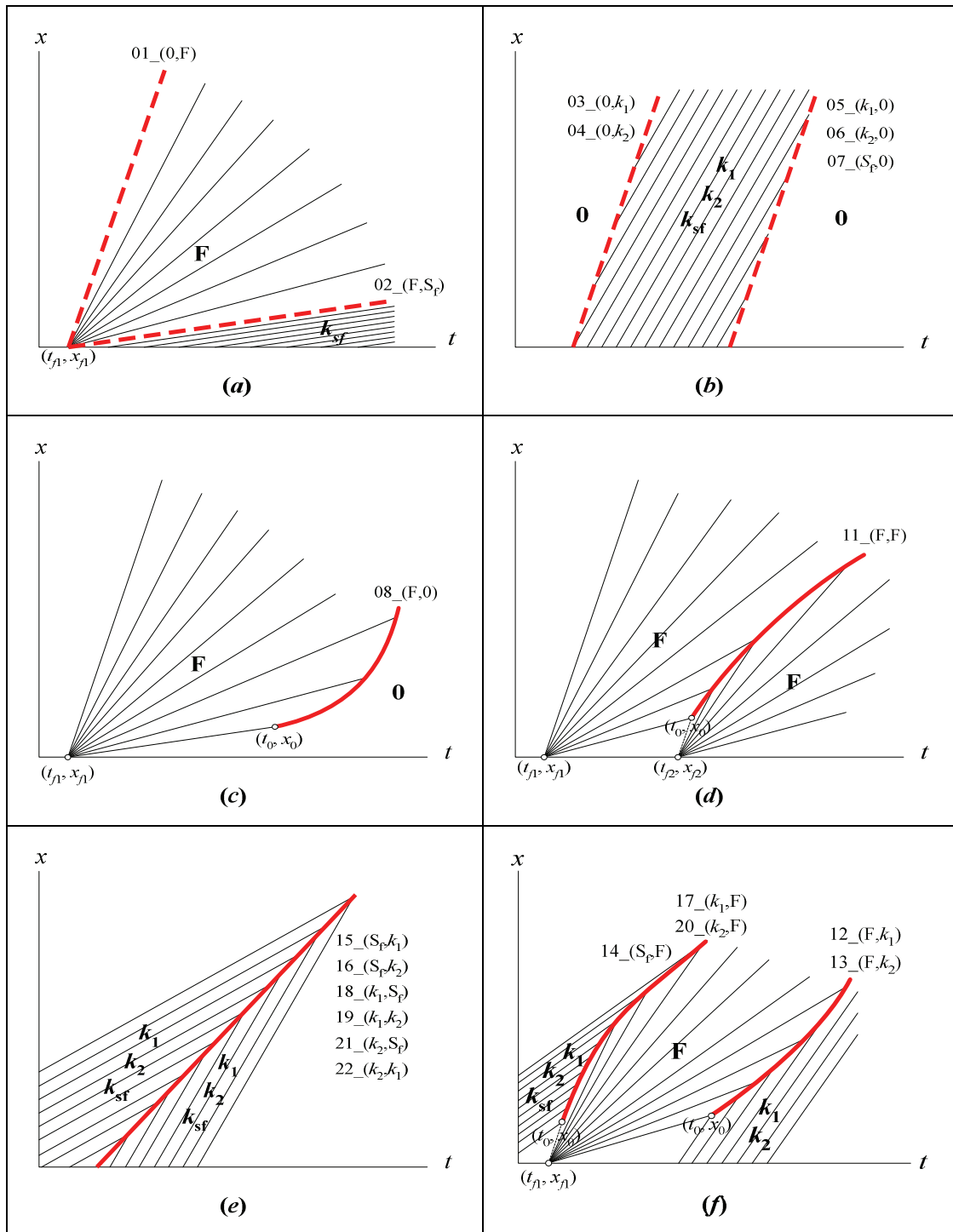
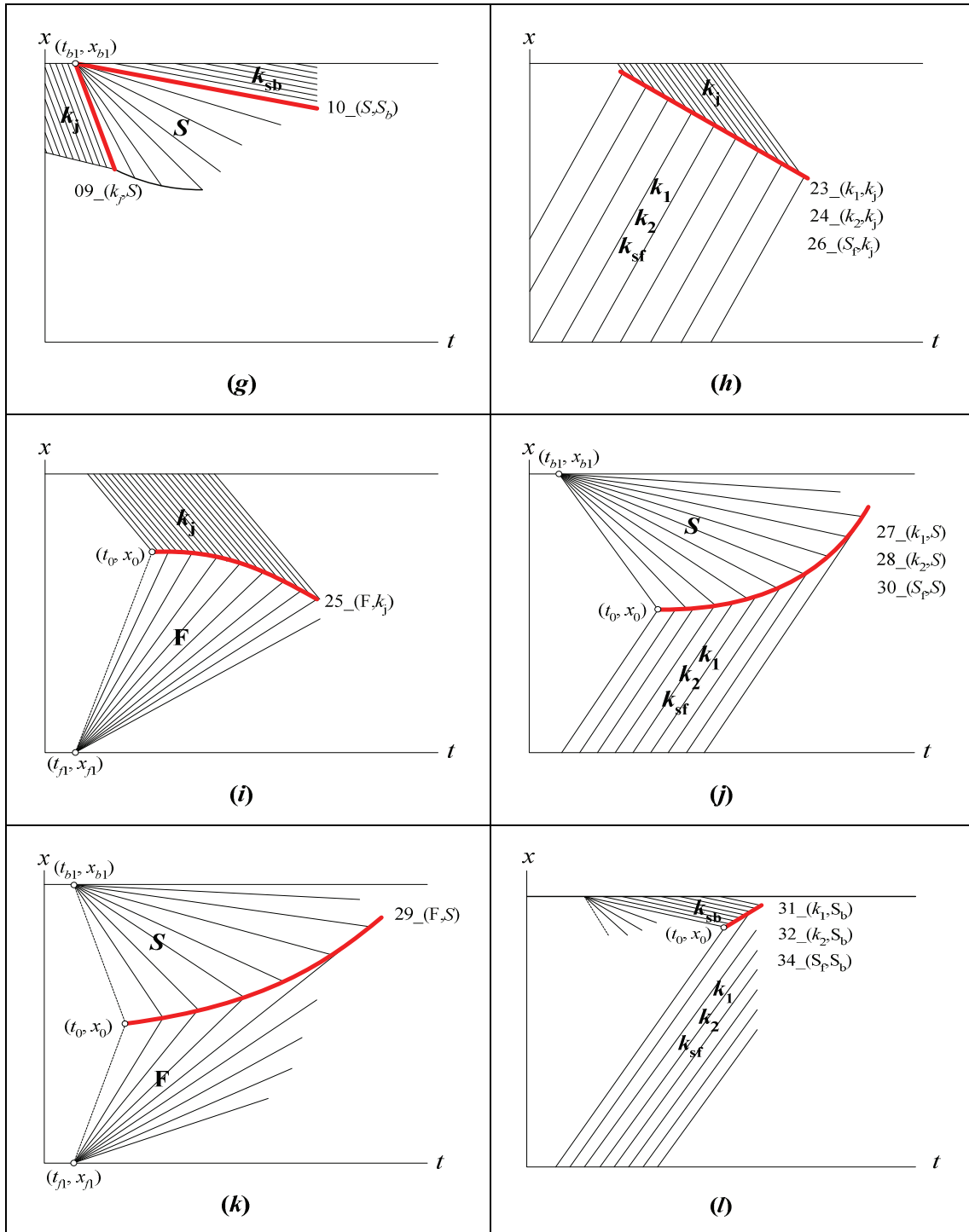
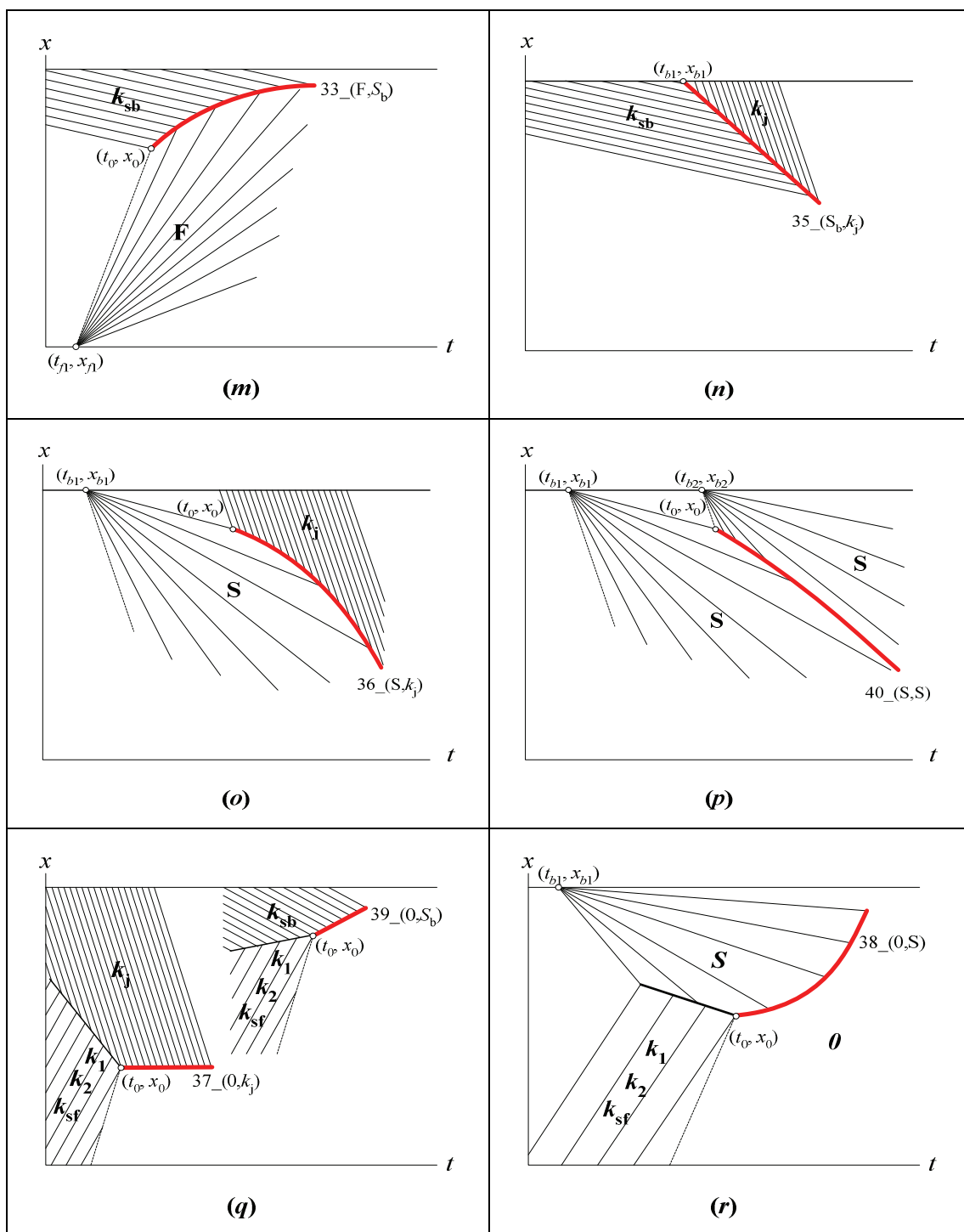


圖 5.1.13 各種波線運動軌跡示意圖

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。



續圖 5.1.13 各種波線運動軌跡示意圖



續圖 5.1.13 各種波線運動軌跡示意圖



表 5-1-2 波推進公式

編號	車波	公式
1	0,F	$x_e = u_f \times (t_e - t_0)$
2	F,S <sub>f</sub>	$x_e = u_f \times (1 - 2k_{sf}/k_j) \times (t_e - t_0)$
3	0,k <sub>1</sub>	$x_e = u_f \times (1 - 2k_1/k_j) \times (t_e - t_0)$
4	0,k <sub>2</sub>	$x_e = u_f \times (1 - 2k_2/k_j) \times (t_e - t_0)$
5	k <sub>1</sub> ,0	$x_e = u_f \times (1 - 2k_1/k_j) \times (t_e - t_0)$
6	k <sub>2</sub> ,0	$x_e = u_f \times (1 - 2k_2/k_j) \times (t_e - t_0)$
7	S <sub>f</sub> ,0	$x_e = u_f \times (1 - 2k_{sf}/k_j) \times (t_e - t_0)$
8	F,0	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - u_f] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + u_f \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$
9	k <sub>j</sub> ,S	$x_e = -u_f \times (t_e - t_0)$
10	S,S <sub>b</sub>	$x_e = u_f \times (1 - 2k_{sb}/k_j) \times (t_e - t_0)$
11	F,F	$x_e = \left[ \sqrt{\frac{(t_e - t_{f1}) \times (t_e - t_{f2})}{(t_0 - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f2})}} - 1 \right] \times (x_0 - x_s)$
12	F,k <sub>1</sub>	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_1/k_j)$
13	F,k <sub>2</sub>	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_2/k_j)$
14	S <sub>f</sub> ,F	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_{sf}/k_j)$
15	S <sub>f</sub> ,k <sub>1</sub>	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sf} - k_1) \times (t_e - t_0)$
16	S <sub>f</sub> ,k <sub>2</sub>	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sf} - k_2) \times (t_e - t_0)$
17	k <sub>1</sub> ,F	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_1/k_j)$
18	k <sub>1</sub> ,S <sub>f</sub>	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sf} - k_1) \times (t_e - t_0)$
19	k <sub>1</sub> ,k <sub>2</sub>	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_1 - k_2) \times (t_e - t_0)$
20	k <sub>2</sub> ,F	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_2/k_j)$

註：x<sub>0</sub>表波舊座標位置；t<sub>0</sub>表舊的模擬鐘時間；x<sub>e</sub>表波經時間推進的空間增量；t<sub>e</sub>表新的模擬鐘時間；x<sub>s</sub>表路段起始點的座標位置；L表路段長度。

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。

續表 5-1-2 波推進公式

編號	車波	公式
21	$k_2, S_f$	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sf} - k_2) \times (t_e - t_0)$
22	$k_2, k_1$	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_1 - k_2) \times (t_e - t_0)$
23	$k_1, k_j$	$x_e = -(u_f/k_j) \times k_1 \times (t_e - t_0)$
24	$k_2, k_j$	$x_e = -(u_f/k_j) \times k_2 \times (t_e - t_0)$
25	$F, k_j$	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) + u_f] \times \sqrt{(t_e - t_{b1}) \times (t_0 - t_{b1})} - u_f \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$
26	$S_f, k_j$	$x_e = -(u_f/k_j) \times k_{sf} \times (t_e - t_0)$
27	$k_1, S$	$x_e = [(x_0 - x_{b1}) / (t_0 - t_{b1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{b1}) + x_s + L - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_1/k_j)$
28	$k_2, S$	$x_e = [(x_0 - x_{b1}) / (t_0 - t_{b1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{b1}) \times (t_0 - t_{b1})} + EC \times (t_e - t_{b1}) + x_s + L - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_2/k_j)$
29	$F, S$	$x_e = EZ \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_e - t_{b1})} + x_{b1} \times (t_e - t_{f1}) / (t_{b1} - t_{f1}) - x_0$ $EZ = [x_0 - x_{b1} \times (t_0 - t_{f1}) / (t_{b1} - t_{f1})] / [(t_0 - t_{f1}) \times (t_0 - t_{b1})]$
30	$S_f, S$	$x_e = [(x_0 - x_{b1}) / (t_0 - t_{b1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{b1}) \times (t_0 - t_{b1})} + EC \times (t_e - t_{b1}) + x_s + L - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_{sf}/k_j)$
31	$k_1, S_b$	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sb} - k_1) \times (t_e - t_0)$
32	$k_2, S_b$	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sb} - k_2) \times (t_e - t_0)$
33	$F, S_b$	$x_e = [(x_0 - x_{f1}) / (t_0 - t_{f1}) - EC] \times \sqrt{(t_e - t_{f1}) \times (t_0 - t_{f1})} + EC \times (t_e - t_{f1}) + x_s - x_0$ $EC = u_f \times (1 - 2k_{sb}/k_j)$
34	$S_f, S_b$	$x_e = (u_f/k_j) \times (k_j - k_{sf} - k_{sb}) \times (t_e - t_0)$
35	$S_b, k_j$	$x_e = -(u_f/k_j) \times k_{sb} \times (t_e - t_0)$
36	$S, k_j$	$[(x_0 - x_{b1}) / (t_0 - t_{b1}) + u_f] \times \sqrt{(t_e - t_{b1}) \times (t_0 - t_{b1})} - u_f \times (t_e - t_{b1}) + x_s + L - x_0$
37	$0, k_j$	$x_e = 0$
38	$0, S$	$x_e = [(x_0 - x_{b1}) / (t_0 - t_{b1}) - u_f] \times \sqrt{(t_e - t_{b1}) \times (t_0 - t_{b1})} + u_f \times (t_e - t_{b1}) + x_s + L - x_0$
39	$0, S_b$	$x_e = u_f \times (1 - 2k_{sb}/k_j) \times (t_e - t_0)$
40	$S, S$	$x_e = \left[ \sqrt{\frac{(t_e - t_{b1}) \times (t_e - t_{b2})}{(t_0 - t_{b1}) \times (t_0 - t_{b2})}} - 1 \right] \times (x_0 - x_s - L)$

表 5-1-3 兩波相交的判定與相交後產生的新波

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	-	-	-	-	17	20	14	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	29	33	-	
2	-	-	-	-	-	-	8	-	-	2	-	-	-	11	12	13	18	-	-	21	-	-	-	-	26	-	-	-	30	-	-	-	34	-	-	-	-	-	-	-	
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	27	31	-	
4	-	-	-	-	19	-	16	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24	28	32	-
5	17	-	-	19	-	-	-	-	-	-	8	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	6	37	-	-	-	38	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
6	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	7	-	-	5	-	-	-	-	37	-	-	38	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-		
7	14	8	-	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	6	-	-	-	-	-	37	-	-	38	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-		
8	11	-	-	13	-	-	-	-	-	8	-	-	7	-	-	5	-	-	6	-	-	-	-	37	-	-	38	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-		
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	27	28	29	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	38	-	-			
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	31	32	33	34	-	-	-	-	-	-	39	-	-		
11	-	2	-	-	-	-	-	8	-	-	-	12	13	14	-	-	17	-	-	20	-	-	-	-	25	-	-	29	-	-	-	33	-	-	-	-	-	-	-		
12	-	-	-	-	8	-	-	-	-	-	12	-	-	15	-	-	11	2	13	22	-	-	-	-	23	-	-	27	-	-	-	31	-	-	-	-	-	-	-		
13	-	-	-	-	-	8	-	-	-	-	13	-	-	16	-	-	19	-	-	11	2	12	-	-	24	-	-	28	-	-	-	32	-	-	-	-	-	-	-		
14	-	11	-	-	-	-	-	7	-	-	14	15	16	-	-	-	17	-	-	20	-	-	-	-	25	-	-	29	-	-	-	33	-	-	-	-	-	-	-		
15	-	12	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	-	-	16	-	-	-	-	23	-	-	27	-	-	-	31	-	-	-	-	-	-	-		
16	-	13	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19	-	14	-	-	15	-	-	-	24	-	-	28	-	-	-	32	-	-	-	-	-	-		
17	-	18	-	-	-	-	-	5	-	-	17	11	19	-	14	-	-	-	-	-	20	25	-	-	-	29	-	-	-	33	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
18	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	2	-	17	-	19	-	-	-	-	-	21	26	-	-	-	30	-	-	-	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
19	-	-	4	-	-	5	-	-	-	-	13	-	16	-	-	-	-	17	18	-	24	-	-	-	-	28	-	-	-	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
20	-	21	-	-	-	-	6	-	-	-	20	22	11	-	14	-	-	17	-	-	-	-	25	-	-	29	-	-	-	-	33	-	-	-	-	-	-	-	-		
21	-	-	-	-	-	6	-	-	-	-	2	20	22	-	-	-	18	-	-	-	-	-	26	-	-	-	30	-	-	-	34	-	-	-	-	-	-	-	-		
22	-	-	-	3	6	-	-	-	-	-	-	-	12	-	-	15	20	21	-	-	-	-	-	23	-	-	27	-	-	-	31	-	-	-	-	-	-	-	-		
23	-	-	-	-	37	-	-	-	27	-	-	-	-	-	-	25	26	24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
24	-	-	-	-	-	37	-	-	28	-	-	-	-	-	-	-	-	25	26	23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
25	-	26	-	-	-	-	-	37	29	-	25	23	24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
26	-	-	-	-	-	-	37	-	30	-	-	-	-	25	23	24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
27	-	-	-	-	38	-	-	-	-	31	-	-	-	-	-	-	29	30	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	-	-	27		
28	-	-	-	-	38	-	-	-	32	-	-	-	-	-	-	-	-	29	30	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24	-	-	28			
29	-	30	-	-	-	-	38	-	33	29	27	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	-	-	29		
30	-	-	-	-	-	38	-	-	34	-	-	-	29	27	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	26	-	-	30			
31	-	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	34	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	-	-	31			
32	-	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	34	31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24	-	-	-			
33	-	34	-	-	-	-	39	-	-	33	31	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	-	-	-			
34	-	-	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	33	31	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	26	-	-	-			
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	24	25	26	-	-	37		
36	-	-	-	-	-	-	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	24	25	26	-	-	-	-	-	-	37	-	-		
37	25	-	23	24	-	-	-	38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	24	25	26	-	-	-	-	-	-	-	-		
38	29	-	27	28	-	-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	37	-	-	38		
39	33	-	31	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	37	-	-	-			
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	27	28	29	30	31	-	-	-	-	-	38	-	-		

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。

表 5-1-4 號誌綠燈轉紅燈時不同到達車波產生的停止波

到達波	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
停止波	25	26	23	24	37	37	37	37	-	-
到達波	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
停止波	25	23	24	25	23	24	25	26	24	25
到達波	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
停止波	26	23	-	-	-	-	-	-	-	-
到達波	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
停止波	23	24	25	26	-	-	-	-	37	-

資料來源：張家祝、許書耕，「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為：I.模式建立」，運輸計劃季刊 14(1)，1985。

## 5.2 紙上剪力圖

Richards(1956)提出紙上剪力圖(graph-shearing)繪製程序，以表現流體受干擾時在時空上的演變。該研究係以明渠水流關閉閘門的方式來類比號誌路口，由於係以繪圖來表達明渠水流水位在閘門關閉時向上游產生衝擊波及閘門打開時向下游疏解的變化，因此有助於對簡單連續流物理特性的瞭解。本節回顧說明之。

### 5.2.1 明渠水流運動的數學表示

Richards(1956)說明，如假設車流速只受密度的影響，且  $u=a(K_{\max}-K)$ ，令  $h=K/K_{\max}$ ， $e=a \times K_{\max}$ ，則前述車流速與密度的關係式可改寫成：

$$u = e(1 - h) \quad (5-2-1)$$

在無流入與流出的狀況下，流體必須滿足守恆公式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (5-2-2)$$

式(5-2-2)的意義為：「經過一段時間 $\partial t$ ，通過一段距離 $\partial x$ ，流率的減少(增加)等於密度的增加(減少)」。

將式(5-2-1)的速率-密度關係式代入式(5-2-2)之流體守恆式中，可得：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + e(1 - 2h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5-2-3)$$

上式的一般解可寫成：

$$h = f(x + (2h - 1)et) \quad (5-2-4)$$

因為  $h$  值為常態化的密度( $h=K/K_{\max}$ )，因此  $f$  值一定落在 $[0,1]$ 區間。單憑式(5-2-4)並不能解得  $h$  在任一時間與空間上的變化，幸運的是不需要如此求解。令式(5-2-4)中的  $t=0$ ，則：

$$f(x) = h(x,0) \quad (5-2-5)$$

式(5-2-5)中的  $f(x)$  表  $t=0$  時密度在空間的分布，如為已知，則可以紙上剪力圖獲得任一時間  $t$  的密度分布情形。亦即  $h(x,t)$  在  $x$  上任一時間  $t$  的圖，可由  $h(x,0)$  以剪切  $h, x$  平面(均勻的)的方式獲得，其方法是以令  $h=0$  的線向右移動  $et$  距離，而  $h=1$  的線向左移動等距，並令  $h=1/2$  點維持不動。此種剪切運動不能看成是個別車輛的運動，而係車波的運動。車輛係以  $e(1-h)$  的車速運動，其是否穿過一個波峰或堆積在波峰之後，決定於其相對車速。

## 5.2.2 明渠水流運動的紙上剪力圖表示

在製作紙上剪力圖之前，有必要說明其邊界與起始條件：

- (1) 邊界條件：車流與水流最大的不同，是前者的密度可變，而後者幾乎為一定值，但在紙上可以水位高度代表密度變化。因道路實體有一最大承載密度，因此令水位高度  $h=1$  表最大密度( $K=K_{\max}$ )。可以想像成一個高度為 1 的方型明渠管，其水流運動的情形；
- (2) 起始條件：設到達水位高固定為  $h_a$ ，將水管以閘門封閉，經  $R$  時間後再打開，並令  $t=0$  表閘門打開的瞬間。

現以紙上剪力圖求  $t > 0$  的水位(密度)在空間上的分布。圖 5.2.1 為  $t=0$  瞬間的狀況(實線)， $t > 0$  的狀況可以剪力作用推估。令  $h=1/2$  的點維持不動，將  $h=0$  的點向右移一單位，同時將  $h=1$  的點向左移一單位，而向前移動的量，由圖上可看出係  $et$ ，可由  $h=0$  代入式(5-2-1)而得，此時閘門前無流體；向後移動的量是依流出量等於減少量的流體守恒式而得，因此二者值相同，如圖中虛線劃出的兩相同三角型區。

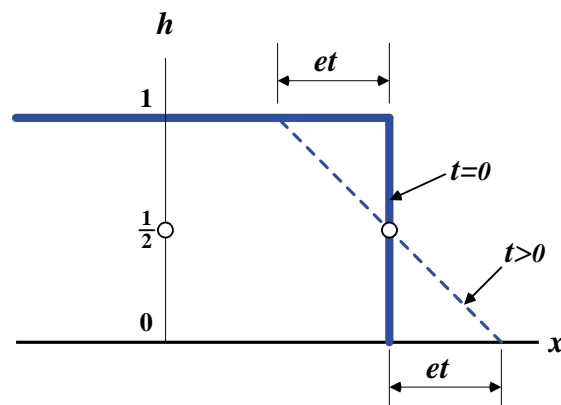


圖 5.2.1 紙上剪力圖向前流動解

資料來源：Richards, P. I, "Shock Wave on the Highway," Operations Research 4(1), 42-51, 1956.

但依此法可能發生同一位置出現兩個水位的不合理狀況，如圖 5.2.2，此時可以衝擊波公式解決。事實上衝擊波公式亦為守恒式，其意義為站在衝擊波面上看，任一時間中經界面進入某區的量等於另一區失去的量，公式如下：

$$h_1(u_1 - V) = h_2(u_2 - V) \quad (5-2-6)$$

其中：

$h_1, h_2$  = 衝擊波界面分隔的兩不連續密度

$u_1, u_2$  = 各密度區內的平均車速

$V$  = 衝擊波速

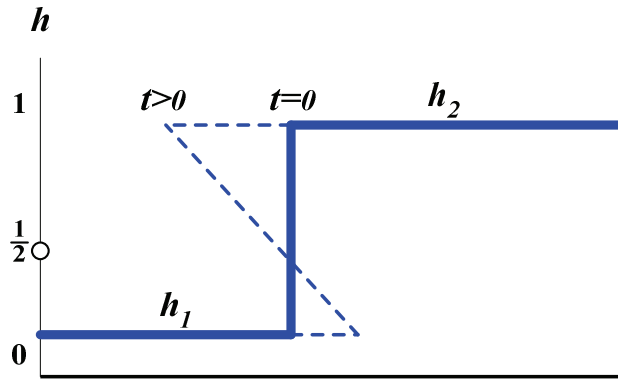


圖 5.2.2 紙上剪力圖出現二個水位不合理的狀況

資料來源：Richards, P. I, "Shock Wave on the Highway," Operations Research 4(1), 42-51, 1956.

將式(5-2-1)代入式(5-2-6)可得衝擊波速：

$$V = e(1 - h_1 - h_2) \quad (5-2-7)$$

在圖上的表示，即找一條垂線，使左右兩側面積相等，如圖 5.2.3。

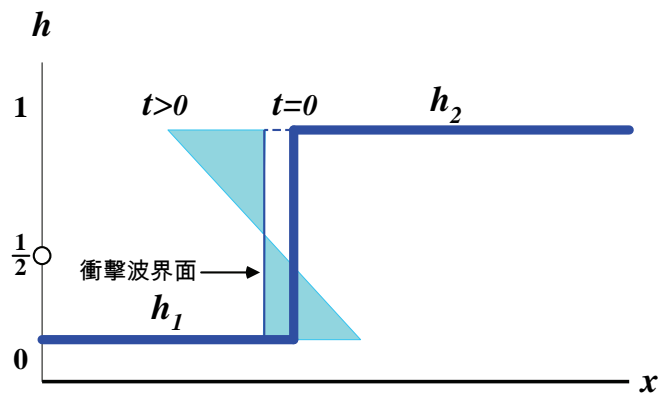


圖 5.2.3 紙上剪力圖向後衝擊波解

Richards(1956)說明：

- (1) 車速係由式(5-2-1)表示( $u=e(1-h)$ )，與波發展的剪力運動無直接關係。檢視式(5-2-1)可知，任一時間的  $h$  圖同時係一車速的倒置圖(inverted graph)，事實上剪力線與  $h=1$  的線之間的差距( $=1-h$ )等於  $u/e$ ，亦即車速與最高車速的比。

(2) 剪力線的斜率亦代表另一個有趣的量，即車輛在某一時空點的加速度，事實上由式(5-2-1)與式(5-2-2)可導得：

$$\text{加速度： } a = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -e^2 h \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5-2-8)$$

(3) 某已知點單位時間通過的流率，可依  $q=Ku$  (其中， $u=e(1-h)$ ,  $K=hK_{\max}$ ) 導得：

$$\text{流率： } q=eK_{\max}h(1-h) \quad (5-2-9)$$

值得注意者，密度= $h$  或  $1-h$ ，其流率相同，惟交通狀態不同。

圖 5.2.4 即經上述衝擊波處理後，閘門打開瞬間的狀況。圖中可看出衝擊波界面是以  $h_a e$  的速度向後移動，該值係由(5-2-7)式獲得，此時  $h_1, h_2$  中一個為  $h_a$ ，一個為 1。為方便區分，在此以停止波表向上游回溯的衝擊波，以起動波表閘門打開後同時產生的向上、下游移動的兩條車波。

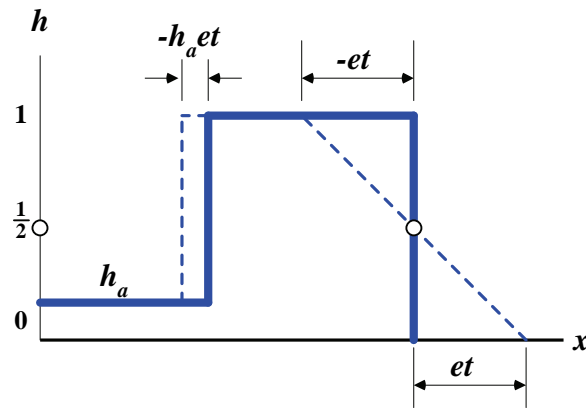


圖 5.2.4 紙上剪力圖起始解

資料來源：Richards, P. I, "Shock Wave on the Highway," Operations Research 4(1), 42-51, 1956.

由移動量知，向後的起動波速大於停止波速(因為  $h_a < 1$ )，即在某一時間  $t_0$ ，兩波將交會，如圖 5.2.5，會合的時間可由兩波的公式求解，公式分別為：

$$\text{向後起動波： } x = -et \quad (5-2-10)$$

$$\text{向後停止波： } x = -h_a e \times (t + R) \quad (5-2-11)$$

因此可求得  $t_0$  為：

$$t_0 = \frac{h_a e R}{e - h_a e} = \frac{h_a R}{1 - h_a} \quad (5-2-12)$$

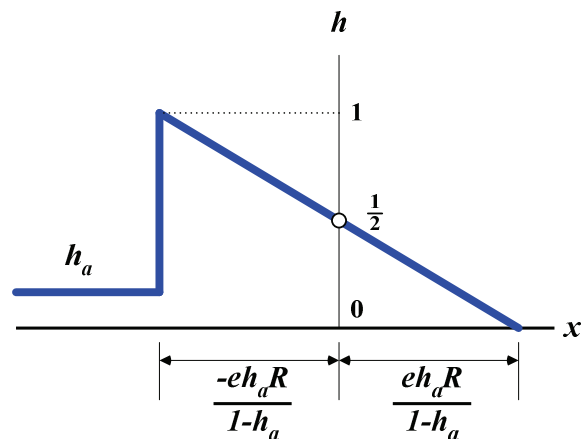


圖 5.2.5 向後起動波追上向後衝擊波瞬間

向後兩波一旦相交後，求解即變得很困難，如圖 5.2.6。 $t > t_0$  後，原  $h=1$  點的高度變成  $Y$ ，亦即成為可變水位高，且衝擊波界面可能繼續向上游挺進，亦可能折返，重回甚而通過下游閘門處。由於如再用虛線面積以閘門為中心左右相等的紙上試誤法求解，將相當困難與繁瑣，故改以數學解之。現假設在某種條件下衝擊波會重回閘門處。由衝擊波公式(5-2-7)與速率在時空的變化公式得：

$$V = e(1 - Y - h_a) = -\frac{dL}{dt} \quad (5-2-13)$$

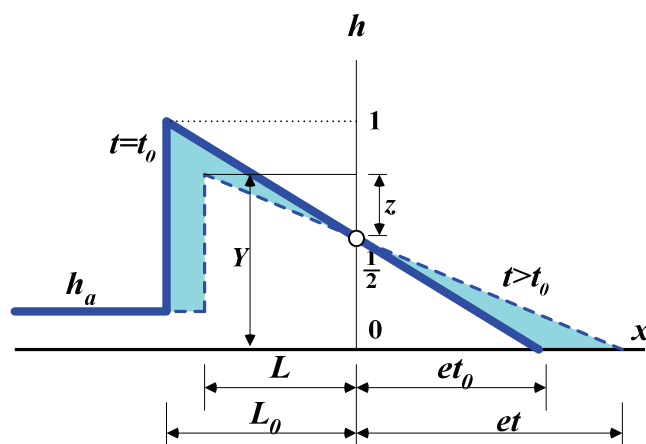


圖 5.2.6 向後起動波追上向後衝擊波以後的變化

資料來源：Richards, P. I, "Shock Wave on the Highway," Operations Research 4(1), 42-51, 1956.  
本圖略作修改。



在圖 5.2.6 中，以相似三角形定理得：

$$z : L = \frac{1}{2} : et \quad (5-2-14)$$

又：

$$z = Y - \frac{1}{2} \quad (5-2-15)$$

所以：

$$\frac{Y - 1/2}{L} = \frac{1}{2et} \quad (5-2-16)$$

將式(5-2-16)代入式(5-2-13)中解微分方程式得：

$$L = A\sqrt{et} + 2e(h_a - \frac{1}{2})t, \quad t \geq t_0 \quad (5-2-17)$$

其中，A 為常數，代入起始條件  $L_0=et_0$  得：

$$L = 2e \left[ (h_a - \frac{1}{2})t + \sqrt{tRh_a(1-h_a)} \right] \quad (5-2-18)$$

由式(5-2-16)與式(5-2-18)可解得向後衝擊波界面任一時間  $t \geq t_0$  之高度 Y 值：

$$Y = h_a + \sqrt{\frac{Rh_a(1-h_a)}{t}} \quad (5-2-19)$$

由式(5-2-18)知，當  $h_a \geq 1/2$  時，向後停止衝擊波將一直向後延伸而不會轉向再重回閘門處；由式(5-2-19)知，不論  $h_a$  大小， $t$  值愈大，波峰 Y 將愈趨平緩，最後將降為  $h_a$ 。

如令  $h_a < 1/2$ ，且  $L=0$ ，將可得向後停止衝擊波轉向再重回閘門處之時間  $t_r$ ：

$$t_r = \frac{Rh_a(1-h_a)}{(1/2-h_a)^2} \quad (5-2-20)$$

如閘門的封閉與開啟是週期性的，令 C 表週期長度，R 表封閉時長，G 表開啟時長，且令  $t_r=G$ ，則將存在一臨界到達水位(車密度) $h_c$ ，使向後停止衝擊波能在開啟時間 G 結束前，轉向回到閘門處，其值為：

$$h_c = \frac{1 - \sqrt{R/C}}{2} \quad (5-2-21)$$

因為閘門的水位在開啟後係保持  $1/2$  高的水位(飽和流率)，直到向後衝擊波折返通過閘門處時才突然降為  $h_a$ ，故如以上述方式控制閘門，則閘門處將存在一最大流率  $F_{\max}$ (令  $C-R=G=t_r$ )，由式(5-2-9)知  $q=eK_{\max}h(1-h)$ ，當  $h=1/2$ ，得：

$$F_{\max} = \frac{1}{4} K_{\max} e^{\frac{C-R}{C}} \quad (5-2-22)$$

當到達水位  $h_a$  稍大於  $h_c$ ，因向後衝擊波會繼續向上游回溯，不會折返通過閘門處，因此通過閘門的流率將維持其最大流率  $F_{\max}$ (過飽和)，此時水管上任一點的流率在某時間可能不同，惟經無限長的時間推演後，平均流率將相同，致到達水位將由  $h_a > (1 - \sqrt{R/C})/2$  漸變成  $h_a = (1 + \sqrt{R/C})/2$ ，平均流速亦將隨水位的增加而降低。

### 5.2.3 紙上剪力圖法與車波-衝擊波法的比較

簡單連續流模式一般稱為 LWR (Lighthill-Whitham-Richards) 模式，係因 Lighthill, Whitham(1955)及 Richards(1956)各自提出的模式，不但幾乎同時期，均係以車流守恆式出發，且均係用來描述車流巨觀的運動。事實上，如仔細比較此兩研究的內容，並藉張家祝與許書耕(1985)採 Greenshields 巨觀水流模式更進一步的推導，可發現二者對映、相等之處甚多，本節分析說明之。

#### 1. 綠燈起動波追上紅燈停止波的時間

Richards(1956)係以式(5-2-12)算出時間  $t_0$ ，而依張家祝與許書耕(1985)代入 Greenshields 巨觀水流模式，Lighthill, Whitham(1955)係以式(5-1-17)算出時間  $t_c$ ，分別如下：

$$\text{Richards(1956):} \quad t_0 = \frac{R h_a}{1 - h_a}$$

$$\text{Lighthill-Whitham(1955):} \quad t_c = \frac{L_1}{u_f} \times \frac{k_j}{k_j - k_a}$$

現證明上示兩式相同：

∵  $h = K/K_{\max}$ ，相當於  $h = k_a/k_j$ ；假設綠燈夠長，足以疏散紅燈時段所有累積的停等車輛，即  $L_1$  純係前一個紅燈時間中形成的等候車隊長度，而紅燈的向後停止衝擊波為  $-u_f k_a/k_j$  (如式(5-1-12))，則  $L_1 = R u_f k_a/k_j = R u_f h_a$ ，代入  $t_c$  式得：

$$t_c = \frac{R u_f h_a}{u_f (1 - h_a)} = \frac{R h_a}{1 - h_a} = t_0 \quad \text{得證} \square$$

#### 2. 紅燈停止波在綠燈中重回停止線的時間

Richards(1956)係以式(5-2-20)算出時間  $t_r$ ，而依張家祝與許書耕(1985)代入 Greenshields 巨觀水流模式，Lighthill, Whitham(1955)係以式(5-1-23)算出時間  $t_{\min}$ ，分別如下：

$$\text{Richards(1956):} \quad t_r = \frac{R h_a (1 - h_a)}{(1/2 - h_a)^2}$$

Lighthill-Whitham(1955) :

$$t_{\min} = \frac{\left( \frac{L - x_c}{t_c} + w_a \right)^2 \times t_c}{w_a^2}$$

現證明上示兩式相同：

∵由式(5-1-16)、(5-1-17)知， $\frac{L - x_c}{t_c} = u_f$ ，而  $w_a = u_f(1 - 2k_a/k_j) = u_f(1 - 2h_a)$ ，又

$t_c = \frac{Rh_a}{1 - h_a}$ ，代入  $t_{\min}$  式得：

$$t_{\min} = \frac{[u_f + u_f(1 - 2h_a)]^2}{[u_f(1 - 2h_a)]^2} \times \frac{Rh_a}{1 - h_a} = \frac{Rh_a(1 - h_a)}{(1/2 - h_a)^2} = t_r \quad \text{得證} \square$$

由上述比較知，Richards(1956)的紙上剪力圖與 Lighthill-Whitham(1955)的車波-衝擊波模式，在  $q=ku$  模式採 Greenshields 巨觀水流模式時，二者完全相同。

### 3.其他模化處理上的對映

Richards(1956)的紙上剪力圖與 Lighthill, Whitham(1955)的車波-衝擊波在模化處理上尚有許多完全相同的對映之處，分述如下：

- (1) 當 Lighthill, Whitham(1955)車波-衝擊波法採用 Greenshields 巨觀水流模式時，其  $q-k$  曲線係以  $k_j/2$  對稱，其重要特性包括在  $k=k_j/2$  時， $q=q_{\max}$ ；流率為 0 的自由流與壅塞時發出的車波，波速分別為  $u_f$  與  $-u_f$ 。對映 Richards(1956)的紙上剪力圖，其最高水位( $h=1$ )不論巨觀水流模式為何，均對映  $k=k_j$ ，但只有巨觀水流模式為 Greenshields 時，其  $h=1/2$  水位方對映最大流率，起動波向前與向後波速絕對值方會相同，如圖 5.2.7 所示。值得說明者，Lighthill, Whitham(1955)並未限定須採為 Greenshields 巨觀水流模式。

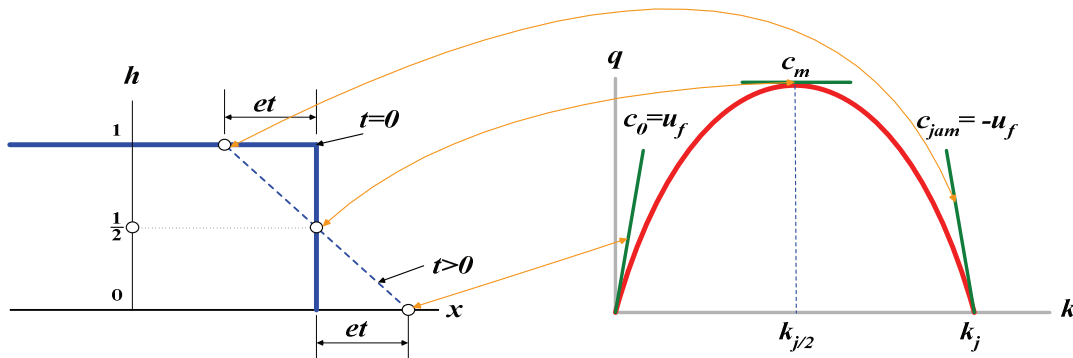


圖 5.2.7 Greenshields 巨觀水流模式在 LWR 模式對映上的角色

(2) Lighthill, Whitham(1955)在燈號轉綠時的扇形起動模化，其向前與向後最高速的波，各為  $u_f$  與  $-u_f$ ；Richards(1956)紙上剪力圖保持閘門處水位為  $1/2$  不動，讓  $h=0$  與  $h=1$  水位各向前後移相同單位的處理，其向前與向後最尖端位置的速度為  $e$ ，換算成 Greenshields 巨觀水流模式，即為  $u_f$  與  $-u_f$ 。且紙上剪力圖保持閘門處水位為  $1/2$  不動，其  $1/2$  水位高換算成 Greenshields 巨觀水流模式的密度為  $k_j/2$ ，等於停止線處之車波停駐不動的處理方式，如圖 5.2.8。

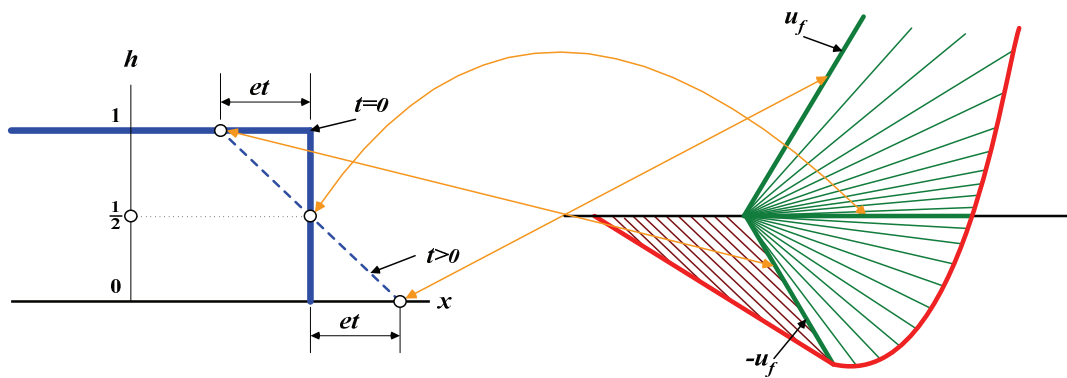


圖 5.2.8 紙上剪力圖起動模化與扇形車波的對映

(2) Richards(1956) 紙上剪力圖在以公式處理綠燈向後起動波追上紅燈向後停止波的方式，相當於 Lighthill, Whitham(1955)向後停止波被綠燈向後起動波追上後衝擊波呈曲線且向停止線回流的處理，如圖 5.2.9。

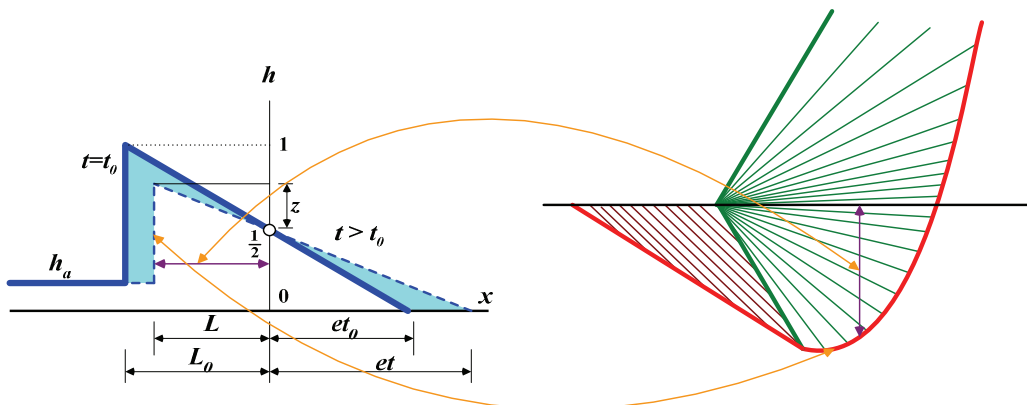


圖 5.2.9 紙上剪力圖起動波追上停止波與車波-衝擊波處理的對映

## 5.3 車波-衝擊波的其他應用

簡單連續流模式，或車波-衝擊波理論，尚有多種應用方式，本節針對車流中出現固定障礙物及移動障礙物時的狀況，分析說明之。

### 5.3.1 單向單車道的慢速車

已知某單車道道路之車流  $q-k$  曲線，如圖 5.3.1 上方  $q-k$  圖。假設該道路上正有一均質車流以空間平均速率  $u_1$  運行。現分成固定障礙物與移動障礙物來分析說明。

#### 1. 固定障礙物

現有一卡車由支道駛入，一進入該道路後即因故障而停車，經 30 分鐘修復後隨即駛出主線。由於無法超車(單車道)，因此在卡車後之小客車均被迫停車，而形成等候車隊。

現以車波-衝擊波理論來分析，如圖 5.3.1，卡車加入後將主線車流分割成 5 個區域，由下游往上游追溯，分別為：

- (1) 原均質車流區；
- (2) 均質車流與卡車間之無車流區；
- (3) 卡車與其後之等候車隊區；
- (4) 等候車隊尾端上游區(原均質車流區)；
- (5) 卡車離開後形成的扇形車波區。

如代入公式，可以解出卡車在該道路停駐 30 分鐘所形成的車隊長度，如圖 5.3.1 下方之時空圖所示。

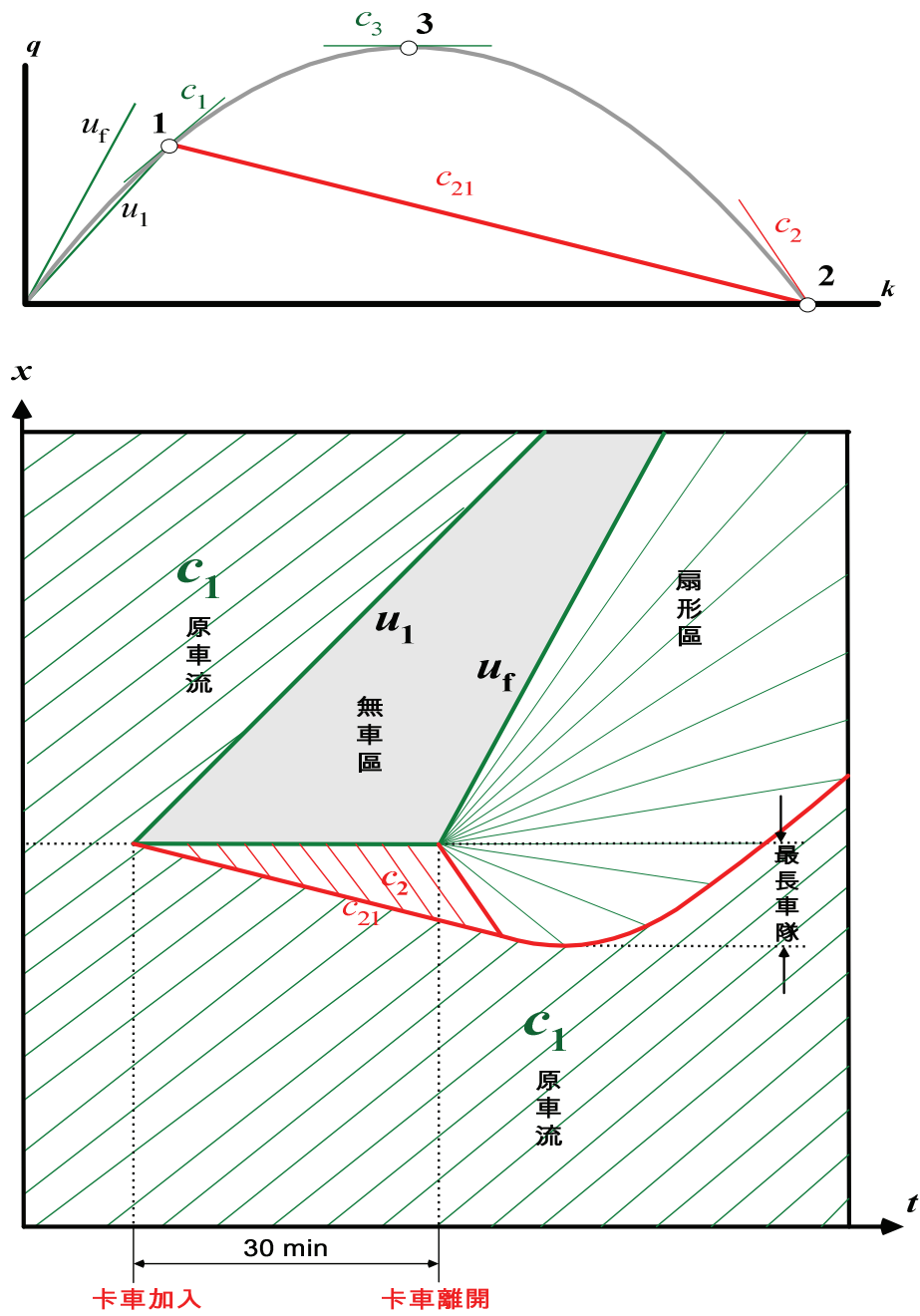


圖 5.3.1 故障車在單車道上的影響

## 2. 移動障礙物

現有一卡車由支道駛入，在該道路行駛 2 公里後駛出主線。卡車速率  $u_2$  遠低於  $u_1$ ，如圖 5.3.2 上方  $q-k$  曲線上之點 2。由於無法超車(單車道)，因此在卡車後之小客車均被迫尾隨而行，而逐漸形成運動車隊。

現以車波-衝擊波理論來分析，卡車加入後將主線車流分割成類似前例的 5 個區域。如代入公式，可以解出卡車在該道路行駛 2 公里所形成的車隊長度，如圖 5.3.2 下方之時空圖所示。

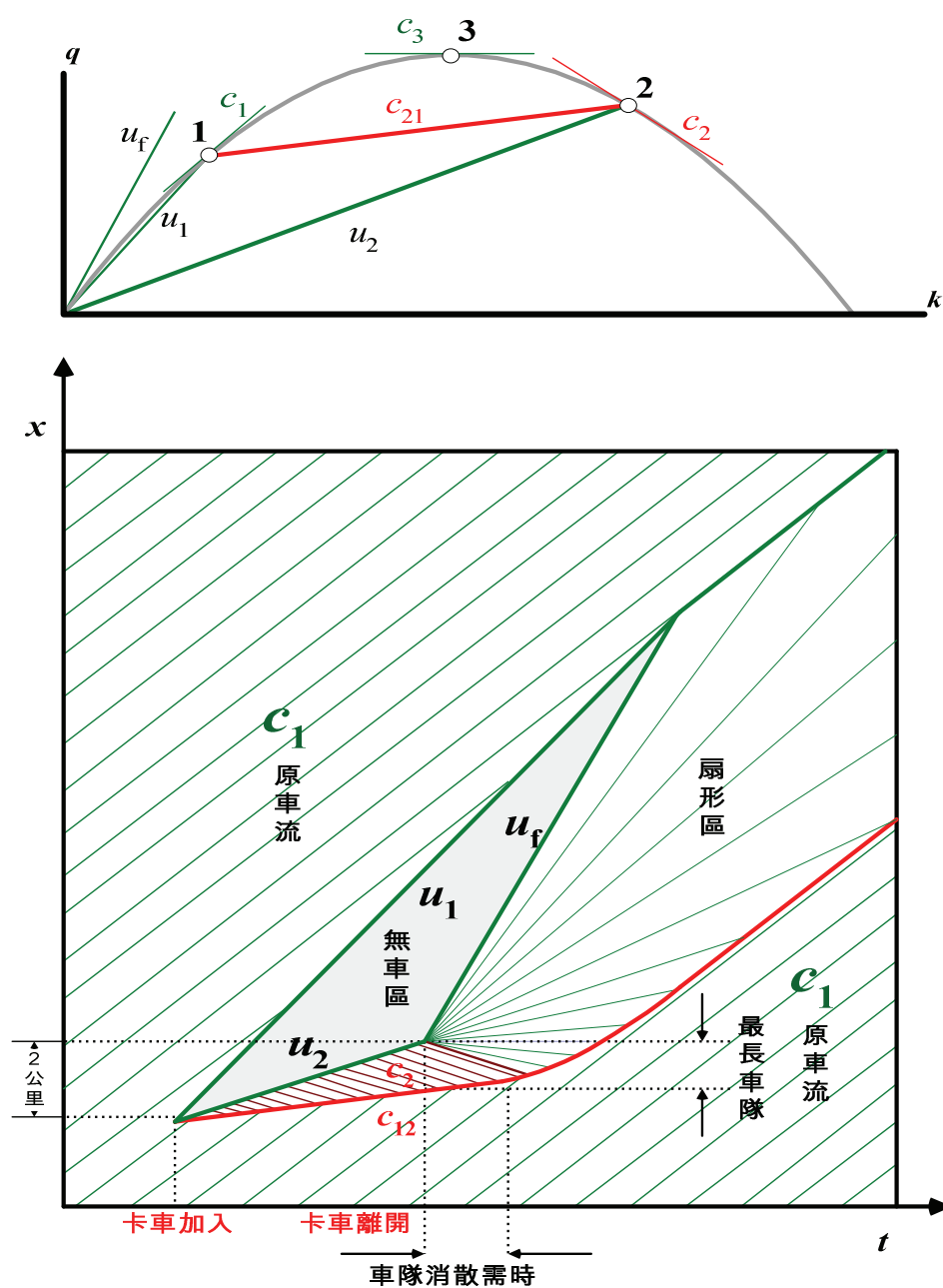


圖 5.3.2 慢速車在單車道上的影響

### 5.3.2 單向雙車道的慢速車隊

Newell(1998)指出，如一輛車進入一單向雙車道道路且以低於既有車流的速度行駛，則該車就如同移動瓶頸，可能導致其他車輛在嘗試超越它時在其後形成車隊。惟如令座標系統以該慢速車的速度等速移動，則車流通過該移動瓶頸問題即可轉換成通過固定瓶頸的問題。應用此理論即可探討貨車在上坡路段對車流造成的各種可能影響。

為精確表示起始及邊界條件，假設在某時間  $t=0$  之前，車輛已在單向雙車道公路以一穩定的平均車速  $u_0$ 、密度  $k_0$  及流率  $q_0$  行駛。該兩個車道的車速相同，密度  $k_0$  及流率  $q_0$  分表兩車道的平均值。該道路有一入口  $x=0$ ，且在  $t=0$  時有一慢速車隊以車速  $v^*$  進入道路， $v^* < u_0$ ，該慢速車隊會在其中一車道上行駛一段距離。

令  $t=0$  時已在該慢速車隊下游的車輛依原車速  $u_0$  行駛，但在該慢速車隊上游的車輛將嘗試超越該慢速車隊而變換至另一車道。該慢速車隊可視為一移動障礙物，但其他車輛將依諸如 Lighthill, Whitham (1955) 等提出的動態理論來行駛。

想像有一觀測者以車速  $v^*$  駛經道路，其所見公路的相對位置為：

$$x^* = x - v^* t \quad (5-3-1)$$

此一行進中的觀測者看到的是公路上有一固定路段(在慢速車隊附近)僅剩一個車道供非慢速車行駛。一旦慢速車隊完全進入公路，觀測者將看到一個近乎穩定的車流通過車道遽減段(lane drop)。位於慢速車隊上游的路段，車流會由雙車道併成單車道，位於慢速車隊下游的路段，車流會恢復成雙車道。假設車流不是以  $q_0$  便是以單車道最大流率的方式穿過障礙物，亦即該瓶頸本身係一單車道而非交織路段。

#### 1. 轉入移動座標系統

在固定座標上，假設雙車道道路及單車道道路在流率  $q$  與密度  $k$  間分別存有某函數關係如下：

$$q = Q_2(k); \quad q = Q_1(k) \quad (5-3-2)$$

如令  $q^*$  表車輛穿過速度為  $v^*$  障礙物的流率，則：

$$q^* = q - kv^* \quad (5-3-3)$$

值得注意的是，不論是固定或移動的觀測者看到公路同一位置的密度  $k$  均相同，此暗示  $q^*$  與  $k$  之間在移動座標上亦存有一函數關係如下：

$$q^* = Q_2(k) - kv^* = Q_2^*(k); \quad q^* = Q_1(k) - kv^* = Q_1^*(k) \quad (5-3-4)$$

現以圖 5.3.3 來說明從觀測者的座標系統所見的  $q^*-k$  曲線。假設慢速車隊的車速小於原車流車速，即  $v^* < u_0 \leq u_f$  ( $k=0$  的自由流車速)，則  $q^*-k$  曲線在  $k=0$  處



會有一正的斜率。隨  $k$  增加， $q^*$  將達一最大值(注意並非固定座標的容量值，而係比容量略低，但在移動座標上是最大值)，然後當  $k$  增至  $v=q/k$  小於  $v^*$  時， $q^*$  會變成負值。由於原車流車速  $u_0$  係假設大於  $v^*$ ，因而  $q^*$  的起始值， $q^*_0 = q_0 - kv^*$ ，仍係正值。當  $k=k_j$ ，其速率原為 0，但在移動座標上斜率為  $0-v^*=-v^*$ ，此即圖 5.3.3 上標註斜率= $v^*$  的線。

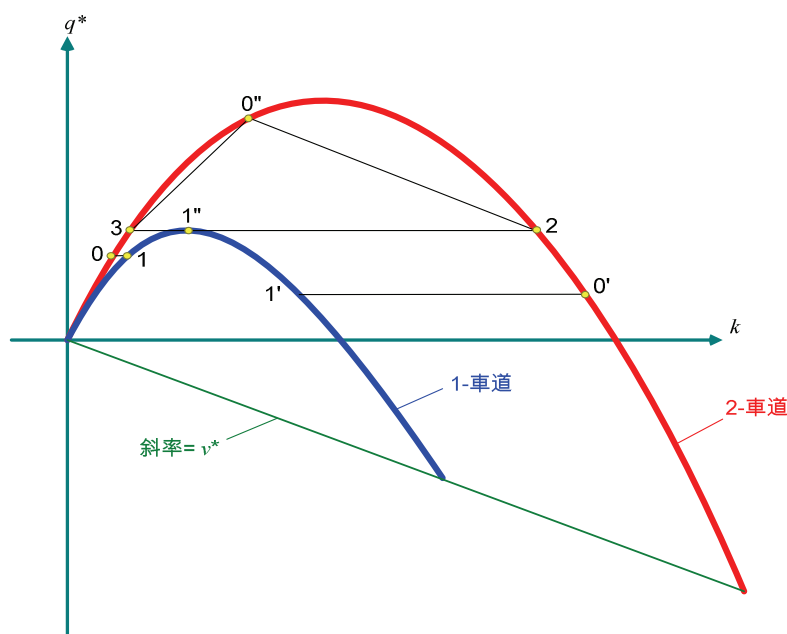


圖 5.3.3 移動座標系統上的流率-密度關係

資料來源：Newell, G. F., "A Moving Bottleneck," Transportation Research 32B(8), 1998.

由於守恒公式在移動座標系統及固定座標系統均有效，因此轉入移動座標後，原移動障礙物的問題變成一早為眾所皆知的，雙車道公路流率為  $q^*_0$  的車流嘗試通過某固定路段縮減為單車道的問題。茲說明如下：

如到達流率  $q^*_0$  (圖 5.3.3 中以點 0 表示) 小於單車道最大流率(容量)，則該流率亦係穿過單車道路段時的流率，而其在單車道路段上的密度將由單車道  $q^*-k$  曲線所決定(如圖 5-3-3 中以點 1 對應的密度)。事實上，流率  $q^*_0$  在單車道  $q^*-k$  曲線上有兩個可能的密度(一為非壅塞，另一為壅塞)，但在移動座標上，如點 0 的車波速(即雙車道  $q^*-k$  曲線在點 0 的斜率)為正，則單車道  $q^*-k$  曲線上其對應的車波速亦應為正，為非壅塞狀況，如圖 5.3.3 中的點 1 (其在單車道  $q^*-k$  曲線上的斜率為正)。

相對的，如起始狀態係圖 5.3.3 中的  $0'$  ( $q-k$  曲線右側，為非穩定的壅塞車流)，即在移動座標上車波速為負，則其在單車道路段對應的交通狀態必亦有一負的車波速，如圖 5.3.3 中的點  $1'$ 。此種狀態，在下游有瓶頸致起始車流受限時確會發生。當慢車隊進入公路，雖然通過慢車隊的流率為  $q^*_0$ ，但由於此種狀況下流率的任何變異將由其下游而非上游的交通條件來決定，亦即慢車隊並非重點，故不再討論。

當到達流率  $q^*_0$  大於單車道最大流率時，如圖 5.3.2 的點  $0''$ ，此時公路會有何種變化？傳統的說法是通過單車道路段的流率應調成與圖上點  $1''$  相同的最大值，慢速車隊鄰接上、下游路段的交通狀態將分別如點 2(上游出現壅塞)與點 3(下游以  $q^*_3$  疏解)所示。在由  $0''$  表示的到達流率碰上慢速車隊尾端時將產生向上游回溯的壅塞衝擊波，且該衝擊波速(在移動座標上)為  $0''$  至 2 兩點連線的斜率；同時亦會有向慢速車隊下游運動的扇形疏解稀釋波族，表示車輛超越慢速車隊後追趕未被慢速車隊阻礙的車輛。該扇形稀釋波族前緣的波速將為 3 至  $0''$  兩點連線的斜率。

圖 5.3.4 表示在以  $v^*$  等速移動的時空座標上，慢速車隊及其造成向前、向後兩衝擊、稀釋波的運動軌跡。圖中，慢速車隊係有長度的，觀測者站在慢車隊的頭車上，看到由支道進入公路的慢速車隊像向後拉長的列車，如圖中的  $1''$  帶，慢速車隊假設在  $x=0$  ( $x^*=-v^*t$ ) 處沿圖 5-3-4 中的 a-b 線(由支道)進入公路，在點 b，慢速車隊尾端已完全進入公路，此後，慢速車隊的頭尾會在移動座標上固定不動。

當慢速車隊最前端一進入公路即將其車道完全封鎖(在固定座標上)，導致很快形成阻礙車流的移動障礙物(由 a 點向 c 點延伸)，其速度，除向上游的壅塞衝擊波速外，另要加上車隊向上游加長的速度。當慢速車隊尾部完全進入公路且整隊開始向前移動時，向上游的就只剩壅塞衝擊波，此時係反映在圖 5.3.4 的 b 點處發出車隊長度不再加長的信號波。其追到向後停止波後，即令原向上游的衝擊波降速(時空圖上斜率減緩)，如圖 5.3.4。此最終形成的衝擊波分隔到達流與慢速車隊。

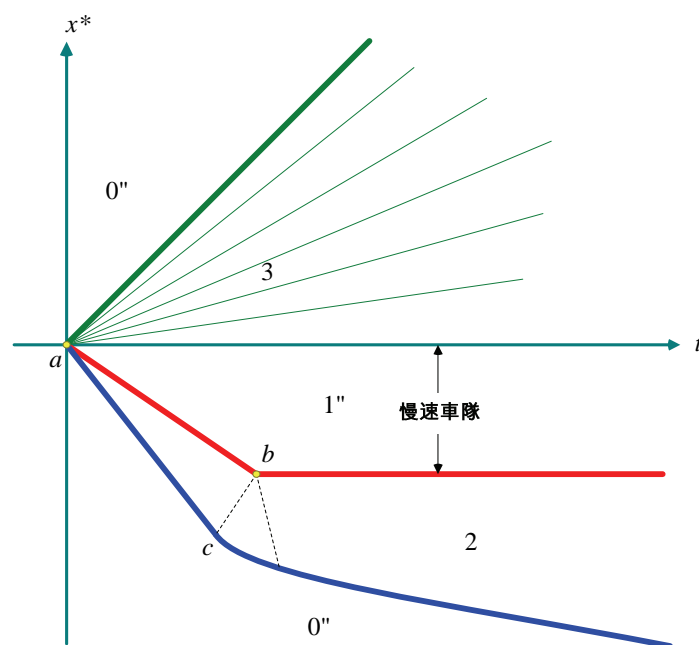


圖 5.3.4 移動座標系統上的衝擊波軌跡

資料來源：Newell, G. F., "A Moving Bottleneck," Transportation Research 32B(8), 1998.

## 2. 轉回固定座標系統

由於慢速車隊的車速  $v^*$  影響整體車流的型態，且原  $Q_2$  與  $Q_1$  關係式與  $v^*$  無關，因此將之轉換回固定座標系統有助於瞭解車流的變化。圖 5.3.5 的上圖係將圖 5.3.3 中的流率外加  $v^*k$  值(注意，圖上可清楚看出 1'' 點不是一車道路段的容量點)而轉換過來，線 0-1、0'-1' 與 3-1''-2 現在均有斜率  $v^*$ ，特別的，線 3-1''-2 是以斜率  $v^*$  切於一車道(1-lane)的  $q-k$  曲線，這是該研究最特別之處。

圖 5.3.5 的下圖顯示圖 5.3.4 移至固定座標上的車波-衝擊波軌跡。首先，慢速車隊的頭車一進入公路，即相當於在  $x=0$  處設下固定不動的瓶頸，故從  $t=0$  起，在  $x=0$  處即向上游發出 0''-4 連線代表的停止波，至慢車隊尾完全進入公路後，車隊尾端開始以  $v^*$  向前行駛，故會發出一起動波，至抵達向後停止波後，向後停止波改向前，直至等速為止。

對公路某特別的路段，即便已知  $Q_2$  與  $Q_1$  的關係，仍尚有二個需要考慮的參數，即  $v^*$  與到達車流率  $q_0$  (點 0'')。對任何  $v^*$ ，如衝擊波軌跡 0''-2 有一正的速率(點 0'' 較點 2 流率小)，則車輛通過圖 5.3.5 下圖區間 2 時會被延滯，但理論言，這些車輛將在行駛區間 3 時逐次恢復其時間的損失，至抵達稀釋波線 3-0'' 時完全恢復。然而更有趣的是，狀態 0'' 的流率高於點 2 (例如慢速車隊的車速更慢)，因為如此一來其由 0''-2 的衝擊波速將為負，屆時通過  $x=0$  的流率將與點 2 有關，此時點 2 的流率可解釋為受限制的容量(restricted capacity)(係大於一車道道路的最大流率)。

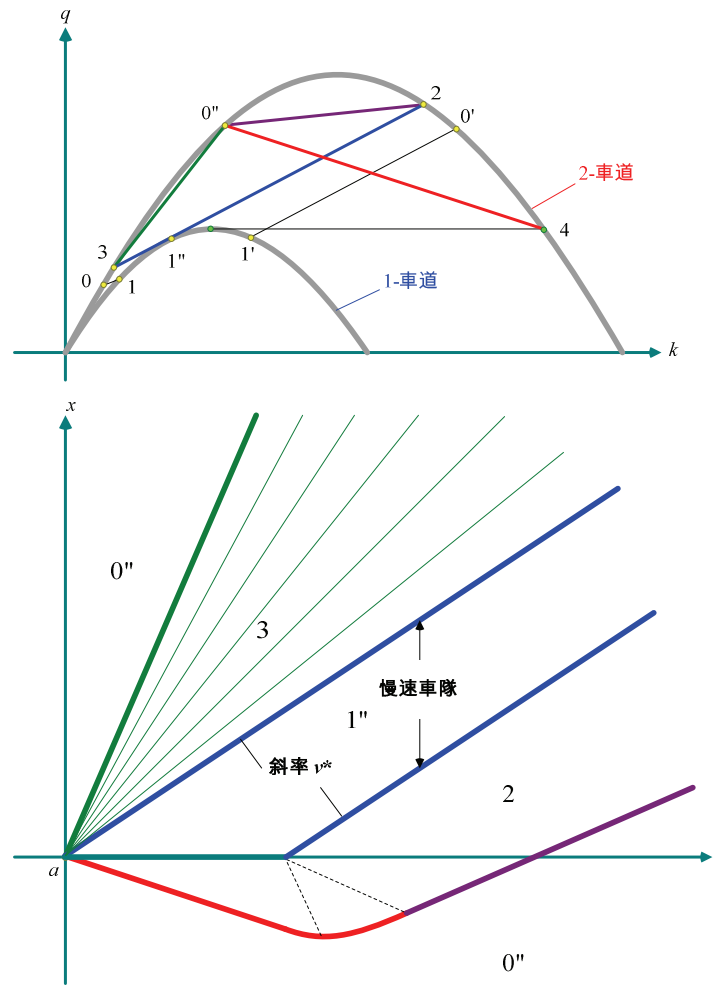


圖 5.3.5 固定座標系統上的衝擊波軌跡

資料來源：Newell, G. F., "A Moving Bottleneck," Transportation Research 32B(8), 1998.

## 5.4 本章小結

簡單(一階)連續流模式是 Lighthill, Whitham(1955)與 Richards(1956)在同一時期提出者，一般稱之為 LWR (Lighthill-Whitham-Richards)模式。本章分析說明，如巨觀水流模式採 Greenshields 模式，則 Lighthill, Whitham(1955)的車波-衝擊波理論與 Richards(1956)的紙上剪力圖法確實係一對一對映，此係相關研究所忽略的。而由此結果知，各種巨觀水流模式中，物理特性最像水流的當屬 Greenshields 模式。然而駕駛行為一般比水流複雜得多，亦即現場調查車流參數建立的巨觀水流公式，會與 Greenshields 模式有程度不等的差異，惟不論如何，Greenshields 模式具備簡單與易於操作性，仍係車流數學模化上重要的分析模型。

簡單連續流模式是巨觀車流模式會動的最基本模式，雖然本章已提出其能應用在車流行為最複雜的號誌交岔路口的模擬，及其他道路受重車干擾的管理實務上，惟其過於簡單的特性一直為研究者所詬病，其中爭議最大者，在於其對衝擊波沒有寬度的模化，致車輛穿越衝擊波時會瞬間改變車速，隱含其間加減速率無限大的問題，這亦係後續相關研究致力研發高階連續流模式的主因。



## 第六章 高階連續流模式

前章介紹簡單連續流模式(simple continuum model)，是車流巨觀模式會動的最簡單型式。其缺點是，只巨觀模化車流在均衡狀態下的運動，交通的變化被模化成從一個均衡狀態變成另一個均衡狀態，不能模化非均衡車流。本章要介紹的高階連續流模式(high-order continuum model)，不但能巨觀模化車流均衡狀態下的(等速)運動，亦能模化非均衡時的(加減速)運動，這才是與微觀跟車模式一對一對映的巨觀車流模式。

本章不同於前章的圖解方式，而係以數學來呈現各種連續流模式的特性。依由簡至繁順序，先回顧前章已介紹的簡單連續流模式作為暖場，再介紹較為複雜的高階連續流。

### 6.1 簡單連續流模式

由第五章的分析說明知，簡單連續流模式係 Lighthill 與 Whithman 及 Richards 所提出(簡稱 LWR 模式)，所描繪的是車流的均衡狀態，除停車起動的扇形波模化外，一般無法模化車流加減速過程，或壅塞時走走停停等的非均衡狀態。

數學上 LWR 模式屬一階準線性偏微分方程式，其所模化的車流包含守恒式與車流狀態式(速率-密度或流率-密度式)，將車流狀態式代入守恒式後，只需求解一個只含密度變數的偏微分式，其解可得車流在道路上任一點、任何時間的密度(及換算得的速率與流量)值，可用以瞭解交通系統的狀態，進而量測其效用，如延滯、停車數、旅行數、旅行時間等。

#### 6.1.1 簡單連續流模式的定式

LWR 簡單連續流模式係由守恒式及車流狀態公式聯立組成，其數學式及特性如下：

##### 1.連續流的守恒式

由第五章式(5-1-5)知，連續流的守恒公式如下：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (6-1-1)$$

如有流入或流源，例如高速公路位於交流道路段，則上式可改為：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = g(x, t, k) \quad (6-1-2)$$

上示守恒式包含兩個狀態變數-流率  $q$  與密度  $k$ ，及兩個獨立變數-時間  $t$  與空間  $x$ ，右側  $g(x, t, k)$  稱為車流產生項，為車輛進出道路的淨進入率。此守恒式適

用於各種流體，當視車流如水流時，當然亦適用，惟如欲藉之決定道路任何位置、任何時間的車流狀態，尚需代入能反映車流特性的公式，對此，簡單連續流模式係加入車流狀態公式，即  $q=f(k)$ (高階模式一般係加入動量項)。

## 2.加入狀態公式： $q=f(k)$

將  $q=f(k)$ 代入式(6-1-2)的守恆式，改寫如下：

$$\text{因為：} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{dq}{dk} \quad (6-1-3)$$

$$\text{所以：} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{dq}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = g(x,t,k) \quad (6-1-4)$$

周志忠(1997)曾說明，上式中的  $dq/dk$  取決於流率  $q$  與密度  $k$  間的關係。若二者呈線性關係 (即  $dq(k)/dk=b$ )，且右側  $g(x,t,k)$ 項亦為密度  $k$  的線性函數 ( $g(x,t,k)=f(x,t)k$ )，則稱為線性一階連續流方程式(linear 1-st order continuum equation)；若  $q$  與  $k$  間為線性函數，惟右項  $g$  卻為密度  $k$  的一個非線性函數(即  $g(x,t,k)=f(x,t,k)$ )，稱為半線性一階連續流方程式(semi-linear 1-order continuum equation)；若流率  $q$  與密度  $k$  間為一個準線性函數(即  $dq(k)/dk=b(x,t,k)$ )，而右項為密度  $k$  的非線性函數(即  $g(x,t,k)=f(x,t,k)$ )，稱為一階準線性連續流方程式(quasi-linear 1-st order continuum equation)，其分類與比較如表 6-1-1 所示。

**表 6-1-1 一階連續流方程式之分類**

類別	線性	半線性	準線性
波速	$\frac{dQ(k)}{dk} = b$	$\frac{dQ(k)}{dk} = b$	$\frac{dQ(k)}{dk} = b(x,t,k)$
淨進入率	$g(x,t,k)=f(x,t)k$	$g(x,t,k)=f(x,t,k)$	$g(x,t,k)=f(x,t,k)$
例題說明	$k_t + 30k_x = 0$ 描述波速固定(30)，淨進入率固定(0)之車流狀況	$k_t + 30k_x = \sqrt{k}$ 描述波速固定(30)，淨進入率隨密度變動( $\sqrt{k}$ )之車流狀況	$k_t + k \times k_x = 0$ 描述波速隨密度變動( $k$ )，淨進入率為 0 之車流狀況

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。



式(6-1-4)只剩一個狀態變數  $k$  未知，可解析求解。令  $dq/dk=c(k)$ ，稱為波(聲)速，並只考慮無流入、流出的封閉路段( $g(x,t,k)=0$ )，則上式可簡化成：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c(k) \frac{\partial k}{\partial x} = k_t + c(k)k_x = 0 \quad (6-1-5)$$

$q=f(k)$ 如係採 Greenshields (1935)模式，則上式可改寫為：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_f \left[ 1 - \frac{2k}{k_j} \right] \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (6-1-6)$$

式(6-1-6)即為一 LWR 模式。表 6-1-2 所示者則為代入不同水流模式(stream models)導得的簡單連續流模式。由表知，流體守恒式代入各種水流模式而成的一階連續流模式，均為一階準線性偏微分公式。

**表 6-1-2 設定不同水流模式之 LWR 連續流模式**

研究者	水流模式	連續流模式
Greenshields(1935)	$u = u_f \left( 1 - \frac{k}{k_j} \right)$	$\frac{\partial k}{\partial t} + u_f \left( 1 - \frac{2k}{k_j} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0$
Greenberg(1959)	$u = u_o \ln \left( \frac{k_j}{k} \right)$	$\frac{\partial k}{\partial t} + u_o \left( \ln \frac{k_j}{k} + \frac{k^2}{k_j} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0$
Underwood(1961)	$u = u_f e^{-(k/k_o)}$	$\frac{\partial k}{\partial t} + u_f e^{-k/k_o} \left( 1 - \frac{k}{k_o} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0$
Drake, Schofer, May (1967)	$u = u_f e^{-(k/k_o)^2/2}$	$\frac{\partial k}{\partial t} + u_f e^{-(k/k_o)^2/2} \left( 1 - \frac{k^2}{k_o} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0$
Drew(1968)	$u = u_f \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^{(n+1)/2} \right]$	$\frac{\partial k}{\partial t} + u_f \left[ 1 - \frac{n+3}{2} \left( \frac{k}{k_j} \right)^{(n+1)/2} \right] \frac{\partial k}{\partial x} = 0$
Pipes-Munjial(1967)	$u = u_f \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_j} \right)^n \right]$	$\frac{\partial k}{\partial t} + u_f \left[ 1 - (n+1) \left( \frac{k}{k_j} \right)^n \right] \frac{\partial k}{\partial x} = 0$

註： $u$ =車流速度； $k$ =車流密度； $u_f$ =自由流速率； $k_j$ =壅塞密度； $u_o$ =臨界速率； $k_o$ =臨界密度。  
資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

## 6.1.2 簡單連續流模式的數學解

Zhang(2007)指出，LWR 模式在數學領域中屬良好的雙曲線型(hyperbolic type) 偏微分方程(PDE) (凡屬雙曲線型 PDE 者，其特性根須為實數而非虛數)，可由適當的起始/邊界條件求解。LWR 模式的解析解包含弱解，數學意義是指除了沿某特殊路徑外，函數 $(k,q)(x,t)$ 均滿足式(6-1-5)的守恆式，而此特殊路徑稱為 Rankine-Hugoniot (R-H)條件，本身亦係一守恆式：

$$c_{lr} = \frac{q(k_r) - q(k_l)}{k_r - k_l} \quad (6-1-7)$$

由上式知，R-H 條件會產生一個不連續介面(衝擊波)，其移動速度為  $c_{lr}$ 。

事實上，Zhang(2007)指出，LWR 模式的解析解亦係黎曼問題(Riemann problem)的解，係一種特殊起始值問題，其起始值稱為黎曼資料(Riemann Data)，係由一跳躍(single jump)界面分隔的左右兩常數狀態  $k_l, k_r \geq 0$  組成：

$$k(x, t=0) = \begin{cases} k_l, & x < 0 \\ k_r, & x > 0 \end{cases} \quad (6-1-8)$$

黎曼問題的解，不是衝擊波(shock wave)，便是滑順的稀釋波(rarefaction wave)，如圖 6.1.1 所示：

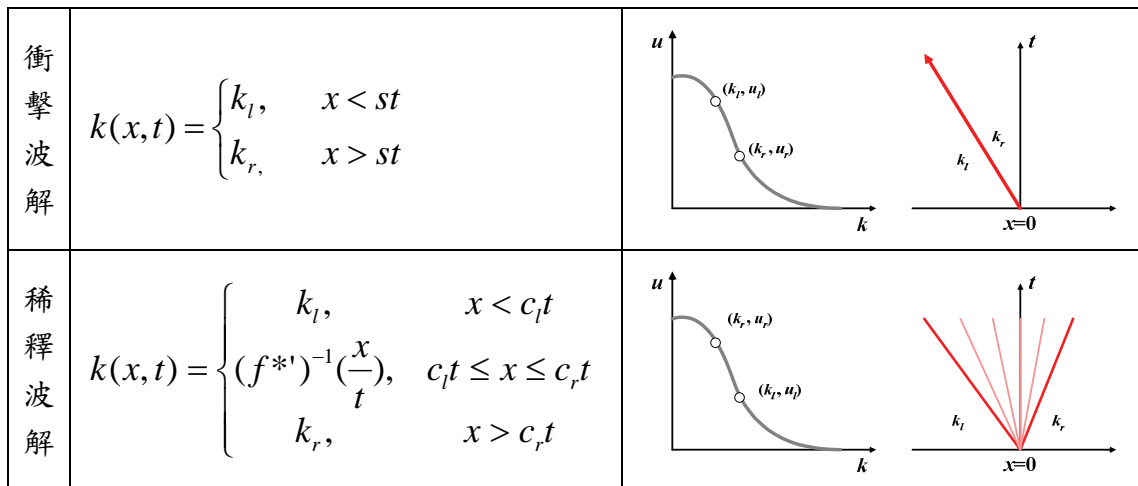


圖 6.1.1 黎曼問題的解

資料來源：Zhang, H.M., “Revised Chapter 5 of Traffic Flow Theory Monograph,” 2007.

Zhang(2007)指出，黎曼問題的解會是衝擊波的條件，稱為極大熵條件 (entropy condition)，如下式所示：

$$c_l > c_r \quad (6-1-9)$$

由上式知，LWR 模式滿足極大熵條件者係上游波速大於下游，即下游較上游壅塞。當下游密度大於上游時，亦即交通沿車行方向逐漸壅塞時，LWR 模式有唯一的弱解，可導出確定的衝擊波，如圖 6.1.2 所示：

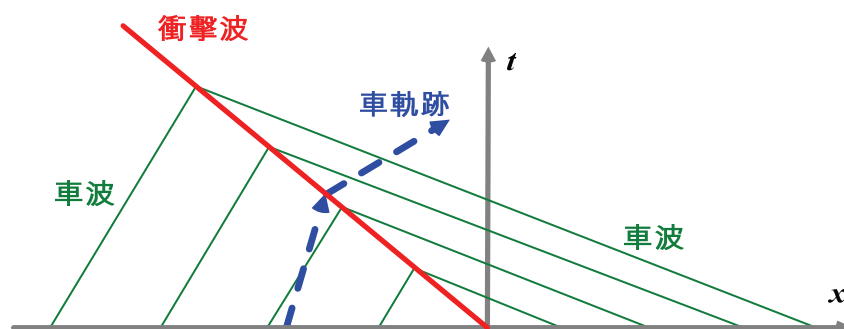


圖 6.1.2 黎曼問題的衝擊波解

資料來源：Zhang, H.M., “Revised Chapter 5 of Traffic Flow Theory Monograph,” 2007.

當下游密度小於上游時，就存有眾多的弱解，欲在其中挑出符合車流意義者，亦須滿足極大熵條件，LWR 滿足極大熵的解(Entropy-satisfying Solution)係以兩密度區為邊界作漸變的幅射扇形波，如圖 6.1.3 所示：

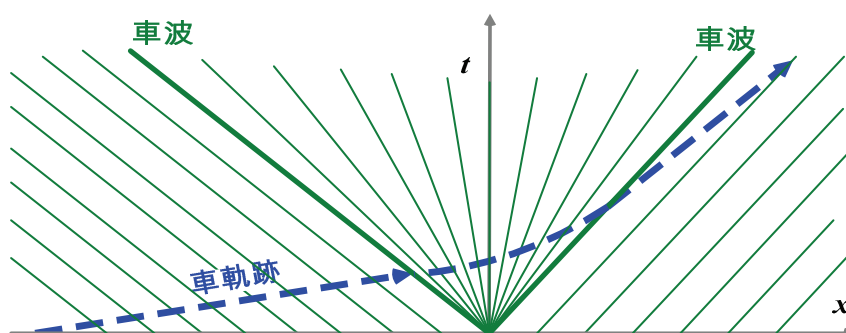


圖 6.1.3 黎曼問題的扇形波解

資料來源：Zhang, H.M., “Revised Chapter 5 of Traffic Flow Theory Monograph,” 2007.

而由前章紙上剪力圖與車波-衝擊波的分析知，扇形展開是車流不受限制的表現，例如將明渠水流的閘門封閉一段時間再驟然打開，即可觀察到其水流向下游傾瀉的行為，模化上即予扇形展開，而這種結果，亦可以求解黎曼問題獲得。

### 6.1.3 簡單連續流模式的特性

LWR 簡單連續流模式有許多特性，有些是顯現在外的，有些則係隱含的，分述如下：

#### 特性 1：車波

密度的微變量為：

$$dk = \frac{\partial k}{\partial t} dt + \frac{\partial k}{\partial x} dx \quad (6-1-10)$$

可得密度的全微分為：

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (6-1-11)$$

如令  $dx/dt = c$ ，即速率( $dx/dt$ )等於某交通狀態下的車波時，式(6-1-11)即等於式(6-1-5)，致  $dk/dt=0$ ，亦即隨(車)波逐流來觀測密度隨時間的變化時，可發現密度根本沒有改變。此一特性的功用是，如已知某定點的起始密度，即可從該定點沿該起始密度對映的車波軌跡推知其所經各處的密度。此一車波軌跡稱為 LWR 模式的特性根曲線，而  $c$  稱為 LWR 模式的特性根速率，只要密度不變，沿其特性根曲線的斜率就會維持不變，故該特性根曲線係一條直線。

#### 特性 2：車速～衝擊波、車波

LWR 模式的衝擊波速  $c_{lr}$ 、車波速  $c$ ，與車速  $u$  間的關係為：

$$\begin{aligned} u = q/k & \geq c = dq/dk \\ u(k_l), u(k_r) & > c_{lr} \end{aligned}$$

即車速不小於車波與衝擊波。換言之，如車波與衝擊波分表車流輕微與劇烈擾動的傳遞，則對駕駛者而言，該擾動訊息均係迎面而來(前方)，而不會由駕駛者後方傳來，亦即「車流擾動訊息係以逆車行方向傳播」。

#### 特性 3：隱含的加速度公式

速度在時空坐標上的微變量可寫成：

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (6-1-12)$$

上式的意義為：

- (1) 時間變量：來自車輛自身的動能變化，在平坦道路上踩油門或煞車(加減速度)時，坐在駕駛座上可看到速率表隨時間的變化；

- (2) 空間變量：來自道路變化，如上下坡，或鋪面平整度不一等，即便不踩油門或煞車，車速都會隨空間而改變。

依式(6-1-12)知，加速度可寫成下式的偏微分式：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6-1-13)$$

LWR 模式的速度恆為均衡車速，即  $v=u=v_e$ ，因此：

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial v_e}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = v_e' \frac{\partial k}{\partial t}, \text{ 同理 } \frac{\partial v}{\partial x} = v_e' \frac{\partial k}{\partial x} \quad (6-1-14)$$

式(6-1-13)的加速度公式因而可改成密度的函數：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v_e' \left( \frac{\partial k}{\partial t} + v_e \frac{\partial k}{\partial x} \right) \quad (6-1-15)$$

由車流守恆公式，加上  $q=kv_e$  恆等式得：

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{dq}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = (-u_e - kv_e') \frac{\partial k}{\partial x} \quad (6-1-16)$$

代入(6-1-15)得：

$$\frac{dv}{dt} = -kv_e'^2 \frac{\partial k}{\partial x} \quad (6-1-17)$$

上式即 LWR 模式隱含的加速度公式，事實上在第五章 5.2.2 節紙上剪力圖式(5-2-8)即已導出與式(6-1-17)對映的 LWR 加速度公式( $a=-e^2 h \partial h / \partial x$ )。由上式知，在 LWR 模式的模化下：

- (1) 車流的加速度係空間上密度梯度的函數(與時間無關)；
- (2) 在穿過衝擊波前，因密度維持相同( $\partial k / \partial x=0$ )，故加速度為 0；穿過衝擊波後，因密度亦維持相同(但與穿過衝擊波前者不同)，故加速度亦為 0；
- (3) 因衝擊波的寬度幾乎為 0，故穿過衝擊波的瞬間，密度在極短距內突增， $\partial k / \partial x=\infty$ ，亦即車輛係以負無限大的加速率穿過衝擊波。

#### 6.1.4 簡單連續流模式所遭受的批評

Daganzo(1997b)對 LWR 簡單連續流模式有以下的評論：

- (1) 不考慮駕駛人間的差異

LWR 模式因並未區分快速與低速駕駛，故不適合描述稀疏車流。好的車

流模式則應能追蹤快速與慢速車的行動，及其間的互動。

(2) 衝擊波的結構

LWR 模式的衝擊波沒有寬度，亦即沒有緩衝區間，車輛進入衝擊波會瞬間改變車速，暗示有無限大的加速率。實際狀況，衝擊波是有寬度的，亦即有一個幾輛車長度的緩衝區供車輛以有限減速率變化其車速。惟 Zhang(1998)認為，只要加速率不是主要描述的對象，則缺少衝擊波的結構並不構成 LWR 模式的缺點，因為比起所模化公路的長度，長不過幾輛車的衝擊波寬度似可忽略，實證上亦顯示確為如此。

(3) 等候車流內部的向前移動波

LWR 模式只有一個車波家族以  $dq/dk$  速度行動，因波速恆低於車速，故這些波永遠是逆著車流行進方向。惟早期研究隧道車流時發現，實際車流中存有不同型態的波。Edie, Baverz(1967)指出：「車流些微變化並非以  $q-k$  曲線上的切線定出的車速(即波速)在擴散，而是在達飽和流之前以接近車速或僅略低於車速的速率行進，當達飽和時，會突然改變行進方向」。此一觀察指出除了有一個逆車流行進方向的车波家族外，至少另存在一個順車流方向的车波家族，即便在壅塞狀態亦係如此。

(4) 交通的不安定性(instability)

這個缺點，比起前三類，可能是最嚴重者。LWR 模式永遠是安定的，任何車流擾動，不論大小，均會沈寂，換言之，遵循 LWR 的駕駛法則對外來的刺激總能做出適當的反應，亦即駕駛者總能正確的管理其車速，以吸收掉外來的擾動。從理論觀點言之，這表示 LWR 模式隱含駕駛者對外來刺激的反應時間為 0 的假設。實際上，駕駛者對外來刺激的反應有其延遲時間，且不是每次都非常精確，導致有些擾動在沿車流傳遞時可能被放大，致交通走走停停，且延續數個小時。

Zhang(1998)對 LWR 模式有以下的評論：

(1) 無限大的加減速

由加速度公式知，LWR 模式預測車輛係以無限大的加減速率穿過衝擊波；

(2) 以均衡狀態模化所有交通狀態

LWR 模式假設均衡車流的  $v_e-k$  關係亦適用非均衡交通。惟實際上，車流甚少處於均衡狀態。車流的動態主要係由駕駛者接受各種前方刺激之對應行為組成，而駕駛者一般係向前看，對前方車況的反應則一般需反應時間，即車流的動態來自駕駛對前方車況的預期(anticipation)與其行車慣性(inertia)間之交互作用，很少能維持長時間的等速。

由以上的回顧分析知，LWR 連續流模式早在 50 年代中期已發展出來，此種模式，只要邊界與起始條件確定，即可推算出任何時空點上車密度的解析解，透

過  $u=f(k)$ ， $q=ku$  關係，即可求得車流三個參數值在時間上的變化。惟此種模式有一個很大的缺點，即會在兩交通狀態區間形成無寬度的衝擊波，理論上隱含車輛會以無限大的加減速率通過不同的交通狀態區，此相當不合理，亦係後續相關研究積極想發展高階模式予以改善的原因。

## 6.2 高階連續流模式的發展

為解決 LWR 模式許多理論上的缺點，相關研究不斷進行改良，最主要的，即係發展高階連續流模式。本節首先簡要回顧高階連續流模式的發展沿革，及說明其中遭遇到的瓶頸與困境，再說明近年來車流研究者克服前述困境的研發成果。

### 6.2.1 高階模式的研發

Lighthill, Whitham(1955)是最早對一階連續流模式提出高階改良者，其建議的定式為：

$$\text{LW 模式： } q_t + Cq_x + Tq_{xx} - Dq_{xx} = 0 \quad (6-2-1)$$

其中， $C$  為傳導速度(convection speed)， $T$  為反應時間常數， $D$  為消散係數(diffusion coefficient)。對上示高階模式，Lighthill, Whitham (1955)自認在當時仍屬早熟之作，後續亦沒有相關研究接續改良。

由於一直沒有堅強的實證研究來支持上述改良建議的成效，連續流模式的高階改良便一直延宕而無明顯發展。直至 Payne(1971)提出高階模式，其後 Whitham(1974)亦提出類似理論(惟並未參考 Payne 的研究)，後人稱之為 P-W 模式，方開啟其後 20 餘年的大量研究，包括討論高階模式的數學特性，或提出模式的變體，或延伸發展更複雜的模式，以及提出近似解數值分析方法等。

Payne(1971)與 Whitham(1974)的 P-W 模式係從跟車的論點導出一個被稱為動量公式的模式：

$$\text{P-W 模式： } v_t + vv_x = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{k} k_x \quad (6-2-2a)$$

其中， $v_e$  表均衡車速； $c_0 < 0$ ，表聲速(車波速)，其值由  $c_0^2 = \frac{\mu}{\tau}$  定義， $\mu$  通常稱為預期係數(anticipation coefficient)， $\tau$  稱為鬆弛時間(relaxation time)。值得說明者，加入預期項係 Payne 後來才補充的，其建議公式為：

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{dv_e(k)}{dk} \quad (6-2-2b)$$

式(6-2-2a)的左側實際係下示加速度公式(如式(6-1-13))：

$$\text{加速度公式：} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = v_t + vv_x \quad (6-2-3)$$

由式(6-2-3)可瞭解，P-W 高階連續流模式本質上雖與微觀跟車模式同為加速度公式，惟與微觀跟車模式針對個別車輛的行為不同，P-W 模式的加速度係針對一整條車流的總體(巨觀)運動行為。

P-W 模式可謂高階連續流模式的基準模型，後續相關研究大多維持式(6-2-2a)左側不變，只針對其右側的因素提出不同的延伸或改良，包括：

$$\text{Ross(1988)：} \quad v_t + vv_x = \frac{v_f - v}{\tau} \quad (6-2-4a)$$

$$\text{Kühne(1984,1989)：} \quad v_t + vv_x = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{k} k_x + \gamma_{xx} \quad (6-2-4b)$$

其中， $v_f$ 表自由流車速； $v_{xx}$ 為速度對空間的第二階導數，主要功能係令衝擊波有寬度，亦即車流從低密度區至高密度區會出現密度漸變帶。

## 6.2.2 高階模式的的困境

自 Payne(1971)提出基本型的高階模式後，歷經 20 餘年的發展，至 1995 年 Daganzo 提出一篇以輓歌為名的論文(篇名為“Requiem for Second-Order Fluid Approximations of Traffic Flow”)，嚴厲批判過去的高階模式幾乎都犯了相同的錯誤，如：

- (1) 巨觀車流的研究學派認為交通流可以巨觀描繪成可壓縮液體，而車輛可以如同分子顆粒般模化，至於是否符合人類實際的駕駛行為，並不重要；
- (2) 一些專有名詞，如氣體運動理論(kinetic theory of gases)的鬆弛時間(relaxation time)與氣體動力學(gas dynamics)的黏性效果(viscosity effects)等，常在相關文獻中出現，並被視為交通原有且係高階模式必須掌握的特性。這樣的作法忽略了車輛在車流中與分子在氣體中的特性截然不同，結果，所建立的模型不免會產生奇異的車流行為。例如大部分所謂的改良高階連續流模式，都隱含「車流會倒車後退」的理論錯誤。

上述批判中，最嚴厲的，當屬「車流會倒車後退」一點。對於簡單連續流而言，雖然缺點包括會產生無寬度的衝擊波，致車輛係以無限大的加減速率穿越該界面，相當於由一種車流狀態瞬間進入另一種車流狀態，且整個模式全係以均衡的車流狀態(即車速均為等速)來模化，但並不會出現令車流向後退的錯誤。高階連續流模式為改良簡單連續流模式的缺點，換來的卻是會產生車流倒車後退更嚴重的缺失，如圖 6.2.1 所示。



而依理論推估，下列組成項可能係導致高階模式車流倒車後退的主因：

(1) 預期項(anticipation)

Daganzo(1995)指出導致高階模式產生負的車流速的主因，係模式中的**預期項**會產生負的特性速度，而負的特性速率可能會導致負的車流速；

(2) 黏性項(viscous)/擴散項(diffusion)

發展高階模式的動機之一係排除衝擊波無寬度的問題，加入高階的空間導數  $k_{xx}$ ,  $v_{xx}$  項可令衝擊波有寬度。一般稱此種含  $k_{xx}$ ,  $v_{xx}$  項的為具黏性高階模式，不幸的是，含黏性者通常亦可能會令停止車流倒車後退。

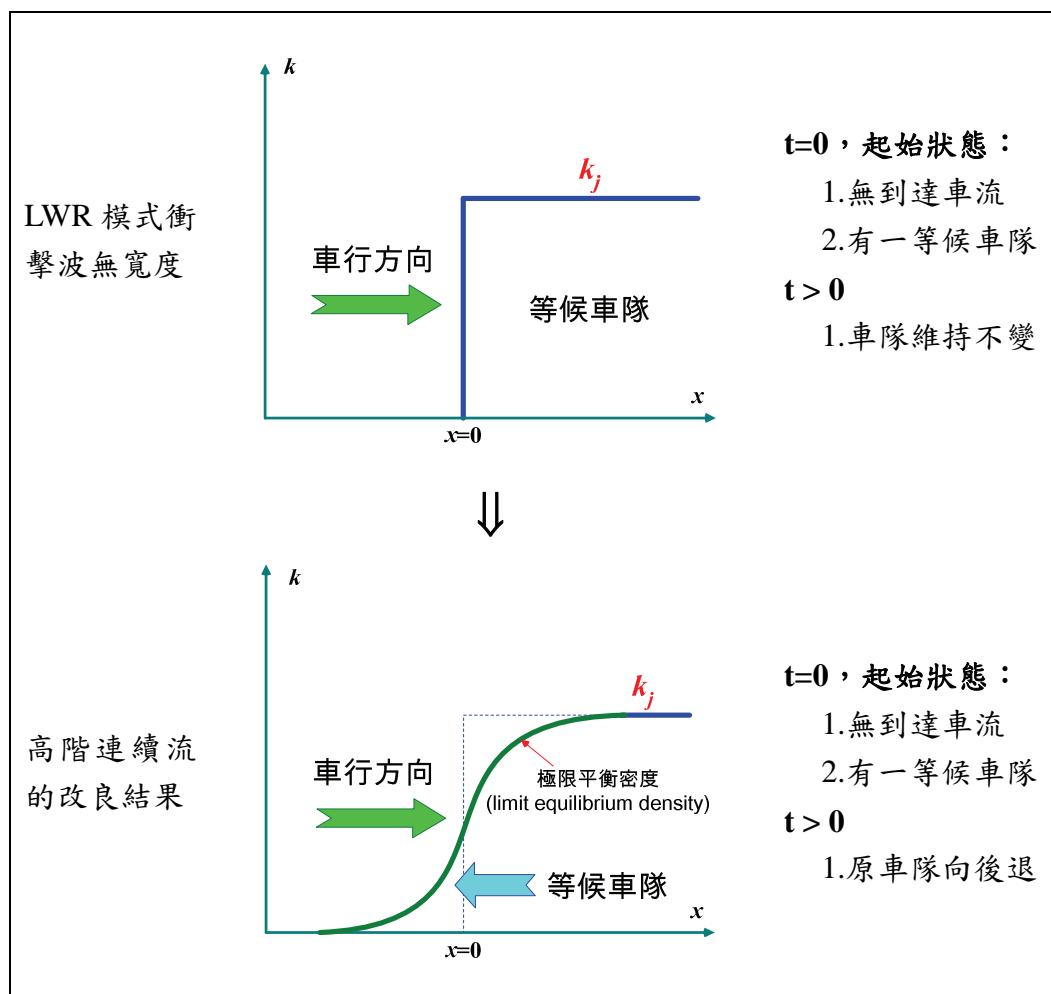


圖 6.2.1 高階連續流模式會令車隊倒車後退範例

## 6.3 高階模式的改良

自 Daganzo 在 1995 年提出嚴厲評論後，研究方向有了明顯的改變，各方均致力於排除車流向後退的嚴重錯誤，相繼提出改良高階模式，本節重點回顧之。

### 6.3.1 排除車流向後退的改良

#### 1. Liu 等(1998)的改良

Liu, Lyrintzis, Michalopoulos(1998)提出新的改良高階模式：

$$\text{Liu 等模式： } v_i + p_x = \frac{v_e - v}{\tau} \quad (6-3-1)$$

其中， $p$  代表傳導(convection)與預期(anticipation)兩項，以 P-W 模式為例，其  $p$  函數為：

$$p = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\mu}{\tau} \ln k \quad (6-3-2)$$

該研究認為，欲使車流只能向前行駛而不倒退，且不受後方車況影響，須滿足兩個條件，一係兩個特性速率須非負，二係兩個特性速率均不大於車流速率(此條件可能不必要)，而滿足此兩條件的  $p$  函數有：

$$\text{條件 1： } \frac{\partial p}{\partial u} = u, \frac{\partial p}{\partial k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = u \quad (6-3-3a)$$

$$\text{條件 2： } \frac{\partial p}{\partial u} = 0, \frac{\partial p}{\partial k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = u \quad (6-3-3b)$$

該研究最後對滿足上述兩條件的  $p$  函數提出最簡單的型式，即令  $p=0$ ，依此，可得下列改良模式：

$$v_i = \frac{v_e - v}{\tau} \quad (6-3-4)$$

Liu, Lyrintzis, Michalopoulos (1998)改良模式雖經證明車流確不會向後退，惟由上式知，該模式左側缺了對空間偏微分項，整個模式只是個不完整的加速率。速率對空間的偏微分項係反映「路」的條件，例如上、下坡路段或鋪面條件等，這些均會令車輛產生速度的變化，缺該項，模式就必須假設「路」的條件完全相同(例如均為平坦地形且鋪面條件相同)，只能說該改良模式是個「半殘的模式」。

## 2. Zhang(1998)的改良

Zhang(1998)提出下列改良模式：

$$\text{Zhang 模式： } v_t + vv_x = \frac{v_e - v}{\tau} - kv_e'^2 k_x \quad (6-3-5)$$

當交通量很低時， $k \approx 0$ ，且  $v_e \approx v_f$ ，上式動量公式會退化成：

$$v_t + vv_x = \frac{v_f - v}{\tau} \quad (6-3-6)$$

上式即 Ross(1988)模式(式 6-2-4a)，而 Ross(1988)原號稱其模式能適用任何交通狀況，Newell(1989)則批評該模式不具備模化車輛減速行為之機制，亦即不能模化流量稍大的交通狀況。

Zhang(1998)模式有一個非常優越的特性，即當  $v=v_e$  時：

$$\text{因 } \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial v_e}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = v_e' \frac{\partial k}{\partial t}, \text{ 同理 } \frac{\partial v}{\partial x} = v_e' \frac{\partial k}{\partial x}$$

將之代入原模式中，Zhang 模式將退化成：

$$\begin{aligned} v_e'(k_t + v_e k_x) &= -k(v_e')^2 k_x \Rightarrow k_t + v_e k_x = -kv_e' k_x \\ \Rightarrow k_t + (v_e + kv_e') k_x &= 0 \Rightarrow k_t + \frac{d(kv_e')}{dk} k_x = 0 \Rightarrow k_t + q_x = 0 \end{aligned}$$

亦即 Zhang 的高階連續流模式達均衡時，可完全退化成 LWR 簡單連續流模式。

### 6.3.2 高階連續流的通用型模式

Zhang(1998)指出，相關研究的高階連續流模式主要的差異是預期項定義不同，因而可以整合成一個通式如下：

$$\text{通用型高階模式： } v_t + vv_x = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{c^2}{k} k_x + \gamma v_{xx} \quad (6-3-7)$$

如係 P-W 模式或 Kühne 模式， $c = c_0 = \sqrt{\mu/\tau}$ ；如係 Zhang 模式， $c = kv_e'$ 。

茲說明上式的意涵如下：

- (1) 左側二項合併即為加速度式，第一項係駕駛人(踩油門或煞車)造成的速率改變；第二項係路況(坡度或鋪面平整度)造成的速率改變，一般稱為傳導項(convection)；

- (2) 右側第一項反映駕駛人傾向(affinity)以均衡速率來調整其車速，過程需  $\tau$  的鬆弛時間(relaxation time)；第二項係反映交通造成的速率改變，指駕駛人會視前方交通狀況預作車速的調整，一般稱為預期項(anticipation)；未顯示的第三項(如 Kühne 的  $v_{xx}$  項)，一般稱為黏性項(viscous)，可令衝擊波有漸變的寬度。惟因黏性項是造成高階連續流模式產生車流向後退錯誤的主因之一，故本研究在後續分析中暫予剔除；
- (3) 上式說明，車輛的加速度，即  $v_t + vv_x$ ，對旅行速度低(高)於相同密度下的均衡速度時，會有正(負)的反應；對下游密度呈遞增狀況( $k_x > 0$ )時，會有負的反應。結果，在相同車況下，由動量公式獲得的速度通常與車流的均衡速率不同，但其間的差異會因鬆弛效果隨時間的拉長而縮減；
- (4) 參數  $\tau$  決定鬆弛的強度。相關文獻通常將之解釋為駕駛者的反應時間，其值介於 1~1.8 秒。

值得說明者，高階連續流模式並非只有一條公式，而是須同時滿足一階(流體守恆式)與高階(動量公式)兩連續流公式(及車流狀態公式  $q=ku$ )的聯立公式。亦即高階連續流模式係由下列公式所組成：

$$\text{一階(流體守恆式): } k_t + (v_e + kv'_e)k_x = 0 \quad (\text{即 } k_t + q_x = 0, \text{惟此時 } v \neq v_e)$$

$$\text{高階(動量公式): } v_t + vv_x = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{c^2}{k} k_x$$

分析比較一階與高階連續流模式可發現，事實上，這些模式均是加速度公式，如下所示：

$$\text{一階: } k_t + (kv)_x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv_e'^2 k_x + (v - v_e)v'_e k_x \quad (6-3-8)$$

$$\text{高階: } \frac{dv}{dt} = v_t + vv_x = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{c^2}{k} k_x \quad (6-3-9)$$

上示一階連續流模式隱含加速度的推導，係加速度公式  $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$ ，代入  $\frac{\partial v}{\partial t} = v'_e \frac{\partial k}{\partial t}$ ， $\frac{\partial v}{\partial x} = v'_e \frac{\partial k}{\partial x}$ ，得  $\frac{dv}{dt} = v'_e k_t + v(v'_e k_x)$ ，再代入守恆式  $k_t = -(v_e + kv'_e)k_x$ ，得  $\frac{dv}{dt} = v'_e k_t + v(v'_e k_x) = v'_e (-v_e - kv'_e)k_x + v(v'_e k_x)$ ，整理可得式(6-3-8)。

值得注意者，上示的一階連續流模式與前章的 LWR 簡單連續流模式看似相同，其實有異。其最大的不同，是一階連續流模式允許車速非均衡，而 LWR 模式在任何狀況下車速均須為均衡，亦即 LWR 模式隱含的加速度公式係令式(6-3-8)中之  $v = v_e$ ，致右側第二項可剔除，即得式(6-1-17)。

### 6.3.3 通用型高階連續流模式的特性

Zhang(1998)指出，式(6-3-8)與式(6-3-9)組成的通用型高階連續流模式聯立式可以向量  $U_t + A(U)U_x = R(U)$  表示：

$$\begin{pmatrix} k \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v & k \\ \frac{c^2}{k} & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ v \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_e - v}{\tau} \end{pmatrix} \quad (6-3-10)$$

由於上示通用型高階模式的  $A(U)$  的特性根(eigen value)為實數且可分辨(real and distinctive)，如下所示，因此屬嚴格的雙曲線系統：

$$|A(U)| = \begin{vmatrix} v & k \\ \frac{c^2}{k} & v \end{vmatrix} = v^2 - c^2 = (v+c)(v-c) \quad (6-3-11)$$

$$\text{特性根： } \lambda_{1,2} = v \pm c, \quad \lambda_1 < \lambda_2 \quad (6-3-12)$$

LWR 簡單連續流模式只有一個特性根，其車波係沿特性根傳遞，且恆由前方接近駕駛人。高階連續流模式有三個特性根，因此有三個車波家族：第一個車波家族屬一階模式，恆由前方接近駕駛人；第二與第三車波家族屬高階模式，分兩個方向、兩個不同的速度，從前方以及後方接近駕駛人。

Zhang(1998)以數學證明，高階連續流模式具安定性的條件是「第一階車波  $c_e$  須夾在第二階車波  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ) 之間」，即：

$$\lambda_1 \leq c_e \leq \lambda_2 \quad (6-3-13)$$

## 6.4 高階連續流模式的比較與評論

### 6.4.1 連續流模式的比較

#### 1. 高、低階連續流模式的比較

相同的是，二者均屬雙曲線系統(hyperbolic system)，不同者有：

- (1) LWR 只有一個特性根： $\lambda_e = c_e = v_e + kv'_e$ ，且因  $v'_e(k) < 0$  (速度必隨密度增加而降低)，故  $\lambda_e < v_e$  (聲波速恆低於車速)，亦即對駕駛人言，車流訊息必從前方迎面而來。
- (2) 通案型高階模式則有二個特性根  $\lambda_1, \lambda_2$ ：一個大於  $v$ ，一個小於  $v$ ：

$$\begin{aligned} c > 0: \quad \lambda_1 &= v - c, & \lambda_2 &= v + c \\ c < 0: \quad \lambda_1 &= v + c, & \lambda_2 &= v - c \end{aligned}$$

對駕駛人言，車流訊息除前方迎面而來以外，亦有從後方追上來者。

## 2. 不同高階連續流模式的比較

如同時列出 Zhang(1998)模式，及 Payne(1971)與 Whitham(1974)的 P-W 模式，可發現二者非常相似。如下所示：

$$\text{Zhang 模式：} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_e - v}{\tau} - c^2 k \frac{\partial k}{\partial x}$$

$$\text{P-W 模式：} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{\mu}{\tau} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x}$$

其主要差異在於預期項(上示兩公式之右側第二項)，Zhang 模式的預期項係與密度成比例，而 P-W 模式則與密度的倒數成比例。這看似不重要的差異對模式的行為卻產生戲劇性的結果。

Zhang(1998)以一簡例比較說明。假設密度  $k(x,t)$  在某一瞬間  $t$  的分布如圖 6.4.1，即空間中已形成一不動的車隊，而後續到達的車流密度甚微(但並非完全無車到達)。

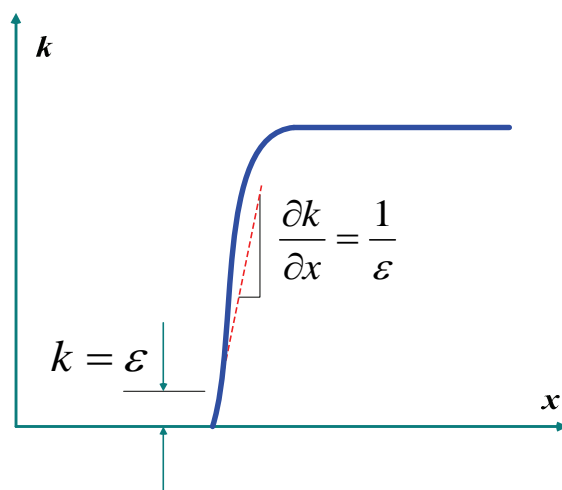


圖 6.4.1 高階連續流模式的比較範例

資料來源：Zhang, H.M. "A Theory of Nonequilibrium Traffic Flow," Transportation Research 32B(7), 485-498, 1998.

分別代入二模式可得：

$$\text{Zhang 模式：} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v_e - v}{\tau} - c^2 \quad (6-4-1a)$$

$$\text{P-W 模式：} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v_e - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{\varepsilon^2} \quad (6-4-1b)$$

當  $\varepsilon \rightarrow 0$  時，P-W 模式右側第二項  $\rightarrow \infty$ ，Zhang 模式則不會。而 P-W 模式為維持產生的加減速為有限值，就需要一負無限大的車速來平衡無限大的密度梯度，換言之，倒車流動出現了。

回過頭來比較 P-W 模式與 LWR 模式，同樣是密度梯度為無限大，為何 P-W 模式會出現倒車流動而 LWR 模式不會？那是因為 P-W 模式係在有限時間  $\tau$  內放鬆(relaxation)，使車流恢復到平衡狀態，因此需要一很大的負車速；LWR 模式則強迫車流在瞬間改變車速，因此需要無限大的減速率。

此外，不同高階模式只是通用型模式中  $c$  的設定不同(Zhang:  $c=kv_e'$ ; P-W:  $c=c_0=\sqrt{\mu/\tau}$ )，如個別代入式(6-3-12)，可得高階模式兩特性根值如表 6-4-1 所示。

**表 6-4-1 不同高階連續流模式的兩特性根值**

特性根	Zhang 模式	P-W 模式
$\lambda_1$	$0 < \lambda_1 = c_e < v$	$0 > \lambda_1 = v_e - \sqrt{\mu/\tau} < v$
$\lambda_2$	$0 < \lambda_2 = 2v_e - c_e > v$	$0 < \lambda_2 = v_e + \sqrt{\mu/\tau} > v$

註： $c_e = dq/dk = v_e + kv_e'$ 。

由表 6-4-1 知，Zhang(1998)高階連續流模式的兩特性根值會夾住一階連續流的特性根值( $\lambda_1 = c_e < \lambda_2$ )，亦即是本質安定的模式。而 P-W 模式者則不一定，其模式是否安定端視其參數  $\mu$ 、 $\tau$  的設定而定。

## 6.4.2 高階連續流模式的評論

基於以上各節的分析說明，本研究對高階連續流模式的發展有下列評論：

### (1) 高階模式擴充了運動波模式的功能

模式含納車流非均衡的轉變狀態(由一車流狀態轉變成另一狀態的漸近，而非瞬間的過程)，亦含納車流的不穩定性(可描繪非均衡時的車流)。

### (2) 高階模式與低階模式並非完全不同

例如兩類模式均存在衝擊波，而因為鬆弛，這兩種模式的解(衝擊波或稀釋波)會隨時間的拉長而愈來愈相近，車流達穩定時，理想的高階模式(如 Zhang,1998)會與一階模式趨於一致。

### (3) 高階模式與低階模式亦有顯著不同

高階模式有三個特性波家族，一階模式只有一個。高階模式的第一個特性波家族與一階模式的特性波非常相似；第二、三個特性波家族則完全不同，其中的一個波速會高於車速，因而係由駕駛者後方接近。此外，高階模式會出現滾動波，一階模式不會，滾動波可以解釋走走停停的車流狀態。

### (4) 過去高階模式的問題

因其第二、三個特性波家族奇特的行為，致模式的正確性受質疑。由於後車通常不能給予前車加減速的壓力，對於單車道交通言，波速大於車速者通常不合理。惟在多車道且允許超車的狀態，此種車波大於車速的狀態因

為超車或將兩車道平均，是可能的。

(5) 對 Zhang 高階模式的評論

Zhang 高階模式不會出現車流向後退，且具內部安定性，除可以模化不均衡的車流狀態外，當車流達均衡時更自動退化成 LWR。惟該模式仍有尚需改進之處，即鬆弛項  $\tau$ ，相關文獻通常解釋為駕駛者反應時間  $T$ ，Zhang 係以常數定式  $(v_t + \nu v_x + k(v_e')^2 k_x = (v_e - v)/\tau)$ ，而由微觀跟車模式的安定性分析知， $T$  須隨  $k$  而變。可嘗試修正 Zhang 模式，令其鬆弛項  $\tau = \tau(k)$ 。



## 第七章 連續流模式有限差分解

本章首先介紹有限差分的原理及有效的有限差分需滿足的條件，接著回顧求解一階連續流模式的各種有限差分法，及實際模擬應用於一階線性與一階準線性連續流模式的成效，最後針對 LWR 模式爭議性課題，包括產生向後衝擊波、無限長車隊向前起動，以及獨立等候車隊是否向後退等，進行有限差分模擬。

### 7.1 有限差分原理與各種差分法

#### 7.1.1 有限差分原理

本節簡要說明偏微分方程式採有限差分來近似的原理。首先說明偏微分方程的分類，其次說明差分近似的原理及其準確性，最後說明有效的有限差分應具備的條件。

##### 1. 偏微分方程的分類

偏微分式(partial differential equations, 簡稱 PDE)可分成橢圓型(elliptic)、拋物線型(parabolic)與雙曲線型(hyperbolic)三類，其名稱係以圓錐形的切面(conic sections)來類比，一般係以下示二元二階偏微分式來定義其類別(LeVeque, 2005)：

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (7-1-1)$$

$$b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{elliptic} \\ = 0 \Rightarrow \text{parabolic} \\ > 0 \Rightarrow \text{hyperbolic} \end{cases} \quad (7-1-2)$$

不同種類的偏微分式各有其所代表問題的特性與適用的解法。典型的物理問題，如波松問題(Poisson problem)： $u_{xx} + u_{yy} = g$  屬橢圓型；熱力公式(heat equation)： $u_t = \kappa u_{xx}$  ( $\kappa > 0$ ) 屬拋物線型；波動公式(wave equation)： $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  屬雙曲線型。其中，拋物線型與雙曲線型問題因與時間有關，通常以  $t$  替代  $y$ 。

值得說明者，不論是一階的 LWR 連續流模式，或所謂的高階連續流模式，在分類上均屬波動公式的一種，亦即均屬雙曲線型。

## 2. 差分近似的原理及其準確性

微分方程式一般只有少數可獲得解析解(analytic solutions)。有限差分法係以有限差分式(finite difference equations, 簡稱 FDE)來近似微分式, 使許多微分方程可以近似求解。

LeVeque(2005)以一簡例說明有限差分如何近似求解微分方程, 亦藉之說明近似解的準確性階數(the order of accuracy)。令  $u(x)$  表一個可微分的單變數函數,  $x_0$  為一特定點。假設欲以有限差分法, 以  $x_0$  週邊有限點的  $u$  值來近似求解  $u'(x_0)$ , 則可選擇下示方式:

$$D_+u(x_0) \equiv \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (7-1-3)$$

其中,  $h$  表一微量值。採用上式的原因, 係微分導數的標準定義原本就是寫成  $h \rightarrow 0$  的型式。值得注意的是,  $D_+u(x_0)$  實際上係  $u(x)$  曲線上連接  $x_0$  與  $x_0+h$  兩點弦線的斜率, 如圖 7.1.1 所示。

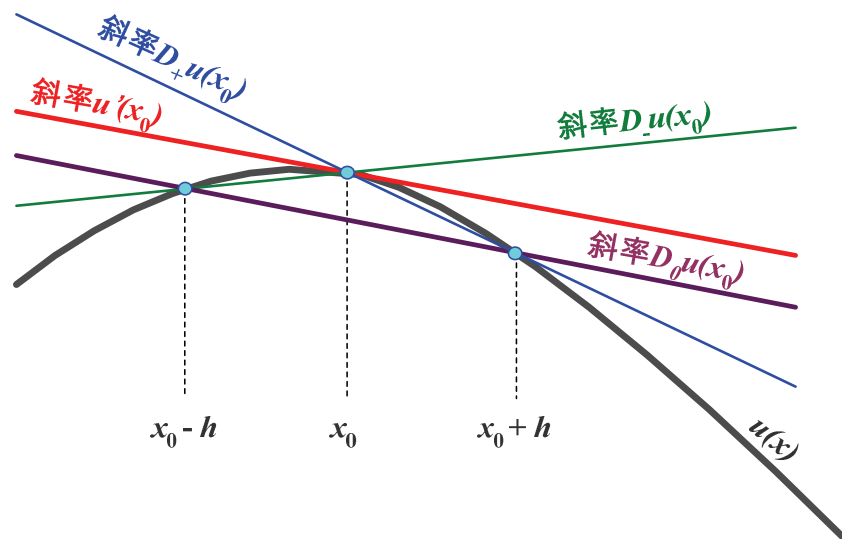


圖 7.1.1 單變數函數差分近似範例

資料來源: LeVeque, R. J., "Finite Difference Methods for Differential Equations," University of Washington, 2005.

式(7-1-3)只評估了  $x \geq x_0$  的部分, 因而係對  $u'(x_0)$  的單邊近似(one-sided approximation)。同理, 亦可採用另一種單邊近似方式:

$$D_-u(x_0) \equiv \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \quad (7-1-4)$$

上述這兩種近似方式對  $u'(x_0)$  均僅有一階準確性(first order accurate), 其誤差大約與  $h$  的大小成比例。

亦可採用所謂的中心近似(centered approximation)，即：

$$D_0 u(x_0) \equiv \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} = \frac{1}{2}(D_+ u(x_0) + D_- u(x_0)) \quad (7-1-5)$$

上式係  $u(x)$  曲線上連接  $x_0-h$  與  $x_0+h$  兩點弦線的斜率，亦係前述兩種單邊近似的平均。而由圖 7.1.1 可看出，中心近似的斜率更接近  $u'(x_0)$ ，即較任何一種單邊近似要來得精確。事實上，這種近似有二階準確性 (second order accurate)，其誤差大約係與  $h^2$  的大小成比例，因此當  $h$  很小時，二階準確性近似的誤差會較一階者小很多。

### 3.有效的有限差分應具備的條件

連續流模式係有時間與空間兩變數的偏微分式，其設定變數微量值的作法係將微分解的時空( $t \geq 0, -L < x < L$ )離散化，一般係切割成網格狀，如圖 7.1.2 所示。惟在求解連續流模式時，並非只是將連續變數及其導數轉換成離散型即可，對於雙曲線系者特別是如此，因為這類模式即便起始資料很平順，亦可能產生不連續解，甚或產生衝擊波(波方向可能與車流向相反)，而衝擊波的存在，尤其當切割得愈來愈細時，對於發展有效的數值近似解將是一大挑戰。

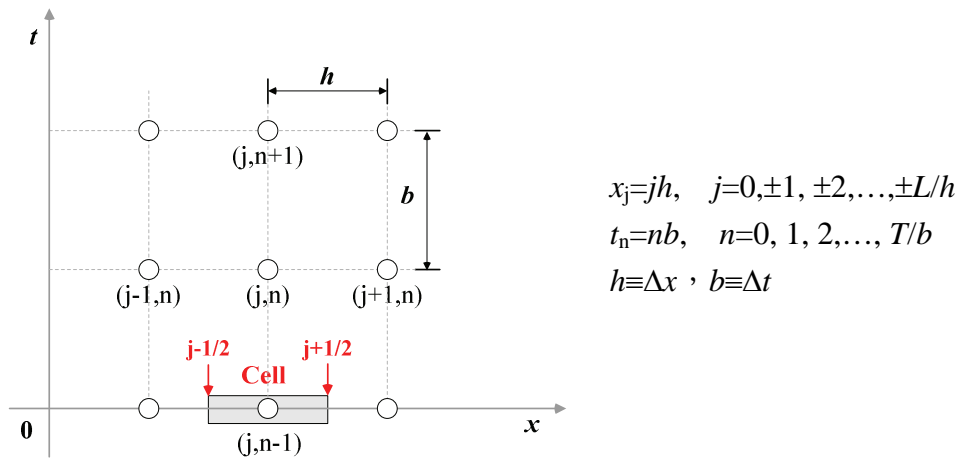


圖 7.1.2 差分的時空網格狀切割

Zhang(2007)指出，任何有效的數值近似均應滿足以下三個條件：

- (1) 一致性(consistency)：只要  $h, b$  夠細，有 FDE 式就會接近原始 PDE 式；
- (2) 安定性(stability)：有限差分產生的誤差，不會隨時間增加而增加；
- (3) 收斂性(convergence)： $h, b$  愈趨近 0，有限差分的極限解會愈趨近原始偏微分式的正確值。

Zhang(2007)說明，有一種特殊的雙曲線 PDE 式，稱為守恆型(conservation form)，其有限差分近似特別能符合上述三個條件。此種特殊的守恆型，可寫成：

$$U_t + F(U)_x = R(U) \quad (7-1-6)$$

如係一階連續流模式的黎曼問題，上式可寫成  $U_t + F(U)_x = 0$ 。

上式之所以稱為守恆型，係因其來自下列的流體守恆現象：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_L U(x, t) dx + \int_{\partial L} F(U) dx = \int_L R(U) dx \quad (7-1-7)$$

例如車流在一路段上的狀況可寫成：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} k(x, t) dx + (kv)(x_2, t) - (kv)(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} r(k, v) dx \quad (7-1-8)$$

使用這種守恆型式可以發展出具守恆性的有限差分近似法，其優點是可以確保衝擊波速的計算正確。而一個有限差分近似能具守恆性，須能寫成：

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}(U_{j+1}^n, U_j^n) - \tilde{F}(U_j^n, U_{j-1}^n)}{\Delta x} = \tilde{R}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n) \quad (7-1-9)$$

其中， $\tilde{F}$  稱為數值通量(numerical flux)，而對車流而言，如  $U$  表密度，且流量係密度的函數，則上式所謂的通量，亦即車流的流率(flow rate)。

當一有限差分式係守恆型式時，其一致性的條件就特別簡單，只要其數值通量函數滿足下式：

$$\tilde{F}(U, U) = F(U) \quad (7-1-10)$$

亦即原由兩不同位置的  $U$  值(例如  $U_{j+1}, U_j$ ，或  $U_j, U_{j-1}$ )來決定的數值通量  $\tilde{F}$ ，如代入同一位置(即代入  $U_j, U_j$ )，其值等於該位置  $U_j$  的原理論通量  $F$ 。

一個具一致性的有限差分式，如滿足某特定的安定性條件，且係線性時(大部分非線性者亦同)，必滿足收斂性，亦即其解必收斂至正確解(LeVeque, 2005)。此安定性條件係由 Courant、Friedrichs 與 Lewy 三人所提出，一般稱為 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)條件，定義如下：

**CFL 條件：**一數值分析法只有當其數值解的應變數值域(numerical domain of dependence) 包含偏微分方程應變數的真值域(the true domain of dependence of the PDE)，方會收斂(LeVeque, 2005)。

CFL 條件中所謂偏微分式應變數的值域，對一階連續流模式而言即是指其特徵曲線的軌跡，即其車波與衝擊波在單位時間傳遞的長度；而數值解的應變數值域則是指利用有限差分法所選取網格(grid)的單位大小。由條件內涵知，滿足 CFL 條件實際的作法係適當的時空切割(LeVeque, 2005)，而對於具守恆型的連續流模

式而言，其須滿足的 CFL 條件為：時空包前進的速度(cell advance speed)，亦即  $\Delta x/\Delta t = h/b$ ，須不小於最大特性根速的絕對值，即：

$$\max \left| \frac{b}{h} \lambda_i \right| \leq 1, i=1, \dots, n \quad (7-1-11)$$

雖然上述安定性條件並未證明亦適用非線性系統，惟由實際應用經驗得知，許多非線性系統確亦適用。由以上的說明知，欲求得連續流模式有效的數值近似，剩餘的工作只是找出能符合一致性、安定性與收斂性條件的數值通量函數(numerical flux function)。

#### 4. 建立數值通量函數

在解釋何謂數值通量函數之前，有必要先澄清式(7-1-9)中  $U_i^j$  代表的涵意。假設  $u(x,t)$  係某積分守恆式的弱解，則可將之改寫成：

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_{n+1}) dx &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(u(x, t)) dx dt \\ &\quad - \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(u(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(u(x_{j-1/2}, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (7-1-12)$$

其中， $j-1/2$  與  $j+1/2$  分表某時空包(cell)  $j$  的左右邊界，如圖 7-1-2 所示。如解釋  $U_j^n$  為時空包的平均值(以車流言，即  $\Delta x$  路段的平均密度)，即：

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \quad (7-1-13)$$

則：

$$\tilde{F}(U_{j+1}^n, U_j^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(u(x_{j+1/2}, t)) dt \quad (7-1-14)$$

表在時段  $(t_n, t_{n+1})$  通過時空包  $i$  邊界  $x_{j+1/2}$  的平均通量(flux)，且：

$$\Delta x \tilde{R} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(u(x, t)) dx dt \quad (7-1-15)$$

表從源頭端在時段  $(t_n, t_{n+1})$  流入時空包  $j$  的平均進流率。有這些定義後，式(7-1-7)即可約縮成式(7-1-9)，並稱之為具守恆性的近似。

如何找數值通量函數？有許多方式可以建立數值通量函數，最符直覺也是最簡單的方式係採用 Godunov 的有限差分法，該法採用時空包的平均值  $U_j^n$  為起始值，對時段  $(t_n, t_{n+1})$  解出每個時空包邊界的黎曼問題局部解(local solutions)，再於  $t_{n+1}$  時間集合這些黎曼問題的局部解，以式(7-1-14)予以平均而得時間  $t_{n+2}$  的新起始值。此一程序會一直重覆，直至時間達  $T/\Delta t$  為止。

應用上述程序，可得式(7-1-16)的 Godunov 型差分公式：

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{F(U_{j+1/2}^{*n}) - F(U_{j-1/2}^{*n})}{\Delta x} = \tilde{R} \quad (7-1-16)$$

其數值通量函數為：

$$\tilde{F}(U_{j+1}^n, U_j^n) = F(U_{j+1/2}^{*n}) \quad (7-1-17)$$

而其流入流出源通量(source flus)可以下式計算：

$$\tilde{R} = R\left(\frac{U_{j+1} + U_{j-1}}{2}\right) \quad (7-1-18)$$

變數  $U_{j+1/2}^{*n}, j=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L/h$  的值可從每一時空包邊界解一系列黎曼問題的解而獲得。事實上，當均衡關係式  $v=v^*(k)$  已給定， $U_{j+1/2}^{*n}$  是很容易計算。

除 Godunov 型差分法外，另可採用 Lax-Friedrichs 的中心差分法，藉之可得下列數值通量函數：

$$\tilde{F}(U_{j+1}^n, U_j^n) = \frac{F(U_{j+1}^n) + F(U_j^n)}{2} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{U_{j+1}^n + U_j^n}{2} \quad (7-1-19)$$

上式函數可簡單證明確符合一致性條件，且代入式(7-1-9)可導得下列之 Lax-Friedrichs 有限差分式：

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n)] + \Delta x \cdot \Delta t \cdot \tilde{R} \quad (7-1-20)$$

暫先忽略流入流出源項，令式(7-1-9)左側第一項的  $U_j^n$  改為  $U_{j-1}^n$ ，其推導如下：

$$\text{式(7-1-9):} \quad \frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}(U_{j+1}^n, U_j^n) - \tilde{F}(U_j^n, U_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow U_j^{n+1} = U_{j-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}(U_{j+1}^n, U_j^n) - \tilde{F}(U_j^n, U_{j-1}^n))$$

代入式(7-1-19)

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_j^{n+1} &= U_{j-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2} (F(U_{j+1}^n) + F(U_j^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_{j+1}^n + U_j^n) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2} (F(U_j^n) + F(U_{j-1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_j^n + U_{j-1}^n) \right] \\ &= U_{j-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2} (F(U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \right] \end{aligned}$$

$$= U_{j-1}^n + \frac{1}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ F(U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n) \right]$$

整理得式(7-1-20)。由此知，Lax-Friedrichs 的差分法有別於其他以前一時間格自身時空包為基礎的作法，而係以前一時間相鄰兩時空包密度的平均來近似，故稱之為中心差分法。

Zhang(2007)說明，直至近年，Lax-Friedrichs 的中心差分法仍係對連續流模式普遍採用的差分方式，最近亦被採用作高階模式的近似方法。在求解速度上，對稀釋解，Lax-Friedrichs 差分法比 Godunov 差分法較快收斂；對衝擊波解，Lax-Friedrichs 差分法收斂較慢。

### 7.1.2 各種有限差分方式

有限差分法除前節介紹的兩種外，依採用遞迴公式的不同，主要分為顯式法(explicit method)與隱式法(implicit method)兩大類。周志忠(1997)說明，顯式有限差分法在計算  $t+1$  時間某路段點的密度值時，可參考  $t$  或  $t$  之前時間的密度值一步一步推算，直到整個定義域的值都求得為止，其方法類似遞迴的觀念，較為簡單易懂；而隱式法在計算  $t+1$  時間的密度值時，除了參考  $t$  或  $t$  之前時間的密度值外，還需參考  $t+1$  時間其他點的密度值來推估，致需藉矩陣的計算才能同時求得整個定義域的值，其方法較為複雜。

雙曲線型偏微分式一般多以顯式法求解，拋物線型偏微分式則多以隱式法求解(LeVeque,2005)，由於連續流模式均屬雙曲線型，故本節僅回顧說明各種顯式有限差分法。

#### 1. 顯式差分的作法

在顯式法中，依所取網格點的不同又可分為 FTFS (Forward in Time-Forward in Space)、FTBS (Forward in Time-Backward in Space)、FTCS(Forward in Time-Centered in Space)、Lax-Friedrichs (簡稱 Lax-F)、Lax-Wendroff (簡稱 Lax-W)、Leapfrog 及 Beam-Warming 等方法。

由前節的說明知，欲利用有限差分法來求解連續流模式，須先將連續流模式的偏微分方程式轉換為近似的有限差分方程式。現考慮 LWR 模式，如下所示：

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \frac{dQ(k)}{dk} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (7-1-21)$$

上式可改寫為 FTFS 有限差分式，其步驟如下：

$$\text{Forward in time} : \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} \approx \frac{k(x,t+\Delta t) - k(x,t)}{\Delta t} \quad (7-1-22)$$

$$\text{Forward in space} : \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \approx \frac{k(x+\Delta x,t) - k(x,t)}{\Delta x} \quad (7-1-23)$$

將上二式帶入式(7-1-21)中，則可得到 FTFS 差分方程(其他差分方程同理可推得)：

$$\frac{k(x, t + \Delta t) - k(x, t)}{\Delta t} + \frac{dQ(k)}{dk} \frac{k(x + \Delta x, t) - k(x, t)}{\Delta x} = 0$$

接下來係切割解空間，選取 $\Delta t=b$ ， $\Delta x=h$ ，並定義每個格點為：

$$\begin{aligned} x_j &= jh, & j &= 0, 1, 2, \dots \\ t_n &= nb, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

則上式的 FTFS 差分方程可改寫為：

$$\frac{k(x_j, t_{n+1}) - k(x_j, t_n)}{b} + \frac{dQ(k)}{dk} \frac{k(x_{j+1}, t_n) - k(x_j, t_n)}{h} = 0 \quad (7-1-24)$$

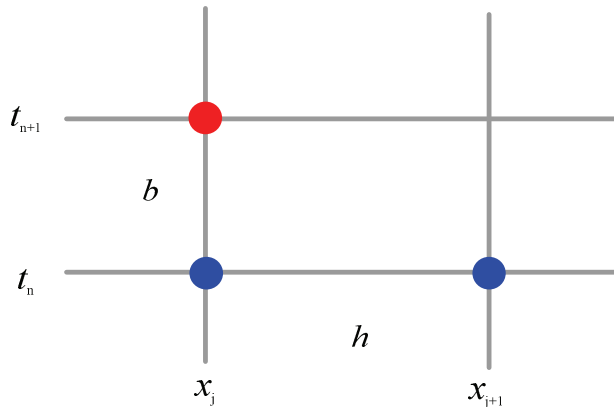
再定義 $k_j^n = k(x_j, t_n)$ ，化簡整理式(7-1-24)，即可得 FTFS 有限差分法之遞迴公式，如式(7-1-25)：

$$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{b}{h} \frac{dQ(k)}{dk} \cdot (k_{j+1}^n - k_j^n) \quad (7-1-25)$$

透過此一遞迴公式及模式的起始條件(initial conditions)與邊界條件(boundary conditions)，便可以一層層地計算出任何時間與地點的密度值。

## 2. 各種顯式有限差分法

由(7-1-25)式不難看出，FTFS 有限差分在計算 $k_j^{n+1}$ 的值時必須參考 $k_{j+1}^n$ 及 $k_j^n$ ，其取點如圖 7.1.3 所示。





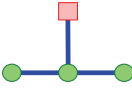
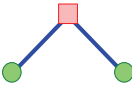
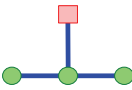
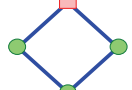
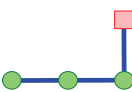
**圖 7.1.3 FTFS 有限差分法的格點選取**

周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所碩士論文，1997。



一階連續流模式的各種顯式有限差分方法，包括 FTFS、FTBS、FTCS、Lax-F、Lax-W、Leapfrog 及 Beam-Warming 等，其有限差分式及格點選擇的方式如表 7-1-1 所示。

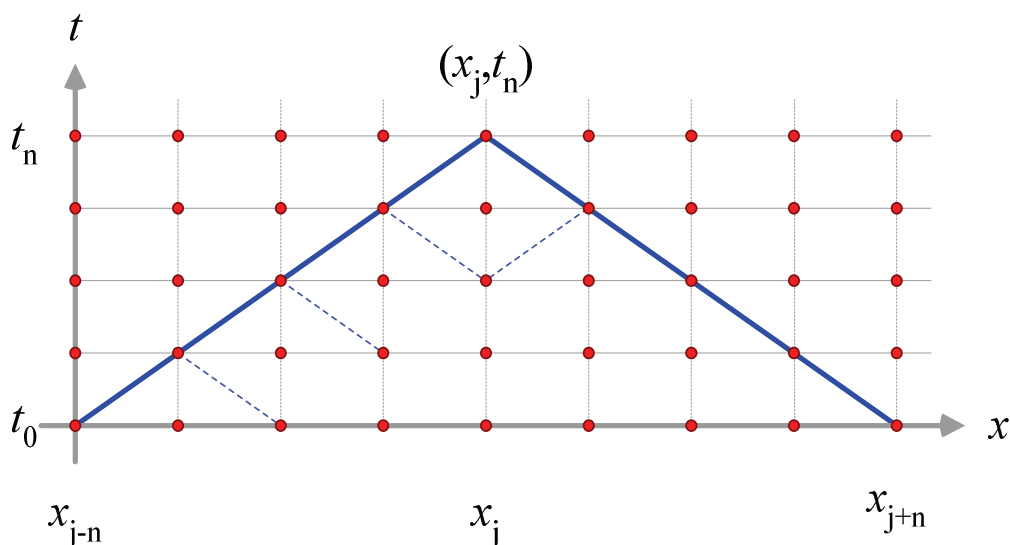
表 7-1-1 一階連續流模式各顯式有限差分式

差分法	格點選擇	有限差分式
FTFS		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{h} (k_{j+1}^n - k_j^n)$
FTBS		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{h} (k_j^n - k_{j-1}^n)$
FTCS		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{2h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n)$
Lax-F		$k_j^{n+1} = (k_{j+1}^n + k_{j-1}^n)/2 - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{2h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n)$
Lax-W		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{2h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n) + \frac{(dQ/dk)^2}{2} \frac{b^2}{h^2} (k_{j+1}^n - 2k_j^n + k_{j-1}^n)$
Leapfrog		$k_j^{n+1} = k_j^{n-1} - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n)$
Beam-Warming		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{b}{2h} (3k_j^n - 4k_{j-1}^n + k_{j-2}^n) + \frac{(dQ/dk)^2}{2} \frac{b^2}{h^2} (k_j^n - 2k_{j-1}^n + k_{j-2}^n)$

資料來源：Thomas. J.W., “Numerical P.D.E. Finite Difference Methods,” 1995.

### 3.有限差分法的收斂性問題

7.1.1 節提及滿足收斂性的 CFL 條件，即「數值解的應變數值域包含偏微分方程應變數的真值域」，現以 Lax-F 有限差分法為例來說明，其應變數的值域如圖 7.1.4 所示。圖中，所有格點(grid point)均係切割  $x$  軸與  $t$  軸所有網格線的交點，則以 Lax-F 有限差分法求算  $(x_j, t_n)$  點密度值時所需要用到的格點，由表 7-1-1 知，為  $(x_{j-1}, t_{n-1})$  與  $(x_{j+1}, t_{n-1})$ ，而計算  $(x_{j-1}, t_{n-1})$  點密度值時所需要用到的格點為  $(x_{j-2}, t_{n-2})$  與  $(x_{j-1}, t_{n-2})$ ，依此類推可知，求算  $(x_j, t_n)$  點密度值時所需要用到的所有格點均落在圖 7.1.4 中整個三角形的內部區域，該區域即稱為數值解的應變數值域；而與  $(x_j, t_n)$  點相交所有特徵曲線通過的區域則稱為其解析解的應變數的值域。當特徵曲線通過的區域落於這個三角形內，則稱此數值解法滿足 CFL 收斂條件。



**圖 7.1.4 Lax-F 有限差分法的應變數值域**

周志忠,「車流波動方程式數值解法之研究」,國立交通大學交通運輸研究所碩士論文,1997。

收斂性問題另牽涉到時空的切割。例如 Payne(1979)限制  $\Delta t/\Delta x < 22$  秒/英哩 (相當於  $\Delta x/\Delta t > 100$  公里/小時), 若時間以小時為單位而空間以公里為單位, 則時間切割數至少必須為空間切割數的 100 倍以上才會收斂。例如假設欲模擬車流的最快時速為 100 公里/小時, 現將 1 公里路段以 100 等分切割 ( $\Delta x = 1/100$  公里), 則 1 小時須以 1/10,000 等分切割 ( $\Delta t = 1/10,000$  小時), 如此, 則車輛在  $\Delta t = 1/10,000$  小時遞增時間中行駛的最長距離為 1/100 公里, 恰等於  $\Delta x$ , 換言之, 車流每  $\Delta t$  在空間上的運動量, 均不會超出模擬時的  $\Delta x$  遞增距離, 而會落在鄰接的時空包中。由此知, 在大規模的路網中, 此種近似解法須花費龐大的計算時間才能獲得夠精確且符合收斂條件的數值解。

## 7.2 一階線性連續流模式之有限差分模擬

周志忠(1997)曾針對一階線性連續流模式, 以各種有限差分法求解其在不同的車流起始條件與邊界條件下之數值近似解, 再與解析解比較, 從而選出較好的有限差分法, 以作為求解其他連續流模式的基礎。其設定的起始條件與邊界條件係分為連續函數與不連續函數兩類, 本節重點回顧之。

### 7.2.1 線性模式之有限差分式

考慮單車道一階連續流模式, 令  $dQ/dk = A$ ,  $A$  為常數, 則可定出一個線性連續流模式如式(7-2-1), 表示整體車流不論任何狀態均是以  $A$  的波速等速前進。

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + A \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (7-2-1)$$

令時空切割量 $\Delta t=b$ ， $\Delta x=h$ ，則依前節的分析，可推導得單車道線性連續流模式之有限差分式及其收斂條件，如表 7-2-1 所示。由於線性連續流模式的特徵曲線斜率固定為  $A$ ，故每一時-空的 CFL 收斂條件均應為 $\left|\frac{b}{h}\lambda_i\right|\leq 1$ ，惟部分差分法另有外加的特殊條件方會收斂。

表 7-2-1 一階線性連續流模式各顯式有限差分式及其收斂條件

差分法	格點選擇	有限差分式	CFL 收斂條件
FTFS		$k_j^{n+1} = k_j^n - A \cdot \frac{b}{h} (k_{j+1}^n - k_j^n)$	$A < 0, \left \frac{b}{h} A\right  \leq 1$
FTBS		$k_j^{n+1} = k_j^n - A \cdot \frac{b}{h} (k_j^n - k_{j-1}^n)$	$A > 0, \left \frac{b}{h} A\right  \leq 1$
FTCS		$k_j^{n+1} = k_j^n - A \cdot \frac{b}{2h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n)$	unstable
Lax-F		$k_j^{n+1} = (k_{j+1}^n + k_{j-1}^n)/2 - A \cdot \frac{b}{2h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n)$	$\left \frac{b}{h} A\right  \leq 1$
Lax-W		$k_j^{n+1} = k_j^n - A \cdot \frac{b}{2h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n) + \frac{A^2}{2} \frac{b^2}{h^2} (k_{j+1}^n - 2k_j^n + k_{j-1}^n)$	$\left \frac{b}{h} A\right  \leq 1$
Leapfrog		$k_j^{n+1} = k_j^{n-1} - A \cdot \frac{b}{h} (k_{j+1}^n - k_{j-1}^n)$	$\left \frac{b}{h} A\right  \leq 1$
Beam-Warming		$k_j^{n+1} = k_j^n - A \cdot \frac{b}{2h} (3k_j^n - 4k_{j-1}^n + k_{j-2}^n) + \frac{A^2}{2} \frac{b^2}{h^2} (k_j^n - 2k_{j-1}^n + k_{j-2}^n)$	$0 \leq \frac{b}{h} A \leq 2$

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

## 7.2.2 車流起始條件與邊界條件均為連續函數

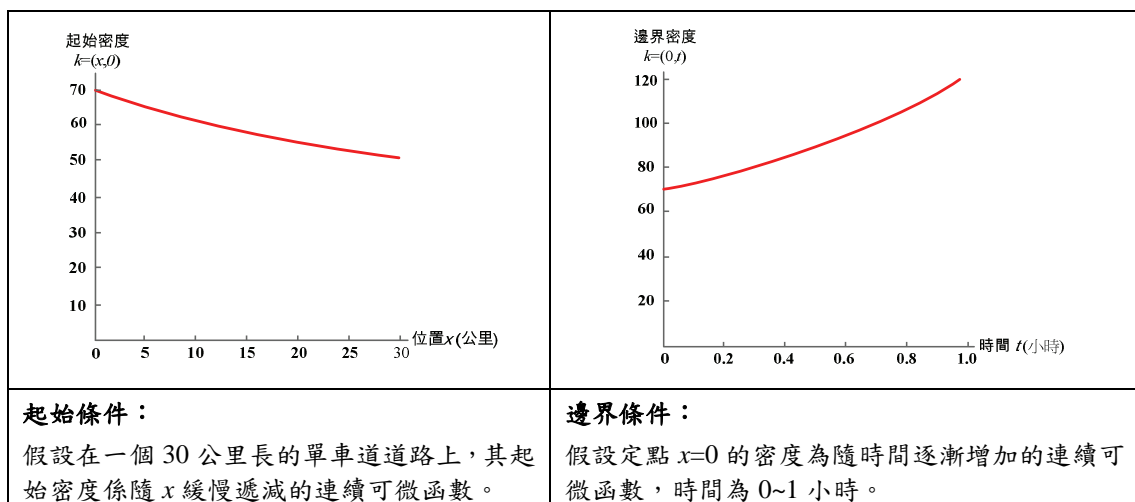
欲求式(7-2-1)的解析解，須有適當的車流起始條件與邊界條件。起始條件係定義  $t=0$  時，道路上各點的車流密度；邊界條件則定義道路上某一固定點，如  $x=0$ ，其各時間車流密度的變化情形。

周志忠(1997)以一階線性連續流模式為例，假設波速  $A$  固定為 30 公里/小時，起始條件與邊界條件皆為連續函數，來說明各種差分法近似的結果。該研究所舉問題並不產生衝擊波，較為單純，其各方程式如下(參閱圖 7.2.1)：

$$\text{一階線性連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + 30 \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} \quad k(x,0) = 40 + 30 \exp(-x/30)$$

$$\text{邊界條件：} \quad k(0,t) = 40 + 30 \exp(t)$$



**圖 7.2.1 一階線性連續流問題起始與邊界條件均連續範例**

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

**解析解：**

本題的解析解可由特徵曲線法求算出，如下式：

$$k(x,t) = 40 + 30 \exp(t-x/30)$$

**數值近似解：**

為瞭解各差分法與 CFL 收斂條件間的關係，可以下列不同時-空切割比來分析比較其與解析解間的誤差( $A=30$  公里/小時)：(單位： $\Delta x$  為公里； $\Delta t$  為小時)

切割比小於  $A$ ： $(\Delta t/\Delta x) \times A = 0.50$ ， $\Delta x = 0.6$ ， $\Delta t = 0.010$  ( $\Delta x/\Delta t = 60$  公里/小時)

切割比等於  $A$ ： $(\Delta t/\Delta x) \times A = 1.00$ ， $\Delta x = 0.6$ ， $\Delta t = 0.020$  ( $\Delta x/\Delta t = 30$  公里/小時)

切割比大於  $A$ ： $(\Delta t/\Delta x) \times A = 1.25$ ， $\Delta x = 0.6$ ， $\Delta t = 0.025$  ( $\Delta x/\Delta t = 24$  公里/小時)

模擬結果如表 7-2-2 所示。由表可以看出，在求解起始條件與邊界條件為連續函數的線性偏微分式，各類有限差分法只要滿足解析解的應變數值域落於數值解的應變數值域內(CFL 條件)，其數值解都會收斂穩定且與解析解十分近似。此外，各有限差分法在不同的切割比下，會產生不同的模擬結果，而時空切割結果恰滿足收斂條件的邊界值者(即 $\Delta x/\Delta t = A$ )，其數值解的表現最佳，誤差最小。

**表 7-2-2 起始與邊界條件均為連續函數各有限差分法的誤差評比**

切割比	差分方法	密度最大誤差	密度平均誤差	收斂 條件	
小 於 $A$	1. FTFS	$6.6 \times 10^{25}$	$2.7 \times 10^{23}$	$A < 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	2. FTBS	0.146776	0.051425	$A > 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	3. FTCS	3.696809	0.144678	unstable	不滿足
	4. Leapfrog	0.003515	0.000904	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	5. Lax-F	0.424556	0.149988	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	6. Lax-W	0.003528	0.000491	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	7. Beam-Warming	0.009327	0.002449	$0 \leq (b/h) \times A \leq 2$	滿足
等 於 $A$	1. FTFS	$4.9 \times 10^{19}$	$2.3 \times 10^{17}$	$A < 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	2. FTBS	0.000008	0.000002	$A > 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	3. FTCS	3009.842773	47.167297	unstable	不滿足
	4. Leapfrog	0.000008	0.000002	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	5. Lax-F	0.000014	0.000003	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	6. Lax-W	0.000069	0.000030	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	7. Beam-Warming	0.000153	0.000045	$0 \leq (b/h) \times A \leq 2$	滿足
大 於 $A$	1. FTFS	$4.3 \times 10^{17}$	$2.1 \times 10^{15}$	$A < 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	2. FTBS	714.174316	5.964547	$A > 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	3. FTCS	17919.568359	232.821991	unstable	不滿足
	4. Leapfrog	9847774	142915.031250	$ (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	5. Lax-F	2.232188	0.066314	$ (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	6. Lax-W	6832693	98853.804688	$ (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	7. Beam-Warming	0.003971	0.000891	$0 \leq (b/h) \times A \leq 2$	滿足

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

### 7.2.3 起始條件或邊界條件為不連續函數

考慮以下方程式，假設波速  $A$  固定為 30 公里/小時，起始條件為一不連續函數，邊界條件則為連續函數。此類問題在  $x$  軸密度不連續的地方會產生衝擊波，其方程式如下(參閱圖 7.2.2)：

$$\text{一階線性連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + 30 \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 70 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 0 \leq x \leq 15 \quad (\text{公里}) \\ 0 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 15 < x \leq 30 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

$$\text{邊界條件：} \quad k(0,t) = 100 - 30\exp(t)$$

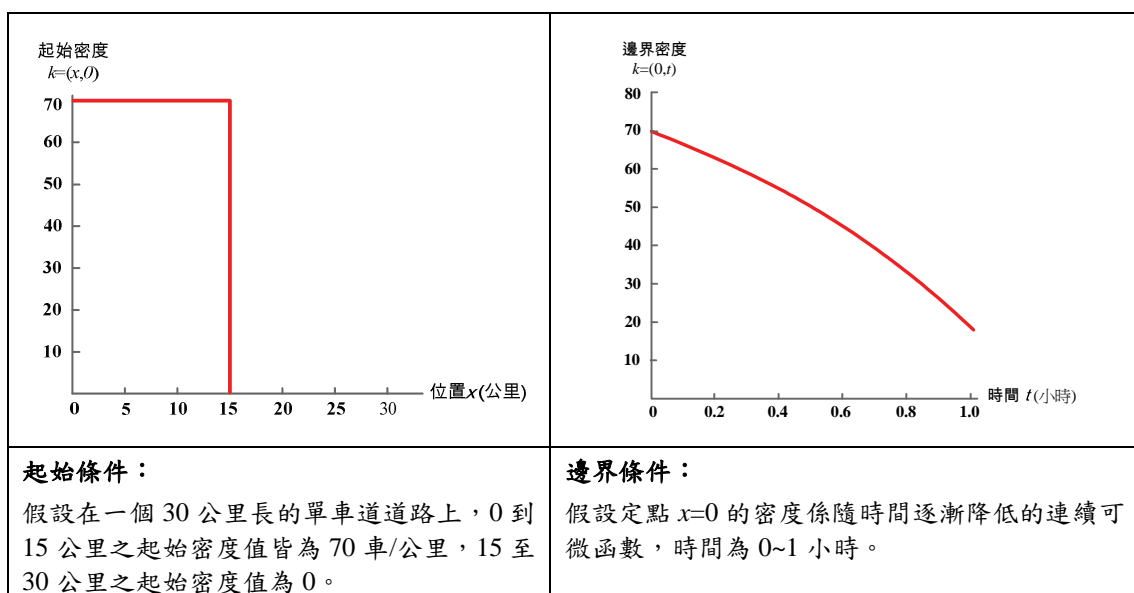


圖 7.2.2 一階線性連續流問題起始條件不連續範例

值得說明者，上示邊界條件表在  $x=0$  處的密度係隨時間而遞減，在此種狀況只有讓停等車隊倒車後退方有可能發生，是實務上不會出現的狀況。

**解析解：**

本題的解析解可由特徵曲線法求算出，其特徵曲線的斜率即為波速  $A=30$  公里/小時，正確解如下所示：

當	$x-30t$	$< 0$	時，	$k(x,t) = 100 - 30\exp(t-x/30)$	車/公里
當	$0 \leq x-30t$	$\leq 15$	時，	$k(x,t) = 70$	車/公里
當	$15 < x-30t$	$\leq 30$	時，	$k(x,t) = 0$	車/公里

### 數值近似解：

本題雖起始條件係為不連續函數，惟其分析方法與前題完全相同。切割比小於  $A$  ( $\Delta x=0.6$ ,  $\Delta t=0.01$ )、等於  $A$  ( $\Delta x=0.6$ ,  $\Delta t=0.02$ ) 及大於  $A$  ( $\Delta x=0.6$ ,  $\Delta t=0.025$ ) (單位： $\Delta x$  為公里； $\Delta t$  為小時) 三種模擬結果與解析解的誤差評比如表 7-2-3 所示。由表可以看出，在求解起始條件與邊界條件為不連續函數的線性偏微分式，各類有限差分法只要滿足 CFL 條件，其數值解都會收斂穩定且與解析解十分近似。惟各個有限差分法在不同的切割比下，會產生與前例題相似的模擬結果：

- (1) 當解析解的應變數值域落於數值解的應變數值域內，且兩者恰好相等時 (即  $\Delta x/\Delta t = A$ ，恰滿足 CFL 條件)，其模擬結果最近似解析解。
- (2) 當切割比大於  $A$  ( $\Delta t/\Delta x > A$ ) 時，不滿足 CFL 條件；當切割比小於  $A$  ( $\Delta t/\Delta x < A$ ) 時，雖滿足 CFL 條件，但數值解在密度不連續的地方會有震盪 (oscillatory) 的情形發生，致誤差反較恰為相等時者大。

周志忠(1997)對上述模擬結果歸納出以下評論：

- (1) 增加  $x$  軸或  $t$  軸的切割數，亦即將空間或時間切割得更細小，其模擬結果未必愈精確，模式的精確性主要取決於  $\Delta x$ 、 $\Delta t$  與波速  $A$  這三者間的關係 (即是否滿足 CFL 收斂條件)。
- (2) 不管起始條件或邊界條件為連續或不連續函數，只要滿足 CFL 收斂條件，且時空切割方式恰與 CFL 條件值相等時，其所模擬出的結果最精確。例如  $A=30$  公里/小時，則  $\Delta x=0.6$  公里， $\Delta t=0.02$  小時 ( $\Delta x/\Delta t = 30$  公里/小時) 恰符合 CFL 條件，而  $\Delta x=0.6$  公里， $\Delta t=0.01$  小時 ( $\Delta x/\Delta t = 60$  公里/小時) 亦符合 CFL 條件且時空切割比前者更細，但其近似解的精確度反而不如前者。
- (3) 綜合表 7-2-2 與表 7-2-3 之結果可確定，Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 這三個差分法較佳，可用以進行後續 LWR 一階準線性連續流模式的求解。FTBS 法所求得的结果雖亦十分理想，惟其 CFL 收斂條件必須滿足波速為正，而 LWR 連續流模式的波可能向前傳遞 (波速為正) 亦可能向後傳遞 (波速為負)，致 FTBS 並不適用。

而由表 7-2-2 與表 7-2-3 知，Beam-Warming 差分法近似的結果不比 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 這三個差分法差，然未被周志忠(1997)選來作為後續 LWR 連續流模式的近似求解法，該研究亦未說明其原因。事實上其漏說明的係 Beam-Warming 差分法的收斂條件係  $0 \leq (b/h) \times A \leq 2$ ，因  $b/h$  均正，所以  $A$  須大於 0，亦即與 FTBS 法額外的要求相同，均有波速須為正的限制，只是周志忠(1997)所舉的上述二個範例其波速恰均為正的常數，並未出現 Beam-Warming 差分法不滿足的狀況，反而呈現不錯的結果。簡言之，Beam-Warming 差分法亦不適用 LWR 連續流模式的近似求解，其原因與 FTBS 法同。

表 7-2-3 起始條件為不連續函數各有限差分法的誤差評比

切割比	差分方法	密度最大誤差	密度平均誤差	收斂 條件	
小 於 A	1.FTFS	$3.9 \times 10^{30}$	$7.6 \times 10^{27}$	$A < 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	2.FTBS	35.000027	1.475966	$A > 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	3.FTCS	374477.4375	12434.767578	unstable	不滿足
	4.Leapfrog	52.500004	4.269337	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	5.Lax-F	40.468750	2.753543	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	6.Lax-W	45.530106	1.424144	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	7.Beam-Warming	38.381233	1.025928	$0 \leq (b/h) \times A \leq 2$	滿足
等 於 A	1.FTFS	$3.0 \times 10^{24}$	$1.4 \times 10^{22}$	$A < 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	2.FTBS	0.000198	0.000001	$A > 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	3.FTCS	205847344	3406368.50	unstable	不滿足
	4.Leapfrog	0.000202	0.000080	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	5.Lax-F	0.000008	0.000001	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	6.Lax-W	0.000389	0.000003	$ (b/h) \times A  \leq 1$	滿足
	7.Beam-Warming	0.000175	0.000015	$0 \leq (b/h) \times A \leq 2$	滿足
大 於 A	1.FTFS	$2.7 \times 10^{22}$	$1.4 \times 10^{20}$	$A < 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	2.FTBS	2474090.0	26358.465	$A > 0,  (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	3.FTCS	$1.0 \times 10^9$	13715596	unstable	不滿足
	4.Leapfrog	$2.5 \times 10^{12}$	$3.7 \times 10^{10}$	$ (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	5.Lax-F	14066.5	324.57	$ (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	6.Lax-W	$4.4 \times 10^{14}$	$2.9 \times 10^{11}$	$ (b/h) \times A  \leq 1$	不滿足
	7.Beam-Warming	59.062500	1.026638	$0 \leq (b/h) \times A \leq 2$	滿足

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。



### 7.3 一階準線性連續流模式有限差分之比較

經分析比較後，周志忠(1997)選出 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三個差分法，進行一階準線性連續流模式的近似求解並作比較，本節回顧說明之。

#### 7.3.1 一階準線性連續流模式之有限差分式

一階準線性連續流模式即前章所稱之 LWR 連續流模式，其流量  $q(x,t)$  與密度  $k(x,t)$  間不是線性關係，流體守恆式如式(7-3-1)所示：

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (7-3-1)$$

為求簡化，周志忠(1997)以 Greenshields 水流模式設定  $q$ 、 $k$  關係，如式(7-3-2)所示，式中的  $u_f$  表自由流速率(free flow speed)，而為免與差分式下標混淆，原壅塞密度(jam density)  $k_j$  特改寫成  $k_{jam}$ 。

$$q(k) = u_f \times \left(1 - \frac{k}{k_{jam}}\right) \times k \quad (7-3-2)$$

將式(7-3-2)的  $q$ - $k$  關係式帶入式(7-3-1)中，可得到滿足 Greenshields 水流模式的一階準線性連續流模式，如式(7-3-3)所示。

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f \left(1 - \frac{2k}{k_{jam}}\right) \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (7-3-3)$$

欲近似求解上示一階準線性連續流模式，可將之轉換成差分式，如表 7-3-1 所示。而以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 差分演算法來模擬式(7-3-1)時，其 CFL 收斂條件皆為：

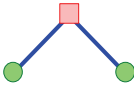
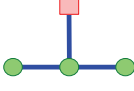
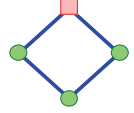
$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left[ u_f \times \left(1 - \frac{2k}{k_{jam}}\right) \right] \right| \leq 1 \quad (7-3-4)$$

在式(7-3-4)中， $k$  值(密度)係隨時間、位置而不同，致其 CFL 收斂條件會隨之改變，這對有限差分法切割比的選取會造成困擾。實務上通常將式(7-3-4)改為一個跟密度值無關的收斂條件，如式(7-3-5)所示。

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \times u_f \right| \leq 1 \quad (7-3-5)$$

式(7-3-5)的由來，主要係因 $(1-2k/k_{jam})$ 的絕對值小於等於1(對 Greenshields 模式而言)，故所有滿足式(7-3-5)的切割比 $\Delta t/\Delta x$ ，必滿足式(7-3-4)的收斂條件。事實上，對含 Greenshields 水流模式的連續流模式言，其最大波速，不論是車波或衝擊波，均小於等於 $u_f$ ，因而滿足式(7-3-5)，其連續流車波在 $\Delta t$ 的行駛距離必落在 $\Delta x$ 內。

表 7-3-1 LWR 連續流模式三種顯式有限差分法

顯式差分法	格點選擇	有限差分方程
Lax-F		$k_j^{n+1} = \frac{(k_{j+1}^n + k_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_f \times \left( 1 - \frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j+1}^n - u_f \times \left( 1 - \frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j-1}^n \right)$
Lax-W		$k_j^{n+1} = k_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_f \left( 1 - \frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j+1}^n - u_f \left( 1 - \frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j-1}^n \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left( u_f \left( 1 - \frac{2k_j^n}{k_{jam}} \right) \right) \times \left\{ u_f \left( 1 - \frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j+1}^n - 2u_f \left( 1 - \frac{k_j^n}{k_{jam}} \right) \times k_j^n + u_f \left( 1 - \frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j-1}^n \right\}$
Leapfrog		$k_j^{n+1} = k_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_f \times \left( 1 - \frac{k_{j+1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j+1}^n - u_f \times \left( 1 - \frac{k_{j-1}^n}{k_{jam}} \right) \times k_{j-1}^n \right)$

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

### 7.3.2 起始條件與邊界條件為連續函數

對於一階準線性連續流模式的分析，周志忠(1997)先分析簡單的狀態，假設流量-密度的關係滿足 Greenshields 的水流模式，起始條件與邊界條件均為連續函數，其方程式如下(起始與邊界條件參閱圖 7.2.1)：

$$\text{LWR 連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f \left( 1 - \frac{2k}{k_{jam}} \right) \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} \quad k(x,0) = 40 + 30 \exp\left(-\frac{1}{30}x\right)$$

$$\text{邊界條件：} \quad k(0,t) = 40 - 30 \exp(t)$$

自由車流速率  $u_f = 120$  公里/小時；擁擠車流密度  $k_{jam} = 200$  車/公里

數值近似解：

數值解分別利用 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三種差分法來進行模擬，並在  $x$  軸以 1 公里等間隔切割( $\Delta x = 1$  公里)，在  $t$  軸以 1 小時切割 120 等分( $\Delta t = 1/120$  小

時)，亦即 $\Delta x/\Delta t=120$  公里/小時= $u_f$ ，使其切割比恰滿足 CFL 收斂條件。

各有限差分法模擬密度、速率、流率隨時間空間變化的結果如圖 7.3.1 所示。由圖可以看出，三種差分法所求出的解頗為類似，但 Lax-W 與 Leapfrog 在位置為 1 公里、時間接近 1 小時處，密度突然陡降，速率突然陡增，似不合理，Lax-F 的解則較為平滑。

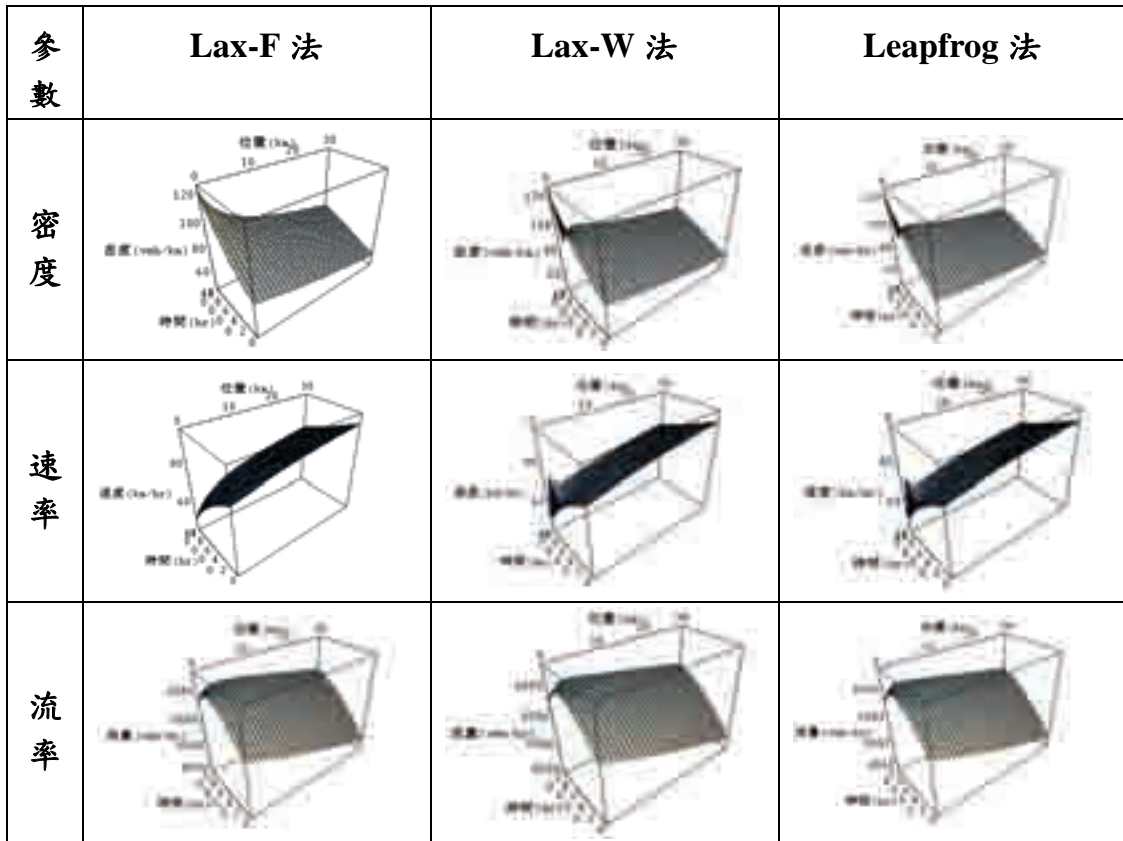


圖 7.3.1 LWR 模式起始與邊界條件均連續的有限差分解

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

### 7.3.3 起始條件或邊界條件為不連續函數

周志忠(1997)另考慮邊界條件為連續函數，但起始條件為不連續函數的問題，在  $x$  軸密度不連續的地方會有衝擊波產生，其方程式如下(起始與邊界條件參閱圖 7.2.2)：

$$\text{LWR 連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f \left( 1 - \frac{2k}{k_{jam}} \right) \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 70 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 0 \leq x \leq 15 \quad (\text{公里}) \\ 0 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 15 < x \leq 30 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

$$\text{邊界條件：} \quad k(0,t) = 100 - 30\exp(t)$$

自由車流速率  $u_f=120$  公里/小時；擁擠車流密度  $k_{jam}=200$  車/公里

### 數值近似解：

$x-t$  軸的切割同前，使  $\Delta x/\Delta t = 120$  公里/小時 =  $u_f$ ，Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三種演算法模擬出的密度、速率與流率在時空上的變化情形如圖 7.3.2 所示。

由於起始條件在  $x=15$  公里處密度由 70 車/公里劇降為 0，因此隨著時間的增加，在路段上 15 公里至 30 公里的密度值會快速地增加，然其密度值仍應小於 70 車/公里；而邊界的密度條件為一隨時間遞減的函數，如前所述，是允許車輛倒車後退方可能發生，並不符實務，惟在數學上，此種設定表進入 0 公里處的車輛逐漸減少，致下游道路上每一點的密度會隨時間而減少。

由圖 7.3.2 的模擬結果知，Lax-F 法密度的變化與事前的分析十分吻合，且明顯較為平滑；Lax-W 法在路段 15 至 30 公里處，密度會先增後減，並發生最高密度值超過 70 車/公里 (達 75 車/公里) 的不合理狀況；Leapfrog 法模擬結果則有震盪的情形發生，且最高密度亦超過 70 車/公里，結果更無法令人滿意。

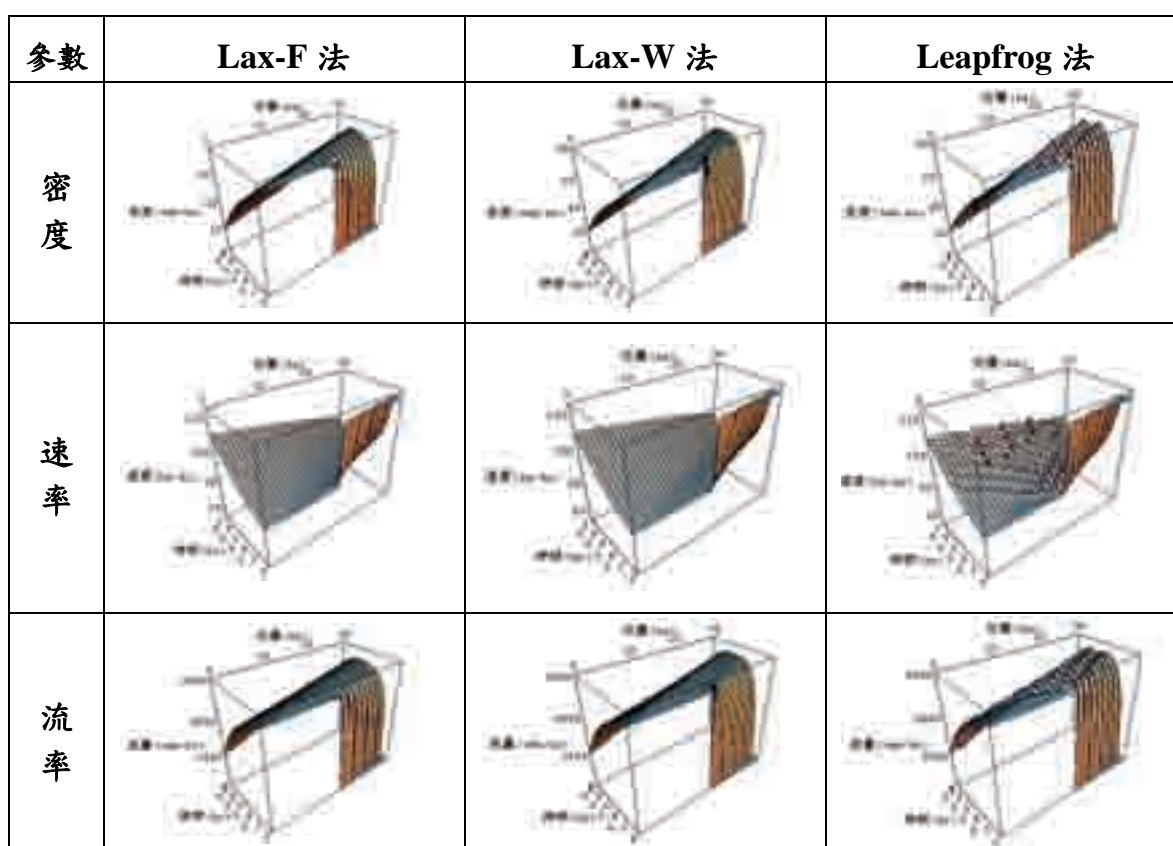


圖 7.3.2 LWR 模式起始條件不連續的有限差分解

資料來源：周志忠，「車流波動方程式數值解法之研究」，國立交通大學交通運輸研究所，碩士論文，1997。

## 7.4 一階準線性連續流模式嚴苛交通案例分析

由前節的回顧知，周志忠(1997)針對一階線性連續流模式，對所有可能的有限差分方法進行全面模擬比較，從中界定 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等三種方法較佳。其後針對一階準線性連續流模式(即 LWR 模式)，以前述較佳的三種差分方法進行模擬分析，獲得 Lax-F 法最佳、Lax-W 法會發生局部不合理狀況、Leapfrog 法會發生不當震盪情形等的研究成果，殊屬難得。惟該研究所模擬的車流情境並未涵蓋嚴苛的交通案例，亦未求得停止車隊向前起動波的 LWR 模式解析解，分析上仍有不足。

基於以上考量，本研究針對 LWR 模式會產生向上游回溯衝擊波的狀況、長停等車隊的起動狀況(扇形起動波)，及有限長度車隊的單向起動(不會向後退)等常引起爭議且相當嚴苛的交通案例，進行補充分析，並藉紙上剪力圖技術儘量求出解析解，至於採用的差分方法，則援用周志忠(1997)的研究成果，僅限 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等三種。

為統一說明，以下的模擬中，LWR 模式係採用 Greenshields 的  $q=ku$  關係式，其參數亦以接近實際交通狀況的方式設定，分別為：自由流速率  $u_f=80$  公里/小時，壅塞密度  $k_{jam}=120$  車/公里 ( $q_{max}=2400$  車/小時)。有限差分的時空切割，則均係將  $x$  軸以  $\Delta x=1$  公里切割，將  $t$  軸以  $\Delta t=1/80$  小時切割，即  $\Delta x/\Delta t=80$  公里/小時  $= u_f$ ，使其切割比恰滿足 CFL 收斂條件，由周志忠(1997)的分析知，此種切割法可獲得最精確的近似結果。

### 7.4.1 產生向上游回溯衝擊波的有限差分模擬

考慮一均勻到達流碰上停等車隊產生向上游回溯衝擊波的問題。模化上，下列 LWR 連續流模式，配合不連續的起始與連續的邊界條件如圖 7.4.1 所示，其方程式如下：

$$\text{LWR 連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f \left( 1 - \frac{2k}{k_{jam}} \right) \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 30 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 0 \leq x \leq 30 \quad (\text{公里}) \\ 120 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 30 < x \leq 40 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

$$\text{邊界條件：} \quad k(0,t) = 30 \text{ 車/公里}, \quad k(40,t) = 120 \text{ 車/公里}$$

解析解：

$$\text{Greenshields 水流模式： } q = ku = u_f k \left( 1 - \frac{k}{k_{jam}} \right)$$

代入  $k=30$ ，得  $q = 80 \times 30 \left( 1 - \frac{30}{120} \right) = 1800$ ；代入  $k=120$ ，得  $q=0$ 。依式(6-1-7)衝擊波公式，得向後衝擊波速：

$$c_{lr} = \frac{q(k_r) - q(k_l)}{k_r - k_l} = \frac{0 - 1800}{120 - 30} = -20 \text{ 公里/小時}$$

亦即，解析解為：

$$k(x,t)=120, \quad x \geq 30-20t$$

$$k(x,t)=30, \quad x < 30-20t$$

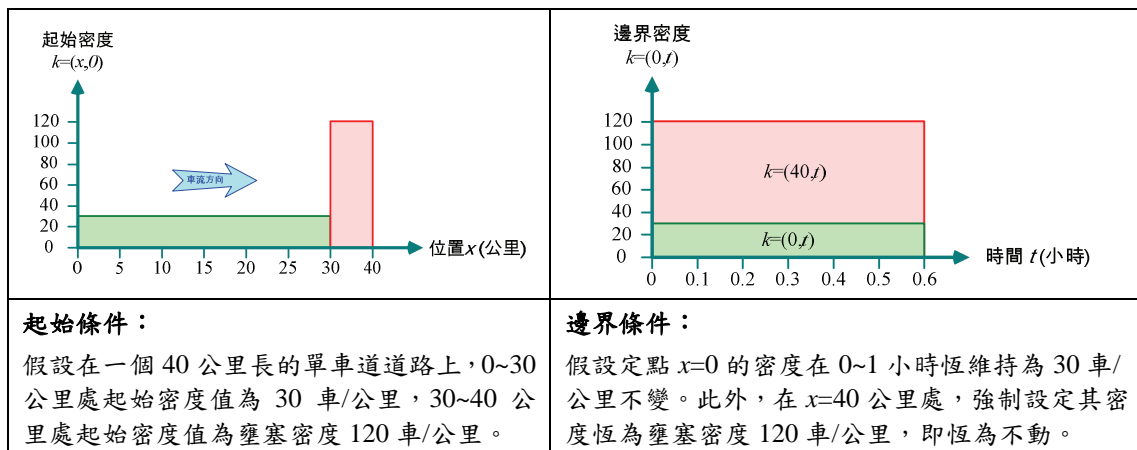


圖 7.4.1 LWR 模式產生向上游回溯衝擊波的起始與邊界條件範例

數值近似解：

Leapfrog 法模擬結果如圖 7.4.2 所示。其在模擬不久即出現振盪，且隨時間增加而愈來愈大，呈現不安定的狀態。亦因為振盪不斷擴大，因此圖 7.4.2 僅呈現模擬 0~20/80 小時以內的狀況，惟由圖知，模擬 1/4 小時就已出現明顯的振盪現象。

Lax-W、Lax-F 二種有限差分法模擬出的密度隨時間空間的變化如圖 7.4.3 與圖 7.4.4 所示，由圖可看出：

- (1) Lax-W、Lax-F 兩法均能模擬出向上游回溯衝擊波。與解析解比較知，Lax-W 法的衝擊波速明顯過小。例如由鳥瞰圖知，至 1 小時後( $t=80$ )，Lax-W 法模擬的衝擊波尾端僅由第 30 公里處向上游回溯至第 20 公里處，而由解析解知，此種狀態下的向後衝擊波，其波速為 -20 公里/小時，亦即 1 小時後，



衝擊波的尾端應由第 30 公里處向上游回溯至第 10 公里處(如解析解鳥瞰圖)，Lax-W 法模擬出來的衝擊波速約只有解析解的一半；

- (3) Lax-F 有限差分法與解析解一致，經 1 小時模擬，其向上游回溯衝擊波尾端亦由第 30 公里處向上游回溯至第 10 公里處，與解析解同。而由鳥瞰圖進一步比較 Lax-F 法與解析解的模擬結果知，二者明顯的不同是解析解的衝擊波沒有寬度，而 Lax-F 法則有寬度。惟必須說明者，此種寬度並非因 Lax-F 法比 LWR 理論模式更能反映駕駛者接近等候車隊的減速行為，使整體車流在衝擊波處呈現漸變狀，而係因其 $\Delta x$ 、 $\Delta t$ 切割不夠細，致衝擊波行至某時空包時，其密度需在 $\Delta x$ 間平均而被平滑化所致。簡言之，任何有限差分法均不可能改良或改變原偏微分式的物理意義，有限差分法能作到的，最多只是儘可能的相似，如此而已。

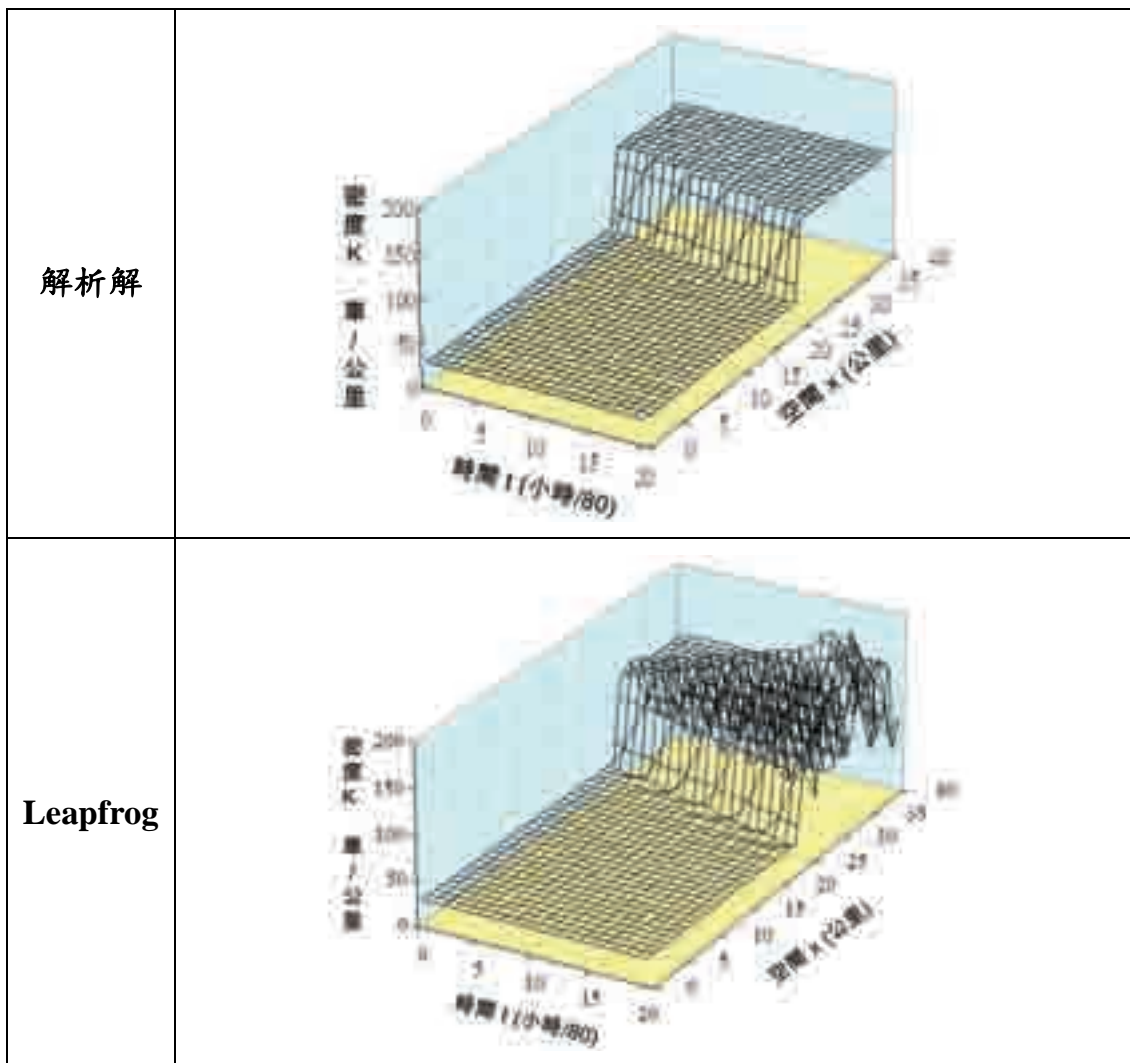


圖 7.4.2 Leapfrog 模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波(側面圖)

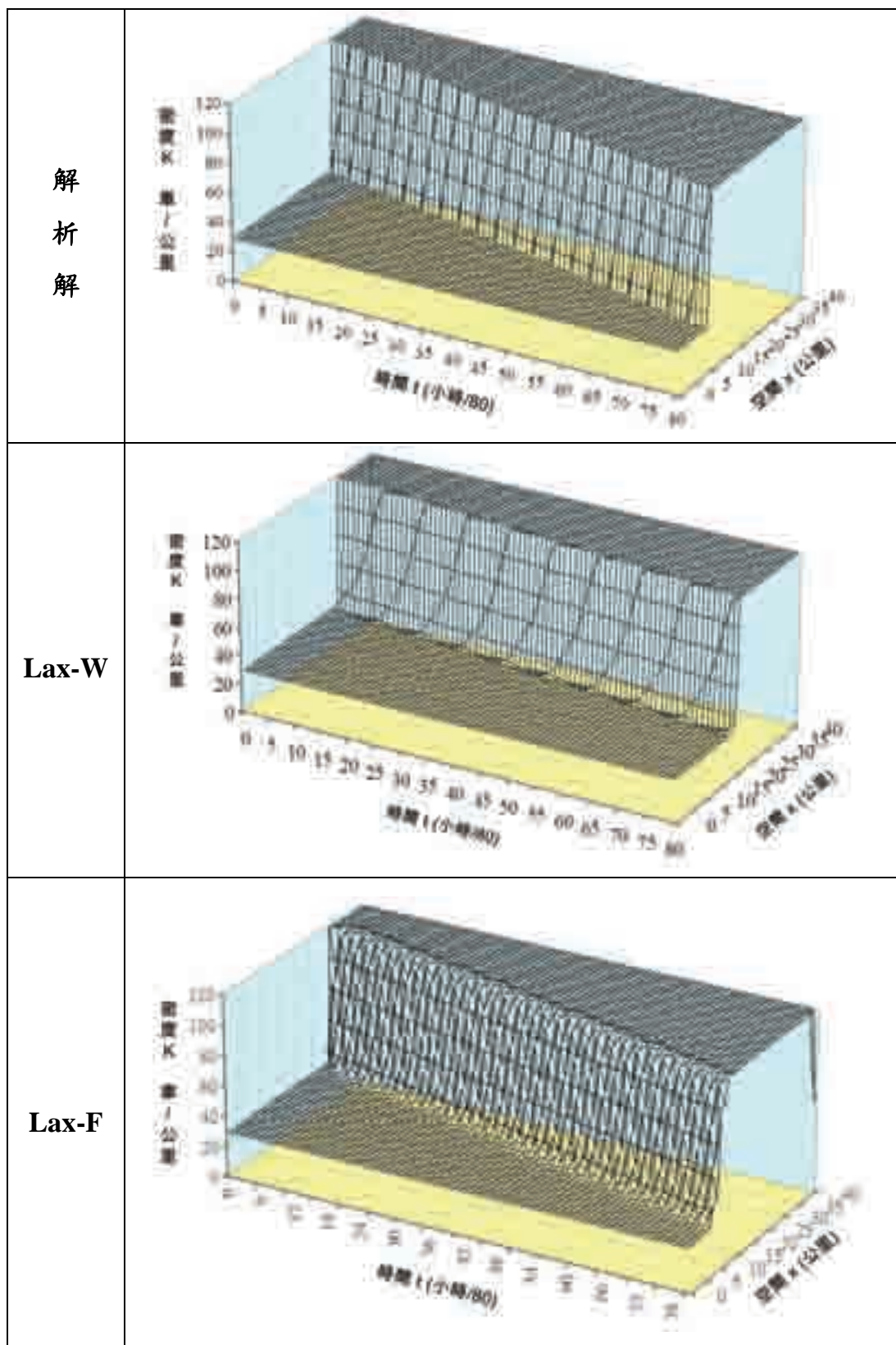


圖 7.4.3 Lax-W、Lax-F 模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波(側面圖)



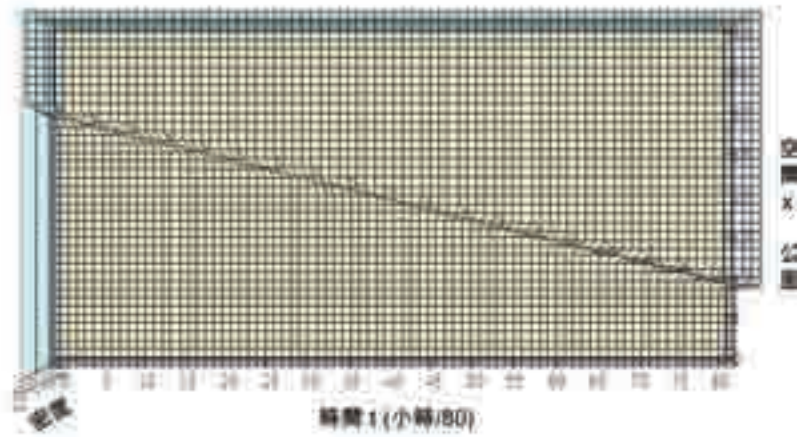
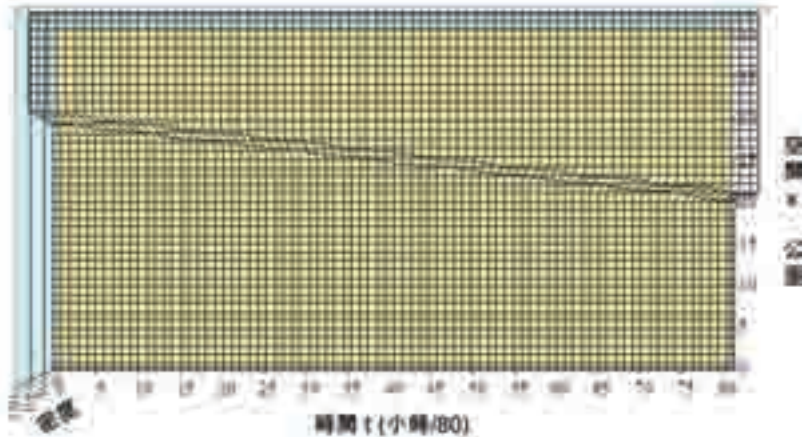
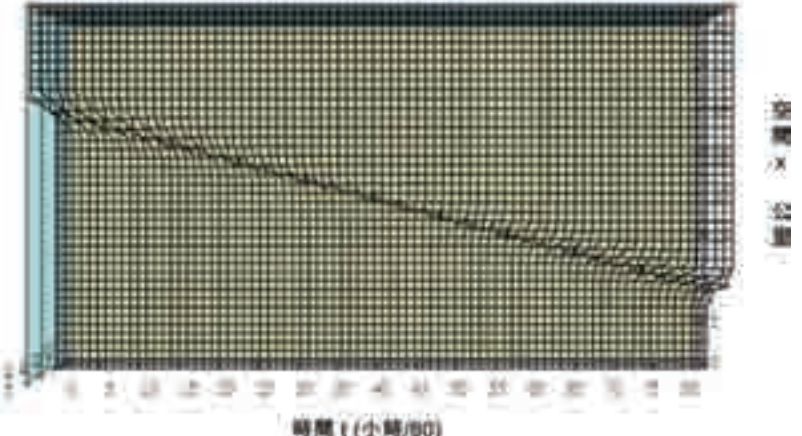
<p>解 析 解</p>	
<p>Lax-W</p>	
<p>Lax-F</p>	

圖 7.4.4 Lax-W、Lax-F 模擬 LWR 模式向上游回溯衝擊波(鳥瞰圖)

## 7.4.2 長停等車隊起動向前疏解的有限差分模擬

LWR 連續流模式另一個較有爭議的問題，係如何模化長停等車隊起動向前疏解的現象。由第 6.1.2 節 Zhang(2007)的分析說明知，LWR 模式的解析解不是衝擊波(shock wave)，便是滑順的稀釋波(rarefaction wave)，本節即模擬另一種最為極端的稀釋波狀況，相當於號誌路口紅燈停等車隊在變為綠燈時瞬間起動向下游疏解的現象。

本問題的起始條件與邊界條件如圖 7.4.5 所示，設定如下：

$$\text{LWR 連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f \left( 1 - \frac{2k}{k_{jam}} \right) \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 120 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 0 \leq x \leq 20 \quad (\text{公里}) \\ 0 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 20 < x \leq 40 \quad (\text{公里}) \end{cases}$$

$$\text{邊界條件：} \quad k(0,t)=120 \text{ 車/公里 (壅塞密度)}$$

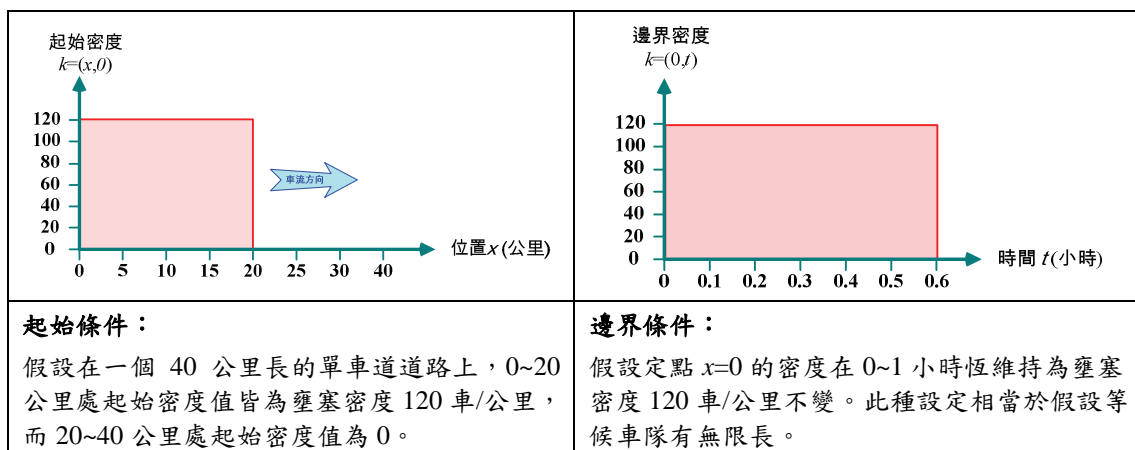


圖 7.4.5 LWR 模式產生向前稀釋波的起始與邊界條件範例

**解析解：**

向前啟動的稀釋波如圖 7.4.6 所示。如係以 LWR 連續流模式的車波求解，一般係以圖 7.4.6 右圖的扇形起動波來模化，本研究的模擬結果可以驗證此種模化的適宜性。而由紙上剪力圖知，在綠燈始亮瞬間(水閘門打開瞬間)，水流會以自由流的速度(左圖的  $e=u_f$ )同時向前及向後發出起動波，而在等候車隊前緣(號誌路口的停止線處)，其密度恆為  $k_{jam}/2$ (左圖的  $d=1/2$  處)，表示該處在等候車隊尾端未經過之前，均係以最大流率  $q_{max}$  在流動。亦即，解析解為：

$$\begin{aligned} k(x,t) &= [1 - (x-20)/(u_f \times t)] \times k_{jam}/2, & u_f \times t - 20 \leq x \leq u_f \times t + 20 \\ k(x,t) &= 120, & x < u_f \times t - 20 \end{aligned}$$

$$k(x,t)=0,$$

$$u_f \times t + 20 < x$$

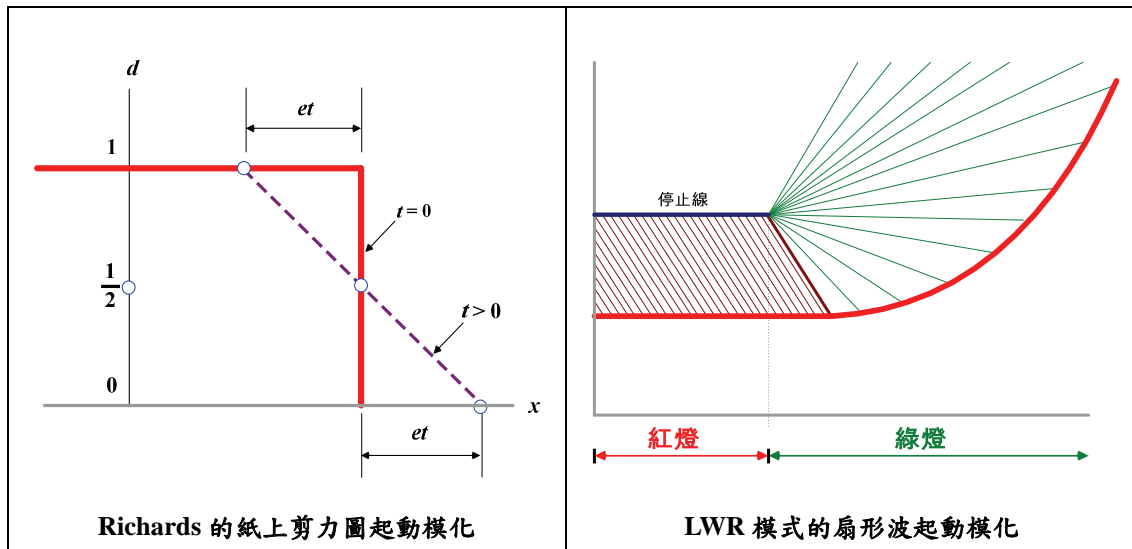


圖 7.4.6 LWR 模式向前起動稀釋波的二種模化

#### 數值近似解：

經模擬發現，由於 Lax-W、Leapfrog 兩種有限差分法的模擬結果不是誤差過大就是不安定，故不繪製其時空變化。Lax-F 有限差分法的模擬結果，密度在時-空變化的情形如圖 7.4.7 所示。

值得說明者，LWR 模式稀釋解的解析解，如係依 LWR 連續流模式(衝擊波理論)求算，其起動稀釋波公式將相當複雜，惟由第五章的回顧知，Richards(1956)的紙上剪力圖法獲得的解與採用 Greenshields 水流模式的 LWR 連續流模式者完全相同，基於此，本研究採 Richards 的紙上剪力圖法來估算稀釋解的解析解。

比起解析解在此一問題的複雜性，數值近似法只是起始與邊界條件不同，其差分公式則與前節處理衝擊波問題者完全相同。而由圖 7.4.7 可看出，Lax-F 有限差分法對稀釋解的近似，與 Richards 的紙上剪力圖的結果相符，確可充分近似原 LWR 連續流模式的稀釋解。而由鳥瞰圖更可清楚看出，等候車隊在前方無車狀況下的起動，車波軌跡確實呈扇形狀，在時-空座標上確可以扇形起動波來模化。

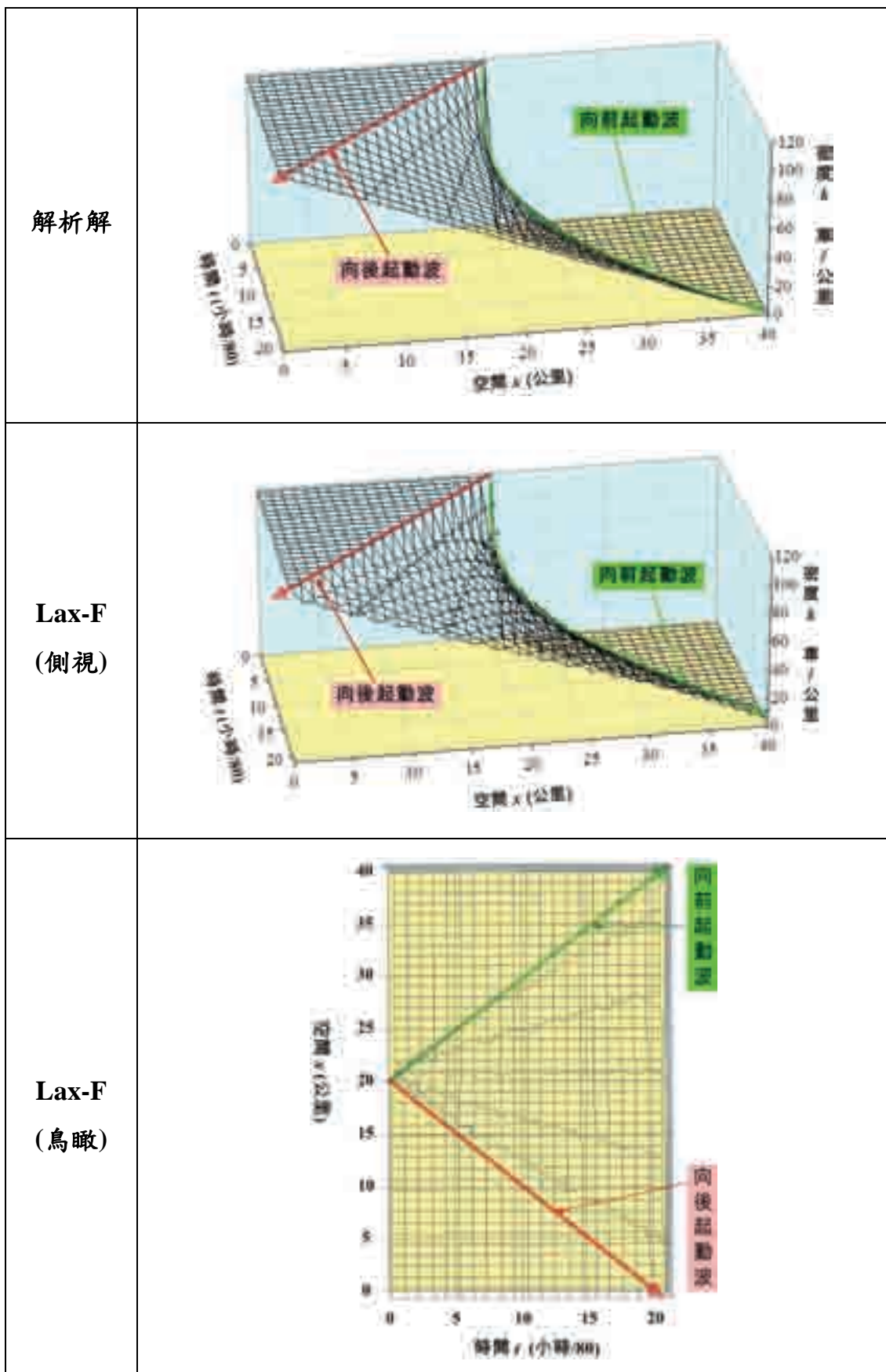


圖 7.4.7 Lax-F 模擬 LWR 模式向前起動稀釋波



### 7.4.3 獨立停等車隊不向後退的有限差分模擬

高階連續流模式的發展主要是欲改善 LWR 連續流模式的缺點，但所模化的車流卻發生會向後退的錯誤，而這種錯誤，LWR 連續流模式並不會發生。本節的模擬可用以測試驗證 LWR 連續流模式具備的車流單向性。

本問題係分析一長度固定的停等車隊開始向下游起動的情形。起始條件與邊界條件如圖 7.4.8 所示，設定如下：

$$\text{LWR 連續流模式：} \quad \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + u_f \left( 1 - \frac{2k}{k_{jam}} \right) \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{起始條件：} k(x,0) = \begin{cases} 120 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 10 \leq x \leq 20 & (\text{公里}) \\ 0 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 20 < x \leq 40, \text{ 或 } x < 10 & (\text{公里}) \end{cases}$$

$$\text{邊界條件：} k(0,t) = 0$$

自由車流速率  $u_f=80$  公里/小時，壅塞密度  $k_{jam}=120$  車/公里 ( $q_{max}=2400$  車/小時)

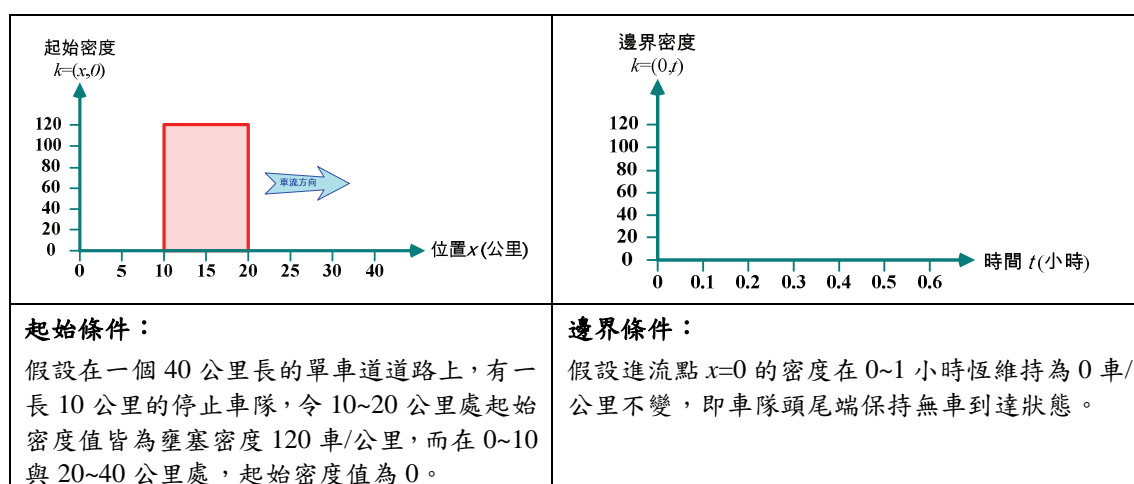


圖 7.4.8 LWR 模式車流不向後退的起始與邊界條件範例

#### 數值近似解：

本問題的解析解如圖 7.4.6 右圖扇形起動波下緣的曲線軌跡(表等候車隊尾部)所示，明顯比前節的無限長車隊向前起動者更為複雜，不論 Richards 的紙上剪力圖或代入 Greenshields 模式的 LWR 連續流模式均甚難求算其解析解。惟因本問題要澄清的，只有車流會不會向後退一項，因此本研究僅進行有限差分近似求解。

本問題的模擬仍僅採用 Lax-F 有限差分法，其模擬出的密度在時-空的變化情形如圖 7.4.9 所示。由圖可清楚看出，LWR 連續流模式雖有許多缺點，但確實不會發生車流向後退的錯誤。此外，由鳥瞰圖可清楚看出，確存在有扇形的起動波，且其扇形上部最外側的波軌跡即  $u_f$  軌跡，與第二章的回顧相符。

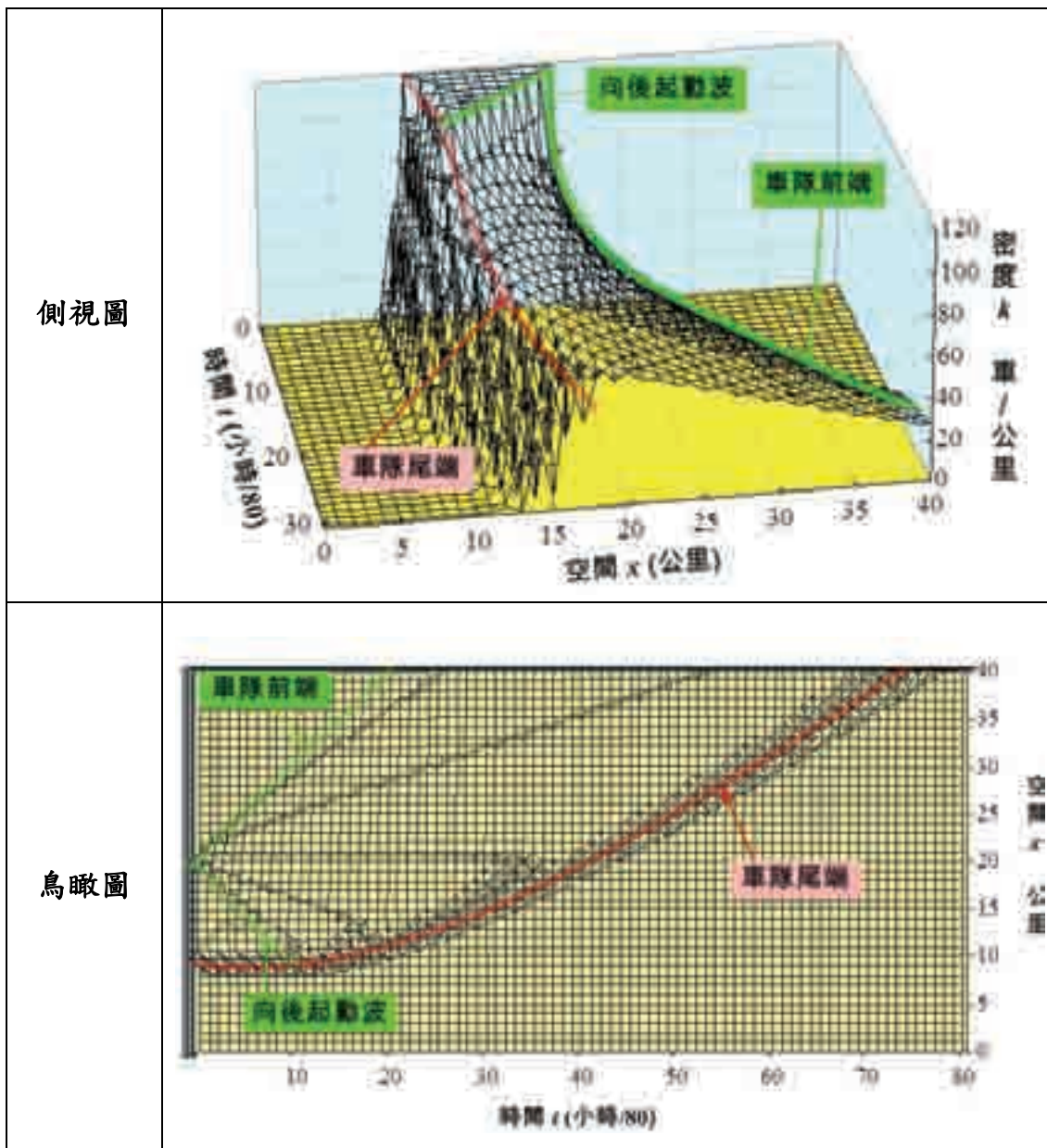


圖 7.4.9 Lax-F 驗證 LWR 模式車流不向後退

## 7.5 本章小結

連續流模式基本上均係偏微分式，應用上一般係藉數值分析法以近似求解之，因屬雙曲線型，其最常為人所用的近似解法係有限差分法。本節整理說明本研究在此方面的成果如下：

### 1.適用於連續流模式的有限差分法

- (1) 適用雙曲線型偏微分式的有限差分法計有 FTFS、FTBS、FTCS、Lax-F、Lax-W、Leapfrog 及 Beam-Warming 等。其中，周志忠(1997)對一階線性連續流模式的模擬發現，只有 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三法較佳。FTBS 法與 Beam-Warming 法雖在模擬個案上表現尚佳，惟因須滿足波速為正的 CFL 收斂條件，故對密度波可能向前傳遞(波速為正)亦可能向後傳遞(波速為負)的一階準線性連續流模式(LWR 模式)並不適用。
- (2) 依周志忠(1997)以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三種差分法，針對一階準線性連續流模式(LWR 模式)的模擬分析知，Lax-F 法最佳、Lax-W 法會發生不合理狀況、Leapfrog 法會發生不當震盪情形。惟該研究所模擬的車流情境，並未包含 LWR 模式常引起爭議的課題(如停車起動的向前扇形波、到達流接近停等車隊的向後衝擊波等的模化)，此外，該研究可能誤認 LWR 模式無解析解，故僅能檢視其差分近似的模擬結果。

### 2.針對 LWR 模式特殊車流行為的有限差分模擬

本研究以衝擊波理論及紙上剪力圖儘可能求出 LWR 模式(採 Greenshields 的  $q=ku$  關係式)的解析解，作為比較的基準，再以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等三種差分法，針對 LWR 模式會產生向後衝擊波的狀況、無限長度車隊的起動狀況(扇形起動波)，及有限長度車隊只會單向起動(不會向後退)等車流模化常有爭議的課題，進行深入分析，結果發現：

- (1) 產生向上游回溯衝擊波狀況的有限差分模擬  
Leapfrog 法模擬不久即出現振盪，且隨時間的拉長而愈來愈大，呈現不安定的狀態；Lax-W 法雖能模擬出向上游回溯衝擊波的現象，惟其衝擊波速約只有解析解的一半，不符真實；Lax-F 有限差分法與解析解最一致，其衝擊波尾端向上游回溯的數值計算結果與解析解幾乎完全相同；
- (2) 長停等車隊起動向前疏解的有限差分模擬  
由於 Lax-W、Leapfrog 兩種有限差分法不是誤差過大就是不安定，故僅採用 Lax-F 有限差分法模擬。結果，Lax-F 有限差分法確可充分近似原 LWR 連續流模式的稀釋解。而由密度在時空分佈的鳥瞰圖清楚看出向前扇形波動軌跡，說明停等車隊在前方無車狀況下起動時，確實可在時-空座標上以扇形起動波來模化；

(3) 有限長度車隊只會單向起動不會向後退的有限差分模擬

經以 Lax-F 有限差分法模擬，證實 LWR 連續流模式雖有許多缺點，但確實不會發生車流向後退的錯誤。此外，由時空鳥瞰圖上可清楚看出確存在扇形的起動波，且其扇形最前緣(向下游紓解車流的最前端)的波軌跡與  $u_f$  軌跡同，與理論解析解完全相符。



## 第八章 高階連續流模式的有限差分模擬

本章首先回顧檢討相關研究用於高階連續流模式的有限差分方法，其次針對第六章曾回顧的幾個高階連續流模式，提出適用的有限差分聯立公式，接著仿第七章的作法，以有限差分式依序模擬到達車流接近停止車隊產生向後衝擊波、無限長車隊向前起動，以及獨立等候車隊起動是否向後退等狀況，並與 LWR 模式作比較。

### 8.1 高階連續流模式的有限差分

由第七章的分析說明知，可用於連續流模式的有限差分法甚多(顯式法就至少有 FTFS、FTBS、FTCS、Lax-F、Lax-W、Leapfrog 及 Beam-Warming 等七種)，惟經模擬分析後，發現可用於一階線性連續流的有限差分法只有 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三種，可用於一階準線性連續流(LWR 模式)的有限差分法更只剩 Lax-F 一種。

周志忠(1997)與莊國欽(2001)均曾提出適用於高階連續流模式的有限差分方法，經比較發現二者均僅係沿用 Payne(1979)對其高階連續流模式(Payne,1971)提出的有限差分公式，惟內容稍有不同，本節回顧比較之。為求簡化，本節各公式中， $q(x,t)$ 、 $k(x,t)$ 、 $u(x,t)$ 、 $u_e(x,t)$  均寫成  $q$ 、 $k$ 、 $u$ 、 $u_e$ 。

#### 8.1.1 Payne 高階連續流模式

Payne(1971) 高階連續流模式如式(8-1-1)所示：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (8-1-1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{\tau} - \frac{\mu}{\tau k} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (8-1-1b)$$

$$q = k \times u \quad (8-1-1c)$$

其中： $u_e = u_e(k)$ 表均衡車速(為  $k$  的函數)， $\tau$ 為鬆弛時間；

$\mu$ 為預期係數，公式為：

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{du_e}{dk} \quad (8-1-1d)$$

將式(8-1-1d)代入式(8-1-1b)，得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{\tau} - \frac{1}{\tau k} \left( -\frac{1}{2} \frac{du_e(k)}{dk} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \quad (8-1-1e)$$

式(8-1-1e)中右側第二項以括號保留 $\mu$ 為負值型態，原因係 $du_e/dk$ 應為負值(如係 Greenshields 模式，則 $du_e/dk = -u_f/k_{jam}$ )，故實際應用時，括號內的數值應為正。

由式(8-1-1)知，高階連續流模式係由密度公式、加速率公式及流率公式聯立組成，其中，密度公式即流體守恆式，流率公式即水流模式( $q=ku$ )，實際亦係一種守恆式，加速率公式一般稱為動量公式(momentum equations)，經差分及整理後，可以速率公式的型式展現。

值得說明者，LWR 模式係由密度、流率兩公式聯立組成，惟其兩公式中的速率皆須為均衡速率( $u=u_e(k)$ )，高階連續流模式的速率則不然( $u \neq u_e(k)$ )。除此不同外，LWR 模式代入 $q=ku_e$ 後，聯立式可整合成一個公式，只需求解一個密度變數，即可解得速率( $u=u_e(k)$ )與流率( $q=ku_e(k)$ )；高階連續流模式則至少須解出密度與速率(其 $u \neq u_e(k)$ ，為非均衡值)，而密度與速率值係在兩個公式間相互參照，因此需聯立求解(流率可藉守恆式 $q=ku$ 決定)。

### 8.1.2 Payne 高階連續流模式的有限差分式

周志忠(1997)與莊國欽(2001)均曾回顧Payne(1979)高階連續流模式的有限差分公式，分別為：

#### 1.周志忠(1997)

周志忠(1997)直接援用Payne(1979)提出的差分方程組如下：

$$\begin{cases} k_j^{n+1} = k_j^n + \frac{\Delta t}{l_j \Delta x_j} (l_{j-1} q_j^{n+1} - l_j q_{j+1}^{n+1} + f_j^{ON,n+1} - f_j^{OFF,n+1}) \\ u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left\{ u_j^n \left[ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x_j} \right] + \frac{1}{\tau_j} \left[ u_j^n - u_e(k_j^n) + \frac{\mu_j}{k_j^n} \frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{\Delta x_j} \right] \right\} \\ q_{j+1}^{n+1} = k_j^{n+1} u_j^n \end{cases} \quad (8-1-2)$$

其中：

$l_j$ ：表在路段上第j區的車道數目

$\Delta x_j$ ：表路段上第j區的道路長度

$k_j^n$ ：表當時間為 $t_0 + n\Delta t$ 時，路段上第j區的平均密度

$u_j^n$ ：表當時間為 $t_0 + n\Delta t$ 時，路段上第j區的空間平均速率

$q_j^n$ ：表在 $[t_0 + (n-1)\Delta t, t_0 + n\Delta t]$ 時間區間內，通過 $x_j$ 點的流量

$f_j^{ON,n}$ ：表在 $[t_0 + (n-1)\Delta t, t_0 + n\Delta t]$ 時間區間內，車輛在 $x_j$ 點的上匝道流量

$f_j^{OFF,n}$ ：表在 $[t_0 + (n-1)\Delta t, t_0 + n\Delta t]$ 時間區間內，車輛在 $x_j$ 點的下匝道流量

如為單車道路段，所有空間的切割寬度均同，即 $\Delta x = \Delta x_j$ ，且無流入與流源（為封閉路段， $f^{ON}, f^{OFF} = 0$ ），各 $x_j$ 的 $\tau, \mu$ 均同（為常數），並將流量 $q = ku$ 代入密度公式，則上式可改寫成：

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (k_{j-1}^n u_{j-1}^n - k_j^n u_j^n) \quad (8-1-3a)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n)] - \frac{\Delta t}{\tau} [u_j^n - u_e(k_j^n)] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\mu}{\tau} \frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{k_j^n} \quad (8-1-3b)$$

$$q_j^{n+1} = k_{j-1}^n \times u_{j-1}^n \quad (8-1-3c)$$

## 2. 莊國欽(2001)

莊國欽(2001)採用的高階連續流模式有限差分式為：

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \Delta t \frac{q_j^{n+1} - q_{j+1}^{n+1}}{n_j(x_{j+1} - x_j)} + \Delta t \frac{r_j^{n+1} - s_j^{n+1}}{n_j(x_{j+1} - x_j)} \quad (8-1-4a)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n)}{(x_{j+1} - x_{j-1})/2} - \frac{\Delta t}{\tau} [u_j^n - u_e(k_j^n)] - \mu \frac{\Delta t}{\tau} \frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{k_j^n (x_{j+2} - x_j)} \quad (8-1-4b)$$

$$q_j^{n+1} = n_{j-1} \times k_{j-1}^n \times u_{j-1}^n \quad (8-1-4c)$$

其中：

$n_j$ ：表路段上第 $j$ 區的车道數，其餘變數與式(8-1-2)同

同樣的，如為無流入與流源( $r, s = 0$ )的單車道路段( $n_j = 1$ )，所有空間的切割寬度均同，即 $\Delta x = (x_{j+2} - x_j)/2 = (x_{j+1} - x_{j-1})/2 = x_{j+1} - x_j$ ，並將式(8-1-4c)代入式(8-1-4a)，則上式可改寫成：

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j-1}^n k_{j-1}^n - u_j^n k_j^n) \quad (8-1-5a)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n)] - \frac{\Delta t}{\tau} [u_j^n - u_e(k_j^n)] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\mu}{2\tau} \frac{k_{j+1}^n - k_j^n}{k_j^n} \quad (8-1-5b)$$

$$q_j^{n+1} = k_{j-1}^n \times u_{j-1}^n \quad (8-1-5c)$$

### 8.1.3 相關研究對高階連續流模式有限差分式的評論

比較周志忠(1997)與莊國欽(2001)的有限差分式可發現，該兩研究應均係直接援用 Payne(1979)的有限差分式。例如二者的密度公式與流率公式完全相同；速率公式右側最後一項的分母則有所不同，莊國欽(2001)的有限差分式多除以 2 而周志忠(1997)者無，惟查驗式(8-1-1b)原 Payne(1971)的高階連續流模式，該項看不出有必須多除以 2 的理由。將多除以 2 的作法取消後，莊國欽(2001)速率公式即與周志忠(1997)者完全相同。

瞭解 Payne(1979)、周志忠(1997)與莊國欽(2001)三研究的有限差分式完全相同後，如再進一步分析，可發現該三研究用來近似求解高階連續流模式的有限差分式，是有嚴重問題的。比較表 7-1-1 知，式(8-1-3a)及式(8-1-5a)的密度差分式係屬 FTBS 差分( $k_j^{n+1}$  參考  $k_j^n, k_{j-1}^n$ )，速率差分式係屬 FTCS 差分( $u_j^{n+1}$  參考  $u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n$ )，流率公式則類似 FTBS 差分但更為簡化( $q_j^{n+1}$  參考  $q_{j-1}^n$ )。而由 7.2.3 節周志忠(1997)自己的分析說明與模擬結果知，FTCS 法根本就不安定，FTBS 法須滿足波速為正的條件方會收斂，而 LWR 連續流模式的車波可能向前傳遞(波速為正)亦可能向後傳遞(波速為負)，致 FTBS 不適用。

為能確定 FTBS 法不適用連續流的差分近似，本研究特再針對 LWR 模式產生向後衝擊波的狀況(向後停止波)，以 FTBS 有限差分法進行模擬，結果在模擬的初期僅進行少數幾個  $\Delta t$ ，在車隊尾端(衝擊波界面)所經之處即發生嚴重且振幅甚大的振盪，可確定 FTBS 不適用 LWR 模式。

由於任何理想的高階連續流模式在車流達均衡時均應退化回 LWR 模式，因此一個不適用於 LWR 模式的有限差分法，竟能用於高階模式而不發生任何問題，實不合理。本研究推測，這恐係相關研究在應用時設定的模擬環境根本不會產生向後車波或衝擊波所致。經查周志忠(1997)的研究，其對 Payne(1971)模式以式(8-1-2)的有限差分法進行模擬的兩種狀態，設定的起始密度均為 50 車/公里(其對應的均衡速度值應為 90 公里/小時)，其他起始設定及預期的模擬結果分別是：

- (1) 起始速度設定為 100 公里/小時，模擬時其速度應會漸降，密度應會漸增；
- (2) 起始速度設定為 50 公里/小時，模擬時其速度應會快速上昇，密度應會漸降。

由於周志忠(1997)係採 Greenshields 水流模式，而其  $k_{jam}$  係設為 200 車/公里，因此，其起始密度設定為 50 車/公里，相當於設定起始時車流係處於車波均為正的低密度狀況，致其在採用 FTBS 時並沒有出現問題。

再查莊國欽(2001)的研究，其對 Payne(1971)模式以式(8-1-4)的有限差分式模擬中山高速公路台北都會區路段，及建國南北高架快速道路的四種情境(情境一：晨峰，不執行儀控；情境二：晨峰，執行儀控；情境三：昏峰，不執行儀控；情境四：昏峰，執行儀控)，結果如表 8-1-1 所示。由表知，不論何條道路，何種

情境，其模擬的車流均屬未飽和流(密度均低於其定義的每車道壅塞密度=120 車/公里的一半)，即均沒有向後車波的問題，致其採用 FTBS 時亦沒有出現問題。

經由以上的分析知，FTBS、FTCS 兩有限差分法對 LWR 模式不適用，而高階連續流模式均會包含 LWR 模式(為高階模式聯立公式中的密度公式)，當然亦不適用 FTBS、FTCS 有限差分法。國內相關研究一時不查，逕沿用過去 Payne(1979) 的錯誤作法，實有待改進。

**表 8-1-1 莊國欽以有限差分模擬匝道儀控的結果**

道路	時段	晨 峰		昏 峰	
		不儀控	儀控	不儀控	儀控
1.建國快速道路	北上路段	41.4	27.8	32.2	29.7
2.中山高速公路	東向路段	25.9	19.5	43.3	35.2
3.中山高速公路	西向路段	19.0	19.5	21.1	19.8
4.建國快速道路	南下路段	16.2	20.6	22.1	22.4

註：表中數字為各路段車流的平均密度(車/公里/車道)。

資料來源：莊國欽，「非線性控制於高、快速道路整合匝道儀控之研究」，台灣大學土木研究所，碩士學位論文，2001。

## 8.2 高階連續流模式的 Lax-F 有限差分式

由前節的分析知，高階連續流模式不適用 FTBS、FTCS 有限差分法，而由第六章 Zhang(2007)的說明知，近年高階連續流模式的近似多採 Lax-F 法；由第七章的分析知，本研究已確認 Lax-F 有限差分法對 LWR 模式有甚佳的表現。基於此，本研究以 Lax-F 法取代過去誤用的 FTBS、FTCS 法來近似求解高階連續流模式。

值得重點說明者，採 Lax-F 有限差分(暫忽略時間上標  $n$ )，原偏微分式中，凡  $k$ 、 $u$ 、 $q$  均分別近似成  $(k_{j+1}+k_{j-1})/2$ 、 $(u_{j+1}+u_{j-1})/2$ 、 $(u_{j+1}k_{j+1}+u_{j-1}k_{j-1})/2$ ，凡  $\partial k$ 、 $\partial u$ 、 $\partial q$  均分別近似成  $(k_{j+1}-k_{j-1})/2$ 、 $(u_{j+1}-u_{j-1})/2$ 、 $(u_{j+1}k_{j+1}-u_{j-1}k_{j-1})/2$ 。

### 8.2.1 密度及流率公式的 Lax-F 有限差分式

高階連續流模式的差分式係包含密度公式、速率公式與流率公式的聯立式，其中，密度與流率的差分式各種高階連續流模式均相同，故本研究先予列出如下：

**密度公式(流體守恆式)：**

$$k_j^{n+1} = \frac{(k_{j+1}^n + k_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n k_{j+1}^n - u_{j-1}^n k_{j-1}^n) \quad (8-2-1)$$

流率公式(水流公式)：

$$q_j^{n+1} = u_j^{n+1} \times k_j^{n+1} \quad (8-2-2)$$

值得說明者，式(8-2-1)與表 7-3-1 中 LWR 模式的 Lax-F 有限差分式並不相同，式(8-2-1)右側第二項中的  $u$  (含  $u_{j+1}$  與  $u_{j-1}$ )，在表 7-3-1 中係直接代入  $u_e = u_f(1 - k/k_{jam})$ ，而對高階連續流模式而言，其模化的車流一般係處於非均衡狀態，達均衡反而是特例，致速率通常不是均衡速率，因而式(8-2-1)係代入  $u$ 。此外，LWR 模式只需一個密度公式，即可同時求得速率( $u_e = f(k)$ )，高階模式每一時空的密度與速率值則都要在速率、密度兩公式間相互參照方能獲得。至於流率，不論 LWR 模式的  $q = ku_e$ ，或高階模式的  $q = ku$ ，均為恆等式，一旦密度與速率已知，即可求得。

## 8.2.2 速率公式的 Lax-F 有限差分式

第六章曾回顧高階連續流模式，其加速率公式(一般稱為動量公式)包括：

$$1. \text{Payne(1971)模式：} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{\tau} - \frac{1}{\tau k} \left( -\frac{1}{2} \frac{du_e(k)}{dk} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \quad (8-2-3)$$

$$2. \text{Ross(1988)模式：} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_f - u}{\tau} \quad (8-2-4)$$

$$3. \text{Liu 等(1998)模式：} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_e - u}{\tau} \quad (8-2-5)$$

$$4. \text{Zhang(1998)模式：} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{\tau} - k \left( \frac{du_e(k)}{dk} \right)^2 \frac{\partial k}{\partial x} \quad (8-2-6)$$

$$5. \text{Zhang(1998)的改良 Ross 模式：} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{\tau} \quad (8-2-7)$$

其中， $u_e$  表均衡車速，為  $k$  的可微分函數， $u_f$  表自由流車速。而式(8-2-7)係 Zhang(1998)的建議，將 Ross(1988)模式鬆弛項的基準速率，由常數的  $u_f$  改為  $u_e(k)$ 。

令  $w = du_e/dk$ ，上示各高階連續流模式的 Lax-F 有限差分公式，分別為：

### 1. Payne(1971)模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \frac{\Delta t}{\tau} \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(-w)}{2\tau} \frac{2}{k_{j+1}^n + k_{j-1}^n} \frac{k_{j+1}^n - k_{j-1}^n}{2} \quad (8-2-8)$$

## 2. Ross(1988)模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \frac{\Delta t}{\tau} \left[ u_f - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] \quad (8-2-9)$$

## 3. Liu 等(1998) 模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\tau} \left[ \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} \right] \quad (8-2-10)$$

## 4. Zhang(1998)模式：

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \\ & + \frac{\Delta t}{\tau} \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times w^2 \times \frac{k_{j+1}^n + k_{j-1}^n}{2} \frac{k_{j+1}^n - k_{j-1}^n}{2} \end{aligned} \quad (8-2-11)$$

## 5. Zhang(1998)的改良 Ross 模式：

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \\ & + \frac{\Delta t}{\tau} \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] \end{aligned} \quad (8-2-12)$$

## 8.3 高階連續流模式的數值模擬

為能與 LWR 模式比較，據以瞭解各高階連續流模式的特性，本研究仿 7.4 節的作法，首先模擬車流產生向上游回溯衝擊波的狀況(向後停止波)，接著模擬長停等車隊起動向前疏解的狀況，最後模擬獨立停等車隊起動是否向後退的狀況。Daganzo(1995)曾嚴厲評論有些高階連續流模式模化的車流會向後退，前述模擬實驗的最後一項就是要找出有隱含這種錯誤模式。

### 8.3.1 參數與模擬環境設定

為利於比較，本研究在以下的模擬中，統一設定各參數及模擬環境如下：

- (1) 均衡車速係採 Greenshields 的模式，即  $u_e = u_f(1 - k/k_{jam})$ ，其參數分別為：自由流速率  $u_f = 80$  公里/小時，擁擠密度  $k_{jam} = 120$  車/公里(可計算得  $q_{max} = 2400$  車/小時)；
- (2) 有限差分的時空切割，均係將  $x$  軸以  $\Delta x = 1$  公里切割，將  $t$  軸以  $\Delta t = 1/80$  小時切割，即  $\Delta x / \Delta t = 80$  公里/小時  $= u_f$ ，使其切割比滿足 CFL 收斂條件；
- (3) 參數  $w = du_e/dk = -u_f/k_{jam} = -80/120 = -2/3$  公里<sup>2</sup>/(車-小時)；
- (4) 參數  $\tau$  沿用周志忠(1997)的作法，即  $\tau = k_\tau \Delta x$ ，惟令  $k_\tau = 45$  秒/公尺(周志忠採 46，相當於 78 公里/小時的倒數，本研究因設定  $u_f = 80$  公里/小時，故取 45)，由於本研究設定  $\Delta x = 1$  公里，故  $\tau = k_\tau \Delta x = 45$  秒  $= 1/80$  小時  $= \Delta t$ 。

依上述設定，各高階連續流模式速率公式的有限差分式可改為(單位均為公里、小時)：

#### 1. Payne(1971)模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{320} + \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] - \frac{1}{3} \frac{k_{j+1}^n - k_{j-1}^n}{k_{j+1}^n + k_{j-1}^n} \quad (8-2-13)$$

#### 2. Ross(1988)模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{320} + \left[ u_f - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] \quad (8-2-14)$$

#### 3. Liu 等(1998) 模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} + \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] \quad (8-2-15)$$

#### 4. Zhang(1998)模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{320}$$



$$+ \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] - \frac{(k_{j+1}^n)^2 - (k_{j-1}^n)^2}{720} \quad (8-2-16)$$

## 5. Zhang(1998)的改良 Ross 模式：

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{320} + \left[ \frac{u_e(k_{j+1}^n) + u_e(k_{j-1}^n)}{2} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right] \quad (8-2-17)$$

### 8.3.2 產生向上游回溯衝擊波的有限差分模擬

本問題係要瞭解均勻到達車流碰上等候車隊產生向上游回溯衝擊波的狀況，其起始條件與邊界條件同圖 7.4.1，設定如下：

$$\text{初始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 120 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } x \geq 30 \text{ (公里)} \\ 30 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } x < 30 \text{ (公里)} \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & (\text{公里/小時}); \text{ 當 } x \geq 30 \text{ (公里)} \\ 60 & (\text{公里/小時}); \text{ 當 } x < 30 \text{ (公里)} \end{cases}$$

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 & (\text{車/小時}); \text{ 當 } x \geq 30 \text{ (公里)} \\ 1800 & (\text{車/小時}); \text{ 當 } x < 30 \text{ (公里)} \end{cases}$$

邊界條件：\$k(0,t)=30\$ 車/公里，\$k(40,t)=120\$ 車/公里；\$u(0,t)=60\$ 公里/小時，\$q(0,t)=1800\$ 車/小時

本問題亦模擬 80 個 \$\Delta t\$ (1 小時)，為利比較，本研究同樣以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準。

#### 1.Ross(1988)模式

Ross(1988)模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.1 所示，由圖知，Ross(1988)模式根本無法模化向上游回溯衝擊波。

#### 2.Payne(1971)、Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式

Payne(1971)、Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.2 所示，由圖知，此三模式在模化向上游回溯衝擊波的狀況時會在衝擊波界面處明顯發生振盪，此外，由模擬數值顯示，三者均發生密度與流率大於

最大值，及速率出現負值等狀況。

### 3.Zhang(1998)模式

Zhang(1998)模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.3 所示，由圖知，Zhang(1998)模式係所有高階連續流模式表現最佳者，不但沒有出現明顯振盪，與 LWR 模式的模擬結果亦最相近。

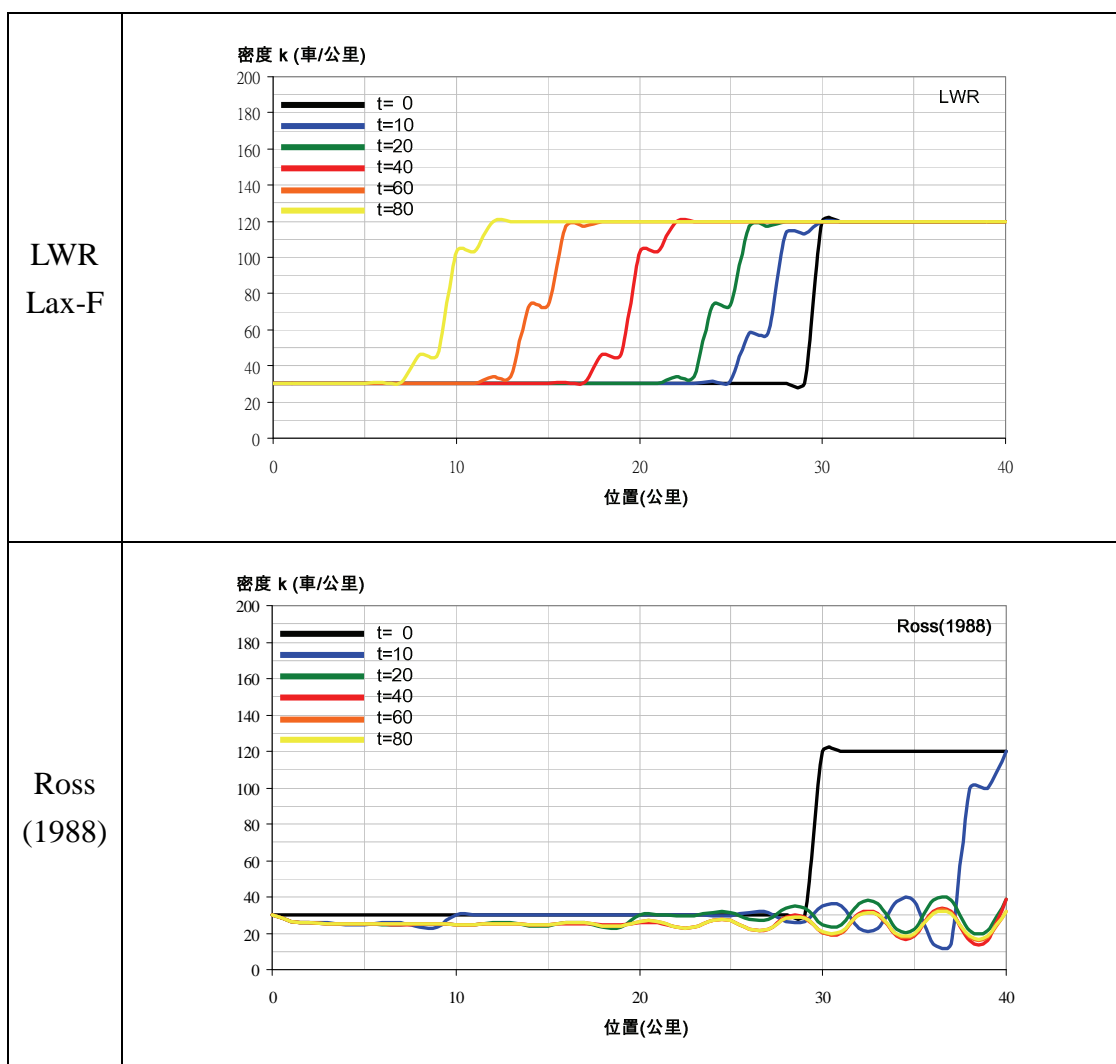


圖 8.3.1 Ross 模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果

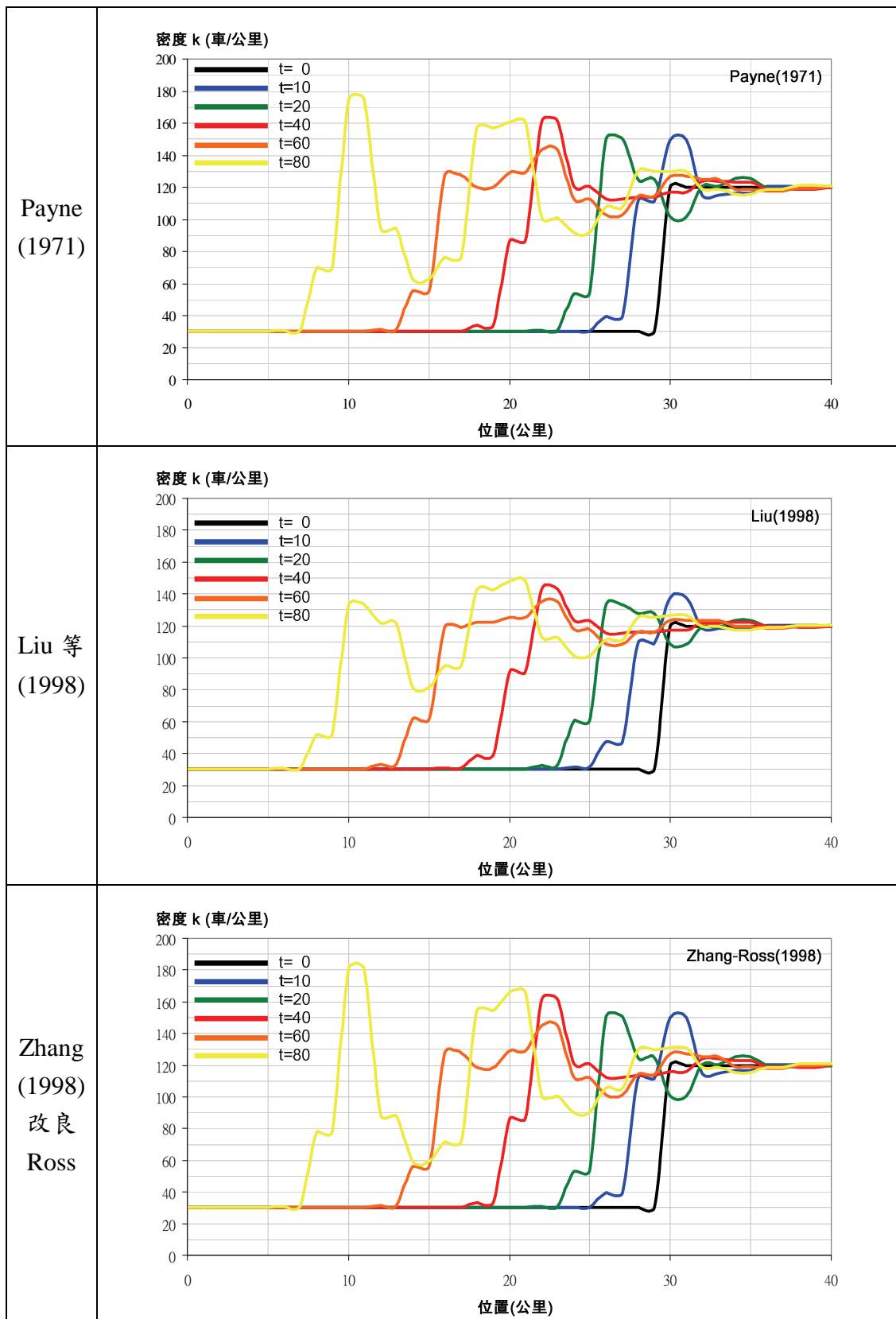


圖 8.3.2 Payne、Liu 等與 Zhang 改良 Ross 模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果

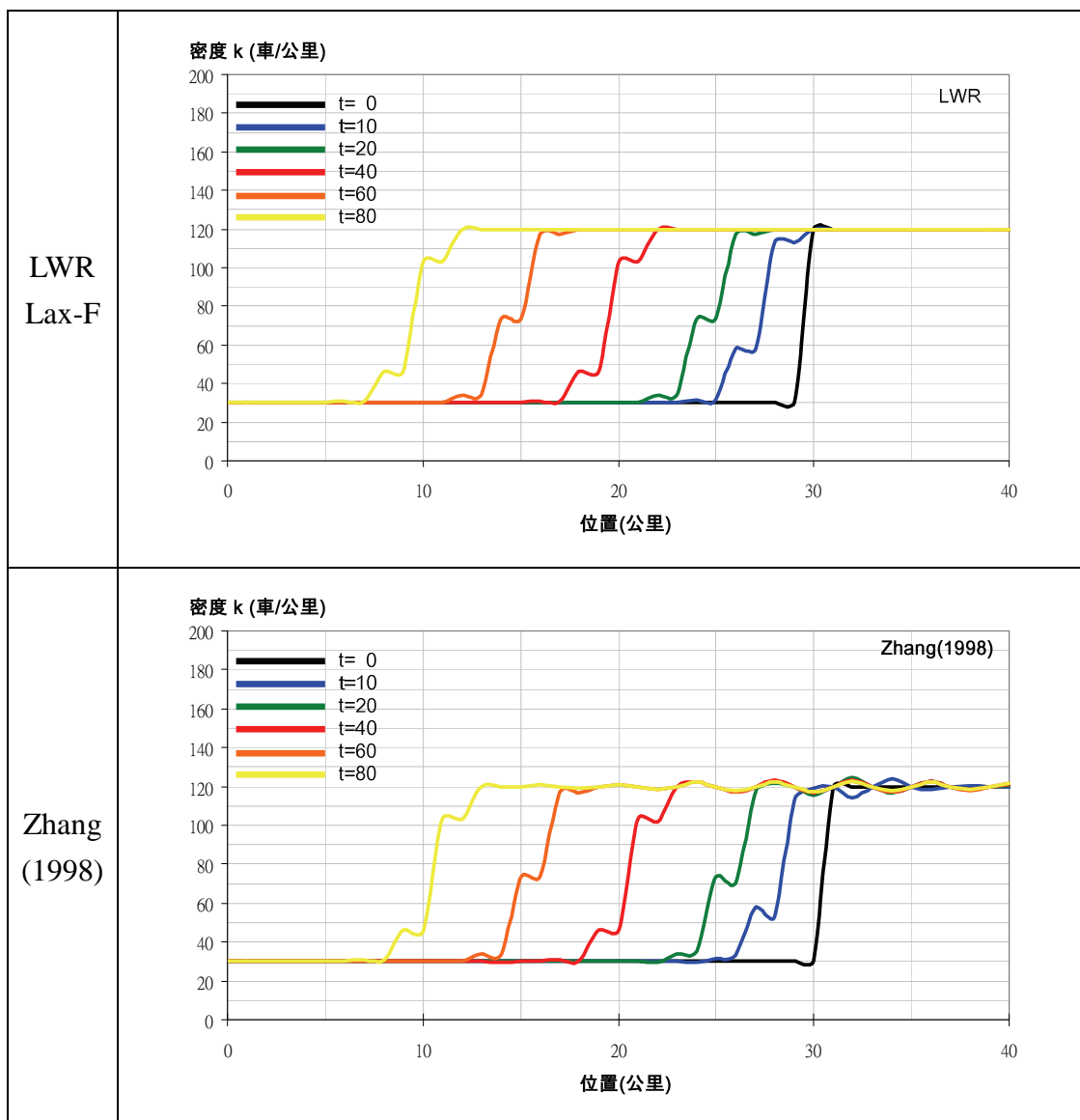


圖 8.3.3 Zhang 模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果

#### 4.綜合比較

為利比較，本研究以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準，取第  $40\Delta t=1/2$  小時各  $x$  點模擬結果的密度、速率與流率分佈圖，與其他各高階模式比較，如圖 8.3.4 所示，由圖知：

- (1) Ross(1988)號稱其模式能適用任何交通狀況，Newell(1989)則批評該式不具備模化車輛減速行為之機制，亦即不能模化流量稍大的車況。該模式的「鬆弛程序」項係以自由流車速  $u_f$  為速率調整準據，由圖可明顯看出，該模式確不適用於均勻到達車流碰上停等車隊產生向上游回溯衝擊波的狀況；
- (2) Payne(1971)模式、Liu 等(1998) 模式與 Zhang(1998)改良 Ross 模式在模化均勻到達車流碰上等候車隊產生向上游回溯衝擊波的狀況時會在衝擊波界面處產生明顯的振盪，甚至發生密度與流率大於最大值(最大密度  $=k_{jam}=120$  車/公里，最大流率  $=q_{max}=2400$  車/小時)，以及速率出現負值等狀況。依振盪幅度(誤差)由大至小順序，依序為 Zhang(1998)改良 Ross 模式、Payne(1971)模式，與 Liu 等(1998) 模式；
- (3) Zhang(1998)模式係所有高階連續流模式表現最佳者。惟即便如此，該模式在車流停止範圍，包括起始前原即停止的車隊及之後被衝擊波掃過的上游路段，均仍會不斷出現些微擾動。理論上車輛在加入等候車隊後即應完全停止，密度恆保持為  $k_{jam}$ ，流率與速率恆為 0，而 Zhang(1998)模式模化的結果，在該範圍內的密度、速率、流率卻會出現短暫、局部、微量的不合理值(密度稍大於  $k_{jam}$ ，速率與流率出現微量負值)。

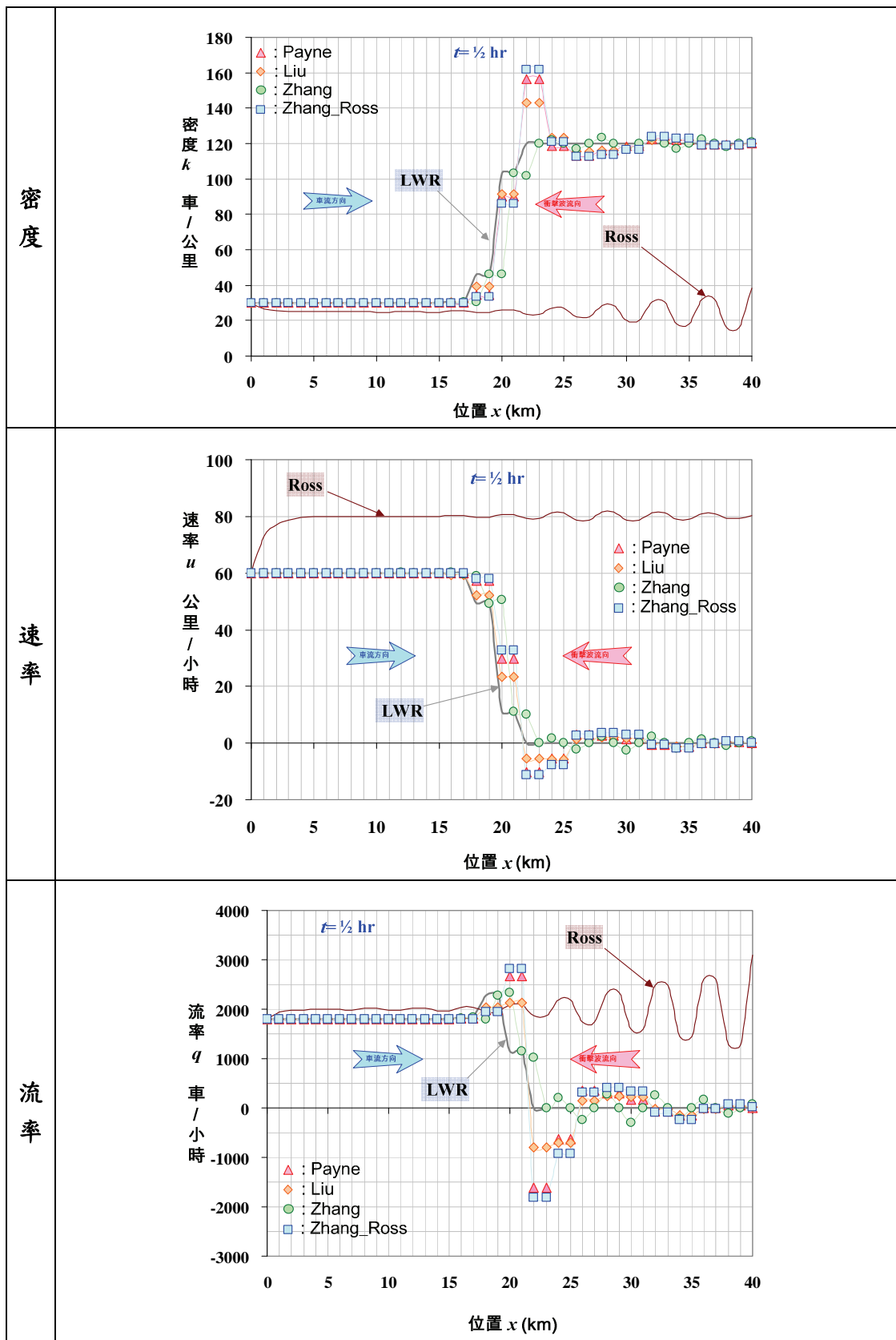


圖 8.3.4 各種高階連續流模式產生向上游回溯衝擊波的模擬結果

## 5.Zhang(1998)模式進一步分析

為深入瞭解 Zhang(1998)模式的特性，本研究特以產生向上游回溯衝擊波相同的狀況，以 LWR 模式解析解為基準，比較 LWR 模式與 Zhang 模式近似解的異同，如圖 8.3.5 所示。由圖可清楚看出，LWR 模式解析解在衝擊波界面處係呈現平滑面，而被衝擊波掃過範圍內的密度均恆為壅塞密度，並不會起伏振盪；LWR 模式 Lax-F 有限差分近似解的衝擊波界面則略不工整，惟紊亂的範圍甚窄，且在被衝擊波界面掃過的範圍內亦沒有波浪起伏發生，可判定係差分誤差使然；Zhang 模式 Lax-F 有限差分近似解則在被衝擊波界面掃過範圍內仍會有持續不斷的、漣漪狀的波浪起伏，不但如此，此種波浪起伏甚而向下游擴張，致隨衝擊波向上游回溯的同時，亦向下游牽動原不動的車隊內部，引發漣漪波狀起伏。對照 LWR 模式，可判定此種現象已非差分誤差可解釋，而係原高階連續流本身的特性使然。

Zhang(1998)曾說明其模式特性。式(8-2-6)右側第一項(鬆弛項)實質限制高階模式具有類似 LWR 的行為，第二項(預期項)則表現駕駛預知前方車況所作的車速調整。如前方密度愈來愈大，亦即 $\partial k/\partial x$  為正，則式(8-2-6)說明車輛在預知會進入前方較高密度車流時，將會減速。當密度變化相當大，使 $\partial k/\partial x$  的值很大時(預期項)，車速的改變亦會很大，則鬆弛項的車速與車流均衡車速間離差( $u-u_c$ )將隨之變大，式(8-2-6)右側第一項(鬆弛項)亦因而會變很大，並朝反方向調整。而此兩調整項間的互動會導致系統產生振盪，可以用來解釋車流停停走走的狀況。

其實，高階連續流模式有三個車波族，且有的車波族的波速甚而比車速快，即行車資訊不全由駕駛前方傳來，有部分係從駕駛後方傳來，比起 LWR 模式只有唯一的車波族明顯來得不安定。此當係高階模式在模化衝擊波行為時，已停止車隊內仍會產生漣漪狀波浪起伏振盪的主因，惟只要幅度不要太大，則雖不合理，大體上仍可接受，但強以解釋係車流在壅塞時停停走走的現象，則似太過牽強。

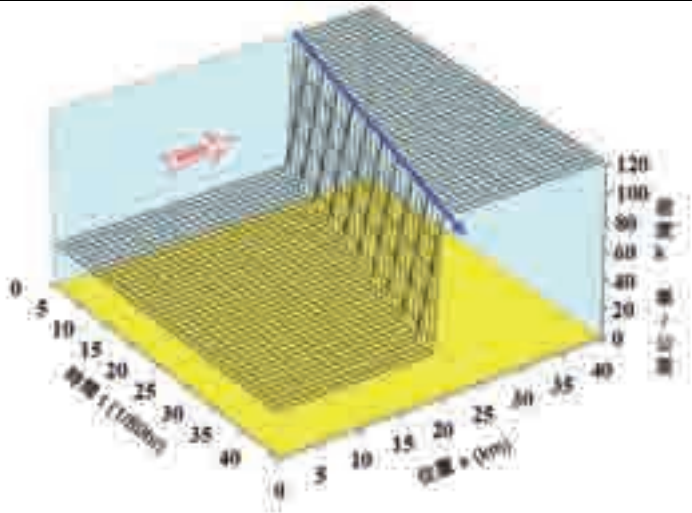
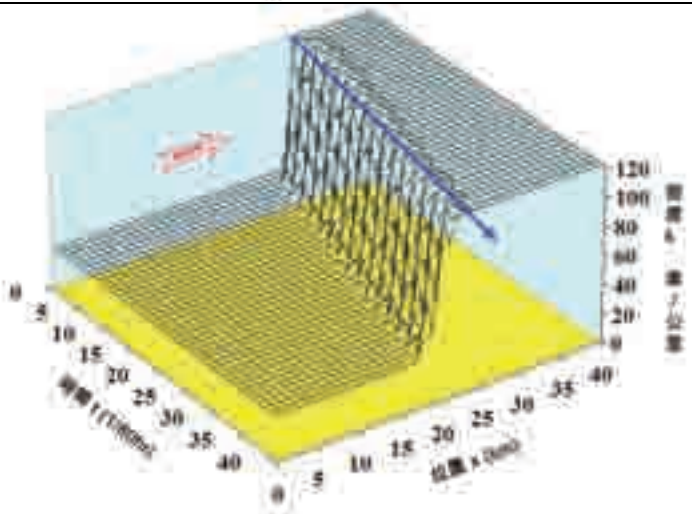
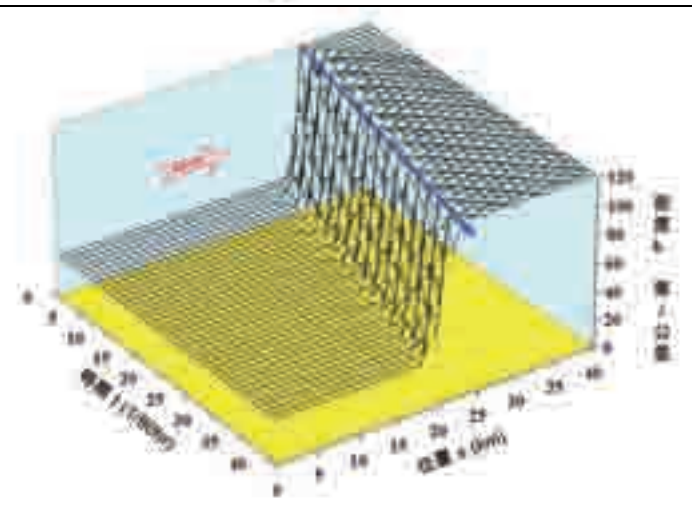
<p>LWR 模式 解析解</p>	
<p>LWR 模式 Lax-F 有限 差分</p>	
<p>Zhang 模式 Lax-F 有限 差分</p>	

圖 8.3.5 向上游回溯衝擊波理論解析解與 Lax-F 有限差分解之比較



### 8.3.3 長停等車隊起動向下游疏解的有限差分模擬

本問題係要瞭解長停等車隊瞬間起動向下游疏解的狀況，其起始條件與邊界條件可參照圖 7.4.5，設定如下：

$$\text{初始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 120 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } x \leq 50 \text{ (公里)} \\ 0 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } x > 50 \text{ (公里)} \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & (\text{公里/小時}); \text{ 當 } x \leq 50 \text{ (公里)} \\ 80 & (\text{公里/小時}); \text{ 當 } x > 50 \text{ (公里)} \end{cases}$$

$$q(x,0) = \begin{cases} 0 & (\text{車/小時}); \text{ 當 } x \leq 50 \text{ (公里)} \\ 0 & (\text{車/小時}); \text{ 當 } x > 50 \text{ (公里)} \end{cases}$$

邊界條件： $k(0,t)=120$  車/公里， $u(0,t)=0$  公里/小時， $q(0,t)=0$  車/小時

本問題計模擬 50 個  $\Delta t$  (1 小時)，為利比較，本研究以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準，以密度模擬結果分佈圖，進行各高階模式的比較分析。

#### 1. Ross(1988) 模式

Ross(1988) 模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.6 所示，由圖知，Ross(1988) 模式出現向後及向前怪異的振盪，可以說根本不適用停等車隊向前起動的狀況，加上前節所述其亦不適用向後產生衝擊波的狀況，可知該模式可用範圍甚小。

#### 2. Payne(1971)、Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式

該三模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.7 所示，由圖知：

- (1) Payne(1971) 在向前疏解時出現滾動式大幅振盪；向後起動波並非呈剪力圖的直線，而是曲線，惟在原停止車隊前緣處，起動後其密度維持  $k_{jam}/2$  不變，與紙上剪力圖同；
- (2) Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式向後起動波亦不呈剪力圖的直線，而是曲線，且在原停等車隊前緣處，起動後其密度亦維持  $k_{jam}/2$  不變，與紙上剪力圖同。至於向前起動的模化上，二者均未出現振盪，惟大體言，Liu 等(1998)模式誤差較大，表現較 Zhang(1998)改良 Ross 模式略差。

#### 3. Zhang(1998) 模式

Zhang(1998) 模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.8 所示，由圖知，Zhang(1998) 模式停等車隊起動疏解行為，模擬結果出乎意料的與 LWR 模式完全相同(不只圖形，連數值亦完全相同)，此一特性連 Zhang 自己亦未提及，是本研究的重大發現。其向前及向後起動波均為直線，且在原停等車隊前緣處，起動後其密度亦維持  $k_{jam}/2$  不變，與紙上剪力圖同。

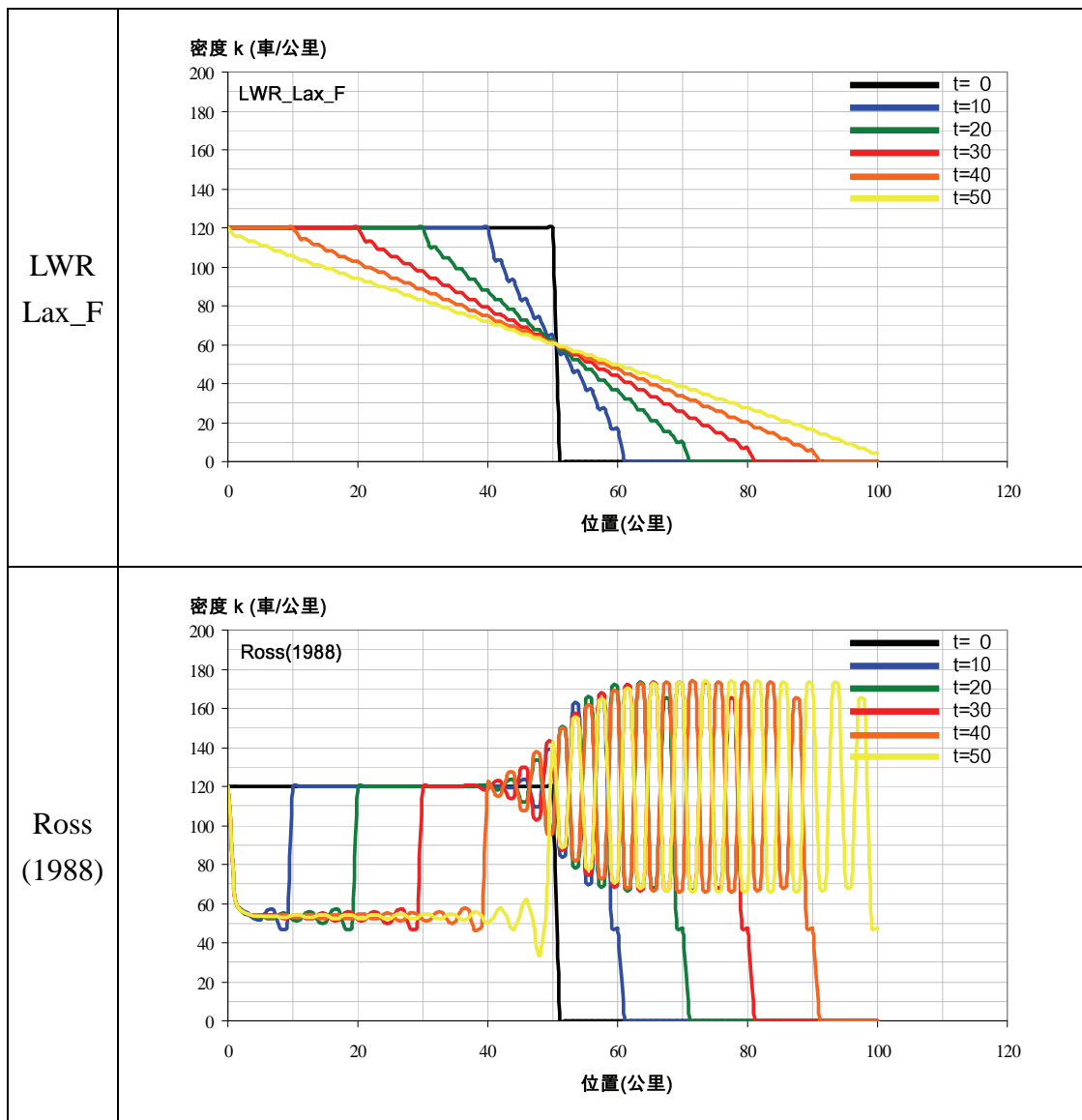


圖 8.3.6 Ross 模式長停等車隊起動的模擬結果

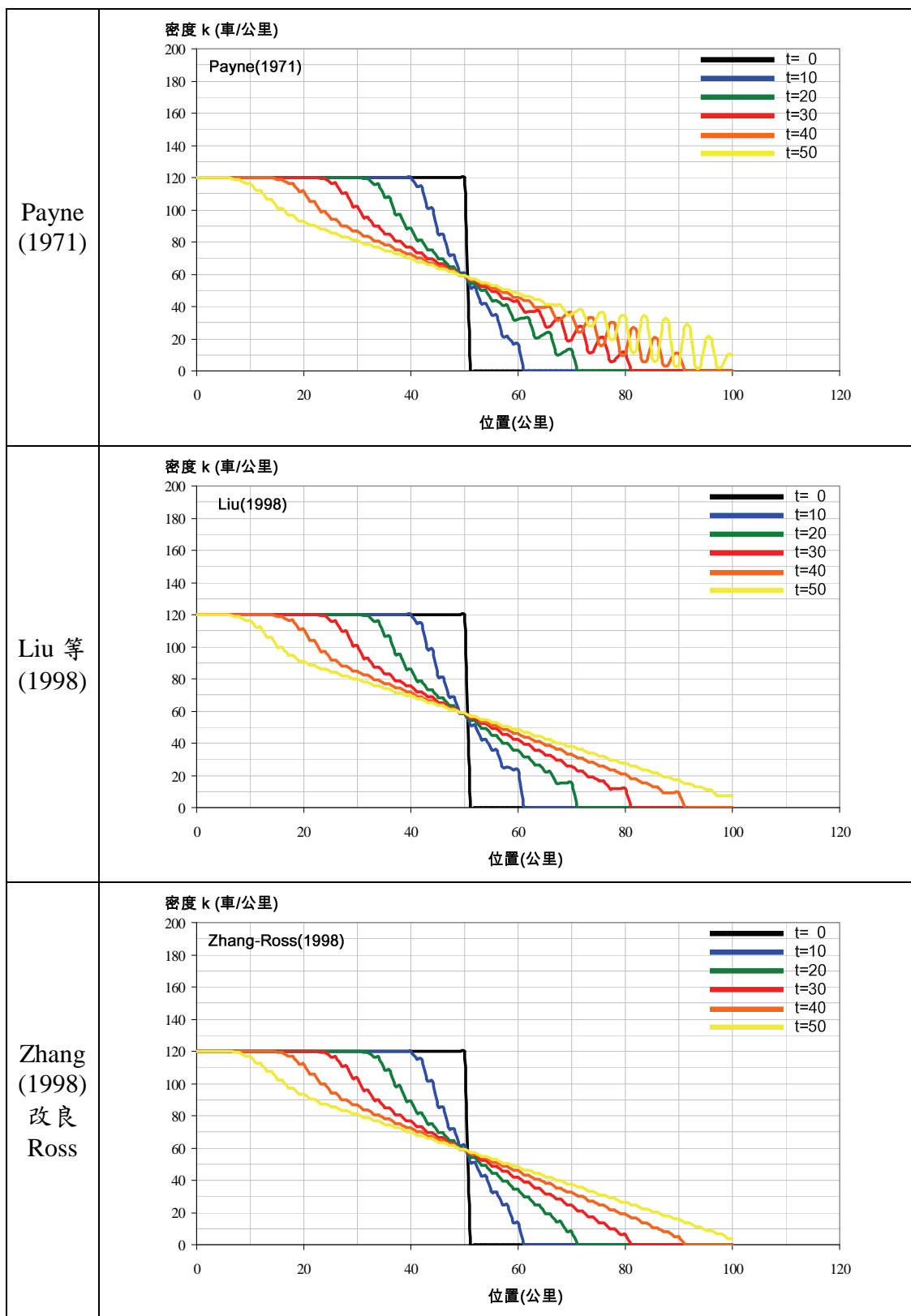


圖 8.3.7 Payne、Liu 等與 Zhang 改良 Ross 模式長停等車隊起動的模擬結果

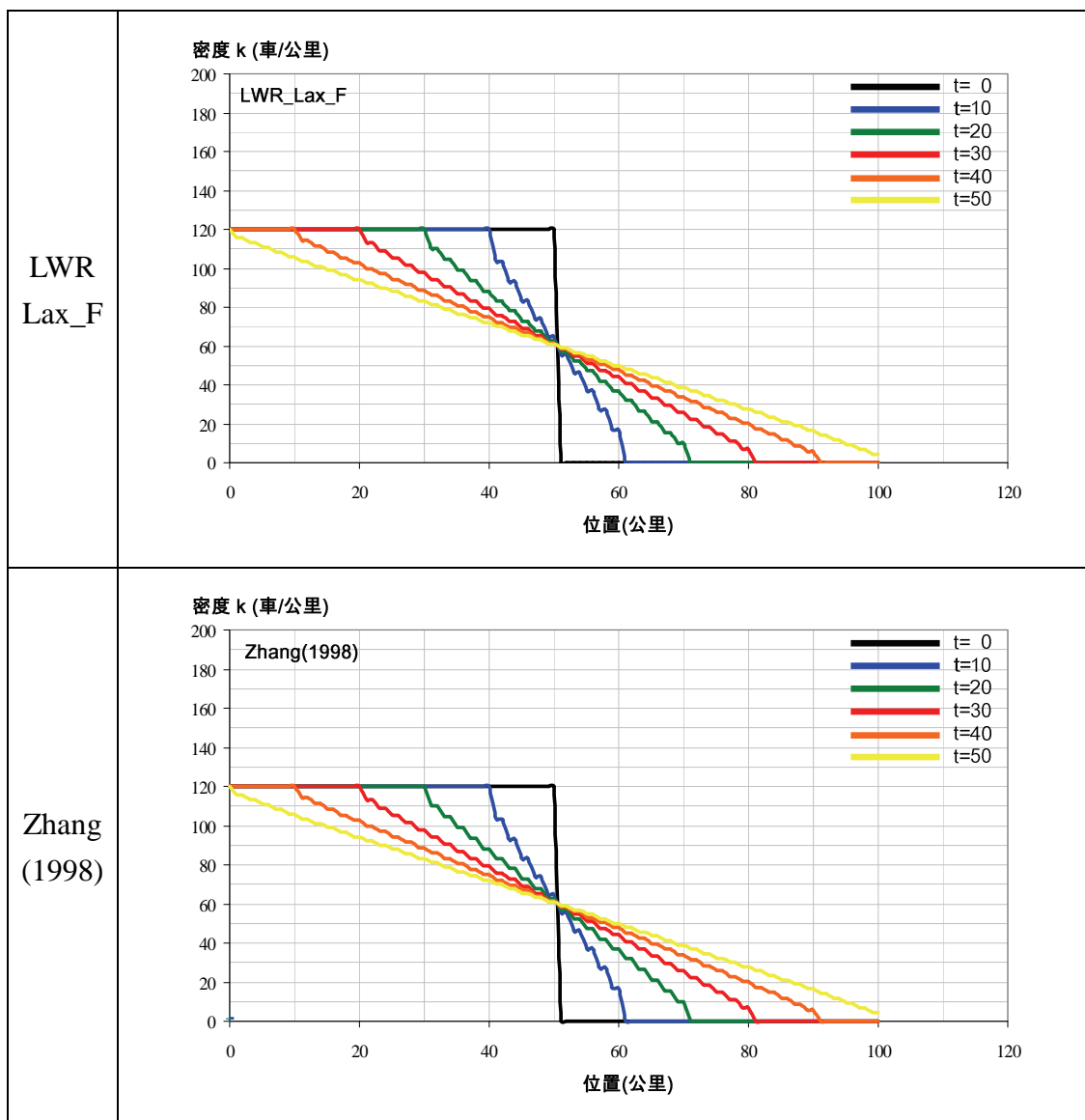


圖 8.3.8 Zhang 模式長停等車隊起動的模擬結果

### 8.3.4 獨立停等車隊不向後退的有限差分模擬

本問題係想發掘會產生車流向後退的高階連續流模式，其起始條件與邊界條件同圖 7.4.8，設定如下：

$$\text{初始條件：} \quad k(x,0) = \begin{cases} 120 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 10 \leq x \leq 20 & (\text{公里}) \\ 0 & (\text{車/公里}); \text{ 當 } 20 < x, \text{ or } x < 10 & (\text{公里}) \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & (\text{公里/小時}); \text{ if } 10 \leq x \leq 20 & (\text{公里}) \\ 80 & (\text{公里/小時}); \text{ if } 20 < x, \text{ or } x < 10 & (\text{公里}) \end{cases}$$

$$q(x,0) = 0, \quad 0 \leq x (\text{公里})$$

邊界條件：  $k(0,t)=0$  車/公里， $u(0,t)=80$  公里/小時， $q(0,t)=0$  車/小時

本問題計模擬 80 個  $\Delta t$  (1 小時)。為利比較，本研究以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準，以密度模擬結果分佈圖，進行各高階模式的比較分析。

#### 1. Ross(1988) 模式

Ross(1988) 模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.9 所示，由圖知，Ross(1988) 模式的密度有大幅振盪的狀況，模擬結果與 LWR 模式完全不同，可以說根本不適用有停等車隊的狀況，惟可以確定的是，該模式不會發生車流向後退的錯誤。

#### 2. Payne(1971)、Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式

該三模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.10 所示，由圖知，Payne(1971)、Liu 等(1998)模式與 Zhang(1998)改良 Ross 模式模化的車流行為大致與 LWR 模式相符，雖會出現密度(速率與流率)大於設定的最大值( $k_{\text{jam}}=120$  車/公里， $u_f=80$  公里/小時， $q_{\text{max}}=2400$  車/小時)的狀況，惟均不發生車流向後退的錯誤。

#### 3. Zhang(1998) 模式

Zhang(1998) 模式模擬結果的密度分佈如圖 8.3.11 所示，由圖知，Zhang(1998) 模式係模擬過程中唯一未出現密度、速率與流率大於設定最大值( $u_f=80$  公里/小時， $q_{\text{max}}=2400$  車/小時)者，且亦不發生車流向後退的錯誤。該模式是近年來特別為解決高階連續流模式所犯錯誤而提出的改良模式，由模擬結果可證，確有較佳的表現。

#### 4. 綜合比較

除 Ross(1988) 模式有大幅振盪，模擬結果與 LWR 模式完全不同，根本不適用有等候車隊的狀況外，為利比較，本研究以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準，取第  $40\Delta t$  (1/2 小時) 各  $x$  點模擬結果的密度、速率與流率分佈圖，進行其他各高階模式的比較分析，如圖 8.3.12 所示。

由圖知，Ross(1988) 以外各模式的表現大致與 LWR 模式相符，且並未發生

車流向後退的錯誤。對有限長車隊向前起動的問題，Payne(1971)模式與 LWR 模式的差異明顯最大，表現最差。表現較優之模式，則依序為 Zhang(1998)、Liu 等(1998)、Zhang(1998)改良 Ross 模式。

本模擬原預期會有模式(至少 Payne(1971)模式)出現停等車隊尾部明顯向後退的狀況，但結果出乎意料的沒有任一模式有此問題。而在各模式中，Zhang(1998)模式的表現明顯優於其他各模式，且其停等車隊起動向前疏散的行為與 LWR 模式完全相同，除說明其模式之優越性外，亦展現本研究對高階連續流模式 Lax-F 有限差分式的正確性。

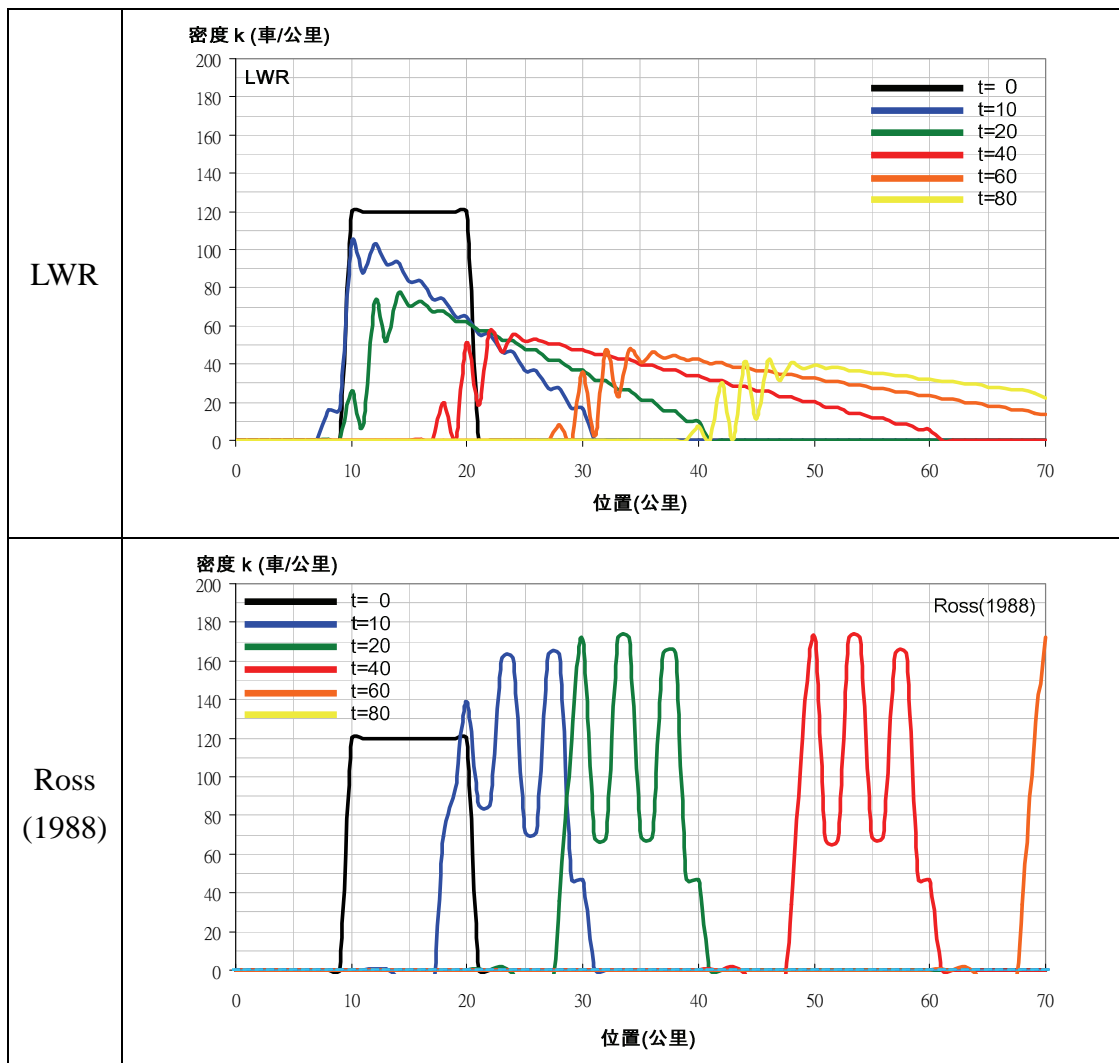


圖 8.3.9 Ross 模式獨立等候車隊起動的模擬結果

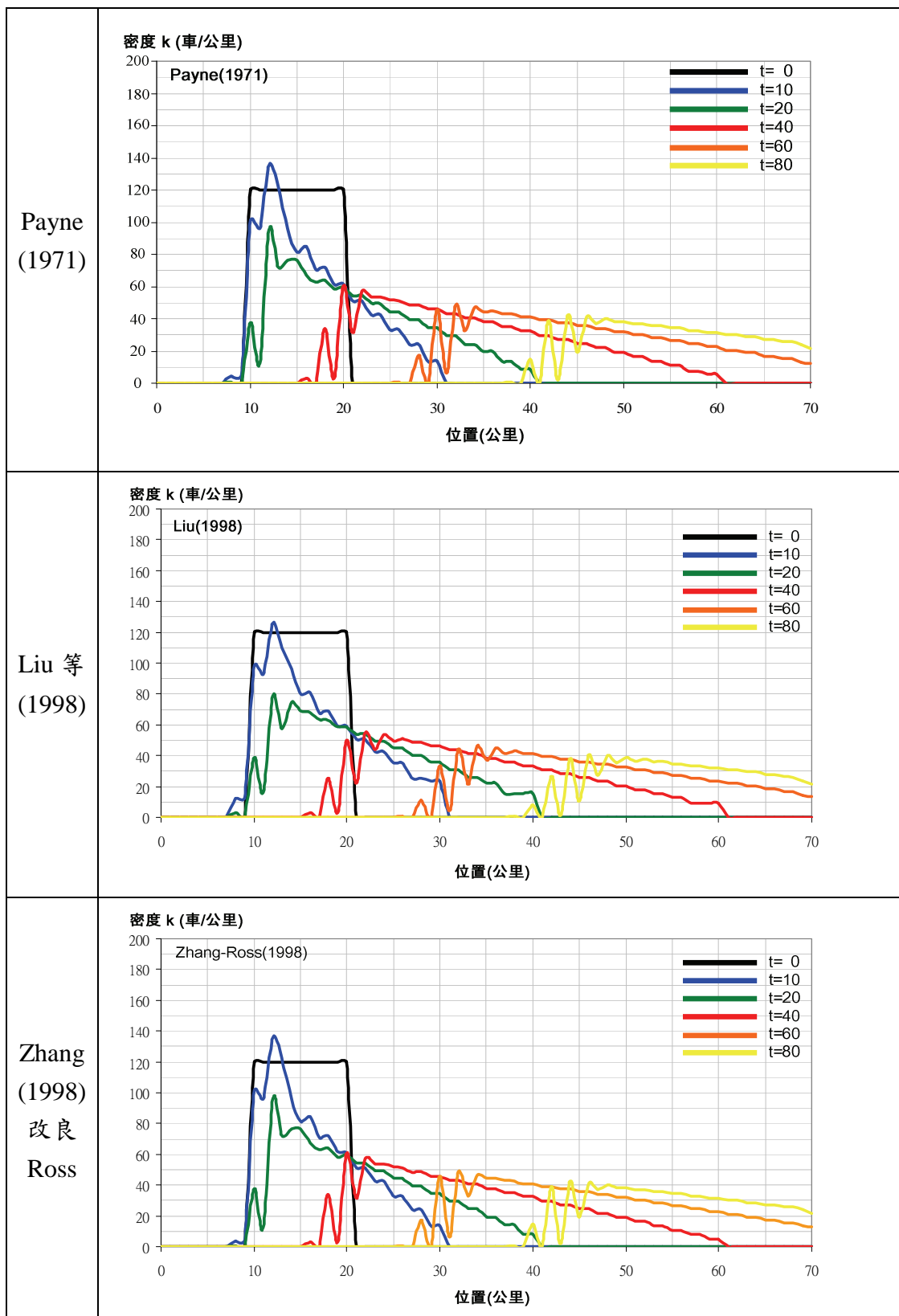


圖 8.3.10 Payne、Liu 等與 Zhang 改良 Ross 模式獨立等候車隊起動的模擬結果

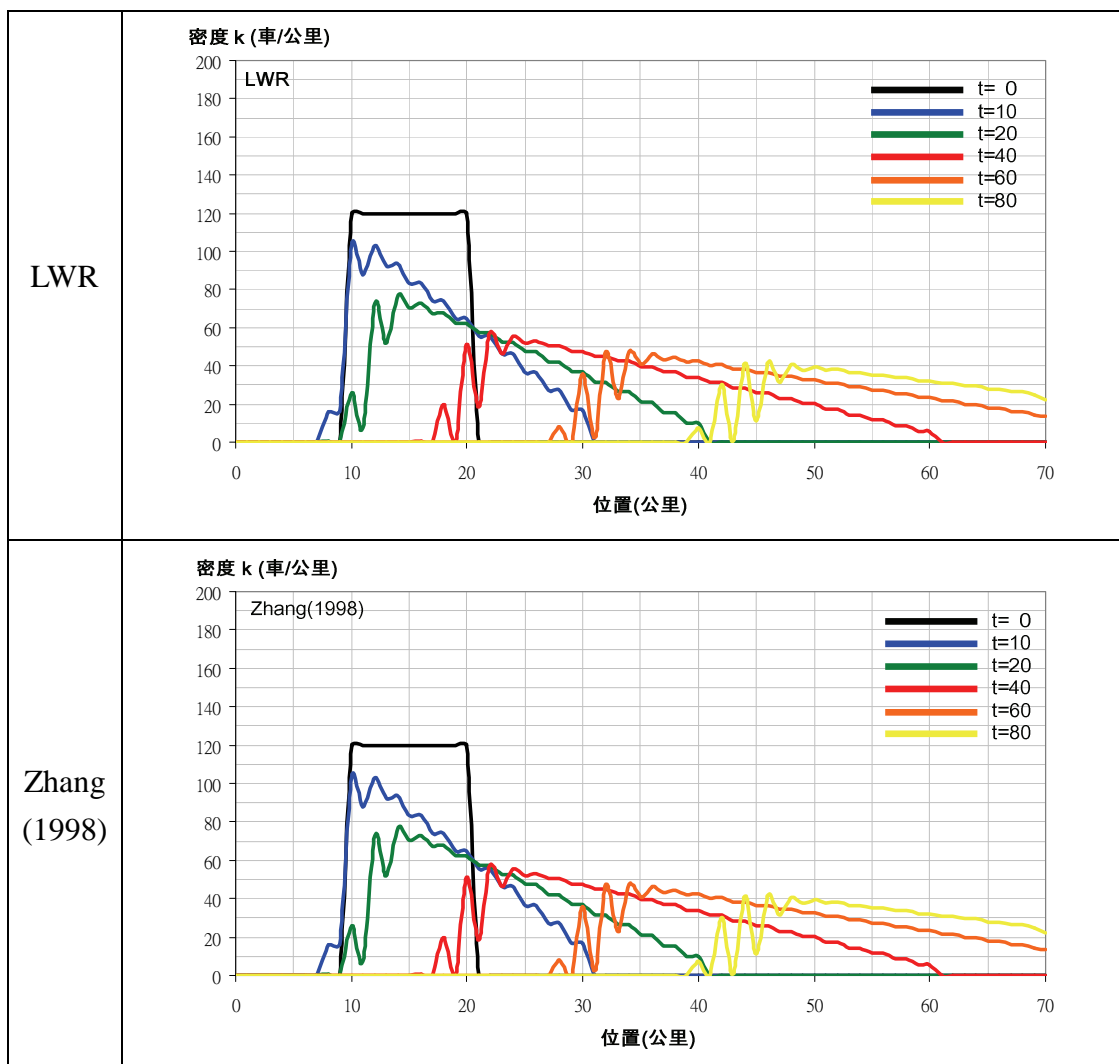


圖 8.3.11 Zhang 模式獨立等候車隊起動的模擬結果



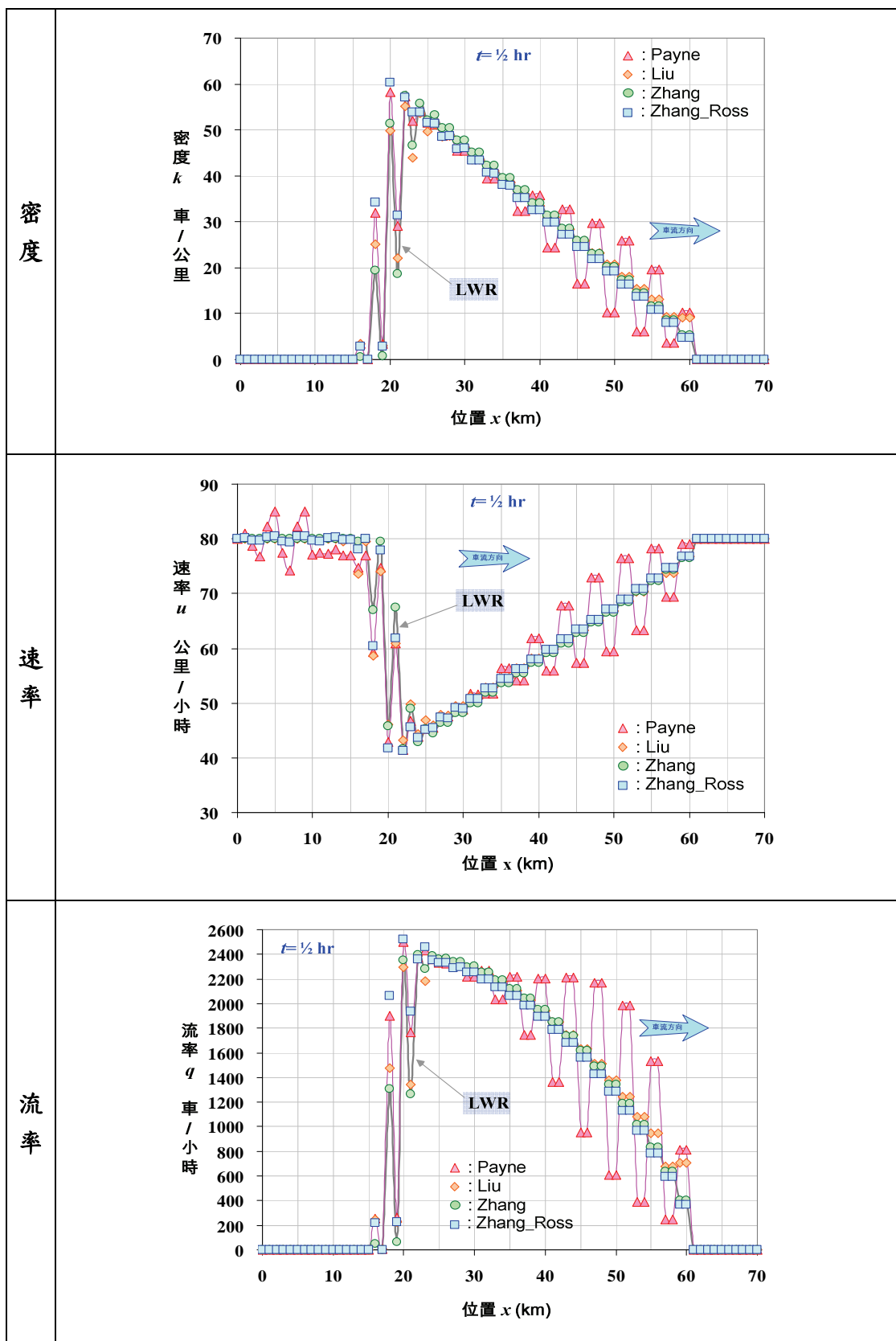


圖 8.3.12 各高階連續流模式對獨立等候車隊起動的模擬結果

## 8.4 本章小結

不論是一階或高階，連續流模式基本上均係偏微分式，欲求其解析解，尤其是高階模式，係相當困難的課題，應用上一般係藉數值分析技術以近似求解之，因屬雙曲線型，其最常為人所用的近似解法係有限差分法。本章以有限差分法模擬分析各種高階連續流模式本身的特性，研究成果有：

### 1. 適用高階連續流模式的有限差分公式

- (1) 過去相關研究中，周志忠(1997)與莊國欽(2001)均採用 Payne(1979)對其高階連續流模式(Payne,1971)提出的有限差分式，其密度差分式係屬 FTBS 差分( $k_j^{n+1}$  參考  $k_j^n, k_{j-1}^n$ )，速率差分式係屬 FTCS 差分( $u_j^{n+1}$  參考  $u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n$ )，流率公式則更簡單( $q_j^{n+1}$  參考  $q_{j-1}^n$ )。而由周志忠(1997)的分析說明與模擬結果知，FTCS 法根本就不安定，FTBS 法只適用車波向前傳遞，不適用車波向後傳遞的狀況。簡言之，上述三研究對高階連續流模式所採用的差分式根本不適用，近似方法上有嚴重問題。
- (2) 經查，周志忠(1997)設定高階連續流模式的模擬環境，係令車流起始時處於車波均正的低密度流車況，使其採用 FTBS 法模擬時並沒有出現問題；莊國欽(2001)模擬的車流均屬未飽和流(密度均低於平常壅塞密度的一半)，即均沒有向後車波的狀況，因而其採用 FTBS 法亦沒有出現問題。總言之，過去相關研究只因所設定的模擬環境條件特殊，恰均符合限制條件，在模擬未出現問題下，一直誤用錯的有限差分法而不自知。
- (3) 由 Zhang(2007)的說明知，近年求解高階模式多採 Lax-F 法；由本研究對 LWR 模式爭議課題的模擬結果知，Lax-F 法確對 LWR 模式有甚佳的表現。基於此，本研究以 Lax-F 法取代過去誤用的 FTBS、FTCS 法，針對本研究曾回顧的 Payne(1971)模式、Ross(1988)模式、Liu 等(1998)模式、Zhang(1998)模式、Zhang(1998)的改良 Ross 模式等五種高階連續流模式，分別提出其密度公式、速率公式與流率公式的有限差分式。
- (4) 本研究提出的高階連續流模式 Lax-F 法有限差分公式的特色是，不論密度公式或速率公式均採完全相同的 Lax-F 法架構，亦即係偏微分項者，如  $k_x, u_x$  等，其差分式均為  $(U_{j+1}-U_{j-1})/2\Delta x$  的型式，係變數項者，如  $k, u$  甚而  $u_c$  等，其差分式均為  $(U_{j+1}+U_{j-1})/2$  的型式，流率公式則直接設定為  $q^{n+1}=k^n \times u^n$ 。這狀似微不足道的作法，卻是影響近似差分公式安定與合理的重要因素。

### 2. 高階連續流模式有限差分模擬的參數與模擬環境設定

- (1) 本研究對於高階連續流模式均會包含的均衡車速  $u_c$  項(即鬆弛項)係採 Greenshields 的模式，即  $u_c = u_f(1 - k/k_{jam})$ ，其參數的設定有別於過去相關研究任意為之的作法，採儘可能符合實務原則，例如設定自由流速率為  $u_f=80$

車/公里，壅塞密度為  $k_{jam}=120$  車/公里(可計算得  $q_{max}=2400$  車/小時)。

- (2) 本研究對於有限差分的時空切割，均係將  $x$  軸以  $\Delta x=1$  公里切割，將  $t$  軸以  $\Delta t=1/80$  小時切割，即  $\Delta x/\Delta t=80$  公里/小時  $=u_f$ ，使其切割比滿足 CFL 收斂條件；過去相關研究曾有採變動時空切割的作法，即  $\Delta x_j/\Delta t_n$  等，本研究認為原高階連續流模式的基本特性未分析清楚之前，不宜直接採用複雜的處理，一切仍先回歸最簡型態為佳。
- (3) 許多高階連續流模式均含鬆弛項與預期項。其中，鬆弛項參數  $\tau$  的設定並無先驗法則，本研究修改周志忠(1997)的作法，設定  $\tau=\Delta t$ ；預期項的  $du_c/dk$ ，因牽涉的參數已有明確設定，故亦能明確算出，即  $du_c/dk=-u_f/k_{jam}=-80/120=-2/3$  公里<sup>2</sup>/(車-小時)。經此設定，差分公式得以大幅簡化，例如許多項均出現  $(\Delta t/\Delta x)\times u_f$  者，或  $\Delta t/\tau$  者，因前述刻意的設定，致均成為 1，故均可消去。

### 3.高階連續流模式的有限差分模擬

本研究以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準，針對 Payne(1971)模式、Ross(1988)模式、Liu 等(1998)模式、Zhang(1998)模式、Zhang(1998)的改良 Ross 模式等五種高階連續流模式，進行有限差分模擬的比較分析，結果發現：

- (1) Ross(1988)模式：根本無法模化向上游回溯衝擊波，亦不適用等候車隊向前起動的狀況，可知該模式可用範圍甚小，惟可以確定的是，該模式不會發生車流向後退的錯誤。
- (2) Payne(1971)、Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式：此三模式在模化向上游回溯衝擊波的狀況時會在衝擊波界面處明顯發生振盪，此外，由模擬數值顯示，三者均發生密度與流率大於最大值，及速率出現負值等狀況。其向後起動波並非呈剪力圖的直線，而是曲線，惟在原停等車隊前緣處，起動後其密度維持  $k_{jam}/2$  不變，與紙上剪力圖同；此外，三者均不發生車流向後退的錯誤。
- (3) Zhang(1998)模式：向上游回溯衝擊波不但沒有出現明顯振盪，與 LWR 模式的模擬結果亦最相近；其等候車隊起動疏散行為，模擬結果出乎意料的與 LWR 模式完全相同(不只圖形，連數值亦完全相同)，此一特性連 Zhang 自己亦未提及，是本研究的重大發現。其向前及向後起動波均為直線，且在原停等車隊前緣處，起動後其密度亦維持  $k_{jam}/2$  不變，與紙上剪力圖同；此外，該模式亦不發生車流向後退的錯誤。整體而言，該模式係所有高階連續流模式表現最佳者。
- (4) Zhang(1998)模式特性的深入探究
  - 1) 本研究以相同的衝擊波狀況，以 LWR 模式解析解為基準，比較 LWR 模式近似解與 Zhang 模式近似解的異同，結果發現，LWR 模式解析解在衝擊波界面處係呈現平滑的亮面，而被衝擊波掃過處的密度均恆為壅

塞密度，不會起伏振盪；LWR 模式 Lax-F 有限差分近似解的衝擊波界面則不工整，惟紊亂的範圍甚窄，且在被衝擊波界面掃過的其他範圍內並未發生波浪起伏，可判定係差分誤差使然；Zhang 模式 Lax-F 有限差分近似解則在被衝擊波界面掃過處會有持續不斷的、漣漪狀的波浪起伏，不但如此，此種波浪起伏甚而向下游擴張，致起始時即不動的車隊內亦會有漣漪狀的波浪起伏。對照 LWR 模式，可判定此種現象已非差分誤差可解釋，而係原高階連續流本身的特性使然。

- 2) Zhang(1998)曾說明其模式特性。如果前方車況密度愈來愈大，亦即預期項的 $\partial k/\partial x$ 為正，則車輛在預知會進入前方較高密度車流時，將會減速。當密度變化相當大，使 $\partial k/\partial x$ 的值很大時，車速的改變亦會很大，則鬆弛項的 $(u-u_e)$ 將隨之變大，鬆弛項亦因而會變很大，並朝反方向調整。而此兩調整項間的互動會導致系統產生振盪，可以用來解釋車流停停走走的狀況。由此知，Zhang(1998)瞭解其模式在模化衝擊波行為時，確會產生漣漪狀的波浪起伏振盪，並解釋係車流在壅塞時停停走走的現象，至於振盪向前擴張的行為，則歸諸於高階連續流有三個波家族所致，雖不合理，但大體上可接受。

#### 4. 高階連續流模式發展的課題

Daganzo(1995)曾嚴厲批判許多高階連續流模式隱含「車流會向後退」的嚴重問題，經本研究以 Lax-F 有限差分進行嚴苛的交通案例模擬，結果發現不但 1995 年以後改良的高階模式沒有「車流向後退」的狀況，就連 1995 年以前提出者亦未出現此一問題。而真正有問題的是，有些高階連續流模式根本不能用(如 Ross(1988)模式)，有些則不安定或誤差太大(包括 Liu 等(1998)模式、Zhang(1998)改良 Ross 模式、Payne(1971)模式等)。

簡言之，高階連續流模式發展的課題不在探討「車流會不會向後退」，而在於模式能不能用，亦即所研發的模式是否具備良好的特性，能否通過各種嚴苛交通條件的考驗。

#### 5. 後續高階連續流模化與應用之相關建議

本研究雖已研發出高階連續流模式有效的差分近似解法，並藉模擬分析找出許多新的發現，惟限於時間，仍有許多後續工作值得繼續進行，包括：

##### (1) 關於高階連續流模式差分式的參數設定方面

本研究對高階連續流模式鬆弛時間  $\tau$  的差分設定，基本上係沿用周志忠(1997)的作法，再稍作修改而設定為  $\tau = \Delta t$ 。由於本研究在差分模擬時設定的 $\Delta t=1/80$ 小時=45 秒，如  $\tau$  的作用相當於微觀跟車模式中的駕駛者反應延遲時間，則如此長的反應延遲，是否係造成衝擊波掃過處仍有持續不斷的、漣漪狀波浪產生的原因，實值得再深入探究。建議後續研究嘗試縮短參數  $\tau$  的值，進行比較分析。

(2) 關於高階連續流模式的模化方面

Zhang(1998)模式係近年來表現最好的高階連續流模式，惟仍有尚需改進之處，即其鬆弛項  $\tau$ ，相關文獻通常解釋為駕駛者反應延遲時間  $T$ ，Zhang 係以常數定式  $(v_f + v v_x = (v_e - v)/\tau - k(v_e')^2 k_x)$  可嘗試修正 Zhang 模式，令其鬆弛項  $\tau = \tau(k)$ 。而由微觀跟車模式的安定性分析知， $T$  須隨  $k$  而變，如高階連續流模式中的  $q = ku$  式係採 Greenshields 水流模式，則將前述  $T = (2\alpha k^2)^{-1}$  式代入 Zhang(1998)模式中，可導得新的動量公式為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = (u_e - u) \frac{2u_f k^2}{k_{jam}} - k \left( \frac{du_e(k)}{dk} \right)^2 \frac{\partial k}{\partial x}$$

建議後續研究可針對上式模式再進行深入剖析，瞭解其特性。



## 第九章 結論與建議

本章綜合整理車流行為模化各單元的精要，並提出後續研究的方向與建議。

### 9.1 結論

#### 1. 車流參數與巨觀水流模式

車流三參數間存在「流率=密度×速率」的守恒式，其中的速率必須為空間平均速率。惟為估算空間平均速率，以「瞬間-長距離」法(如空照)取得樣本不但技術上非常困難且亦不經濟，而實務上簡單可行的取樣方式係「定點-長時間」法，問題是其樣本以算術平均會高估空間平均速率。此一問題在車流理論發展的早期，曾困擾研究者相當一段時間，現已獲理論證實，在車流達均質時，採「定點-長時間」法取得的個別車速樣本，經調和平均可不偏推估空間平均速率。

對車流行為的模化，最初的觀察係從巨觀角度。事實上車流有些面相還真的像水流，這也難怪早期的車流模式多類比水流，所建立的多屬所謂的水流模式，而在構建水流模式的過程中，引起較大爭議的是前述推估空間平均速率理論上的問題。不論如何簡單，水流模式基本上已掌握車流整體的基本特性，當時透過水流模式，相關研究學者最有興趣的議題是道路最大流率(容量)的發生(找容量點)及其大小(找容量值)。

水流模式係描述車流三參數兩兩間的關係。過去有段相當長的時間，流率-密度關係式被賦予崇高的地位，其關係曲線甚而被稱為車流基本圖。近年來速率-流率關係式的重要性漸受肯定，原因之一係此兩參數可以「定點-長時間」法取得樣本，不經轉換直接推估；原因之二係相關研究累積多年公路運轉經驗後已瞭解，自由流車速才是反映道路品質的關鍵指標，在過去採用的容量分析方法中，影響公路服務水準的各種因素係公路容量值的修正因子，但自 1994 年後已改為只直接影響自由流車速，間接影響公路容量。如此一來，速率-流率關係式在整個容量分析方法上就變得非常重要。回顧歷年各版的公路容量手冊，即能發掘出這種有趣的方法論的變化。

#### 2. 微觀跟車模式

跟車模式的基本架構是「反應=敏感×刺激」。在模式發展的歷程中，反應項一直是後車的加速率，刺激項一直是前後兩車的相對速率，真正花工夫調校的，是敏感項的組成。歷經多次實車實驗~模式修改等反覆的試誤過程，Herman 團隊終於確立了敏感項的組成，即分母的車間程，分子的后車速率，及一個敏感常數，其分母、分子項各有一個指數參數  $l$ 、 $m$ ，後人遂通稱該跟車模式為  $l$ - $m$  模式。

在穩定狀態下，巨觀水流模式與某一  $l$ - $m$  值的微觀跟車模式有一對一對映關係，亦即假設車流中各車均採某一跟車機制下，一葉知秋，即可瞭解其整體的車流表現。這是車流理論發展的最大突破，亦是微觀跟車模式研發者的最大貢獻。

### 3.跟車模式安定性分析

跟車模式安定性分析係屬模式驗證工作，其中，線性跟車模式的安定性可以數值分析(如拉氏或傅立葉函數轉換)求解，非線性跟車模式的安定性則甚難以數值求解，惟可藉模擬的方式來探討。經分析發現：

#### (1) 線性跟車模式的漸近安定性

- 1) 考慮由一串車輛組成的車隊的行車狀況，數值理論分析知，其安定性條件係敏感度與反應時間的乘積( $\lambda \times T = C$ )須小於  $1/2$ 。當該值等於  $1/2$  時，車隊會因些微擾動而出現振盪，且其振幅在向後續各車傳遞的過程中維持不變，惟兩兩車輛間跟車間程的振盪均會以指數型式迅速沉寂。
- 2) 由線性跟車模式的模擬結果知，只要滿足  $C \leq 1/2$  的漸近安定性條件，則模擬的最大允許加減速雖隨不同密度  $k$  而不同，但並不受跟車反應延遲時間  $T$  的影響，此係本研究的一項重大發現。

#### (2) 非線性跟車模式的漸近安定性

- 1) 線性跟車模式漸近安定性的模擬結果只有  $C = \lambda T \leq 1/2$  者安定， $C = \lambda T > 1/2$  者不安定兩種結果。非線性跟車模式的漸近安定性則至少有三種模擬結果：
  - a. 狀況 1 (安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在頭車，然後就隨向後傳遞的車次而依序縮減；
  - b. 狀況 2 (不安定)：車速變化振盪的最大幅度是發生在車隊的中間(頭車以後，尾車之前)；
  - c. 狀況 3 (不安定)：車速變化的振盪隨向後傳遞的車次而依序擴大，即振盪的最大幅度是發生在車隊的尾車。
- 2) 以 Greenshields 模式而言，非線性微觀跟車模式漸近安定的條件，不論  $T$  值為何，均為  $C = (\lambda_{2,0}/s^2) \times T \leq 1/2$ ，其中， $(\lambda_{2,0}/s^2)$  係模式的敏感項，相當於線性跟車模式的  $\lambda$ ，亦即非線性跟車模式漸近安定的條件與線性跟車模式理論分析的結果一致。找出非線性跟車模式的漸近安定條件，是本研究另一重大的發現。
- 3) 將頭車加減速率的規模縮小，可找出符合漸近安定條件的加減速率，結果發現，符合漸近安定性條件下，跟車反應時間  $T$  愈小，車流能保持安定之加減速率的交通範圍(密度區間)就愈大。例如  $T=0.1$  秒可適用各種密度狀況( $k=0 \sim k_j$ )，當  $T=3.0$  秒時，密度稍大者即不適用，均找不到車流能保持安定的加減速率值。
- 4) 相對地，符合漸近安定的條件下，不同交通環境適用的最大允許反應時間  $T$  並不同，以 Greenshields 模式而言，其數學式為  $T = (2\lambda_{2,0}k^2)^{-1}$ 。簡單的說，巨觀車流模式中，代表反應時間的參數不應設為常數，而應模化成密度的函數。這亦是本研究的重大發現。



#### 4.簡單連續流模式

簡單(一階)連續流模式是 Lighthill 與 Whitham(1955)與 Richards(1956)在同一時期提出者，一般稱為 LWR 模式。經本研究分析證實，如巨觀水流模式採 Greenshields 模式，則 Lighthill 與 Whitham(1955)的車波-衝擊波理論與 Richards(1956)的紙上剪力圖法互為對映，此係相關研究所忽略的，亦是本研究的重大發現。而由此結果知，各種巨觀水流模式中，物理特性最像水流的當屬 Greenshields 模式。然而駕駛行為一般比水流複雜得多，亦即現場調查車流參數建立的巨觀水流模式會與 Greenshields 模式有程度不等的差異，惟不論如何，Greenshields 模式具備簡單與易於操作性，仍係車流巨觀模化上重要的基準模型。

簡單連續流模式是巨觀車流模式會動的最基本模式，雖然其能應用在車流行為最複雜的號誌交岔路口模擬，惟其過於簡單的特性一直為研究者所詬病。其中爭議最大者，在於其將衝擊波模化成沒有寬度，致車輛穿越衝擊波時會瞬間改變車速，隱含其間加減速率無限大的問題，此亦係後續相關研究致力於研發高階連續流模式的主因。

#### 5.高階連續流模式

高階連續流模式含納車流漸近的轉變狀態(車流由一種狀態轉變成另一種狀態的漸近而非瞬間的過程)，亦含納車流的不穩定性(可描繪非均衡時的車流)，擴充了運動波模式的功能。

高階連續流模式與一階連續流模式並非完全不同，例如兩類模式均存在衝擊波，而因為鬆弛，這兩種模式的解(衝擊波或稀釋波)會隨時間的拉長而愈來愈相近，當車流達穩定時，理想的高階連續流模式會與一階連續流模式趨於一致。

惟高、低階連續流模式亦有顯著不同。高階連續流模式有三個特性波家族，一階連續流模式只有一個；高階連續流模式的第一個特性波家族與一階連續流模式的特性波相近，第二、三個特性波家族則完全不同，其中一特性波家族行進的速率會高於車流速率，因而係由後方接近駕駛者。此外，高階連續流模式會出現滾動波，一階連續流模式並不會，而滾動波可用以解釋車流走走停停的狀態。

Zhang(1998)的高階連續流模式不會出現車流向後退，且具內部安定性，除可以模化不均衡的車流狀態外，當車流達均衡時更自動退化成 LWR 模式，係至目前為止表現最佳的高階連續流模式。

#### 6.連續流模式有限差分解

連續流模式基本上均係偏微分式，應用上一般係藉數值分析技術以近似求解之。又因屬雙曲線型，故最常被採用的近似解法係顯式有限差分法。本研究在此方面的成果如下：

##### (1) 適用於連續流模式的有限差分法

雙曲線型偏微分式的有限差分法計有 FTFS、FTBS、FTCS、Lax-F、Lax-W、Leapfrog 及 Beam-Warming 等。其中，周志忠(1997)對一階線性連續流模式的模擬發現，只有 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 三法較佳。FTBS 法與

Beam-Warming 法雖在模擬個案上表現尚佳，惟因須滿足波速為正的 CFL 收斂條件，故對車波可能向前傳遞(波速為正)亦可能向後傳遞(波速為負)的一階準線性連續流模式(LWR 模式)並不適用。

(2) 針對 LWR 模式特殊車流行為的有限差分模擬

本研究以 Lax-F、Lax-W 及 Leapfrog 等三種差分方法，針對 LWR 模式會產生向上游回溯衝擊波、無限長車隊起動向下游疏解(扇形起動波)，及有限長車隊只會單向起動(不會向後退)等常有爭議的課題進行深入分析，結果發現 Lax-W、Leapfrog 兩種有限差分法不是誤差過大就是不安定；Lax-F 有限差分法與解析解最一致，其衝擊波尾端向上游回溯的模擬結果與解析解幾完全相同，車隊起動模擬亦充分近似原 LWR 連續流模式的稀釋解。而由密度在時空分佈的鳥瞰圖則清楚顯現向前扇形波動的軌跡，說明等候車隊在前方無車狀況下起動疏解時，於時空座標上確實可以扇形起動波來模化。而經 Lax-F 有限差分法模擬，證實 LWR 連續流模式雖有許多缺點，但確不會發生車流向後退的錯誤。

## 7. 高階連續流模式的有限差分模擬

本研究以有限差分模擬來分析各種高階連續流模式本身的特性，成果有：

(1) 適用高階連續流模式的有限差分公式

- 1) 本研究以 Lax-F 法取代過去誤用的 FTBS、FTCS 法，針對 Payne(1971)模式、Ross(1988)模式、Liu 等(1998)模式、Zhang(1998)模式、Zhang(1998)的改良 Ross 模式等五種高階連續流模式，分別提出其密度公式、速率公式與流率公式的有限差分式；
- 2) 本研究提出的高階連續流模式 Lax-F 法有限差分公式的特色是，不論密度公式或速率公式均採完全相同的 Lax-F 法架構，亦即係偏微分項者，其差分式均為  $(U_{j+1}-U_{j-1})/2$  的型式，係變數項者，其差分式均為  $(U_{j+1}+U_{j-1})/2$  的型式，流率公式則直接設定為  $q^{n+1}=k^n \times u^n$ 。這狀似微不足道的作法，卻是影響近似差分公式安定與合理的重要因素。

(2) 高階連續流模式的有限差分模擬

本研究以 LWR 模式的 Lax-F 有限差分近似解為基準，針對 Payne(1971)模式、Ross(1988)模式、Liu 等(1998)模式、Zhang(1998)模式、Zhang(1998)改良 Ross 模式等 5 個高階連續流模式，進行有限差分模擬的比較分析，結果發現：

- 1) Ross(1988)模式：根本無法模化向後衝擊波，亦不適用等候車隊向前起動的狀況，可知該模式可用範圍甚小，惟可以確定的是，該模式不會發生車流向後退的錯誤。
- 2) Payne(1971)、Liu 等(1998)與 Zhang(1998)改良 Ross 模式：此三模式在模化向後衝擊波的狀況時會在衝擊波界面處明顯發生振盪，而由模擬數值

顯示，三者均發生密度與流率大於最大值，及速率出現負值等狀況；其向後起動波並非如剪力圖般呈現直線，而是曲線，惟在原停止車隊前緣處，起動後其密度維持  $k_j/2$  不變，與紙上剪力圖的分析結果同；此外，三種模式均不發生車流向後退的錯誤。

- 3) Zhang(1998)模式：向後衝擊波不但沒有出現明顯振盪，與 LWR 模式的模擬結果亦最相近；其等候車隊起動疏散的模擬結果出乎意料的與 LWR 模式完全相同(不只圖形，連數值亦完全相同)，此一特性連 Zhang 自己亦未提及，是本研究的重大發現。其向前及向後起動波均為直線，且在原停止車隊前緣處，起動後其密度亦維持  $k_j/2$  不變，與紙上剪力圖的分析結果同；此外，該模式亦不發生車流向後退的錯誤。整體而言，該模式係所有高階連續流模式表現最佳者。
- 4) 由 Zhang(1998)模式的模擬結果與 LWR 非常相近的事實知，本模式採用的 Lax-F 有限差分法，確實係可用於高階連續流模式的近似解方法。

### (3) Zhang(1998)模式特性的深入探究

- 1) 本研究以相同的衝擊波狀況，以 LWR 模式解析解為基準，比較 LWR 模式近似解與 Zhang 模式近似解的異同，結果發現，LWR 模式解析解在衝擊波界面處係呈現平滑的亮面，而被衝擊波掃過處的密度均恆為壅塞密度，不會起伏振盪；LWR 模式 Lax-F 有限差分近似解的衝擊波界面則略不工整，惟紊亂的範圍甚窄，且在被衝擊波界面掃過的其他範圍內亦未發生波浪起伏，可判定係差分誤差使然；Zhang 模式 Lax-F 有限差分近似解則在被衝擊波界面掃過處會有持續不斷的、漣漪狀的波浪起伏，不但如此，此種波浪起伏甚而向車隊前方(下游)擴張，致起始時即停駐不動的車隊內部亦會遭波及，而亦呈漣漪狀的波浪起伏。對照 LWR 模式，可判定此種現象已非差分誤差可解釋，而係原高階連續流本身的特性使然。
- 2) Zhang(1998)曾說明其模式特性。如前方車流密度愈來愈大，亦即預期項的  $\partial k / \partial x$  為正，則車輛在預知會進入前方較高密度車流時，將會減速；當密度變化相當大，使  $\partial k / \partial x$  的值很大時，車速的改變亦會很大，則鬆弛項的  $(u - u_c)$  將隨之變大，鬆弛項亦因而會變很大，並朝反方向調整。而此兩調整項間的互動會導致系統產生振盪，可用來解釋車流停停走走的狀況。其實，高階連續流模式有三個車波族，且有的車波族的波速甚而比車速快，致其模化下的行車資訊不全由駕駛前方傳來，有部分係從駕駛後方傳來。此當係其模化衝擊波行為時，已停止車隊內仍會產生漣漪狀波浪起伏振盪的主因，惟只要幅度不要太大，則雖不合理，大體上仍可接受。但強以解釋係車流在壅塞時停停走走的現象，則似太過牽強。

## 8.高階連續流模式發展的課題

Daganzo(1995)曾嚴厲批判許多高階連續流模式隱含「車流會向後退」的嚴重問題，經本研究以 Lax-F 有限差分進行嚴苛的交通案例模擬，結果不但 1995 年以後改良的高階模式沒有「車流向後退」的狀況，就連 1995 年以前提出者亦未出現此一問題。而真正有問題的是，有些高階連續流模式根本不能用(如 Ross(1988)模式)，有些則不安定或誤差太大(包括 Liu 等(1998)模式、Zhang(1998)改良 Ross 模式、Payne(1971)模式等)。

簡言之，高階連續流模式發展的課題不在探討「車流會不會向後退」，而在於模式能不能用，亦即所研發的模式是否具備良好的特性，能否通過各種嚴苛交通條件的考驗。

## 9.2 建議

### 1.跟車模式後續發展之建議

#### (1) 關於跟車模式的反應時間 $T$

在推導其對映的巨觀水流模式過程中，跟車模式的反應時間  $T$  在車流呈均衡狀態的假設下係被剔除，而巨觀水流模式中亦無此項參數，直到發展高階連續流模式，相關文獻通常解釋其鬆弛項  $\tau$  為駕駛者反應時間  $T$ ，此一被剔除的參數才又重見天日。而在微觀方面，本研究已確定  $T$  係隨不同的  $k$  而變，例如以 Greenshields 水流模式對映的跟車模式，其  $T$  可寫成：

$$T = \frac{1}{2\lambda_{2,0}k^2} = \frac{k_{jam}}{2u_f \times k^2}$$

惟在巨觀方面，已有的各種高階連續流模式大多將鬆弛項  $\tau$  以常數設定。除非各方能接受車輛駕駛人的反應時間在任何交通環境下均相當小(例如  $T=0.1$  秒，相當於瞬間反應)，否則不論是微觀或巨觀模式，均應審慎處理此一與人因有關的重要參數，本研究找出的  $T=f(k)$  關係，可供後續車流理論模式發展參考。

#### (2) 關於跟車模式的參數校估

跟車模式發展至今已有 50 餘年，卻甚少有實務的應用，原因之一是其參數校估相當困難，相關研究獲得的參數校估值彼此差異甚大，莫衷一是。事實上想藉由蒐集動態的、變化甚大的駕駛行為資料來校估跟車模式的參數，原即不符統計原則(例如迴歸式的自變數須符合無量測誤差的假設)，本研究認為，May 與 Keller(1967)校估巨觀水流模式再回推微觀跟車模式參數的作法，似較合理可行，建議應朝此一方向再予精進發展，使跟車模式能有更多的實務應用。

### 2.後續高階連續流模化之相關建議

本研究雖已研發出高階連續流模式有效的有限差分近似解法，並亦模擬分析出許多高階連續流模式的新發現，惟限於時間，仍有許多後續工作值得繼續進行，包括：

(1) 關於高階連續流模式差分式的參數設定方面

本研究對高階連續流模式鬆弛時間  $\tau$  的差分設定，基本上係沿用周志忠(1997)的作法，將之設定為  $\tau = \Delta t$ 。由於本研究在差分模擬時設定的  $\Delta t = 1/80$  小時，即  $\Delta t$  為 45 秒，如  $\tau$  的作用相當於微觀跟車模式中的駕駛者反應時間，則設定如此長的反應延遲，是否係造成衝擊波掃過處仍有持續不斷的、連漪狀波浪產生的原因，實值得再深入探究。建議後續研究可嘗試縮短參數  $\tau$  的值，進行比較分析。

(2) 關於高階連續流模式的模化方面

Zhang(1998)模式係近年來表現最好的高階連續流模式，惟仍有尚需改進之處。例如鬆弛項  $\tau$ ，相關文獻通常解釋為駕駛者反應時間  $T$ ，Zhang 係以常數定式  $(v_f + vv_x = (v_e - v)/\tau - k(v_e')^2 k_x)$ ，似可嘗試修正 Zhang 模式，令其鬆弛項  $\tau = \tau(k)$ 。而由微觀跟車模式的安定性分析知， $T$  須隨  $k$  而變，如高階連續流模式中的  $q = ku$  式係採 Greenshields 水流模式，則將前述  $T = (2\lambda_{2,0}k^2)^{-1}$  式代入 Zhang(1998)模式中，可導得新的動量公式為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = (u_e - u) \frac{2u_f k^2}{k_{jam}} - k \left( \frac{du_e(k)}{dk} \right)^2 \frac{\partial k}{\partial x}$$

建議後續研究可針對上式模式再進行深入剖析，瞭解其特性。

### 3. 車流行為模化後續發展之相關建議

車流行為的模化，從巨觀水流模式至微觀跟車模式，從簡單連續流模式至高階連續流模式，內容似相當充足，惟其中有一大家似有意忽略的事實，即這些微、巨觀模式均隱含「車流係在單車道運行」的假設。換言之，這些模式均未包含車輛變換車道(lane-changing)行為的機制。

Laval and Daganzo(2006)即指出，高速公路上車輛變換車道行為在最近十年更加吸引科學家的注意，雖然相關研究已提出質的推估與現場實證，但變換車道對車流衝擊在「量」上的瞭解，迄今仍闕如。

Laval and Daganzo(2006)亦說明，既有的車流模式並不能適當描述變換車道現象。事實上，相關研究曾試圖在 LWR 傳統的運動波理論中置入變換車道行為，例如 Munjal and Pipes(1971); Munjal, Hsu, and Lawrence (1971); Michalopoulos, Beskos, and Yamauchi (1984); Daganzo(1997); Daganzo, (2002a,b)等，惟因均係以可瞬間加速的方式來處理車輛變換車道，亦即車輛變換至目的車道時並未明顯減速，故無法模化目的車道上後續車輛受變換車道插隊進來較低速車輛阻礙的實況。有些微觀模擬模式雖已考慮變換車道實際的加速過程，但仍未能被成功應用在變換車道行為模化上。而對這些模式有應用經驗者指出，變換車道會大量增加

模式規格與推估程序的複雜性。

簡言之，車流行為模化的後續發展，車輛變換車道的行為將成為最受關注的要項，其模化的進程勢必成為車流行為模化有否突破的指標，值得對車流理論有興趣者注意與致力。

## 參考文獻

1. Athol, P., "Interdependence of Certain Operational Characteristics within a Moving Traffic Stream," Highway Research Record 72, 58-87, 1965.
2. Aron, M., "Car following in an Urban Network: Simulation and Experiments," In Proceedings of Seminar D, 16<sup>th</sup> PTRC Meeting, 27-39, 1988.
3. Breiman, L., "Data and Models in Homogeneous One-Way Traffic Flow," Transportation Research 3(2), 235-249, 1969.
4. Breiman, L., "A Relationship between Space and Time Distributions in Homogeneous Traffic Flow and Its Applications," Transportation Research 8(1), 39-44, 1974.
5. Brackstone, M. and M. McDonald, "Car-following: a Historical Review," Transportation Research 2F, 181-196, 1999.
6. Byrne, B. F., "Some Errors in Macroscopic Traffic Models Based on Car Following Models," Transportation Research 14B, 241-242, 1980.
7. Castillo, J. M. D., P. Pintado, and F. G. Benitez, "The Reaction Time of Drivers and the Stability of Traffic Flow," Transportation Research 28B, 35-60, 1994.
8. Ceder, A., "Investigation of Two-Regime Traffic Flow Models at the Micro- and Macro-Scopic Levels," Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley, California, 1975.
9. Ceder, A., A. D. May, "Further Evaluation of Single and Two Regime Traffic Flow Models," Transportation Research Record 567, 16-30, 1976.
10. Chandler, R. E., R. Herman, and E.W. Montroll, "Traffic Dynamic Studies in Car Following," Operations Research 6(2), 165-184, 1958.
11. Courant, R., K. O. Friedrichs, and H. Lewy, "On the Partial Difference equations of mathematical physics," IBM Journal 11, 215-234, 1967.
12. Daganzo, C. F., "Requiem for Second-Order Fluid Approximations of Traffic Flow," Transportation Research 29B (4), 277-286, 1995.
13. Daganzo, C. F., "A Finite Difference Approximation of the Kinematics Wave Model of Traffic Flow," Transportation Research 29B (4), 261-276, 1995.
14. Daganzo, C.F., "A Continuum Theory of Traffic Dynamics for Freeways with Special Lanes," Transportation Research 31B (2), 83-102, 1997a.
15. Daganzo, C. F., Fundamentals of Transportation and Traffic Operations, Pergamon, Oxford, 1997b.
16. Daganzo, C.F., "A Behavioral Theory of Multi-lane Traffic Flow part I: Long Homogeneous Freeway Sections," Transportation Research 36B (2), 131-158,

2002a.

17. Daganzo, C.F., “A Behavioral Theory of Multi-lane Traffic Flow part II, Merges and the Onset of Congestion,” *Transportation Research* 36B (2), 159–169, 2002b.
18. Dhingra, S. L., “Foundations of Traffic Flow Theory: The Fundamental Diagram, Traffic Flow Theory Historical Research Perspectives,” *Transportation Research Circular E-C149*, 2011.
19. Dijkster, T., P. H. L. Bovy and R. G. M. M. Vermijs, “Car-Following under Congested Conditions: Empirical Findings,” *Transportation Research Record* 1644, 20-28, 1998.
20. Drake, J. S., J. L. Schofer, and A. D. May, “A Statistical Analysis of Speed Density Hypotheses,” *Highway Research Record* 154, 53-87, 1967.
21. Drew, D. R., Deterministic Aspects of Freeway Operations and Control, Texas Transportation Institute, Research Report 24-4, 1965.
22. Drew, D. R., Traffic Flow Theory and Control, McGraw-Hill Book Company, Chapter 12, 1968.
23. Duncan, N. C., “A Further Look at Speed/ Flow/ Concentration,” *Traffic Engineering and Control*, 482-483, 1979.
24. Easa, S. M. and A. D. May, “Generalized Procedures for Estimating Single- and Two-Regime Traffic Flow Models,” *Transportation Research Record* 772, 24-37, 1980.
25. Edie, L.C., “Car-Following and Steady-State Theory for Noncongested Traffic,” *Operations Research* 9(1), 66-76, 1961.
26. Edie, L. C. and E. Bavarez, “Generation and Propagation of Stop-start Traffic Waves,” In Edie, L. C., R. Herman and R. Rothery, eds., Vehicular Traffic Science, Elsevier, 26-37, 1967.
27. Forbes, T.W., M.E. Simpson, “Driver and Vehicle Response in Freeway Deceleration Waves,” *Transportation Science* 2(1), 77-104, 1968.
28. Gazis, D. C., R. Herman, and R.B. Potts, “Car-Following Theory of Steady-State Traffic Flow,” *Operations Research* 7(4), 499-505, 1959.
29. Gazis, D. C., R. Herman, and R. Rothery, “Nonlinear Follow-The-Leader Models of Traffic Flow,” *Operations Research* 9 (4), 545-567, 1961.
30. Gazis, D. C., Herman, R., Weiss, G. H., “Density Oscillations between Lanes of a Multilane Highway,” *Operations Research* 10, 658-667, 1962.
31. Gazis, D. C., “The Origins of Traffic Theory,” *Operations Research* 50(1), 69–77, 2002.
32. Gerlough, D. L. and M. J. Huber, Traffic Flow Theory: a Monograph, Special Report 165, Transportation Research Board (Washington DC: National Research Council), 1975.



33. Greenberg, H., "An Analysis of Traffic Flows," *Operation Research* 7(1), 79-85, 1959.
34. Greenshields, B. D., "The Photographic Method of studying Traffic Behavior," *Proceedings of the 13<sup>th</sup> Annual Meeting of the Highway Research Board* 13, 382-396, 1933.
35. Greenshields, B.D., "A Study of Highway Capacity," *Proceedings Highway Research Record* 14, 448-477, 1935.
36. Haight, F. A., "The Volume, Density Relation in the Theory of Road Traffic," *Operations Research* 8, 572-573, 1960.
37. Haight, F. A. Mathematical Theories of Traffic Flow, New York: Academic Press, 1963.
38. Hall, F. L., B. L. Allen, and M. A. Gunter, "Empirical Analysis of Freeway Flow-Density Relationships," *Transportation Research* 20A, 197-210, 1986.
39. Hall, F. L., "Traffic Stream Characteristics," Chapter 2 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," *Transportation Research Board*, 2001.
40. Herman, R., E. W. Montroll, R. B. Potts and R. W Rothery, "Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car Following," *Operations Research* 7, 86-106, 1959.
41. Herman, R. and R. B. Potts, "Single Lane Traffic Theory and Experiment," *Proceedings Symposium on Theory of Traffic Flow*. Ed. R. Herman, Elsevier Publications Co., 120-146, 1959.
42. Heyes, M. P., R. Ashworth, "Further Research on Car Following Models," *Transportation Research* 6, 287-291, 1972.
43. Highway Capacity Manual (1950), U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1950.
44. Highway Capacity Manual (1994), Committee A3A10, Highway Capacity and Quality of Service. Highway Capacity Manual, Chapter 3, "Basic Freeway Segments". TRB, National Research Council, Washington, D.C., 1993.
45. Hoefs, D.H., "Entwicklung einer Messmethode uber den Bewegungsablauf des Kolonnenverkehrs," *Universitat (TH) Karlsruhe, Germany*, 1972.
46. Kometani, E. and T. Suzuki, "On the Stability of Traffic Flow," *J. Operations Research (Japan)* 2, 11-26, 1958.
47. Koshi, M., M. Iwasaki, and I. Okhura, "Some Findings and an Overview on Vehicular Flow Characteristics," *Proceedings, 8<sup>th</sup> International Symposium on Transportation Theory and Traffic Flow Theory* (Edited by Hurdle, V. F., E. Hauer, and G.F. Stuart), University of Toronto Press, Toronto, Canada, 403-426, 1983.
48. Kühne, R. D., "Macroscopic Freeway Model for Dense Traffic -- Stop-start Waves and Incident Detection," *9<sup>th</sup> International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, VNU Science Press, 20-42, 1984.

49. Kühne, R. D., “Foundations of Traffic Flow Theory: The Fundamental Diagram, Greenshields’ Legacy,” Transportation Research Circular E-C149, 2011.
50. Lax, P. D., “Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations,” Communications on Pure and Applied Mathematics 7, 159-193, 1954.
51. LeVeque, R. J., Finite Difference Methods for Differential Equations, University of Washington, 2005.
52. Lighthill, M. J., and Whitham, G. B., “On Kinematics Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Road,” London, Proceedings Royal Society, A229, 317-345, 1955.
53. Liu, G. A.S. Lyrintzis, and P.G. Michalopoulos, “Improved High-order Model for Freeway Traffic Flow,” Transportation Research Record 1644, 37-46, 1998.
54. Lyrintzis, A. S., Guoqing Liu, and Michalopoulos, P. G., “Development and Comparative Evaluation of High-Order Traffic Flow Models,” Transportation Research Record 1457, 174-183, 1994.
55. May, A. D. JR. and H. E. M. Keller, “Non-Integer Car-Following Models,” Highway Research Record 199, 19-32, 1967.
56. Michalopoulos, P. G. and V. B. Pisharody, “Platoon Dynamics on Signal Controlled Arterials,” Transportation Science 14(4), 365-396, 1980.
57. Michalopoulos, P. G. and V. Pisharodym, “Derivation of Delays Based on Improved Macroscopic Traffic Models,” Transportation Research 15B (5), 299-317. 1981.
58. Michalopoulos, P. G., Beskos, D. E., and Lin, J. K., “Analysis of Interrupted Traffic Flow by Finite Difference Methods,” Transportation Research 18B(4/5), 409-421, 1984
59. Michalopoulos, P. G., Beskos, D. E., “Improved Continuum Models of Freeway Flow,” 9<sup>th</sup> International Symposium on Transportation and Traffic Theory, 89-111, 1984.
60. Michalopoulos, P. G., D. E. Beskos, and Y. Yamauchi, “Multilane Traffic Dynamics: Some Macroscopic Considerations,” Transportation Research 18B (4-5), 377-395, 1984.
61. Michalopoulos, P. G., P. Yi, and Lyrintzis, A. S., “Development of an Improved High Order Continuum Traffic Flow Model,” Transportation Research Record 1365, 125-132, 1992.
62. Munjal, P. K., L. A. Pipes, “Propagation of On-ramp Density Perturbations on Unidirectional Two- and Three-lane Freeways,” Transportation Research 5B (4), 241-255, 1971.

63. Munjal, P. K., Y. Hsu, and R. L. Lawrence, "Analysis and Validation of Lane-drop Effects on Multi-lane Freeways," *Transportation Research* 5B (4), 257-266, 1971.
64. Newell, G. F., "Nonlinear Effects in the Dynamics of Car Following," *Operations Research* 9(2), 209-229, 1961.
65. Newell, G. F., "Comments on Traffic Dynamics," *Transportation Research* 23B, 386-389, 1989.
66. Newell, G. F., "A Simplified Theory of Kinematics Waves in Highway Traffic, Part I: General Theory," *Transportation Research* 27B (4), 281-287, 1993.
67. Newell, G. F., "A Simplified Theory of Kinematics Waves in Highway Traffic, Part II: Queuing at Freeway Bottlenecks," *Transportation Research* 27B (4), 289-303, 1993.
68. Newell, G. F., "A Simplified Theory of Kinematics Waves in Highway Traffic, Part III: Multi-Destination Flows," *Transportation Research* 27B (4), 305-313, 1993.
69. Newell, G. F., "A Moving Bottleneck," *Transportation Research* 32B (8), 531-537, 1998.
70. Ozaki, H. "Reaction and Anticipation in the Car Following Behavior," In *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Symposium on Traffic and Transportation Theory*, 349-366, 1993.
71. Payne, H J., "Models of Freeway Traffic and Control," *Simulation Council Proc.* 1, 51-61, 1971.
72. Payne, H. J., "FREFLO : A Macroscopic Simulation Model of Freeway Traffic," *Transportation Research Record* 722, 68-77, 1979.
73. Pipes, L. A., "Wave Theories of Traffic Flow," *Jou. Franklin Institute* 280, 23-40, 1965.
74. Pipes, L. A., "Car-Following Models and the Fundamental Diagram of Road Traffic," *Transportation Research Record* 1, 21-29, 1967.
75. Preparata, F. P., "Analysis of Traffic Flow on a Signalized One-way Artery," *Transportation Science* 6, 32-51, 1972.
76. Richards, P. I., "Shock Waves on the Highway," *Operations Research* 4, 42-51 , 1956.
77. Ross, P., "Traffic Dynamics," *Transportation Research* 22B (4), 421-435, 1988.
78. Rothery, R. W., "Car Following Models," Chapter 4 in Traffic Flow Theory. A State-of-Art report," *Transportation Research Board*, 2001.
79. Stephanopoulos, G. and P. G. Michalopoulos, "Modeling and Analysis of Traffic Queue Dynamics at Signalized Intersections," *Transportation Research* 13A, 295-307, 1979.

80. Stephanopoulos, G. and P. G. Michalopoulos, "An Application of Shock Wave Theory to Traffic Signal Control," *Transportation Research* 5B, 35-51, 1981.
81. Thomas. J. W., Numerical P.D.E. Finite Difference Methods, 1995.
82. Treiterer, J. and J. A. Myers, "The Hysteresis Phenomenon in Traffic Flow," In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Sydney, 13-38, 1974.
83. Underwood, R. T., "Speed, Volume, and Density Relationships," in Quality and Theory of Traffic Flow, Yale Bureau of Highway Traffic, 141-188, 1961.
84. Wardrop, J.G., "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research", *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part II 1 (2), 325-362, 1952.
85. Weiner S., "A Review of the Traffic Flow Process," *Transportation Research Record* 505, 42-54, 1974.
86. Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley-Interscience, 1974.
87. Zhang, H. M., "A Theory of Nonequilibrium Traffic Flow," *Transportation Research* 32B (7), 485-498, 1998.
34. Zhang, H. M., "Analyses of the Stability and Wave Properties of a New Continuum Traffic Theory," *Transportation Research* 33B, 399-415, 1999.
88. Zhang, H. M., "A Mathematical Theory of Traffic Hysteresis," *Transportation Research* 33B, 1-23, 1999.
89. Zhang, H. M., Revised Chapter 5 of Traffic Flow Theory Monograph, 2007.
90. 周志忠, 「車流波動方程式數值解法之研究」, 國立交通大學交通運輸研究所, 碩士論文, 1997。
91. 莊國欽, 「非線性控制於高、快速道路整合匝道儀控之研究」, 國立台灣大學土木工程學研究所, 碩士論文, 2001。
92. 張家祝、許書耕, 「應用衝擊波理論模擬號誌化幹道車流行為(1): 模式建立」, *運輸計劃季刊*, 14 卷 1 期, 1-38 頁, 1985。