

105-066-7897
MOTC-IOT-104-H2DA003

水波時頻分析之優化(3/4)－ 蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用



交通部運輸研究所

中華民國 105 年 6 月

105-066-7897
MOTC-IOT-104-H2DA003

水波時頻分析之優化(3/4)－ 蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用

著 者：李勇榮

交通部運輸研究所

中華民國 105 年 6 月

GPN: 1010500848

定價 200 元

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

水波時頻分析之優化(3/4)：蓋博解析訊號法與
希伯轉換暨其應用 / 李勇榮著.-- 初版.-- 臺北
市：交通部運研所，民 105.06

面；公分

ISBN 978-986-04-8857-9(平裝)

1.波動 2.數值分析

332.654

105009337

水波時頻分析之優化(3/4) - 蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用

著者：李勇榮

出版機關：交通部運輸研究所

地址：10548 台北市敦化北路 240 號

網址：www.ihmt.gov.tw (中文版>中心出版品)

電話：(04)26587176

出版年月：中華民國 105 年 6 月

印刷者：群彩印刷科技股份有限公司

版(刷)次冊數：初版一刷 70 冊

本書同時登載於交通部運輸研究所臺灣技術研究中心網站

定價：200 元

展售處：

交通部運輸研究所運輸資訊組•電話：(02)23496880

國家書店松江門市：10485 台北市中山區松江路 209 號 F1•電話：(02)25180207

五南文化廣場：40042 台中市中山路 6 號•電話：(04)22260330

GPN：1010500848

ISBN：978-986-04-8857-9 (平裝)

著作財產權人：中華民國(代表機關：交通部運輸研究所)

本著作保留所有權利，欲利用本著作全部或部份內容者，須徵求交通部
運輸研究所書面授權。

交通部運輸研究所自行研究計畫出版品摘要表

出版品名稱：水波時頻分析之優化（3／4）－ 蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用			
國際標準書號 ISBN978-986-04-8857-9（平裝）	政府出版品統一編號 1010500848	運輸研究所出版品編號 105-066-7897	計畫編號 104-H2DA003
主辦單位：港灣技術研究中心 主管：邱永芳 計畫主持人：李勇榮 研究人員：李勇榮 聯絡電話：04-26587183 傳真號碼：04-26571329			研究期間 自 104 年 01 月 至 104 年 12 月
關鍵詞：蓋博解析訊號法、希伯轉換、瞬間頻率、分析優化水波應用			
摘要： 本研究首先綜合比較一些時頻分析方法，說明相對於變動或非穩定形態之時頻窗概念、海參堡定理等。接著探討蓋博解析訊號法所涉複數訊號，剖析其瞬間頻率、希伯轉換、富立葉轉換之間的數學關係，建立根源性特性瞭解。此外以試驗數據實際例示希伯轉換與富立葉轉換之數學本質暨所涉諸多現象，如：劇變效應、相位糙音、黑盒子機制、波譜重覆性等。另以數值模擬彰顯解析訊號法其瞬間頻率的一些行為特性及其可能的紛擾與矛盾現象，並將這些現象關聯於簡單的數學基因概念，如：「瞬間」與「頻率」的不容性、「規則度」與「支撐長度」的不同需求、頻率調變與振幅調變之間的糾葛等。此處亦驗證瞬間頻率之驟變現象乃相對於波動振幅之相對變化率，而驟變瞬間頻率大底發生於能量相對很微小的局部，且負頻率之產生也與相位反向無關。研究中亦指出蓋博解析訊號法離散數值處理的一些恰適處理手法或額外步驟，並探討降減誤差、避免誤判之分析優化細節，這些如：一致性相位差分法、基礎頻帶轉換預處理手法、解析度所涉的現象、希伯波濾設計參數暨相應特性等。綜而言之，此處對解析訊號法的探討要旨在於：建立其應用於紛紜複雜系統所必備的基本認知，求物理解說之客觀謹慎，排除一些似是而非的說法，提供水波時頻分析之不同視野。另外，在此一思維及顧慮下，我們以偏向統計及巨觀的處理手法將其應用在波場與水流場之物理本質及能量機制探討。主要項目有：否定束波的存在性；解析波場與水流場其不同尺度的能量現象；不同頻率成分水波其成長與衰減佔期比暨其物理。			
出版日期	頁數	定價	本 出 版 品 取 得 方 式
105 年 6 月	166	200	凡屬機密性出版品均不對外公開。普通性出版品，公營、公益機關團體及學校可函洽本所免費贈閱；私人及私營機關團體可按定價價購。
機密等級： ☐ 密 ☐ 機密 ☐ 極機密 ☐ 絕對機密 （解密條件： ☐ 年 月 日解密， ☐ 公布後解密， ☐ 附件抽存後解密， ☐ 工作完成或會議終了時解密， ☐ 另行檢討後辦理解密） ☒ 普通			
備註：本研究之結論與建議不代表交通部之意見。			

PUBLICATION ABSTRACTS OF RESEARCH PROJECTS
INSTITUTE OF TRANSPORTATION
MINISTRY OF TRANSPORTATION AND COMMUNICATIONS

TITLE: The Optimizations of Water Wave Time-Frequency Analyses (3/4) – the Gabor Analytic Signal Procedure, the Hilbert Transform and Their Applications			
ISBN 978-986-04-8857-9 (pbk)	GOVERNMENT PUBLICATIONS NUMBER 1010500848	IOT SERIAL NUMBER 105-066-7897	PROJECT NUMBER 104-H2DA003
DIVISION: HARBOR & MARINE TECHNOLOGY CENTER DIVISION DIRECTOR: Yung-Fang Chiu PRINCIPAL INVESTIGATOR: Yueon-Ron Lee PROJECT STAFF: Yueon-Ron Lee PHONE: 886-4-26587183 FAX: 886-4-26571329			PROJECT PERIOD FROM January 2015 TO December 2015
KEY WORDS: Gabor analytic signal, the Hilbert transform, instantaneous frequency, numerical optimixation, water wave applications			
ABSTRACT: Concepts of time-frequency window and the Heisenberg uncertainty principal associated with various time-scale analyses are outlined in the beginning. The theoretical relevance among the analytic signal procedure, the Hilbert transform, and the Fourier transform are investigated further. With these understandings, data from experiments are used to illustrate many concerns regarding transient effects, phase noises, repeatability problems, and the blackbox mechanism linking to a somewhat random system. Numerical simulations exemplify the properties, in particular a few paradoxical and controversial phenomena, of the instantaneous frequency related to the analytic signal procedure. Moreover, we attribute these properties to a few factors originated from their theoretical genes, such as, the incompatible concepts between “instantaneous” and “frequency”, the conflicting requirements of “support length” and “regularity”, and the interplays between amplitude and frequency modulations. We also show that the rapid changes of the instantaneous frequency is related to the relative rate of change of amplitude rather than the amplitude alone, that those singular variations are located where there are little energy contents, and that the negative frequency is not related to phase reversal. Finally, to minimize errors and to avoid misinterpretations, we provide a few optimizations for the discrete numerical processing, such as, a consistent method for phase differentiation, base band conversions, and designs of Hilbert filters and the relevant concerns of resolution and choices of parameters. Overall, the research puts up fundamental understanding concerning the application of the analytic signal procedure to the study of the time-frequency features in complex systems, and hopefully solidifies a sound and objective approach to water wave instability and its physics. With these precautions, we further apply the relevant analyses based upon somewhat statistical and macroscopic approaches to study the energy phenomena in the wave and aqueous flow fields. A few topics are: the negation of the existence of a bound wave system; the modulation mechanism in the wave and aqueous flow fields; and the characterizations of wave growth and decay time spans and their physics.			
DATE OF PUBLICATION June 2016	NUMBER OF PAGES 166	PRICE 200	CLASSIFICATION ☐ RESTRICTED ☐ CONFIDENTIAL ☐ SECRET ☐ TOP SECRET ☒ UNCLASSIFIED
The views expressed in this publication are not necessarily those of the Ministry of Transportation and Communications.			

水波時頻分析之優化（3／4）－
蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用

The Optimizations of Water Wave
Time-Frequency Analyses (3/4) –
the Gabor Analytic Signal Procedure
and the Hilbert Transform
as well as Their Applications

李勇榮

交通部運輸研究所港灣技術研究中心

Email: ronlee@ms4.hinet.net

Revision: , April 22, 2016,
Printed: April 22, 2016

目錄

圖目錄	iii
表目錄	vii
摘要	ix
ABSTRACT	xi
1 前言與研究背景	1
1.1 引言	1
1.2 變動或非穩定形態之效應	4
1.3 海參堡定理與時頻窗概念	5
1.4 研究課題	8
2 解析訊號與希伯轉換	13
2.1 引言	13
2.2 複數訊號與解析訊號	14
2.3 解析訊號與希伯轉換	15
2.4 結語	18
3 希伯轉換數值特性	19
3.1 引言	19
3.2 希伯轉換與富立葉轉換	19
3.3 旋移乘積與黑盒子機制	20
3.4 劇變效應與相位糙音	22
3.5 波譜重複性問題	23
3.6 自相關係數與能譜分佈比較之啓示	25
3.7 結語	26
4 解析訊號瞬間頻率特性與數值模擬	37
4.1 引言	37
4.2 「瞬間」與「頻率」的不容性	38
4.3 「規則度」與「支撐長度」的不同需求	38
4.4 頻率與振幅與相位之間的糾葛	39
4.5 解析訊號法瞬間頻率的矛盾現象	39
4.6 數值模擬	40
4.7 衝突現象的象徵概念	42
4.8 結語	44

5	技法優化	55
5.1	引言	55
5.2	相位差分法	55
5.3	基礎頻帶轉換預處理	56
5.4	希伯波濾設計	57
5.5	結語	59
6	水波應用	69
6.1	引言	69
6.2	試驗	69
6.3	束波存在性問題	70
6.4	機械波與風生波其波流場調變與側頻不穩性	71
6.5	波浪其成長與衰減佔期比	72
6.6	結語	74
7	結論	99
	參考文獻	101
	附錄一： 簡報資料	103
	附錄二： 審查意見回覆表	133

圖目錄

1.1	時頻窗概念圖示。此圖乃仔波包轉換 (wavelet packet transform) 在最佳基函 (best basis) 條件下的時頻窗分佈圖 (上圖)，此處仔波包是相應於 Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為 30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號 (下圖)，其頻率分佈由 0 至 100 Hz。	10
1.2	另類時頻窗概念圖示。其仍示仔波包轉換在最佳階位 (best level) 衡量條件下的時頻窗分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖。	11
3.1	此圖表示一個問題重重的黑盒子機制，它用以彰顯兩訊號之波譜係數分佈的直接商值是否具有實質的重要性。這一觀念與手法看似非常簡單，可惜它是一個誤差極其嚴重的過程。	28
3.2	本圖用以說明模糊效應與相位糙音對富立葉能譜之巨大影響。所取訊號如上子圖，其係由兩個相鄰尺度之局部仔波所合成。下子圖則示訊號之富立葉能譜。	29
3.3	相應於表 3.2 所示三組波流場訊號之能譜，其上部子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之流速訊號能譜。就波譜觀點而論，穩定形態卻可說是被完全地推翻了。	31
3.4	此圖以自相關係數歷時分佈說明水槽風生波瞬即散失其身分本位。這裡的物理義涵可以解釋為；以富立葉分析觀點而言，水槽風生波很快喪失自我，其紛紜性大，而波譜統計性狀之穩定有所顧慮。	32
3.5	此一多糙音訊號內含水槽自然頻率之波浪，其係為鼓風機停止後之水位量測。	33
3.6	前一糙音訊號其自相關係數分佈曲線。此圖得以立判循環水槽的自然頻率。	34
3.7	前述糙音訊號使用時領域旋移乘積濾波後的曲線。其所用波濾是為最小程度 (一週期三點) 濾波的 Blackman 型波濾。	35
3.8	前述糙音訊號之能譜圖。其上下子圖係使用不同分割區段長度者。不若自相關係數分佈曲線，圖中很難有水槽自然頻率的聯想。	36
4.1	模擬解析訊號之振幅包絡線調變及頻率調變曲線。此一模擬訊號由三個絃性波所組成，其所取振幅及頻率參數組合為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-1.2, 1, -1); (1.6 \times 2\pi, 3.2 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$	46
4.2	此圖之三個成分波參數組為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-1.2, 1, -1); (1.592 \times 2\pi, 3.183 \times 2\pi, 3.024 \times 2\pi)]$ 其參數與上一圖之差異僅在於頻率之些微變化。與上一圖相較，曲線分佈已大為不同，另瞬間頻率產生負值。	47
4.3	此圖之三個成分波參數組為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, 1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$	48

4.4	此圖之三個成分波參數組為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, -1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 與上一圖相較，其參數差別僅在於其中一個成分相位。雖然振幅包絡線相同，但瞬間頻率分佈則倒置。	49
4.5	此圖之三個成分波參數為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, -1.5, -2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 與上一個圖相較，其參數差別亦僅在於其中一個成分相位而已。由此圖與上兩個圖可知相位改變對瞬間頻率所可帶來的衝擊，亦顯示其對可預期性的影響。	50
4.6	循環水槽風生波浪訊號其四個頻帶（中心頻率分別為2.4、4.5、6.7、8.5 Hz）之成分波波形暨其振幅調變（虛線所示包絡線）。	51
4.7	上一圖之波浪訊號其四個頻帶的成分波在加上資料罩窗後之波形暨振幅包絡線。	52
4.8	數值計算所使用之各種數據罩窗。上一圖所用罩窗為Hamming window。	53
4.9	此圖之上、下子圖分別示無數據罩窗（圖 4.6）及具有罩窗（圖 4.7）之四個頻帶的瞬間頻率分佈曲線。由其比較得以顯示瞬間頻率所受振幅調變的影響是在於振幅的相對變化率，而非僅由振幅大小決定。	54
5.1	解析訊號之瞬間頻率不宜直接以其實、虛部數值求算，此方式之求算易造成圖中虛線分佈之狀況，增加人為判定困擾。此虛線是故意將中心頻率降移至原點，其正確求算者是為實線分佈。	60
5.2	此圖顯示基頻轉換之作用。其上、下子圖係分別為無、有基頻轉換之瞬間頻率分佈。對高頻區帶而言，資料集錄頻率相對不足，產生折誤現象，整體分佈偏降與偏小，區帶越高誤差越大。	61
5.3	相關於較少奇數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，其對應在時間領域是為旋移乘積係數，在頻率領域是為濾窗。此圖使用係數量為 15 及 25。	62
5.4	相關於較多奇數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，此圖使用係數量為 35 及 75。	63
5.5	相關於較少偶數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，其對應在時間領域是為旋移乘積係數，在頻率領域是為濾窗。此圖使用係數量為 20 及 30。	64
5.6	相關於較多偶數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，此圖使用係數量為 40 及 80。	65
5.7	使用不同旋移乘積係數量之瞬間頻率分佈比較圖。上子圖係使用 25 個係數，下子圖則用 45 個係數。在下子圖中由於 Remez error 已無法求算最高的兩個頻帶，而上子圖的最低頻帶則有些微鋸齒波動。	66
5.8	此圖示希伯濾窗其起始頻率之選擇對訊號波動振幅（包絡線）之影響。上下子圖所用權重係數量皆為 25 個，起始頻率在上子圖取 2.20 Hz，下子圖取 1.10 Hz。此圖顯示起始頻率與原點要有適當距離。	67
5.9	此圖示兩個不同性狀的振幅（包絡線）波動。其實線者乃相關於邊緣效應，而虛線者則相關於取用不適當的起始頻率。基本上，希伯波濾參數之選擇牽涉綜合性考量。	68
6.1	水槽設備及相關佈置圖。	75
6.2	四種不同基礎協調頻率之史脫克斯波之能譜圖。	76

- 6.3 此圖示基礎協調頻率為 1.4 Hz、而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上圖示上游的量測位置，離造波機之距離為 2.3 m；中圖為中游者，離造波機 3.5 m；下圖為下游者，離造波機 4.5 m。此波之尖銳度甚小，但有其時空上的演化，特別是高頻區帶。 77
- 6.4 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz、而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上、中、下圖之量測位置同前。很顯然地，各成分由單純而驅於調變化。 78
- 6.5 此圖示基礎協調頻率為 2.2 Hz、而尖銳度為 0.21 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上、中、下圖之量測位置同前。同樣地，各成分由單純而驅於調變化。此圖之基礎協調頻率與尖銳度均僅微大於前一圖者，但其性狀變動已明顯強烈。 79
- 6.6 此圖示基礎協調頻率為 3.0 Hz、而尖銳度為 0.30 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上、中、下圖之量測位置同前。同樣地，各成分由較單純而驅於劇烈調變。此圖之基礎協調頻率與尖銳度均較前些者明顯為高，其性狀變動在上游位置已較顯著，而其時間與空間上演化的性狀更為激烈。 80
- 6.7 此圖示基礎協調頻率為 1.4 Hz、而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其第一（左分圖）及第二（右分圖）成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。上圖示上游的量測位置，離造波機之距離為 2.3 m；中圖為中游者，離造波機 3.5 m；下圖為下游者，離造波機 4.5 m。比較有趣的性狀是第二協調成分隨時空而調變純化及顯著化現象。 81
- 6.8 此圖示基礎協調頻率為 1.4 Hz、而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其第一（主頻）及第二（右分圖）成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。上圖示上游的量測位置，離造波機之距離為 2.3 m；中圖為中游者，離造波機 3.5 m；下圖為下游者，離造波機 4.5 m。 82
- 6.9 此圖示上一圖之史脫克斯波其第二成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。其量測位置分別同上一圖。與主頻者比較，其有趣的性狀是第二協調成分隨時空而調變純化及顯著化現象。 83
- 6.10 此圖示上一圖之史脫克斯波其第三成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。其量測位置分別同上一圖。 84
- 6.11 此圖示上一圖之史脫克斯波其第四成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。其量測位置分別同上一圖。很顯然地，此一史脫克斯波之此些調變亦在時空上趨於增強。 85
- 6.12 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz、而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波其各成分協調頻率之振幅在上游位置點之演化性狀。其第一及第二成分示於上子圖；第三及第四成分示於下子圖。 86
- 6.13 此圖示前一圖之史脫克斯波其各成分協調頻率之振幅在中游位置點之演化性狀。其第一及第二成分示於上子圖；第三及第四成分示於下子圖。與上游者比較，各頻帶有調變規律化的趨勢。 87
- 6.14 此圖示前一圖之史脫克斯波其各成分協調頻率之振幅在下游位置點之演化性狀。其第一及第二成分示於上子圖；第三及第四成分示於下子圖。與上游者比較，同樣地，各頻帶有調變規律化的趨勢；而與中游位置點比較，則其調變幅度亦較增強。 88

6.15 此圖示基礎協調頻率為 1.6 Hz，而尖銳度為 0.06 史脫克斯波其表面波（上子圖）及水流場波動（下子圖）之各協調頻帶其頻率之調變曲線。水流場量測點為靜水位下 2.0 cm。	89
6.16 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz，而尖銳度為 0.20 史脫克斯波其表面波（上子圖）及水流場波動（下子圖）之各協調頻帶其頻率之調變曲線。水流場量測點同為靜水位下 2.0 cm。綜合前一圖，一個有趣的現象是：對這些機械波而言，其流場調變情況均較波場來得複雜，且有較高的不規則性，特別是較高頻帶區更相對明顯。	90
6.17 此圖示基礎協調頻率為 1.6 Hz，而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其各協調頻帶之振幅調變曲線。左子圖為表面波者，右子圖乃水流場。很顯然地，在主要能量頻帶上，水流場的不規則度都大於水面波動。	91
6.18 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz，而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波其各協調頻帶之振幅調變曲線。左子圖為表面波者，右子圖乃水流場。在所有頻帶上，水流場的不規則度都大於水面波動。此圖與前兩圖，再再突顯能量之物理機制解說，亦可彰顯這些試驗其整體資料集錄管控之精度與信心度。	92
6.19 此圖示風生波狀況下（風速為 6.0 m sec^{-1} ）的波流場其各協調頻帶的頻率調變。上子圖示其波場，下子圖示其水流場。此處水測點為在水面下 2 cm。	93
6.20 上一圖風生波狀況下（風速為 6.0 m sec^{-1} ）的波流場其各協調頻帶的頻率調變。上子圖示其波場，下子圖示其水流場。此處水測點為在水面下 3 cm。綜合前一圖，我們可以查覺此時之波、流場調變性狀剛好相反於前述史脫克斯機械波相對性狀，即水流場的調變此時已較波場者來的較不激烈。	94
6.21 風生波之波場與流場之振幅調變比較。此圖之水流場量測位置接近水面，係位於水面下 2 cm。對基礎頻帶而言，其吻合性非常好。	95
6.22 風生波之波場與流場之振幅調變比較。此圖之水流場量測位置則在相對深水區，其乃位於水面下 9 cm。此時基礎頻帶的吻合性並不如淺水者，再者高頻帶的波場與流場對應也較不明顯或更為紊亂，此乃因小尺度高頻成分難以滲入深水處，此外底床及側邊影響相對較大，因而使整體的波流對應程度降減。	96
6.23 試驗室水波其成長期（分子）對衰減期（分母）比值隨成分頻率大小而變動之趨勢。實線者為風場作用下的水波，虛線者為機械所造之史脫克斯波。對低頻成分、亦或高能相對長波而言，其能量增益成長時程所佔生命期較其能量衰減期的佔比值較諸高頻而低能量的成分相對來的小。一些能量物理解說如內文。	98

表目錄

3.1	此一用 ASYST 語言所撰寫的簡單程式乃用於求取一實數訊號的希伯轉換。由其可見，希伯轉換乃輸入訊號之簡單 FFT 及 IFFT 運作與排列組合。而基於離散富立葉轉換之自由度所衍生問題亦或是波譜不定性問題，我們可以體會此一轉換所得解析訊號之瞬間頻率行為可能變異嚴重而難以捉摸。	27
3.2	以傳統的波浪越零位統計法所得之三組風生波其波場與流場量測訊號統計值。這三組量測都是在完全一樣的試驗條件下量得。第二頻道訊號都是同一點之波高量測，第一頻道訊號則分別是在三個不同水深（離靜水位分別為 3、4、5 cm）之水速量測，如是，從越零位統計觀點而言，此一數值分析手段已達理想的穩定形態。然這一情形卻與波譜觀點者大相逕庭。	30
6.1	試驗室水波其在不同成分頻帶上的成長期（分子）與衰減期（分母）比值。所用水波一者為風生波，一者為史脫克斯波。各協調頻帶的代表頻率示於圖 6.23。對機械波而言其成分能量的興與衰可以從不同成分間能量遞轉往返之觀點視之。	97

摘要

本研究首先綜合比較一些時頻分析方法，說明相關於變動或非穩定形態之時頻窗概念、海參堡定理等。接著探討蓋博解析訊號法所涉複數訊號，剖析其瞬間頻率、希伯轉換、富立葉轉換之間的數學關係，建立根源性特性瞭解。此外以試驗數據實際例示希伯轉換與富立葉轉換之數學本質暨所涉諸多現象，如：劇變效應、相位糙音、黑盒子機制、波譜重覆性等。另以數值模擬彰顯解析訊號法其瞬間頻率的一些行為特性及其可能的紛擾與矛盾現象，並將這些現象關聯於簡單的數學基因概念，如：「瞬間」與「頻率」的不容性、「規則度」與「支撐長度」的不同需求、頻率調變與振幅調變之間的糾葛等。此處亦驗證瞬間頻率之驟變現象乃相關於波動振幅之相對變化率，而驟變瞬間頻率大底發生於能量相對很微小的局部，且負頻率之產生也與相位反向無關。研究中亦指出蓋博解析訊號法離散數值處理的一些恰適處理手法或額外步驟，並探討降減誤差、避免誤判之分析優化細節，這些如：一致性相位差分法、基礎頻帶轉換預處理手法、解析度所涉的現象、希伯波濾設計參數暨相應特性等。綜而言之，此處對解析訊號法的探討要旨在於：建立其應用於紛紜複雜系統所必備的基本認知，求物理解說之客觀謹慎，排除一些似是而非的說法，提供水波時頻分析之不同視野。另外，在此一思維及顧慮下，我們以偏向統計及巨觀的處理手法將其應用在波場與水流場之物理本質及能量機制探討。主要項目有：否定束波的存在性；解析波場與水流場其不同尺度的能量現象；不同頻率成分水波其成長與衰減佔期比暨其物理。

ABSTRACT

Concepts of time-frequency window and the Heisenberg uncertainty principal associated with various time-scale analyses are outlined in the beginning. The theoretical relevance among the analytic signal procedure, the Hilbert transform, and the Fourier transform are investigated further. With these understandings, data from experiments are used to illustrate many concerns regarding transient effects, phase noises, repeatability problems, and the blackbox mechanism linking to a somewhat random system. Numerical simulations exemplify the properties, in particular a few paradoxical and controversial phenomena, of the instantaneous frequency related to the analytic signal procedure. Moreover, we attribute these properties to a few factors originated from their theoretical genes, such as, the incompatible concepts between “instantaneous” and “frequency”, the conflicting requirements of “support length” and “regularity”, and the interplays between amplitude and frequency modulations. We also show that the rapid changes of the instantaneous frequency is related to the relative rate of change of amplitude rather than the amplitude alone, that those singular variations are located where there are little energy contents, and that the negative frequency is not related to phase reversal. Finally, to minimize errors and to avoid misinterpretations, we provide a few optimizations for the discrete numerical processing, such as, a consistent method for phase differentiation, base band conversions, and designs of Hilbert filters and the relevant concerns of resolution and choices of parameters. Overall, the research puts up fundamental understanding concerning the application of the analytic signal procedure to the study of the time-frequency features in complex systems, and hopefully solidifies a sound and objective approach to water wave instability and its physics. With these precautions, we further apply the relevant analyses based upon somewhat statistical and macroscopic approaches to study the energy phenomena in the wave and aqueous flow fields. A few topics are: the negation of the existence of a bound wave system; the modulation mechanism in the wave and aqueous flow fields; and the characterizations of wave growth and decay time spans and their physics.

第 1 章

前言與研究背景

1.1 引言

在醫學領域或相關電子工程上，其諸多影像診斷技法在英文上廣稱為 Imaging modalities（如：X-ray plain film, Fluoroscopy, Angiography, Computed tomography, Ultrasound, Magnetic resonance, Positron emission tomography, Radioisotopic nuclear medicine 等），其之所以叫 Modality 當然一定有它的道理，這些道理也就反應訊號分析的精神：其一，技法是相對而非絕對的，也軟硬體均具的，不是單方可以適足。其二，各技法都具有期待性、不定性、亦或可與不可預期性。其三，各技法優劣互存、不一而足、不同方法有其不同專善。其四，技法是人因的、藝術的、手法的、意識型態的、不純然是數學上的。其五，各技法相互間往往具有輔助性而非排它性。其六，應無萬靈丹，但工欲善其事，仍必先利其器，不同症狀宜不同處方，技法雖可彈性應用，唯不同研究標的或探討內容，首先要面對的還是分析方法之擇取，不宜亂槍打鳥。

綜上，簡而言之，不論是在學理本身或技法特性上，所謂一體適用、全能含蓋之解析與技法是不存在的，但就一個特定物理探討問題，某些技法具有明顯特色，甚而存在改造性、優化性，也是當然的。

再者，數據分析的本質基本上是只需數學、不需物理，因其可以不用牽涉任何物理量。可是應用上或工程上，人們所要的是實質存在的物理量。也因此任何分析的重要課題，無不在於賦予分析之圓滿或恰適的物理解說，產生合於吾人理

念，亦或順乎邏輯的大小值與單位量。此處存在的一個彈性模糊地帶是，我們可以在數學上與技法上給予不同的權重配比，比如犧牲數學上的嚴密性於使用簡便性或物理的恰合性。這或許也就是水波分析法得以優化的一個根由。此外，實際數值處理未必滿足原始理論數學條件，一些增益手法亦或必須。

就水波現象研究而言，從最早期的越零位統計法以迄近期的仔波法，就作者所知，大致有下列不同分析類別：

- 示性波法 (significant wave)
- 富立葉波譜法 (Fourier transform)
- 短時富立葉分析或加窗之富立葉轉換法 (short time Fourier transform or windowed Fourier transform)
- 蓋博解析訊號法 (Gabor's analytic signal procedure)
- 希伯轉換相關分析法 (Hilbert transform)
- 基於各類不同設計基核之各種時頻分析法 (time-frequency kernels [3])
- 連續仔波轉換分析法 (continuous wavelet transform or the integral wavelet transform)
- 離散仔波轉換分析法 (discrete wavelet transform)

這裡說明的是，此處把連續與離散仔波轉換區別為兩型。這一不同歸類，與連續暨離散富立葉轉換之未作區別，是有其重要根據。因為連續或離散富立葉轉換其所涉函基、亦或公式與數值推演流程大底都具一致性；然而，離散仔波轉換與連續仔波轉換兩者，一方面其函基是可以完全不相關的，而另一方面它們的技法與公式推演流程也基本上可說具有獨立性。下面對兩者的描述或許可以看出一些端底。

在以下的說明中，我們以一個一維的時序列作為說明例，簡要述說前述分析方法的大致特性、主要用途、相互間差別等。

富立葉分析將一時序列轉換為一頻率序列，其轉換將一獨立變數轉為另一不同領域的獨立變數。

短時富立葉分析則是欲取得某一局部時間區間上的頻率內容，它相對於富立葉分析的額外動作就是在時序列上罩上一個濾窗，而把這罩窗隨著時間軸移動就可以得到不同時刻下的不同波譜內容，這種轉換將一個時變序列轉換成一組含時間與頻率兩個自變數的時變波譜分佈。

至於基於各種設計基核（kernel）之時頻轉換，其概念上與短時富立葉分析有些相似，只是它們分析基核所衍生出來的函基函數是完全不同於富立葉函基者，而往往具有自己的顯著特性，另其罩窗也不像短時富立葉分析那樣清晰簡易亦且可以輕易分離。

至於離散仔波轉換則一個一維的時序列將產生一個一維的轉換係數序列，其每一個係數則同時代表著兩個獨立變數，其一為時變數，另一為尺度變數，而這兩個獨立變數是以該係數在轉換係數序列中的位置來決定。基本上離散仔波轉換其函基設計也是無窮多的。

至於連續仔波轉換則將一維的時序列轉換成一個二維的轉換係數序列，這二維的轉換係數序列其獨立變數一為時間、一為尺度，每一個時間都有其尺度（或說是代表頻率）分佈，而每一尺度值則可扮演其在每一時刻之個別角色。此一轉換其處理流程亦類似於短時富立葉分析之概念，有時候他們的主要差別可視為罩窗之改變。基本上，加上罩窗後的波形只要是不存在零週期的成分都可以當成母仔波，即其符合仔波入允條件（the admissibility condition），而可進行連續仔波轉換。另外由這一說明，我們可以認知離散仔波轉換與連續仔波轉換是大為不同的。

另外，仔波轉換無論是離散或連續，除了可以載頻表示的以外[13]，在絕大多數情形下是相關於無因次的尺度而非頻率，因而在實際物理認知上，難度提高。

蓋博解析訊號法則可將一個時序列訊號表示為一種隨時間分佈的瞬時頻率（可在不同頻帶上分佈），此外它可以同時求算出一個隨時間而變動的波動振幅包絡線。此一轉換其對應領域的獨立自變數只有時間，此外其或可加入的考慮參數是頻帶的代表值。另外，這一方法的觀念，偏向於將所研究訊號視為一調變的「單

一」訊號，而一般時尺分析則相對強調訊號是由甚多成分訊號所合成，也就是說，如果原始訊號是一維時變訊號，那解析訊號法的結果仍是一維的，它的轉換對應領域之獨立自變數只有時間，另頻帶的選擇則未有標準。而一般時尺分析其對應領域的自變數是時間與尺度兩者。

由以上的說明，我們初步了解，就一維原始訊號而言，各技法的內涵差異大致可歸屬一維、二維、亦或一維半。而此處所研究的解析訊號法，殆不過是時頻分析或更廣義的時尺分析內的一個小分支。如果吾人能對整體性的時尺分析有比較深入的基礎認知，則將助益我們對研究格局的體會及對分析診斷的把握，也擴展物理解說所可含蓋的視野。以下再說明一些時頻或時尺分析的基本概念，這些有助於建立超然的研究態度。

1.2 變動或非穩定形態之效應

富立葉轉換適於穩定形態之訊號，而對局部多變動現象則有其明顯的局限性，下述解說可作為其特性考慮之延伸。

- 數學上，任何函數都無法同時滿足「有限時分佈」暨「有限頻分佈」，若一函數在一領域其分佈是有限的（即局部存在）則其對應領域之分佈函數必然是無限延伸。而在自然界的狀況，或是實際取得的訊號，亦或是部分取用於分析之數據，必然是有其時間或空間的局限性。此外，接受訊號的硬體設備也必然是有其反應感受區間、或頻帶感應範圍。綜此，我們大致瞭解到理論與實際是無法完全符合的，也就是說富立葉分析之實質上已引入了一些虛擬的狀況。而短時富立葉分析強調局部訊號而將兩側遠端訊號權重遞降為零，然而對短時富立葉分析而言，這種有限時與頻的互斥拘限性乃是存在的，這現象可以Balian-Low 定理說明：若罩窗函數為 $g(t)$ ，蓋博型態架構函數（Gabor type frame）為

$$g_{m,n}(t) = e^{-2\pi i m t} g(t - n), \quad (1.1)$$

式中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。若設置窗函數具有優良的局部分佈性，則架構函數的富立葉轉換之局部分佈性則不佳。這裡的說明也許有些抽象，但它的實質可以說是下述現象的一種表徵。

- 吉布斯現象（Gibbs phenomenon）指出，若一訊號有不連續的突變，則富立葉反轉換所得之訊號必然是無法與原訊號一致的，它會在斷點兩側產生一些起伏，而且這種起伏的幅度是不會隨積分區間大小或離散使用項目數而改變的，它的「消失」只存在於「分佈」概念（the concept of distribution）下之極限狀況。這種現象其實也就是說，一個尖銳多變的形狀需要非常多的波譜分量來模擬，或則說是越局部之現象其波譜分佈區間就越廣，這一狀況的極端表徵就等同把 $g(t)$ 取為delta 函數（或更正確地稱delta 分佈），而delta 函數其相應富立葉轉換之頻率俱是等值而向正負無限延伸。
- 富立葉轉換其函基函數是週期分佈而向兩側無限延伸。因此它的研究對象最好也是具有週期性，而且最好也是可以無限取樣，如果不能滿足這些要求，就有一些如下的副作用：頻漏現象、邊端效應、折誤作用、滑濾誤差、解析誤差等。圖 1.1 為一時頻分析時頻窗分佈概念圖示。其所示狀況是在取樣頻率僅有一半Nyquist 頻率的情形，而原始模擬訊號為一線性頻率分佈之漸高頻訊號。由圖亦可見此些效應進一步亦對離散仔波轉換所帶來的一些影響。

整體而言，上述情形都與非穩定型態衍生效應有所關聯。

1.3 海參堡定理與時頻窗概念

前頭說過，任何函數都無法同時滿足「有限時間」與「有限頻率」之分佈，這一特性實質上代表一個重要概念，亦且是海參堡定理（Heisenberg uncertainty principle）之得以存在的基本因素。這一概念如下：我們對訊號組成成分是無法絕對正確定位的，即訊號組合成分是沒有所謂的點分佈，任何成分的定位必然是一個時軸與頻軸上的一個分佈面積，而這個時頻面積，最簡單地，大致就是以一個時頻窗來代表，另這一個時頻窗的面積有其最小極限，即需滿足海參堡定理。另

這一時頻窗概念亦是加窗之轉換的根源。另時頻窗的設計問題是諸多研究的核心內容。

為彌補富立葉函基其描述非穩態局部變化現象之不足，短時富立葉轉換及仔波轉換可說都是將一訊號隨時間而局部化，如此形成一個由各時間點上的局部訊號所形成的集合，再以此集合進行各自轉換。就短時富立葉分析而言，其執行方式就是變動式 1.1 中的 m 、 n ，而 $g(t)$ 則不變；就仔波而言，以典型的莫利（Morlet）仔波為例，其是藉由移位及縮放母仔波（mother wavelet）之波形為之，也就是 $m, n, g(t)$ 具是異動的。這兩種轉換所得到的局部時間段的波譜或尺度資料，就短時富立葉分析而言，用頻率、Hz、或頻譜是可以名正言順，但對仔波而言，正確的描述應是尺度或尺度譜。基於前述Balian-Low 定理，短時富立葉分析實際上是無法在時間分佈上設為真正局部，因為數據處理上的離散富立葉轉換其頻軸分佈是有限的，然而仔波轉換在這一方面就可符合完全局部之要求，或則至少可說仔波之分佈其向正負兩側之延伸波形必然是要衰減，以致於不存在有零頻率的成分，以下再進一步說明個別轉換之特性或差異：

- 基本上短時富立葉分析與仔波分析都可視為加罩窗之轉換，就短時富立葉分析而言，它包含兩個區別十分明顯的步驟，第一個步驟就是在原訊號加予一形狀不隨時間改變的罩窗，接下來就是將這一加窗的訊號行富立葉轉換，此一轉換其相對應的反轉換（或是訊號重建）也很自然地牽連上一頻軸罩窗，而其數值處理也類似於正轉換，即同樣包含有兩個可以明顯區隔的步驟。因此，短時富立葉分析，罩窗明顯可視，而函基亦是所熟悉的弦性函數。然而對仔波轉換而言，這兩個步驟就非明顯可見，其罩窗與其函數可說是一種合成體，既無法體會該罩窗形狀，亦無法將罩窗由函基函數分離出，事實上這種情形可以由下述的比較參照明顯看出：若把式 1.1 之 Gabor 型構架的罩窗取為高斯分佈，則這一高斯罩窗與莫利仔波函基函數之擺動振幅的輪廓是相似的。綜此可見，這兩個轉換的用意是一致的，亦即提供一種投射機制，以便分離出調變或更易振盪的成分。
- 對短時富立葉分析而言其時頻罩窗之形狀與大小，在不同時頻下都維持不

變，這是因爲式 1.1 中的 $g(t)$ 只與 n 而與 m 無關，也就是說任何時間與任何頻率下所用的時頻窗它的寬與高都維持不變，因而在二維的時頻座標裡有一個固定形狀不隨時頻而變的罩窗。至於仔波的時頻窗則是隨尺度而變化，但這些變化只是形狀上的，其面積大小還是不變的，也就是說時頻窗它的寬度與高度成反比，而乘積則固定，另這一特性對離散或連續仔波轉換都是適用的。圖 1.1 與 1.2 可以用來說明這一情形，圖中所取之仔波類別係取正交離散仔波包，兩圖中之源始母仔波相同，但轉換函基函數係取不同階位，一個相關於最佳基函（best basis），另一個則相關於最佳階位（best level），所用訊號則如圖 1.1 之下半圖，其係爲一漸增頻訊號。此處因函基是屬正交類型，故所有的時頻窗都不重疊，也因此每個時頻窗所代表範疇，其時尺位置可以說是相對地精準明確，而非僅是代表示意之區塊而已（相對地，非正交函基其時頻窗僅可示意性表達之）。至於連續仔波轉換其不同時頻之時頻窗可謂糾纏在一起，重重疊疊，此時通常不用具有尺寸與形狀的時頻窗表示，而是以在個別特定時頻點上給予一假定的解析大小作爲代表，再由這些解析分佈以灰階圖或色彩圖表現，如果所用解析度很細，就狀似連續分佈之時頻圖。

- 短時富立葉分析其函基由正交之弦性函數所組成，其乃獨特唯一，而對仔波轉換而言，其函基亦或母仔波之選取可以是非常鬆散或非常廣泛，這鬆散的條件，就連續仔波轉換而言就僅僅是能滿足入允條件（the admissibility condition）即可（即不含有零頻率週期之函數），而就離散仔波轉換而言，也僅僅是需符合穩定收斂之條件（stability condition）而已。
- 短時富立葉分析轉換係數所代表的是局部頻譜，它含有與頻率完全一致的義涵，但仔波轉換係數所表徵的是尺度而非頻率，也因此仔波轉換所遭遇的難題尚有數點。第一，因解析函基之設計甚多，且函基函數間可以互是獨立或互有相關；第二，所謂的尺度基本上是沒有單位的，只有大小值，也因此我們實際上對每一轉換係數所代表的波形範圍或確切尺寸，可說完全沒有具體認知；第三，仔波轉換的數值處理或理論架構存在各種型式與調適性，諸如

多音型態 (multi-voice) [6]、多仔波混合 (multi-wavelet) [4, 5, 20]、非以兩倍為基底之轉換 (different dilation factors) [1]、等等，一般說來，這些變化在某些針對數值演算的應用或許困擾不大，然而在水波研究時，因為物理義涵之重要性遠較數值演算功能或技巧來得重要，因而這些導入的複雜數學因子往往就形成諸多困擾，治絲愈棼，難以使用。

- 在基本的物理應用上， $L^2(\mathbb{R})$ Banach 空間，亦或希伯空間 (Hilbert space)，可說已最具有實際之用途，雖然仔波數學尚存在一些非針對 $L^2(\mathbb{R})$ 空間之研究 [6, 15]，但就水波物理而言，我們所探討的大底不離能量現象，也因此 L^2 空間可說已很恰適。大致上，不同空間上的研究，往往相關於解析上的嚴謹度，如可微分性、連續性、規則度、多階解析分析 (multiresolution analysis) 存在性等，這些於水波物理，基本上可說看不出任何有義性，也因此，希伯空間上的研究已充分滿足我們的需求。

1.4 研究課題

此處研究內容相關於蓋伯解析訊號法 (Gabor analytic signal procedure)，其乃相關於瞬間頻率之內涵，而主要著眼於頻率調變現象之探討，但一個最基本、也是最重要的課題則是瞭解其於水波上的物理相關性與應用性如何、在何。文中首先研究所涉數理，探討蓋伯解析訊號法、希伯轉換、富立葉轉換之關聯，並參著數值模擬與實測數據之使用，彰顯數理上的各種可能特性及其優缺點，接著再探討實際應用上數值處理優化的一些手法。一些相應課題有：建立瞬間頻率、希伯轉換、富立葉轉換之間的關係；說明劇變效應、相位糙音、黑盒子機制、波譜重覆性等的反響；數值模擬行為特性及矛盾現象；矛盾現象肇因邏輯解說；瞬間頻率求算之一致性相位差分法；基礎頻帶轉換預處理手法；希伯波濾設計等。在這些基礎認知下，最後，我們以偏向統計及巨觀的處理手法將其應用在波場與水流場之物理本質及能量行為探討，主要項目有：驗證束波之不存在性；解析波場與水流場其不同尺度的能

量物理；不同頻率成分水波其成長與衰減佔期比研究。❖

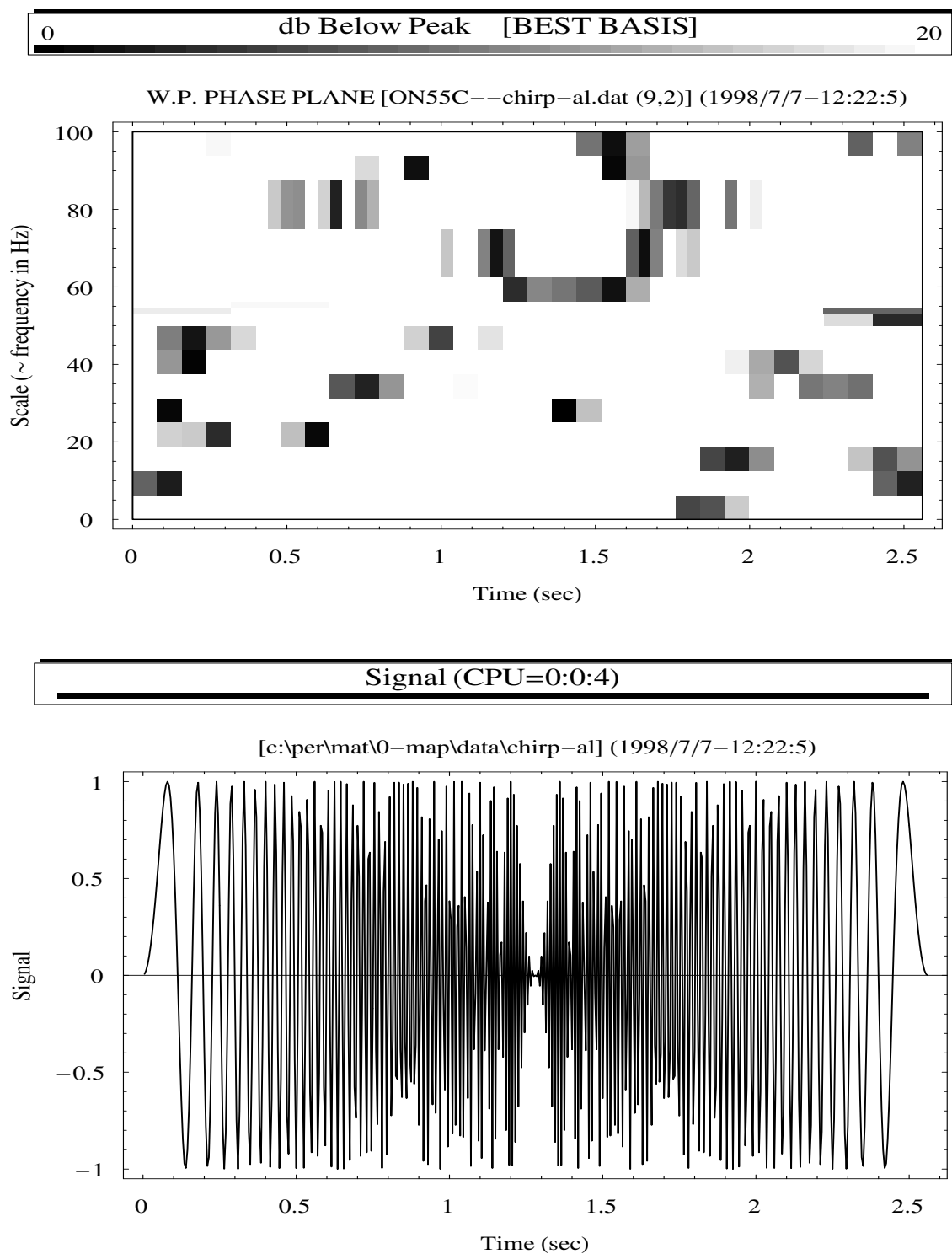


圖 1.1 時頻窗概念圖示。此圖乃仔波包轉換 (wavelet packet transform) 在最佳基函 (best basis) 條件下的時頻窗分佈圖 (上圖)，此處仔波包是相應於 Coiflet，另其旋移乘積權重係數個數為 30，而所用訊號為一線性增加漸增頻訊號 (下圖)，其頻率分佈由 0 至 100 Hz，此處因係非足頻取樣 (即取樣率只為 Nyquist rate 一半)，故有折誤現象。此外當注意此時頻窗之非對稱分佈及多重頻帶分散性所代表轉換意涵。

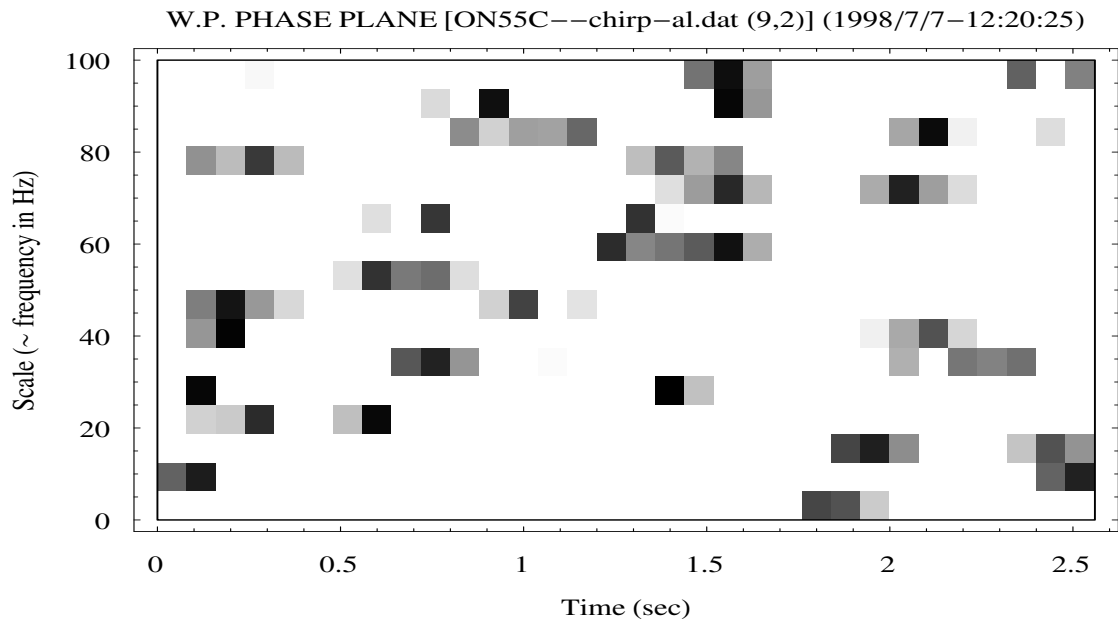
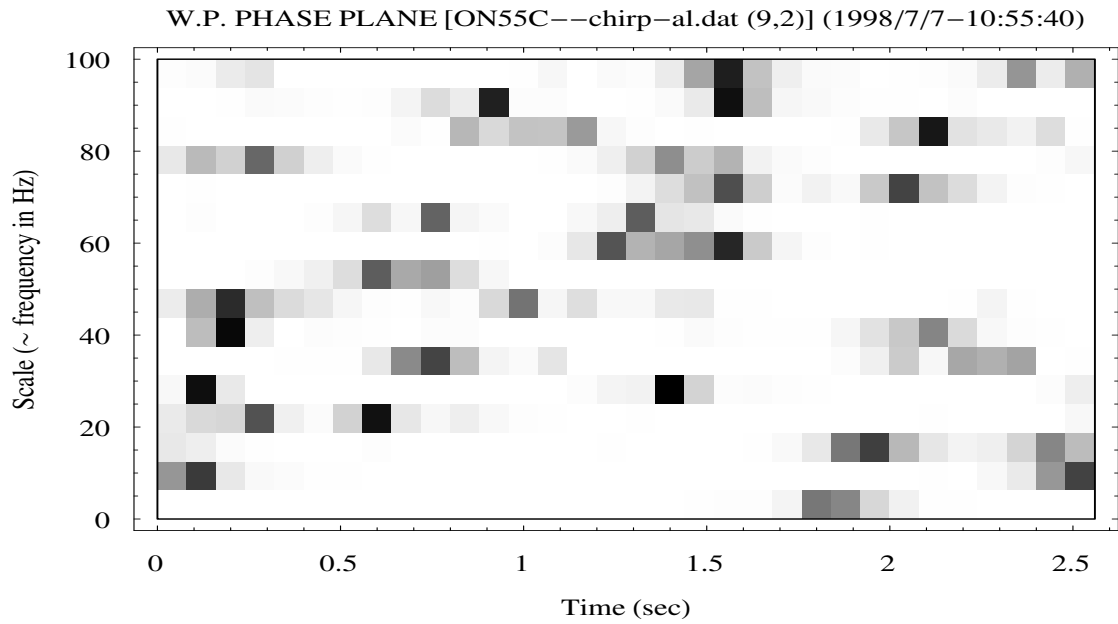


圖 1.2 另類時頻窗概念圖示。其仍示仔波包轉換在最佳階位 (best level) 衡量條件下的時頻窗分佈圖，上圖是以對數表示之最適階位仔波包轉換，下圖是以線性量度表示者，所用仔波包與所用訊號同前一圖，與前圖綜合起來，我們可以體會到仔波轉換其表現方式的多樣性及其可能帶來的困擾。諸如諸多類屬函基、諸多組合型態、不同最適規範、不同圖示方法、等等。

解析訊號與希伯轉換

2.1 引言

量測得的原始訊號必然屬於實數，然而單純實數的用途似乎有限，如果我們得以取得一個與它「適當」對應的虛數數據，而由兩者合成一個複數訊號，那想像空間將可大為擴展，而可能的物理視野也會更寬廣，另隨之而生的研究議題也將更多元豐富，但這種種或許也將帶來紛紜與困擾，這正也是時頻分析其有趣亦且棘手之處。

設若實數訊號為 $s_r(t)$ ，其搭配的一個虛數訊號為 $s_i(t)$ ，而兩者形成的複數訊號為 $z(t)$ ，這一複數函數讓我們得以求取振幅 $a(t)$ （amplitude，亦或模值 modulus）與相位 $\phi(t)$ ，而一般自然定義的瞬間頻率 $\omega_i(t)$ 是相位的導數或微分。即

$$z(t) = s_r(t) + s_i(t) = a(t)e^{i\phi(t)}, \quad (2.1)$$

$$\omega_i(t) = \phi'(t). \quad (2.2)$$

當然此處我們首先遇到的問題是：何者是「合理」或「適當」的對應虛部。因而至今，大家的普遍看法是：何者是恰適的複數訊號仍是一個開放性、爭議性的課題。如是，現時情況認知大概只能說是：

- 許多訊號分析研究者把「瞬間頻率」視為一種原素概念（a primitive concept）而非數學定義。

- 個別定義或設定其出發點往往只在匹配研究者的直覺或主觀思維。
- 分析結果的物理性如何，還有，這些解說是否只是研究者的自我邏輯或推論而已。
- 所設複數訊號處理下來是否會帶來其它各式各樣的問題，或衍生出新的棘手課題，甚至於導出結果與原始認知有相衝突的情形，亦或與出發點的直覺兜不攏。
- 切要的說，理論與應用間存在有投機與隨機的成分。

2.2 複數訊號與解析訊號

基本上複數訊號的給定是屬一種相位正交模式（quadrature model），而解析訊號則可算是其中的一個特殊處置方式。

任何實數訊號 $s(t)$ 必皆可以表為

$$s(t) = a(t) \cos \phi(t). \quad (2.3)$$

在正交模式下其最簡單直覺的複數訊號 $z(t)$ 為

$$z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}. \quad (2.4)$$

式 2.3 的基本問題是在其唯一性上，且其表示法無窮多，因而衍生的複數訊號有無限種。

蓋伯（Gabor）於 1946 年所提出的複數訊號是為解析訊號（analytic signal）[9]，其基本出發點是去除實數訊號富立葉轉換必然產生的負頻率分佈現象，因此他把複數訊號 $z(t)$ 給定如下：

$$\begin{aligned} s(t) &\Longleftrightarrow S(\omega), \\ z(t) &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中 $S(\omega)$ 是為訊號 $s(t)$ 的富立葉轉換，而係數 2 之引入則是為使複數訊號的實部得以等於原始訊號。這一給定具唯一性，其處理一般稱為解析訊號流程（the analytic signal procedure）。很顯然的，上式複數訊號是為實數訊號的單側波譜的富立葉反轉換。也就是說，如果將原始訊號的富立葉波譜之負頻率捨去，但保留完整的正頻率分佈，則這一單側波譜對應的就是實訊號的解析訊號，即此一波譜的富立葉反轉換就只有正頻率成分。而如此定義下的複數訊號相當符合吾人之喜好，因為負頻率的東西很抽象，它最好是不存在，正如時間只有往前行，沒有往後走的。

今為剖析這一解析訊號的「解析」特質，了解其行為的相關脈絡，看看它可以提供那些物理信息，亦或存在某些拘限性，我們從基礎出發，研究其數學根本。也如是，我們很自然的會看到解析訊號與希伯轉換的密切關係。

2.3 解析訊號與希伯轉換

前述解析訊號可以表為：

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1} \{S(\omega) + S(\omega)\text{sgn}(\omega)\}. \quad (2.6)$$

而由富立葉轉換其兩對應領域上互為存在的雙向可行的特色運算關係，即一領域的乘積（product）在對應領域上是為旋移乘積（convolution），可得：

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1} \{S(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1} \{S(\omega)\} \star \mathcal{F}^{-1} \{\text{sgn}(\omega)\}, \quad (2.7)$$

$$z(t) = s(t) + i \left[s(t) \star \frac{1}{\pi t} \right]. \quad (2.8)$$

是故：

$$z(t) = s(t) + i \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.9)$$

式中 $\mathcal{P}$ 代表高斯主值（Cauchy principal value）積分，而其虛部是為實數訊號的希

伯轉換，即下式之 $\mathcal{H}[s(t)]$ ：

$$\mathcal{H}[s(t)] = \widehat{s(t)} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (2.10)$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示爲對奇異點（singularity）的積分：

$$\mathcal{P} \int = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\epsilon_1} + \int_{t+\epsilon_2}^{\infty} \right), \quad (2.11)$$

此外 $\epsilon_1 = \epsilon_2$ 。今令：

$$f(t) = \frac{1}{t}, \quad (2.12)$$

並使用如下之富立葉轉換對應領域之正反雙重適用的運算特性對（the duality relations of the Fourier transform pairs）：

$$h(t) \iff H(\omega), \quad (2.13)$$

$$h(t) \star f(t) \iff H(\omega)F(\omega), \quad (2.14)$$

故得訊號之希伯轉換爲如下之旋移乘積式：

$$\widehat{s(t)} = \frac{1}{\pi} (s \star f)(t). \quad (2.15)$$

因而此希伯轉換之富立葉轉換爲：

$$\mathcal{F}[\widehat{s(t)}] = \widetilde{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} S(\omega)F(\omega). \quad (2.16)$$

上式得以把 $S(\omega)$ 與 $F(\omega)$ 分開來，所以前述之主值積分就變成求取 $f(t)$ 之富立葉轉換問題如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= F(\omega) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt = \\ &\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{t} dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

上式中實部的積分內容具有反對稱性（antisymmetric），其主值積分爲零，而其虛部的積分內容則對稱分佈且無奇異點存在，蓋因 $\sin(\omega x)/x$ 對任何 x 都收斂於一個定值，即使是在原點 $x = 0$ 上也是。另由下式：

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{x} dx = \text{sgn}(\omega) \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du, \quad (2.18)$$

我們得知 $F(\omega)$ 基本上與 ω 上的波譜分佈狀況是無關聯的。即便如此， $F(\omega)$ 的求算仍必須應用複數微積分（complex calculus）中的餘數定理（residue theorem）。經參考 Greenberg 所著教科書 [10] 實際推導可得下式：

$$F(\omega) = \begin{cases} -i\pi \text{sgn}(\omega) & \omega \neq 0; \\ 0 & \omega = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

此式相當簡易，它只跟 ω 的正負性有關。是故吾人得証解析訊號 $\mathcal{A}[s(t)]$ 的富立葉轉換是爲下式：

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[s(t)]] = S(\omega) + i\mathcal{F}[\mathcal{H}[s(t)]] = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega > 0; \\ 0 & \omega \leq 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

再綜合檢視上些式子，亦得訊號其希伯轉換的富立葉轉換爲：

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} -iS(\omega) & \omega > 0; \\ iS(\omega) & \omega \leq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

由以上的推導，我們亦可得知，希伯轉換實爲一乘積運算子（operator），其在頻率領域的作用有如下之運算作用：

$$O_H(\omega) = -i\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -i & \omega > 0; \\ 0 & \omega = 0; \\ i & \omega < 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

如是之故，希伯轉換是把負頻率的成分之相位移位正90度，並將正頻率成分之相位移位負90度。也因此，解析訊號其實部與虛部綜合的結果，就是只取出實數訊號之正頻率成分。

2.4 結語

此處的推導，其數學過程或許狀似複雜高深，但其結果卻是非常簡潔優雅。它清楚說明解析訊號與希伯轉換的關係，而也正因為有了如此深入卻簡易的表裡認知，使我們對相關研究所必須考慮的因素得以有根源性的瞭解，同時也因為有了這些基礎工作，吾人在數據分析判讀、物理解說論斷時，更能抱持一種客觀謹慎、求實求是的態度。而這些正是下一章要加以闡明的，亦且是分析進一步優化之根源與動機。❖

3

第 3 章

希伯轉換數值特性

3.1 引言

任何訊號都可以拿任何方法來分析，但應用上重要的是，物理性與數學性如何配合，而這中間的決定關鍵則是：現象的可預期性及物理的可重覆性。在這一章中，我們所要探討的諸項內容是牽涉到此處時頻分析方法其解說信心度建立問題，也就是，物理與理論能否完美配合演出，亦或兩者間得以自圓其說，若否，我們所顧慮的課題在何？它的可能水波應用在何？

3.2 希伯轉換與富立葉轉換

在前一章中我們探討解析訊號法所涉數學，而也看到其與希伯轉換的關係，只是這當中讓人最有感的應該是：幾乎所有的細節都是在富立葉轉換下打轉。更明確的說是：希伯轉換只是操控富立葉轉換，把它作一些簡單的編輯組合，然後再把這一組合行富立葉反轉換。如是，應用這一特性，我們可以一個很簡短而高效率的程式求算希伯轉換。表 3.1 爲此一程式，它所用程式語言爲 ASYST，這個程式僅有數行，在 ASYST 中稱之爲一個語句（word），就等同 Fortran 的副程式（subroutine）。它讓我們看到希伯轉換就是把富立葉轉換作一些剪接、排列組合，在正轉換與反轉換間作動，幾乎不涉其它添加物。如是之故，希伯轉換的基因已昭然若揭。所以現在該是我們去關切此基因所衍生的各種特質，如果未能掌

握這些特質，那「解析訊號法」還可以提供什麼「解析」呢？

3.3 旋移乘積與黑盒子機制

訊號在一複雜系統內所受到的作用情形、亦或訊號演化現象探析，我們最常見的手法就是比較因與果兩者的波譜。然而這樣的一個比較到底是否容易進行？還有，它到底會遭遇到何種問題？這些問題是這一章首先要探討的，它具有關鍵性重要啓示。不過，一個簡單的黑盒子機制圖就足以具體說明此一啓示、或這一比較作為。圖 3.1 示此黑盒子機制，它闡明此機制與旋移乘積運算的關係，從而助益吾人領悟此機制所可能提供的信息究竟如何。

茲參考黑盒子機制圖說明如下：設若我們有一輸入訊號 $f(t)$ ，而在一個複雜的系統裡這一訊號受到各種因子的影響，亦或受不明因素的作用，即所受黑盒子效應函數為 $h(t)$ ，而所產生的輸出訊號為 $g(t)$ ，此時我們想就這些因子對各成分波的綜合效應加以瞭解，則一個非常自然的作法就是比較輸入端與輸出端訊號之轉換頻譜，這一觀念與手法可說非常直接簡易，而其使用更是屢見不鮮，可是這裡必須指出的是，這是一個極其脆弱、亦且是問題重重的作法。因為，一言以概之，這一頻譜比較法所涉問題就等同一個逆向旋移乘積（deconvolution）所涉問題。而其過程所遭遇的重大難題其理甚簡。

設 $f(t)$ 、 $g(t)$ 、 $h(t)$ 的富立葉領域對應函數分別為 $F(\omega)$ 、 $G(\omega)$ 、 $H(\omega)$ ，則富立葉轉換及旋移乘積配對關係式如下：

$$f(t) \iff F(\omega), \quad (3.1)$$

$$h(t) \iff H(\omega), \quad (3.2)$$

$$g(t) \iff G(\omega), \quad (3.3)$$

$$h(t) \star f(t) \iff H(\omega)F(\omega). \quad (3.4)$$

此處之雙箭號表示 t 與 ω 可以互相掉換。依黑盒子機制圖可得下式：

$$H(\omega)F(\omega) = G(\omega), \quad (3.5)$$

由此式我們可以相當直接的認定，這一黑盒子機制其對各成分波的作用就是如下之兩個波譜的相除：

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}. \quad (3.6)$$

也因此，系統的作用因子其綜合反應作用函數（impulse response function）就是如下的直接逆向旋移乘積函數（direct deconvolution）

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(\omega)}{F(\omega)} \right]. \quad (3.7)$$

這裡所遭遇的問題是多方面的，但卻是具體而微，因而也使得它在數理上與解析使用上都滯礙難行，而這一切都相關於出現在分母的函數 $F(\omega)$ 。茲列其理：

其一，理論上 3.7 式可能是完全不成立的，因為 $F(\omega)$ 中有部分是可能為零分佈的；其二，在實質上或數值解析上，一個離散數值分析流程必然是屬於有限性質的，也必然是一個綜合各種無法避免的誤差或近似演算的過程，這當中各種副作用所在都有，某部分的 $F(\omega)$ 可能誤差特大；其三，離散波譜是反應連續波譜分佈的一種矩形狀估算值（periodogram estimations），此外富立葉波譜是一種統計估算值，一般帶有嚴重的變異不定性，並且甚難有效率地加以改善或精準化 [17]；其四，劇變效應與相位糙音耦合所難以克服的困擾，如下節所述；其五，很多實際狀況其成分波譜是僅分佈於一個窄頻帶，即使有分佈曲線也僅是集於整個數值處理求算頻率範圍內的一個狹窄區間，因此對大部分能量甚小的區域，其數值結果絕大部分遠離真實值，或說都是誤差，亦甚或不存在。

如是之故，兩個波譜之相除其本質就是一個誤差放大器，不僅非常不可靠，甚至是不能成立。因為，理論上或數值上只要存在有一點是零數值的成分，那整個逆轉換公式也就不存在了。整體而言，此處的症候是所謂的「源頭直接逆向旋

移乘積」(direct source deconvolution)，它在數值分析領域上被稱為「振幅等值化效應」(effects of amplitude equalization)，它往往形成一個頻率領域的高通窗(high-pass window)，在糙音影響下，此一濾窗進一步將各項不定性放大[18]。以上學理說明了黑盒子機制處理方式的嚴重缺失，不過，令人遺憾的是，這樣的一個處理手法還是經常出現在一些研究中，它們把此黑盒子機制用來論說複雜系統裡的尺度演化現象或因子作用效應。以下的章節另可提供更具體明確的解說。

3.4 劇變效應與相位糙音

具複雜尺度及多元作用因子的系統通常其現象亂度高而不規則性大，其時空上的明顯變化或混亂是常態，圖 3.2 在概念上突顯這些現象對波譜及正交函基之使用所帶來的影響。這一圖雖然算是極端的模擬，但卻足以充分說明：何以有些研究之數據分析其數值分佈零散、現象解說薄弱、結果難歸納、甚至鹿馬不分。

從波譜理論上我們知道，如果一個訊號沒有自相關（或是兩個訊號沒有交相關）則就缺乏能譜（或共能譜），設若一個波或其成分波之生命期甚短，則相關於該波的相關函數分佈其存在歷程亦同樣短暫，而相應之能譜內容即相對薄弱或不明顯而難以區別，使用如此薄弱的波譜內涵來行逆向旋移乘積可說無甚意義，要直接比較恐亦不可行。圖 3.2 可強烈顯示所舉意象，亦且具體明白。圖中我們以兩個 Lemarié 仔波之合成來模擬一個訊號所含急變性波形。基本上此處隨意取兩個小尺度的仔波，其左脈動係為相應於單位仔波係數元 e_{600} 之仔波反轉換（即位於第 600 點之單位值行反轉換而得，而訊號長度為 1024 點），右脈動係為相應於單位仔波係數元 e_{470} 之仔波反轉換，其尺度階較 e_{600} 者大一階。這些選擇一方面是隨機，一方面也可說是特意。選擇兩個小尺度，讓我們可以明顯感受局部變化對頻率分佈所可能帶來的衝擊，而兩個位置點的選擇也牽涉到訊號突變產生位置所引致的現象，亦或說是相位效應，而這一效應於此處所引致的性狀乃是波譜分佈之巨幅波動。更具體的說，所謂的特意，是讓兩個局部訊號分開甚長，而離的越遠則這一波動性就越激烈。而所謂的隨機，則是說在一真實混亂狀況下，我們往往無法掌控時空上的發生性。試想，吾人若拿兩個類如此圖的訊號來行波

譜比較或逆向旋移乘積，那會取得多少有義意的結果！

前述之說明如果用數學公式來闡釋，也不過是下面兩個富立葉轉換關係式而已：

$$f(t - \tau) \iff e^{-i\omega\tau} F(\omega), \quad (3.8)$$

$$|f(t) + g(t)|^2 \iff |F(\omega) + G(\omega)|^2. \quad (3.9)$$

同樣地，此處雙箭號表 t 與 ω 可以互相掉換（但可能存在一常數乘積差，端視富立葉轉換式之定義為何），此公式之具體意象解說是，在一個領域內的移位會形成對應領域內的調變，不同位置之局部波形造成另一領域的急劇波動。是為富立葉轉換之雙向可配對特性（duality properties）之一。再者，即使第二個局部脈動的獨立波譜模值（modulus）是同於第一個脈動其獨立的波譜模值，但兩個脈動的合成訊號之波譜模值是不同於個別脈動其模值的合成。也就是說，雖然富立葉轉換對成分訊號是一個線性作業，但能譜並非線性過程，亦或說是合成訊號之能量波譜分佈不等於個別能譜分佈之和。

以上之狀況尙是學理上的現象，其它還需考慮的是實際數值流程所可能引入的一些不確定性，如有限解析、有限支撐長度、單側或雙側波譜表示之義涵、或二維能譜對稱性之物理解說切中性等。

3.5 波譜重複性問題

談到波譜重複性問題，實際上前面兩節已隱約提示。這一節中吾人更具體顯示相關於波譜應用上所必需注意之可歸納性問題。而為進一步加強對此現象的瞭解，從而體會數值與理論理想常常無法完美配合，也認識不同數值處置方式或有其個別長短處，我們藉由兩種不同的波浪數據分析觀點，並拿試驗水槽裡的風生波其波場與流場訊號來加以例示與突顯。

表 3.2 中有三組量測訊號，每組中含有波高與水速個別的統計值，這些統計值係以傳統的波浪越零位統計法求算。這三組風生波流場量測都是在完全一樣的

試驗條件下量得，即三次試驗其鼓風情形完全相同，而波高計位置不動，但雷射都卜勒水速儀分次聚光於三個不同水深。此些訊號取樣歷時為 240 秒，取樣頻率為 40 Hz，三組訊號之第二頻道是同一點之波高量測，另第一頻道訊號則是分別在離靜水位 3、4、5 cm 的三個水深之都卜勒水速，此外，波高與水速量測位置基本上可視為在同一橫斷面上（上下游相距 0.6 cm）。如是，第二頻道之波高基本上可視為重覆試驗之訊號。表中可見個別試驗之波高訊號其各項統計值可說是極端吻合，因此，從越零位統計觀點而言，此一波浪場狀況，於此量測手段、或參數下，其統計數值、或分析結果已達理想的穩定（stationary）狀態。

接著讓我們從波譜觀點出發，看看其數值表徵如何，亦或它能作出什麼解說。圖 3.3 示這三組訊號在二組波譜參數下的能譜，計 12 條分佈曲線。由此圖我們可以輕易發覺兩個現象，其一，上述的一種穩定形態可說是被完全地推翻；其二，相位糙音之症狀。此圖其上部子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之水速訊號能譜。而左右子圖分別是取不同富立葉分析參數。由兩個上子圖可見其重覆量測之能譜是甚難說是重現。但另一方面如果比較上子圖與下子圖之同一組波流場量測，則我們可以看到波高與水速之能譜形狀可算是一致的，此乃因為在同一組量測裏，波高與水速的相位，無論是在時間上或空間上，都是相一致的。反觀不同量測組，其相互間就存在了時間上的相位差，而僅僅是這一時間相位的不同，就帶來了嚴重的不可重現性問題。上面兩種狀況充分顯現的作用即為「相位效應」。基本上，對一個紛紜系統我們是無法掌握不同量測其不同相位狀況的。基此，細部的波譜比較行為能不謹慎為之乎！有了這樣的認知，如果我們把這些現象跟前述的黑盒子機制或逆向旋移乘積效應加以關聯，那我們不難進一步了解先前的顧慮，也可以具體體會波譜共關協振其表現行為法則。

另圖 3.3 左右子圖其富立葉分析參數之數值處理係依循最高自由度原則，以降減其分佈之變異性，並取 Blackman 濾窗以減少邊界效應。左子圖其區段點數為 512 點，而自由度為 36，右子圖其區段點數為 1024 點，自由度為 17。自由度高則波譜解析度差，反之自由度低則波譜歧異性加大而重覆性判別性明顯降低。

再來，讓我們以另一種比較物理性、直覺化的陳述方式，補充說明何以會有這樣的不確定性及不可重覆性，圖 3.4 示風波水槽其上下游兩支波高計所得波高之

自相關係數分佈歷程，由圖可見其分佈之不規則性狀，且自相關數值急劇衰減。自相關都如此，更遑論交相關了。這樣的狀況無不表示，就波譜觀點而言，這些波浪很快就喪失了它們的身分，本尊與分身難抵局部時空的幻化。

3.6 自相關係數與能譜分佈比較之啓示

研究大底都是爲了某些固定標的，只是目的通常很難達成，不過，天可憐見，往往也有無預期的結果，小則新領悟，大則新發現。耕耘未必有收穫，但不付出絕無桃花源可現。就作者而言，許多課題來自出其不意，甚至是誤打誤撞產生。在這一節中所要述說的內容也是無意的小插曲，它相關於試驗室循環水槽自然頻率，而這一念頭並未出現在研究的範疇，更別說要看出什麼啓示。只是想說，多記錄一些訊號，東看看、西看看，即使動機無意、分析無義也無妨，但試驗的基本要求則需握持，要清礎儀器反應特性、試驗精度、內外整體環境影響及試驗控制條件如何等。而也因爲此一意外，得以說說此處的小啓示。

前述所謂意外的插曲，簡單的講就是相關於於自相關係數分佈與能譜分佈的不同表徵，而其焦點則是水槽自然頻率的判定。因爲，理論上能譜是自相關係數函數的富立葉轉換，它們可說一體兩面，但此處何以兩者看到的是甚爲不同？

當試驗室循環小水槽的鼓風機開始作用，水波迅即生起，這些風生波的主頻率大底爲 2.5 Hz，而水槽的自然反響是擷取相對高頻的風生波能量，將之轉移到自身相對低頻的特性頻率。在以下的結果，我們可以看到水槽的自然頻率與風生波的主頻率大約有 30 倍的差距，另其能量密度之差距則超過萬倍。

圖 3.5 是一內含水槽自然頻率的水位量測波高計訊號，這一波高計具有明顯糙音（所用波高計中最嚴重者），而這一訊號記錄的是鼓風機停止後，風生波迅即不見下的水位值。圖中可見，訊號甚小而自然頻率無跡可尋。然而，求算這一糙音訊號的自相關係數分佈，則得圖 3.6 之分佈曲線。由這一圖我們可以馬上看出相關於水槽自然頻率的週期是爲 13.3 sec。此一週期若以淺水波的公式來對比波浪繞行水槽的時間，則兩者吻合度甚佳，亦即自然頻率之波速 C 是相應於水波群速公式 $C_g = C = \sqrt{gh}$ ，式中 g 爲重力加速度、 h 爲水深。另曲線漸衰行爲

（tapering）則是數值處理時補接零值（zero padding）所對應之現象。

另自然頻率亦大致可由旋移乘積濾波後的訊號曲線看得。圖 3.7 示此一低通訊號，另波濾是用最低限度濾波，即截斷頻率（cutoff frequency）是三點一週期，而波濾型態為 Blackman。由曲線可見波幅約為 0.15mm，另此圖亦提示大多數的糙音在明顯高頻區，而與風生波頻帶（小於約 10 Hz）有顯著區隔。

接著讓我們來看此一糙音訊號其能譜分佈如何。圖 3.8 是為使用兩種分析區段長度（segmentation）的兩個能譜曲線，顯然地，兩個子圖不但分佈差異性甚大，而要看出自然頻率也甚是困難。

綜合比較前述對自然頻率的判讀性，我們可以了解到，即使理論上能譜是自相關係數函數的富立葉轉換，但實際數值分析所可掌握的結果卻大為不同。而此處的狀況主要是相關於數值分析與理想狀態下數學理論有其不同細節，諸如：邊緣效應、區段分割、自由度多寡、頻漏、解析度、濾窗因子、等。

3.7 結語

這一章中吾人就希伯轉換與富立葉轉換之間的關係，討論其所涉諸多現象，一方面以學理及數據模擬闡釋，一方面以試驗資料具體例示，根源性地瞭解蓋博解析訊號法之特性因緣，也體會瞬間頻率探討上可能的基本難題。❖

表 3.1 此一用 ASYST 語言所撰寫的簡單程式乃用於求取一實數訊號的希伯轉換。由其可見，希伯轉換乃輸入訊號之簡單 FFT 及 IFFT 運作與排列組合。而基於離散富立葉轉換之自由度所衍生問題亦或是波譜不定性問題，我們可以體會此一轉換所得解析訊號之瞬間頻率行為可能變異嚴重而難以捉摸。

```

\ -----
\ A small program piece which finds the imaginary part of a real signal
\ based on the analytic signal procedure.
\ The computation makes use of the final results of complex calculus based
\ on Cauchy principal value integration.
\ The length of the input array will be automatically truncated to the
\ maximum allowable power of 2.
\ -----
: my.hilbert
fft []size n.fft.pts :=
dup becomes> t1

dup sub[ 1 , n.fft.pts 2 / ]
0 +1 z=x+iy *
t1 sub[ 1 , n.fft.pts 2 / ] :=

sub[ n.fft.pts 2 / 1 + , n.fft.pts 2 / ]
0 -1 z=x+iy *
t1 sub[ n.fft.pts 2 / 1 + , n.fft.pts 2 / ] :=

t1 ifft
zreal
;
\ -----

```

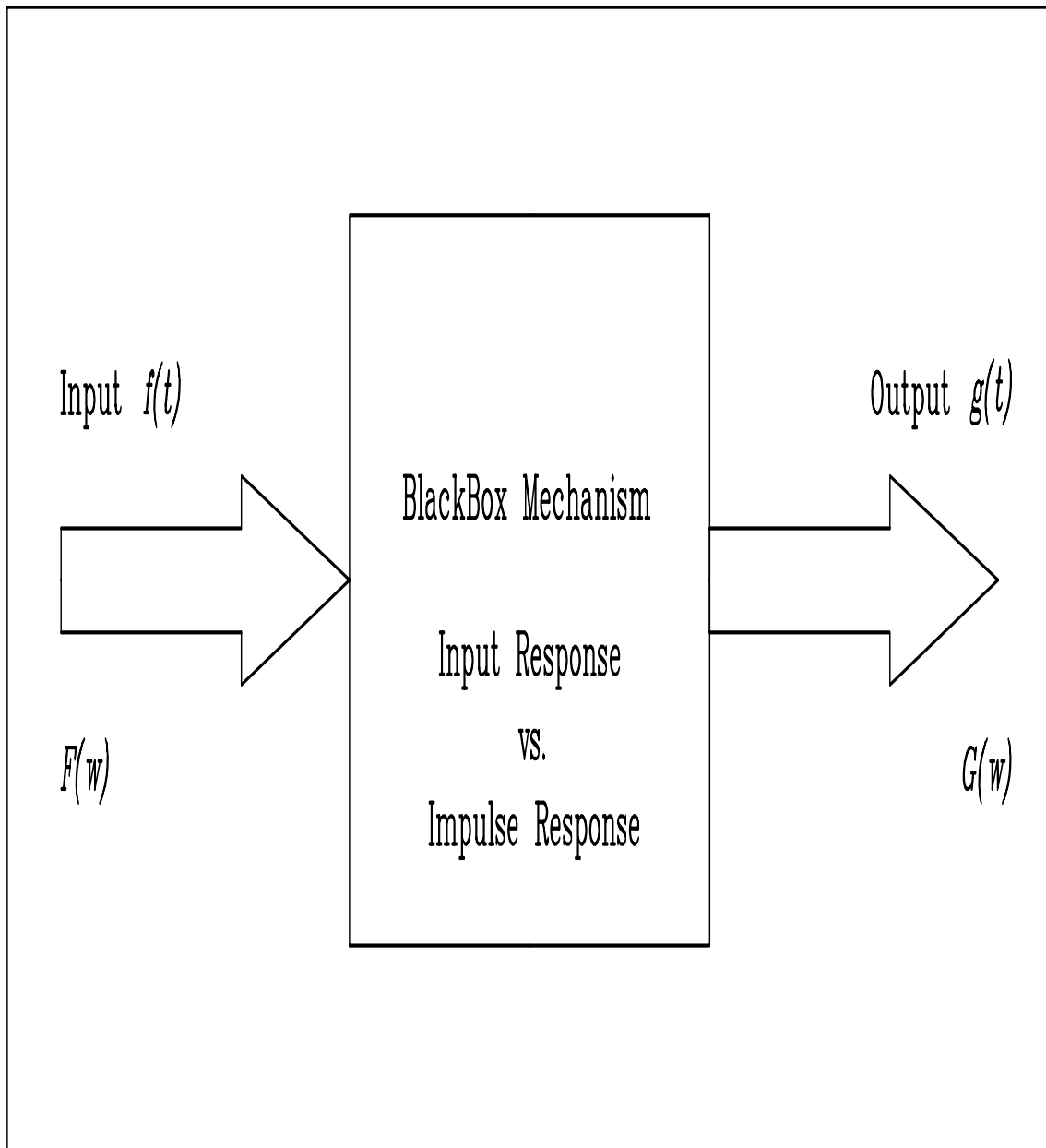


圖 3.1 此圖表示一個問題重重的黑盒子機制，它用以彰顯兩訊號之波譜係數分佈的直接商值是否具有實質的重要性。如果直接取輸出與輸入訊號之波譜商值探討，則此黑盒子作用機制即代表輸出訊號是為輸入訊號與某一入載反應函數（impulse response function）之旋移乘積（convolution），也就是說這一黑盒子機制是為輸出訊號與輸入訊號之間的逆向旋移乘積（deconvolution）。這一觀念與手法看似非常簡單，可惜它是一個誤差極其嚴重的過程。簡易的學理如內文所示。而此圖內在的問題亦相關於波譜直接比較所必須深慮的問題，同時它亦與圖 3.2 所代表含意密切相關，如考慮時空變化性及其它各樣數值效應所涉的不定性。

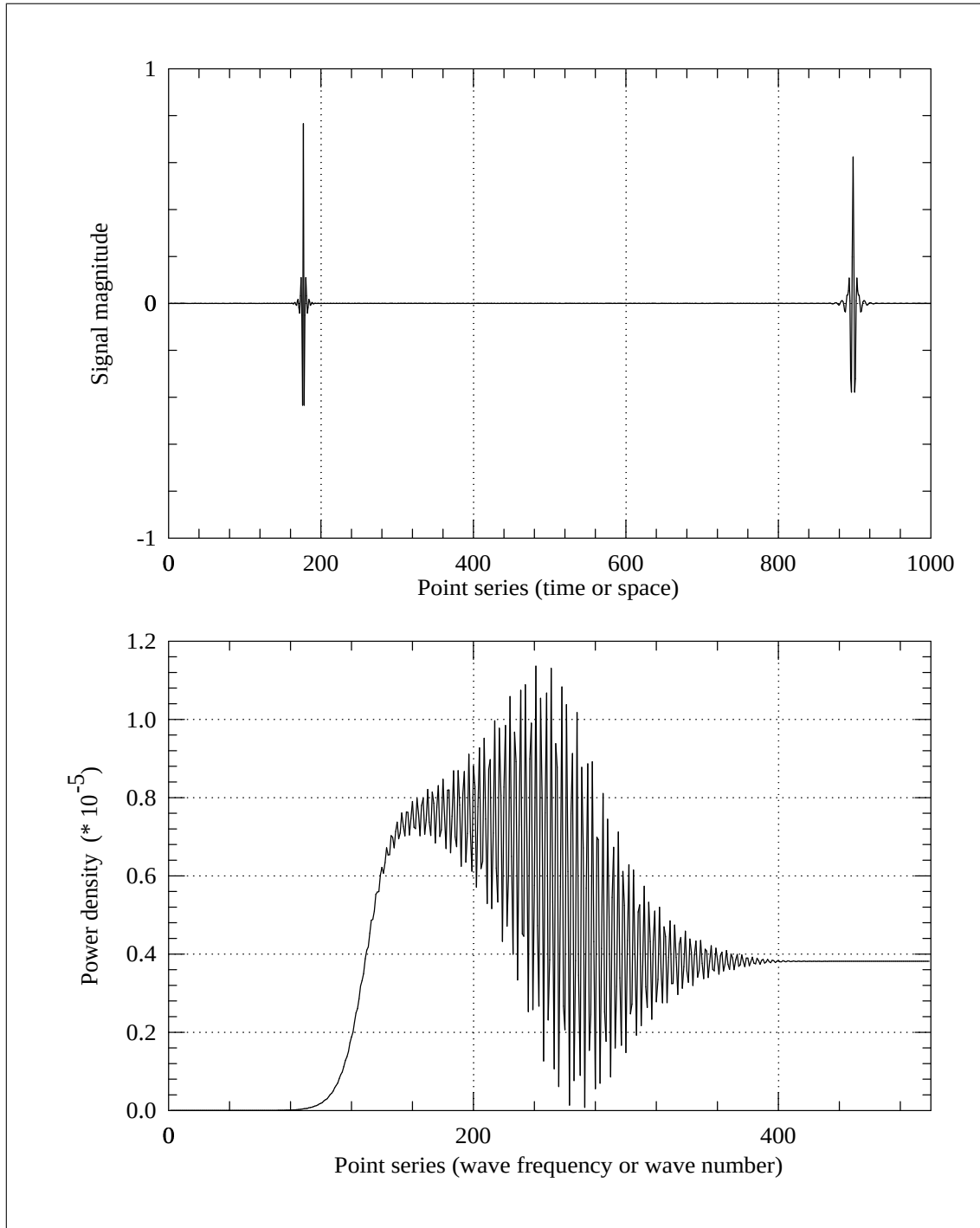


圖 3.2 本圖用以說明模糊效應與相位糙音對富立葉能譜之巨大影響。所取訊號如上子圖，其係由兩個相鄰尺度之局部仔波所合成。此處訊號長度為 1024 點，而兩個相鄰局部仔波為最小尺度之 Lemarié 仔波，其左脈動相應於單位仔波係數元 e_{600} 之仔波反轉換，右脈動係相應於單位仔波係數元 e_{470} 之仔波反轉換。下子圖則示訊號之富立葉能譜。此圖充份顯示相位與時變性這兩個因子所產生的衝擊。此外，此圖之行爲相關於正交函基（富立葉函基係正交）所涉特性，另亦可說明黑盒子機制之逆向旋移乘積所涉問題。

表 3.2 以傳統的波浪越零位統計法所得之三組風生波其波場與流場量測訊號統計值。這三組量測都是在完全一樣的試驗條件下量得。第二頻道訊號都是同一點之波高量測，第一頻道訊號則分別是在三個不同水深（離靜水位分別為 3、4、5 cm）之水速量測，而波高與水速量測位置基本上可視為在同一橫斷面上。訊號取樣歷時為 240 秒，取樣頻率為 40 Hz。如是，第二頻道之波高基本上可視為重覆試驗之訊號，由表得知，個別試驗之波高訊號其各項統計值可說是極端吻合，因此，從越零位統計觀點而言，此一數值分析手段已達理想的穩定形態。然這一情形卻與波譜觀點者大相逕庭。

Case	:	f0w6030.dat	(f1 p3 c1 s9)											
Date	:	01/05/96												
Time	:	02:19:05.48								Sampling frequency	:	40 Hz		
Specifics	:									Sampling time length	:	240 Sec		
Ch	#_W	H.1	H.2	H.3	H1/10	H1/3	H1/2	H.ave	H.rms	T1/10	T1/3	T1/2	T.ave	T.rms
1.	554	26.74	23.67	23.04	20.20	17.38	15.92	12.03	12.93	.44	.44	.44	.43	.44
2.	572	2.90	2.69	2.61	2.33	2.04	1.89	1.44	1.54	.44	.44	.43	.42	.42
Case	:	f0w6040.dat	(f1 p3 c1 s9)											
Date	:	01/05/96												
Time	:	02:14:05.76								Sampling frequency	:	40 Hz		
Specifics	:									Sampling time length	:	240 Sec		
Ch	#_W	H.1	H.2	H.3	H1/10	H1/3	H1/2	H.ave	H.rms	T1/10	T1/3	T1/2	T.ave	T.rms
1.	546	22.81	20.65	20.52	17.04	14.48	13.32	10.35	11.01	.45	.44	.44	.44	.45
2.	563	2.98	2.88	2.72	2.35	2.04	1.89	1.46	1.55	.44	.43	.43	.43	.43
Case	:	f0w6050.dat	(f1 p3 c1 s9)											
Date	:	01/05/96												
Time	:	02:00:30.72								Sampling frequency	:	40 Hz		
Specifics	:									Sampling time length	:	240 Sec		
Ch	#_W	H.1	H.2	H.3	H1/10	H1/3	H1/2	H.ave	H.rms	T1/10	T1/3	T1/2	T.ave	T.rms
1.	546	17.62	16.49	16.30	14.02	11.94	10.97	8.22	8.88	.45	.44	.44	.44	.45
2.	562	2.83	2.74	2.72	2.36	2.06	1.91	1.45	1.55	.44	.44	.44	.43	.43

Units::		Aqueous flow (Ch1:H): cm/s												
		Surface wave (Ch2:H): cm												
		Period (T): s												

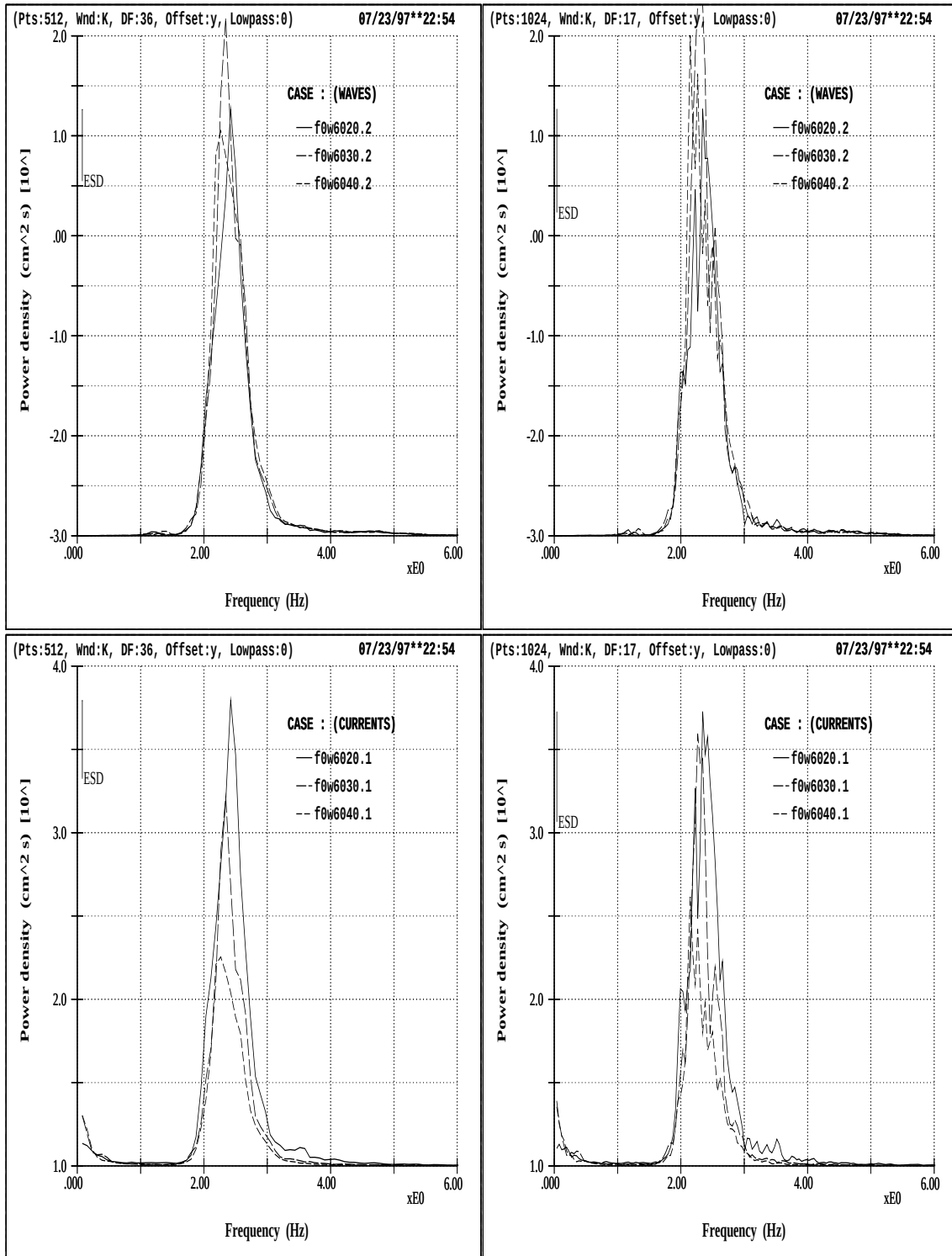


圖 3.3 相應於表 3.2 所示三組波流場訊號之能譜，其上子圖為波高重覆量測之能譜，下部子圖則為不同水深處之水速訊號能譜。而左右子圖分別是取不同富立葉分析參數，其相對於自由度之區段劃分點數分別為 512 與 1024 點。由表 3.2 與此圖之比較，可甚是明確地看出：即使就零位統計觀點而言，此一波浪場狀況已達到理想的穩定形態；但就波譜觀點而論，這一個穩定形態卻可說是被完全地推翻了。此圖與圖 3.1 及 3.2 亦互為關聯的，同時亦隱含離散正交函基的表現行為，亦且是黑盒子機制或逆向旋移乘積效應所需考慮因素。

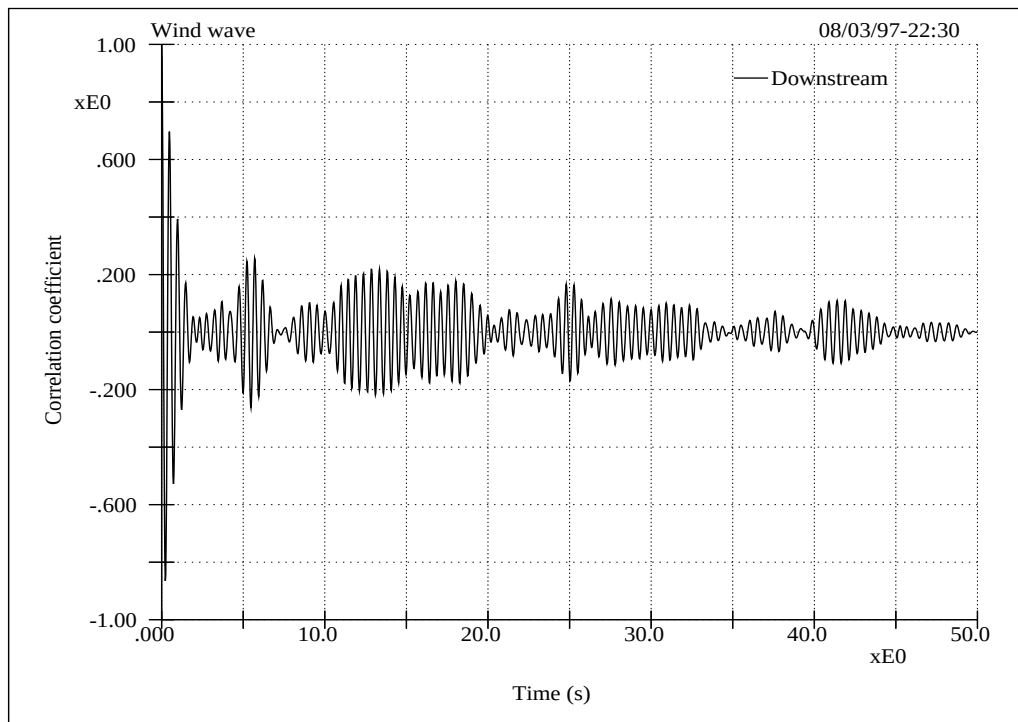
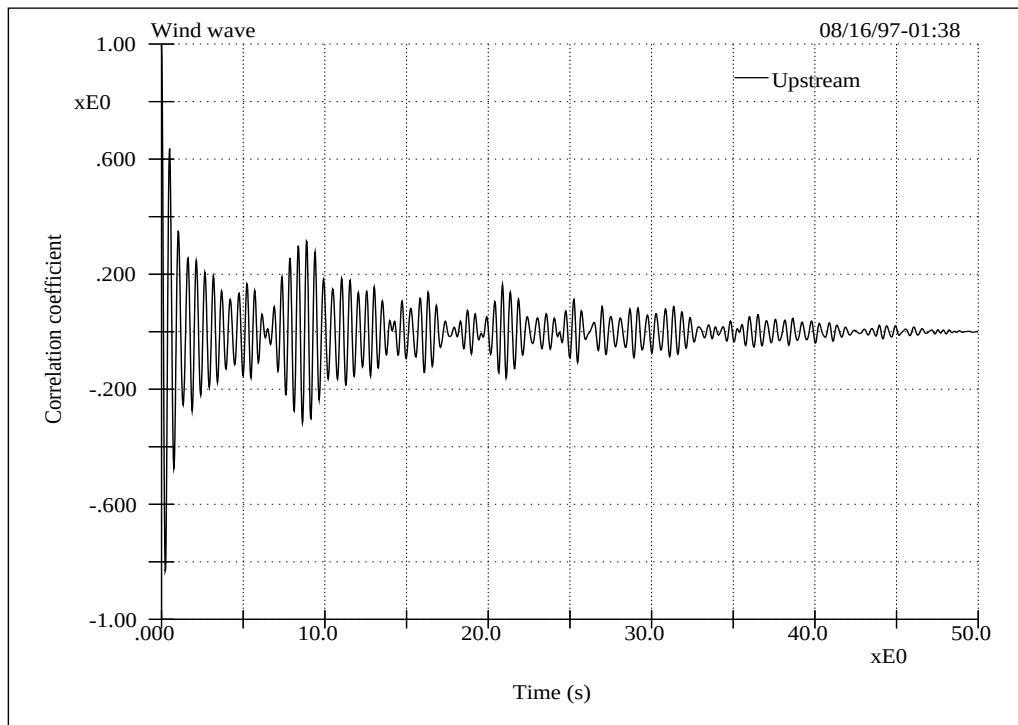


圖 3.4 此圖以自相關係數歷時分佈說明水槽風生波瞬即散失其身本位。其上下子圖分別為上下游波高訊號的自相關係數分佈曲線。而此處之自相關係數值低下且快速降減，這裡的物理義涵可以解釋為；以富立葉分析觀點而言，水槽風生波很快喪失自我，其紛紜性大，而波譜統計性狀之穩定有所顧慮。

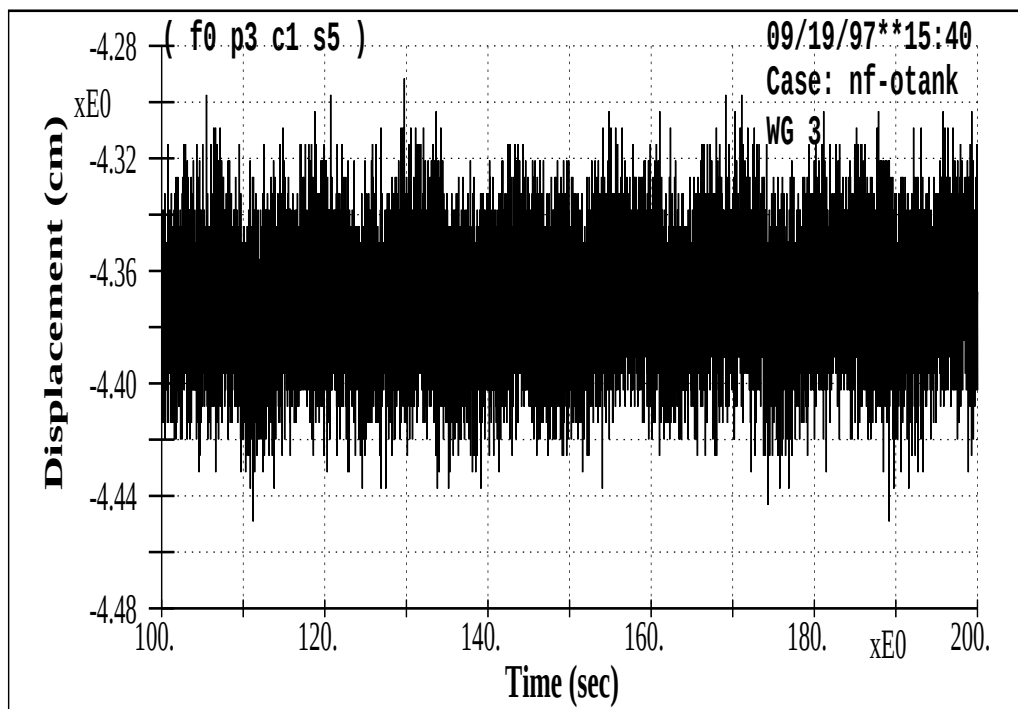
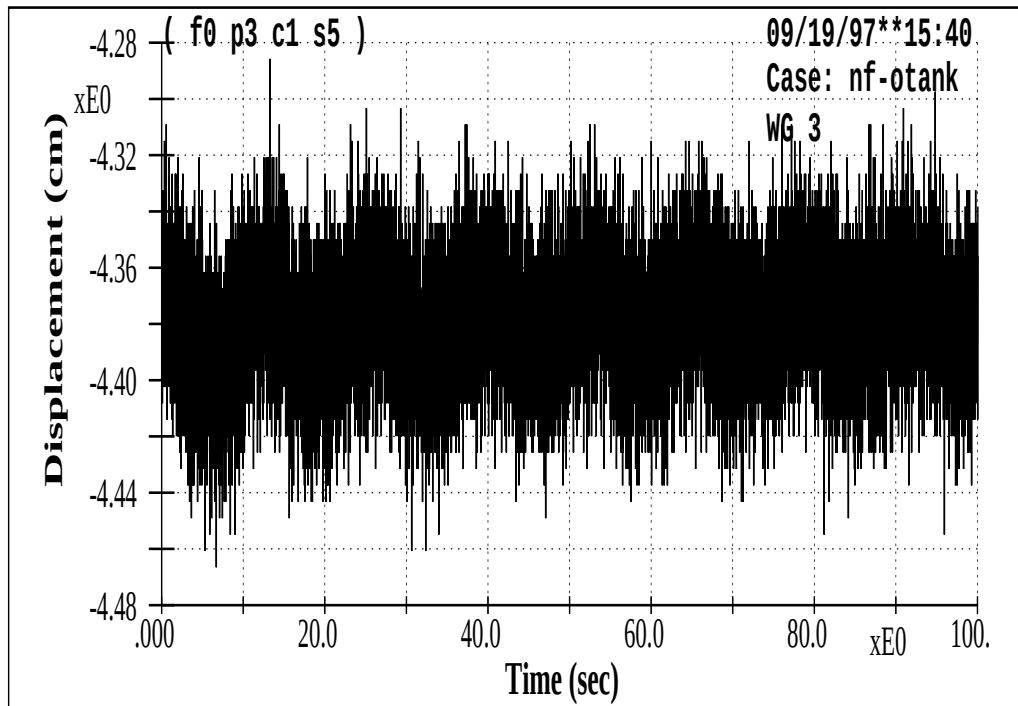


圖 3.5 此一多糙音訊號內含水槽自然頻率之波浪，其係為鼓風機停止後之水位量測。

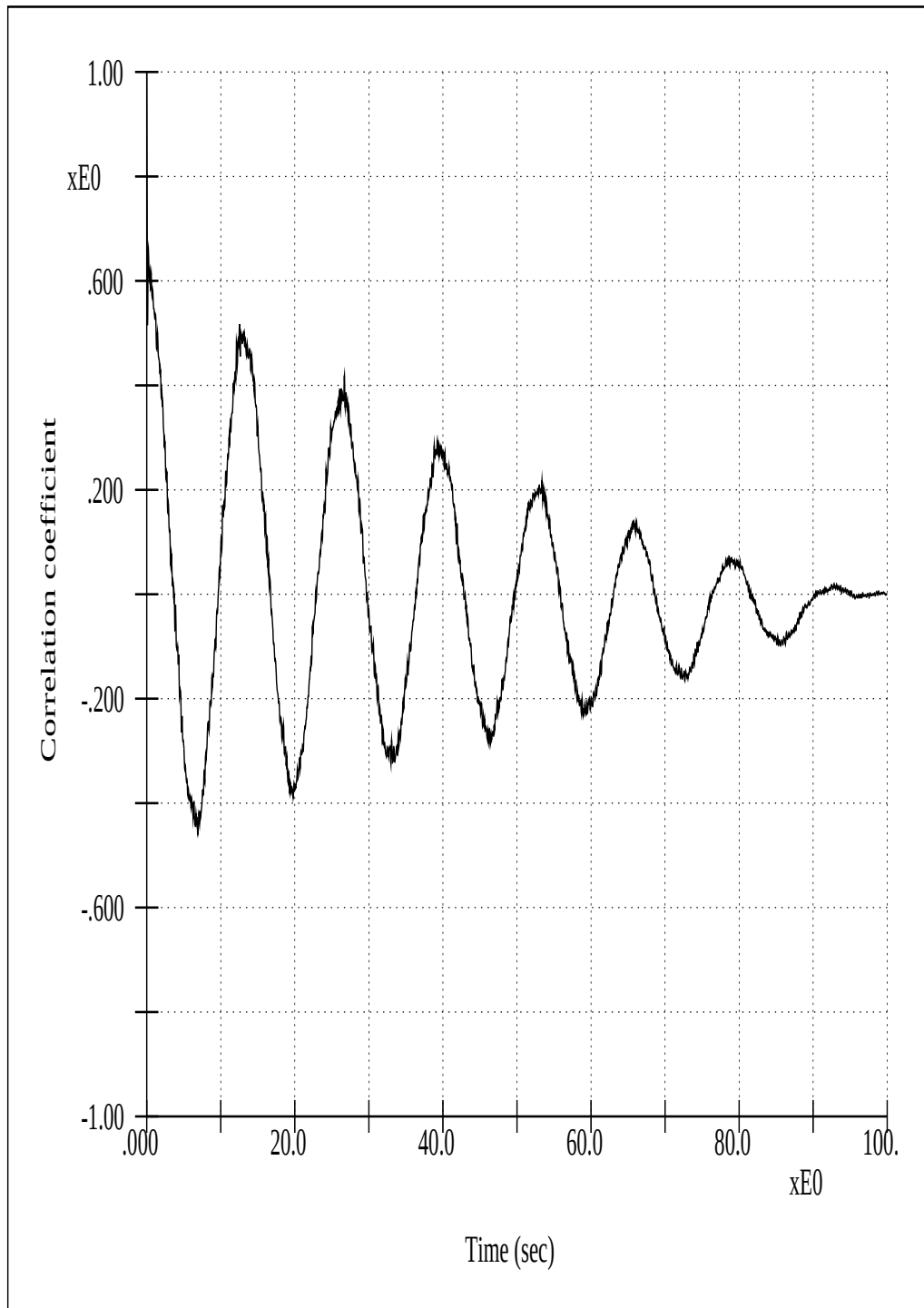


圖 3.6 前一糙音訊號其自相關係數分佈曲線。此圖得以立判循環水槽的自然頻率。

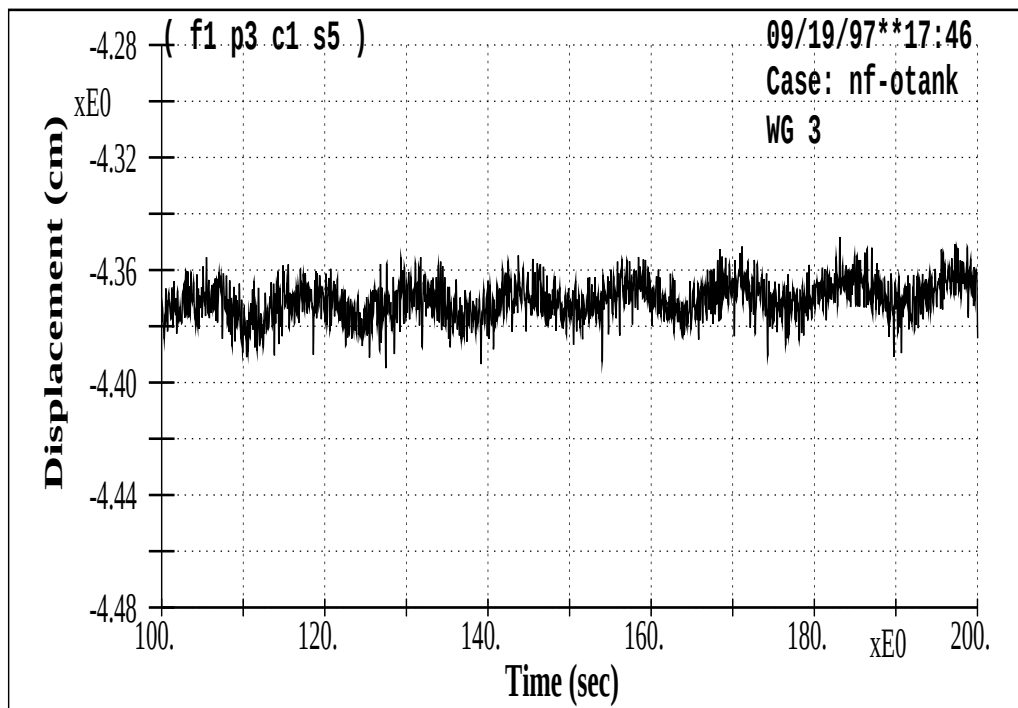
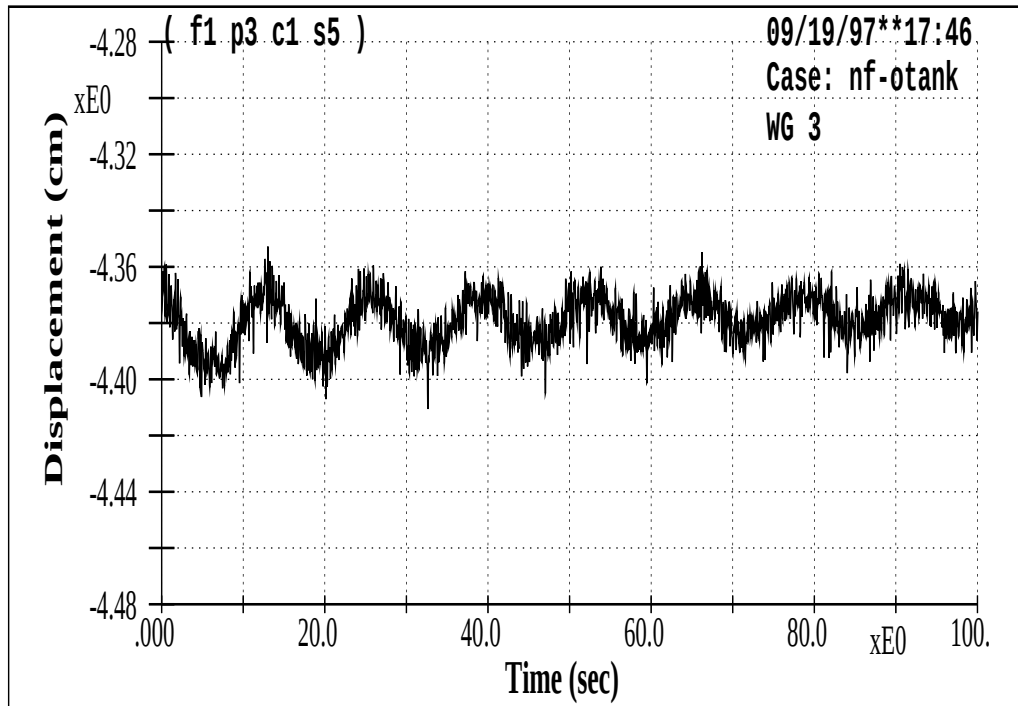


圖 3.7 前述糙音訊號使用時領域旋移乘積濾波後的曲線。其所用波濾是為最小程度（一週期三點）濾波的 Blackman 型波濾。

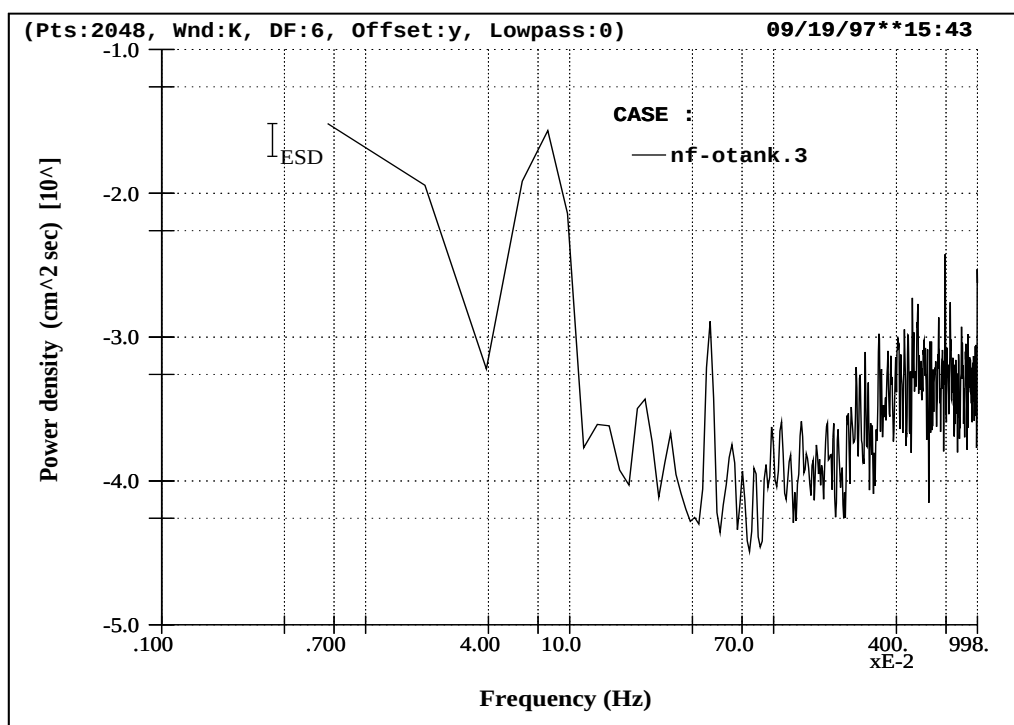
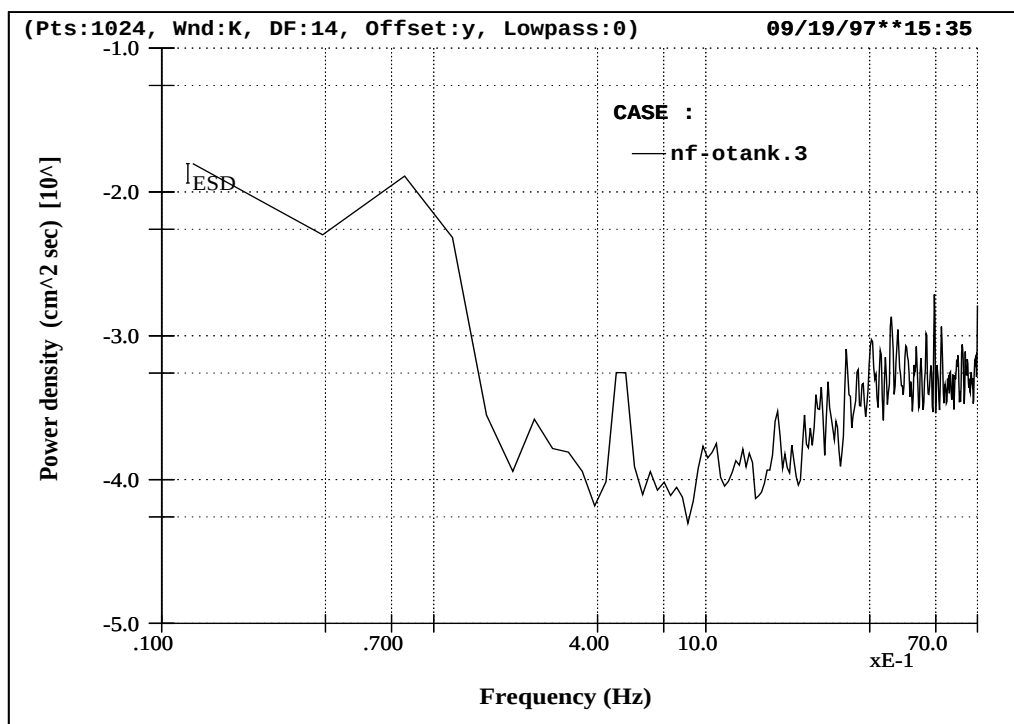


圖 3.8 前述糙音訊號之能譜圖。其上下子圖係使用不同分割區段長度者。不若自相關係數分佈曲線，圖中很難有水槽自然頻率的聯想。

解析訊號瞬間頻率特性與數值模擬

4.1 引言

時頻分析法種類眾多，其瞬間頻率之表示各不相同，基本上任何一種表示法都可視為對應於一個特殊的基核（time-frequency kernel）。至今，變動頻率該如何表示無以說定，因為似乎沒有一個表示法具有全方位的說服力，即使數學上各種方法都完整嚴密，但是它們產生的現象五花八門，各有優缺點，無一完美，也跟我們的直覺或與我們所認定的物理都有其吻合與不吻合、亦或「合理」與「不合理」之處。當然，解析訊號法自無例外。

就作者的學習認知與經驗體會，這眾多瞬間頻率研究所遭遇的困擾與紛紜是源起於最根本的先天問題，也就是說，他們都牽涉一個原始問題基因。如果要用最簡潔的方式（但不那麼直接淺顯）來說，作者會把海參堡不定性定理當作這一數學上的先天基因。因為這一基因的存在，它得以讓百家爭鳴，也得以產生各式各樣的是是非非，甚或帶來困擾。比如說，就以前頭對希伯轉換與富立葉轉換所論而言，這些是是非非形之於諸多現象—劇變效應、相位糙音、黑盒子機制、波譜重覆性等。在這一章中，作者首先把這一先天問題另以直覺淺白（或說較富含物理與邏輯）的方式加以解說，接著再以數值模擬探討解析訊號法的一些行為特性或並研究相關肇致因子。雖然此處的解說偏屬直覺式，但其概念與物理足於讓人感受這一研究所涉的不可預期性暨挑戰性。而數值模擬則具體彰顯一些衝突、矛盾現象。

4.2 「瞬間」與「頻率」的不容性

如果要說矛盾與衝突情形其產生之最基本根源在何，那無疑要怪罪於吾人之咎由自取，因為何以我們的研究內容是「瞬間頻率」。「瞬間頻率」聽來順暢自然，可是我們是否想過它是由兩種幾乎完全不相容的本質組成。「瞬間」不喜「頻率」，「頻率」也不喜「瞬間」。頻率者是正弦與餘弦函數的內在本質，這一本質最好是世代代都恆定，不然的話，至少也要有幾個週期（cycles）才說的過去。如果是沒有瞬間的正、餘弦函數，那最好還是別把瞬間跟正、餘弦函數搞在一起。如今我們把這兩者融為一體，恐怕解鈴還得繫鈴人。

另一方面，在富立葉轉換的兩個對應領域裡，一個領域的「瞬間」分佈（時間或空間），在對應領域裡是無窮盡的分佈（頻率或波數）。也就是說，一個領域上的局部行為在對應領域上是分佈廣泛、成分複雜的現象。如是，頻率與瞬間在不同領域可以處的很好，但把兩者置於同一領域即格格不入。即使是調變高斯函數（modulated Gaussian），它的富立葉轉換也只能相關於高斯函數，此時瞬間頻率即或存在單一，實則仍是成分極其眾多的情況，我們如何看待瞬間頻率與成分頻率同樣是傷腦筋的事。

4.3 「規則度」與「支撐長度」的不同需求

「規則度」（regularity）與「支撐長度」（support length）這兩個數學名詞在許多時頻分析所涉函數上的探討具有重要的角色 [6]，它們其實也跟各種函數分佈特性互為關聯，這些特性如：函數可微分性、頻寬分佈、衰減特性等。雖然這些項目主要探討的是針對非離散的函數，然而它們所涉概念也對離散數值分析有重要義涵。此外，一個離散數值訊號可以視為眾多連續分佈當中的一個選擇。

在富立葉分析上，一個領域上的函數若要有較佳的局部規則度（local regularity），則對應領域上的支撐長度必須較短。也因此，如果我們盼望一個現象的可預期性甚好，那從數學上來講，就是說在出發領域的函數分佈其「局部」規則度甚佳，而這在對應領域上是說其成分單純而分佈範圍甚窄，另衰減特性良

好。可是這一在對應領域的這一要求，若回到原來出發領域，則是要求說，必須要有「廣泛」分佈或很長支撐長度的分佈才能如此。如是之故，我們的出發點是強調局部規則度，但繞了一圈回到出發領域，卻又強調廣泛分佈範圍的需求，這一狀況不無「難以思議」，只是這就是數學，物理不能跳脫數學，有了數學上的基礎了解才能再談物理。另此處的數學現象更簡單的表示是說：研究瞬間的問題仍然必須考量前前後後的狀況，如果把瞬間頻率視為一個變數，而如果它普遍說的定，那也必要考量眾多在此瞬間前後的此一變數。所以說，數學本身就埋下了物理矛盾的種子——研究瞬間的問題必然牽涉到非瞬間的要求，也如是乎，只能說「瞬間大概很難說定」。

4.4 頻率與振幅與相位之間的糾葛

任何一組數據，無論是純量亦或物理量，都必定有頻率概念可關聯。就具體的事物而言，在一般通常的概念裏，頻率應該只相關於時間或空間尺度，它的單位是週期性，即然其它物理量不出現在頻率裡，它最好，或不應該，與其它物理量有所糾葛。可是，事實它們就是相互依存。此一情形也就是說物理量的調變與頻率的調變互為影響，無法單獨存在，一者不一樣，另一者也就不同。此情況增加研究問題的複雜性，把難以預期的可能摻了進來。就以複數訊號而言，在我們的直覺觀念裡，振幅與相位或頻率該是「獨立」之變數，在理想狀況下，變動的頻率最好不要跟振幅有太多關聯，然而在後頭我們可以看到頻率調變與振調幅變是難以分離。綜而言之，我們的出發點是期盼振幅與相位的獨立性，但回頭過來，卻發覺兩者是糾葛在一起。顯然數學的魔力是高於物理，數學可以無視「矛盾」，但物理就大傷腦筋。

4.5 解析訊號法瞬間頻率的矛盾現象

複雜事物往往有其諸多面向，再者，觀察者的立足點與視角亦可多元。是故，看似相同未必一樣，看似不同也未必相異。此一情形易生矛盾，一方面擾攘惱人，

但另一方面也提供創新機運。在前面章節中，我們解說了諸多造成紛擾的數學、物理、邏輯，在這一章中將列出這些紛擾所帶來的矛盾現象，並以數值模擬的方式來探討這些矛盾。如此，數理解析再配合數值模擬而得建立比較完整的基礎性認知，也對往後資料分析及物理解說時得以秉持嚴謹戒慎的態度。以下列出解析訊號瞬間頻率之相關問題或矛盾現象：

- 訊號的瞬間頻率可能不屬於訊號波譜內成分波的頻率。
- 即使一個複合波的組成成分是有限的，亦或某是由一些離散頻率成分所組合，此複合波的瞬間頻率幾乎都是連續的，而其數值分佈有無窮多個。
- 一個有限頻寬的訊號其瞬間頻率往往不屬於該頻寬，其值可高可低。
- 雖然一個解析訊號是沒有負頻率的成分波，但瞬間頻率卻可能是負的。
- 雖然瞬間頻率的觀念或用意在強調局部的行為，但瞬間頻率的決定卻必須考慮其前前後後的完整訊號。
- 瞬間頻率是為相位的導數，直覺上，瞬間頻率的變動不該與訊號振幅（或包絡線）有大牽扯，實則頻率調變與振幅調變並無獨立性，甚至互有鉅大影響。
- 時頻分析理論與其數值處理技法往往存在諸多可變易的細節、考量、手法。這些相關課題如：如何增進正確性或可預期性、是否需要額外的處理、有何優化步驟，另外，是否得以降減矛盾現象所帶來的困擾，再者，這些改善措施的物理性如何，還有，它們是否衍生新難題？

4.6 數值模擬

讓我們考慮一個由三個弦性波所組合的訊號如下：

$$s(t) = ae^{i\alpha t} + be^{i\beta t} + ce^{i\gamma t} = A(t)e^{i\phi(t)t}. \quad (4.1)$$

式中 a, b, c 為振幅， α, β, γ 為頻率，若這些都為定常數，則此一訊號的富立葉轉換是由離散的三個 delta 函數（或 delta 分佈）所組成，即

$$S(\omega) = a\delta(\omega - \alpha) + b\delta(\omega - \beta) + c\delta(\omega - \gamma). \quad (4.2)$$

另這三個函數的中心頻率分別位於 α, β, γ 上。若 α, β, γ 都為正值則則 $S(\omega)$ 僅分佈於頻率之正軸上，此時 $S(\omega)$ 對應的是為解析訊號。

求解此一解析訊號的相位函數與振幅函數可得：

$$\phi(t) = \arctan \left[\frac{a \sin(\alpha t) + b \sin(\beta t) + c \sin(\gamma t)}{a \cos(\alpha t) + b \cos(\beta t) + c \cos(\gamma t)} \right], \quad (4.3)$$

$$A^2(t) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos[(\alpha - \beta)t] + 2ac \cos[(\alpha - \gamma)t] + 2bc \cos[(\beta - \gamma)t]. \quad (4.4)$$

再取相位之導數得瞬間頻率為

$$\omega_i(t) = \frac{1}{A^2(t)} \left\{ (a^2 \alpha + b^2 \beta + c^2 \gamma + (\alpha + \beta)ab \cos[(\alpha - \beta)t] + (\beta + \gamma)bc \cos[(\beta - \gamma)t] + (\alpha + \gamma)ac \cos[(\alpha - \gamma)t] \right\}. \quad (4.5)$$

今以一些數值組合代入 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)]$ 中以彰顯前節中的矛盾現象。圖 4.1 示複數解析訊號相應於數值組為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-1.2, 1, -1); (1.6 \times 2\pi, 3.2 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 時之振幅調變與頻率調變情形。此時得見：瞬間頻率不受限於成分波譜，另其大小遠超越頻寬範圍，而原始成分雖是離散波譜，但瞬間頻率為不間斷的連續分佈。

將前一數值組中的三個頻率作些微改變如 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-1.2, 1, -1); (1.592 \times 2\pi, 3.183 \times 2\pi, 3.024 \times 2\pi)]$ 則得圖 4.2 之分佈。圖中可見負值瞬間頻率

的出現，此外雖然瞬間頻率急劇變化的發生位置改變不大，或說振幅調變的形狀與大小接近，但瞬間頻率分佈形狀卻有甚大差異。

圖 4.3、4.4、4.5 示另三組模擬數值，這三組數值的頻率與模值（modulus 亦或振幅項的絕對值）俱為相同，其所不同者乃其相對相位，而這不同相對相位是表現在個別成分其振幅的正負差異而已。此一差異相當於相位有一移位值為 π 。

圖 4.3、4.4 分別示相應於 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, 1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 與 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, -1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 。此兩圖的振幅調變情形完全相同，但頻率調變的狀況雖然類似，然已倒置。

圖 4.5 則示相應於 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, -1.5, -2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 之振幅與頻率調變。這一圖所顯示的與前兩圖者大為不同，非僅振幅調變改變非常明顯，其瞬間頻率調變情況則更詭異。此一圖的下子圖其縱軸數值之所以一樣乃表存在奇異點之狀況，另外亦示正、負無限大瞬間頻率都可能產生。綜而言之，此不同相位所組合的三個解析訊號存在巨大差異調變行為，這些狀況，一方面顯示矛盾現象的可能性與嚴重性，另一方面無不關聯於前章中所強調的諸多不定性因素，特別是驗證了相關於希伯轉換與反旋移乘積（deconvolution）的相位糙音。

4.7 衝突現象的象徵概念

前一節中的數值模擬具體顯現一些矛盾現象，主要為所列前四點，在這一節中，我們進一步解說一些比較隱晦及抽象的相關因素。特別是振幅調變與頻率調變的相互干擾。

雖然在式 4.5 中已可明顯看出瞬間頻率受到振幅（包絡線）影響（即式中右側的分母），不過在後面我們將會查覺出，對瞬間頻率真確的重大影響應該是來自於振幅分佈改變的相對變化率，而非僅其絕對大小。為加強對此種干擾性的了解，此處解釋一些數學觀念，其乃相關於前面所提到的函數「規則度」，亦或相關於函數的支撐長度、頻帶寬、可微分程度、分佈衰減特性等。雖然這些觀念出發於在橫軸上連續分佈的函數，但對離散數值現象的解說亦完全適宜。

- 若考慮複數訊號 $z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$ ，其解釋可如下：若 $a(t)$ 的規則度（Lipschitz regularity）不佳，則其頻譜 $A(\omega)$ 以 ω 之原點為中心並對稱分佈於寬廣的頻率範圍，且其範圍隨著規則度的降低而變大，這一情形下為求相應於 $z(t)$ 的解析訊號，即為使頻率分佈只在正值橫軸上，必須把 $A(\omega)$ 在橫軸作巨大移動，也就是把調變頻率大為提高。另此一原理是基於富立葉轉換對應領域上正反向皆可行成雙特性（duality properties）而來，即一領域上的移位是對應於另一領域上的調變（shift versus modulation）。
- 若 $a(t)$ 在某些點上為不可微或不連續，則 $A(\omega)$ 在橫軸上正負延伸甚廣，甚至是無限延伸，也就是說，此時的 $a(t)$ 將很難或沒有對應的解析訊號，而高頻行為勢必增強，所需考量頻帶更為寬廣及分散，而其能量也甚小。
- 解析訊號法瞬間頻率在此處的顧慮，若以仔波時尺分析的觀點去看，則似乎不存在。這一情形可以比較 Meyer 仔波與 Battle and Lemer   仔波的波形特性與其在水波訊號模擬時的熵值表現說明之：此兩仔波的建置基核（kernel）是不相關的兩類屬，但其曲線形狀目視則甚相近。Meyer 仔波為無限支撐，而其富立葉轉換支撐範圍為有限分佈，另其在時與頻領域上的函數皆為無限可微，而 Battle and Lemer   仔波其在時與頻領域上的支撐範圍均為無限分佈，另其在時與頻領域上的函數皆非無限可微。但這兩個仔波在模擬水波時其熵值幾乎一樣（[13, 14]）。簡而言之，解析訊號法其高頻帶上的瞬間頻率變動可以預期是具有劇烈性的。
- 前面提到為了計算瞬間的頻率卻必須考慮全時段的完整訊號，因而週遭的分佈如何影響局部瞬間頻率亦值得說明。解析訊號之虛部相關於希伯轉換之 $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau$ ，此式表示與考量點的距離是一個權重參數，並以距離倒數為之。今以一極端的 Gibbs 現象解說之。若原始訊號有斷點，則以富立葉轉換係數反算得之重建訊號將在緊鄰斷點的左右有永不消失的振盪起伏，此一振盪以斷點為中心反對稱分佈，而這一起伏配合亦是反對稱的距離權重將把前述積分極度放大，因而造成局部瞬間頻率之極大變化。另外由時領域看，此振盪起伏是相應於許多非常高頻甚至無限高頻亦且弱能的微小成分，因而

高頻低能區的瞬間頻率易有極端值之產生，即其變動頻繁且急劇。

- 在先前數值模擬的公式中，瞬間頻率大小是相關於振幅（即包絡線值），另可看到奇異點是發生在振幅為零之處，這一情形提示了極端頻率現象與振幅甚小有關，不過此處將說明極端瞬間頻率是相關於振幅的相對變化率，而非僅是振幅的大小。這裡吾人以加入數據罩窗與沒有數據罩窗的訊號其瞬間頻率分佈異動狀況說明之。圖 4.6 示原始訊號在四個濾波頻帶裡的成分訊號分佈及其振幅包絡線，其四個頻帶之中心頻率分別是 2.40、4.50、6.70、8.50 Hz。圖 4.7 示將圖 4.6 的成分訊號加上罩窗之數據分佈及振幅包絡線，此處所用罩窗為 Hamming window，即圖 4.8 之右子圖內的實線。而圖 4.9 則示有無加上罩窗之成分訊號的瞬間頻率分佈，其上子圖為無罩窗者，下子圖則示有罩窗者。由圖可見兩者之分佈在各頻帶基本上是一致的，因此振幅的絕對性大小並未改變瞬間頻率，是故瞬間頻率的極端變化是發生在振幅相對變化率甚大之處，當然能量越小相對變化率就很大，因而，特別趨近於零的位置，就極可能產生巨大的奇異現象。此外這些現象亦可由數值模擬諸圖中驗證，特別是當振幅包絡線為驟然升降，或在不可微分之局部低能量處。
- 一些研究把負瞬間頻率視為相位之反方向逆行（phase reversal），但由此處數值模擬所得之瞬間頻率現象，我們可以得知其所稱的反方向相位現象是沒有根據的。本研究顯示其乃發生於振幅極小而接近於零之處，此外該處的振幅相對變化率甚大。簡單的說，其產生源自於問題基因，與反方向逆行之相位完全無關。
- 一般而言，能量大的低頻區帶其瞬間頻率變化相對緩和，但能量甚小的高頻帶則有更頻繁而劇烈的相對振幅變化，故高頻區帶上瞬間頻率的變動及矛盾行為更為顯著。

4.8 結語

綜而言之，這一章中我們涉略解析訊號時頻分析法的本質，探討其所涉不定性或

不可預期性，也了解其應用的挑戰性。再者，此處諸多現象承襲富立葉轉換與希伯轉換的特質，包含其在連續理論、亦或相關於離散數值特有者。這些特質的相關因子除了先前所述的數理基因外，其具體者如：相位糙音、模糊效應、離散解析度、濾波作用、邊緣效應等。也唯有體會這一方法的本質特性，清楚其諸多的影響因子暨相應效應，才能不為矛盾現象所惑，作出合理客觀的物理解說，避免以偏概全、甚而指鹿為馬的謬誤。❖

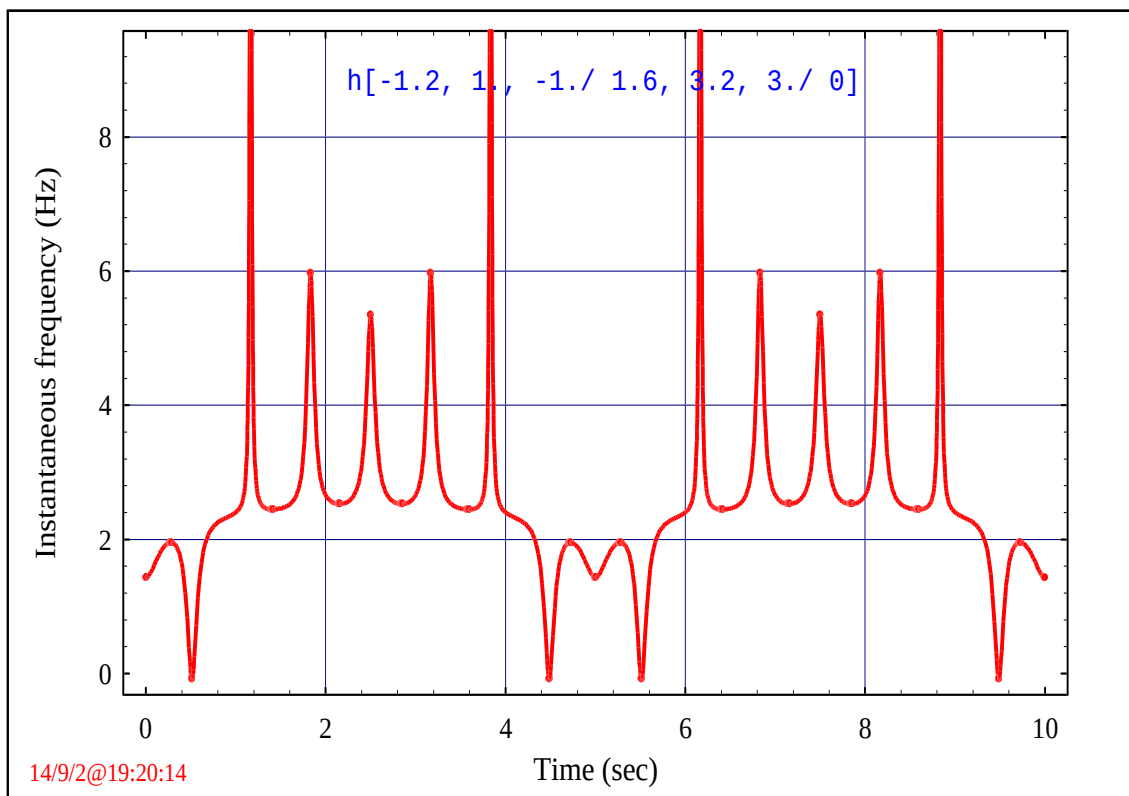
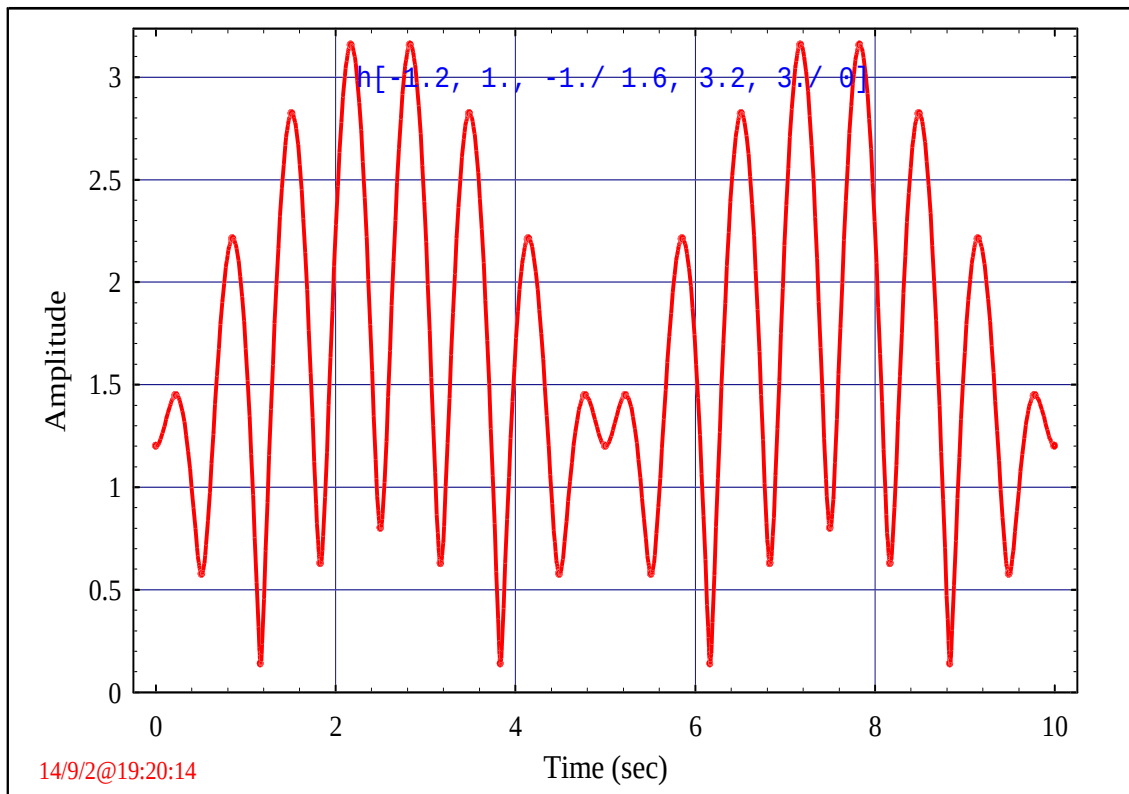


圖 4.1 模擬解析訊號之振幅包絡線調變及頻率調變曲線。此一模擬訊號由三個絃性波所組成，其所取振幅及頻率參數組合為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-1.2, 1, -1); (1.6 \times 2\pi, 3.2 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$

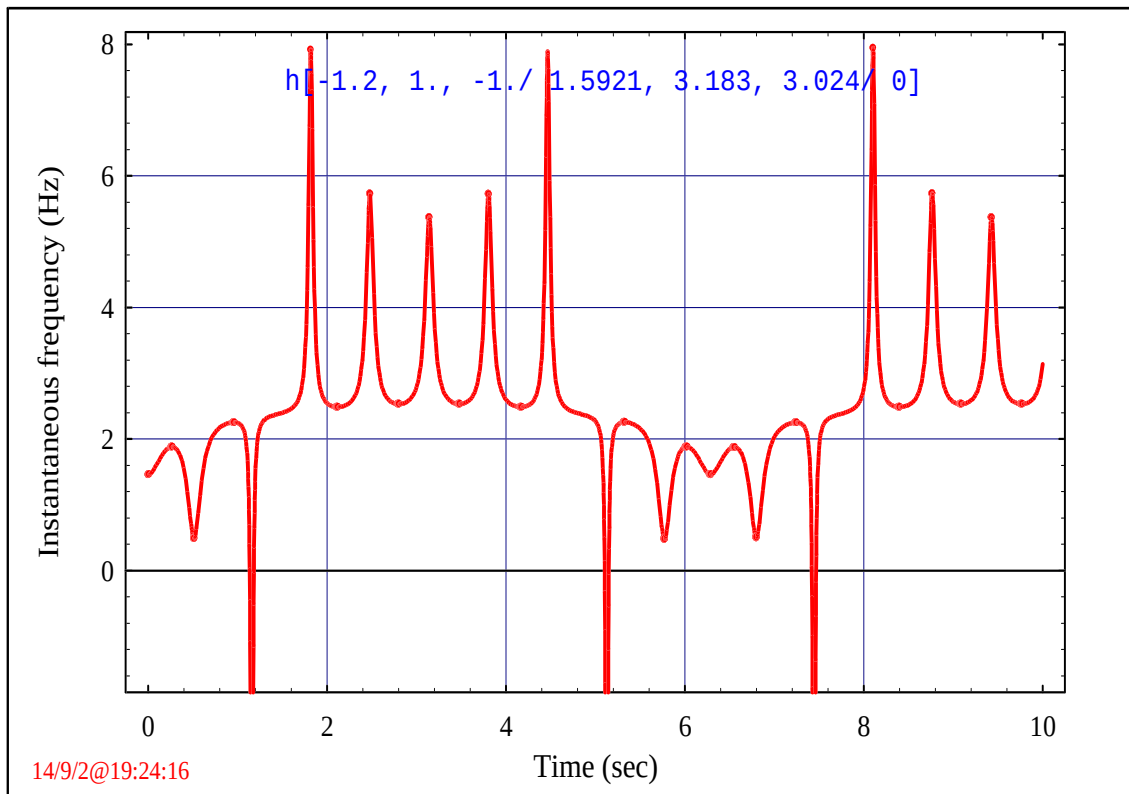
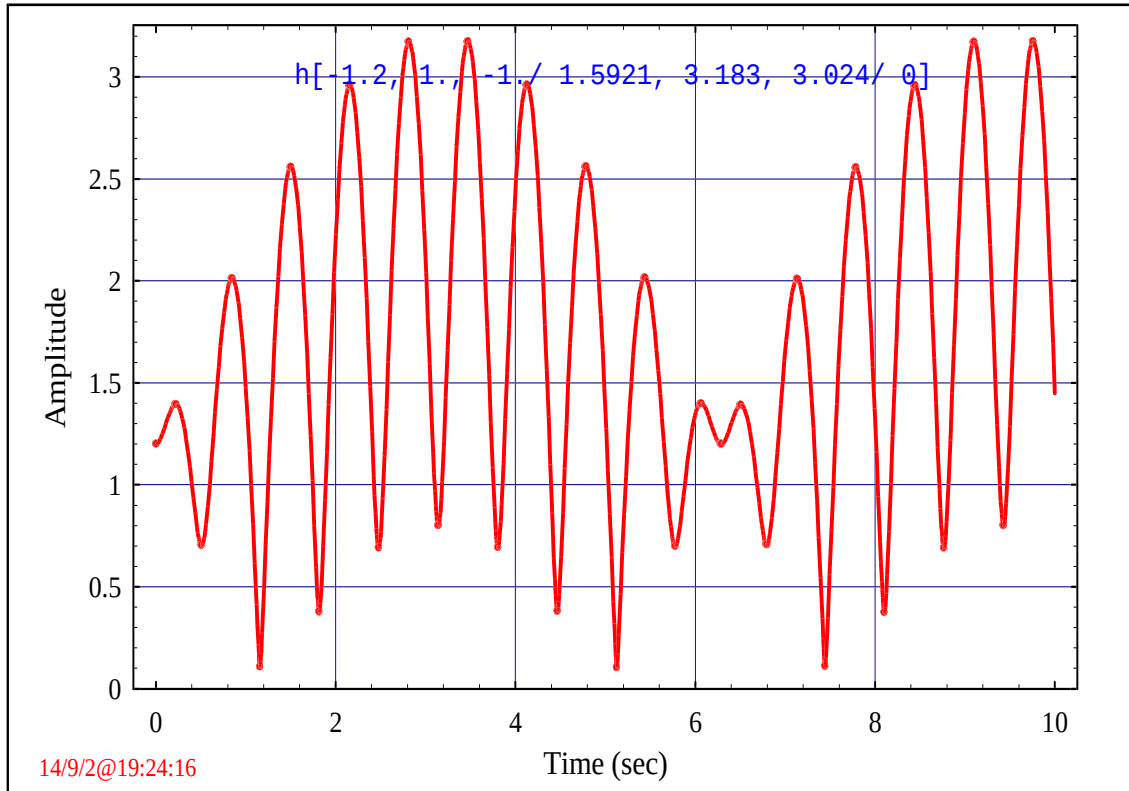


圖 4.2 此圖之三個成分波參數組為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-1.2, 1, -1); (1.592 \times 2\pi, 3.183 \times 2\pi, 3.024 \times 2\pi)]$ 其參數與上一圖之差異僅在於頻率之些微變化。與上一圖相較，曲線分佈已大為不同，另瞬間頻率產生負值。

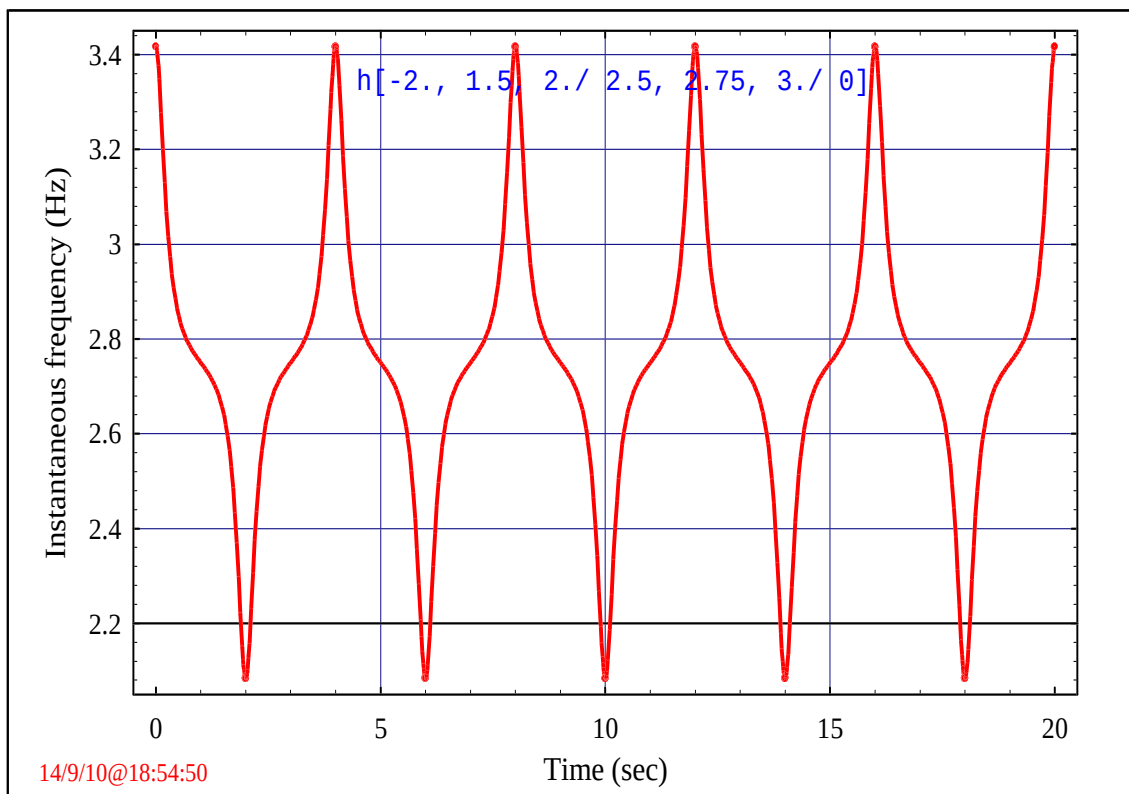
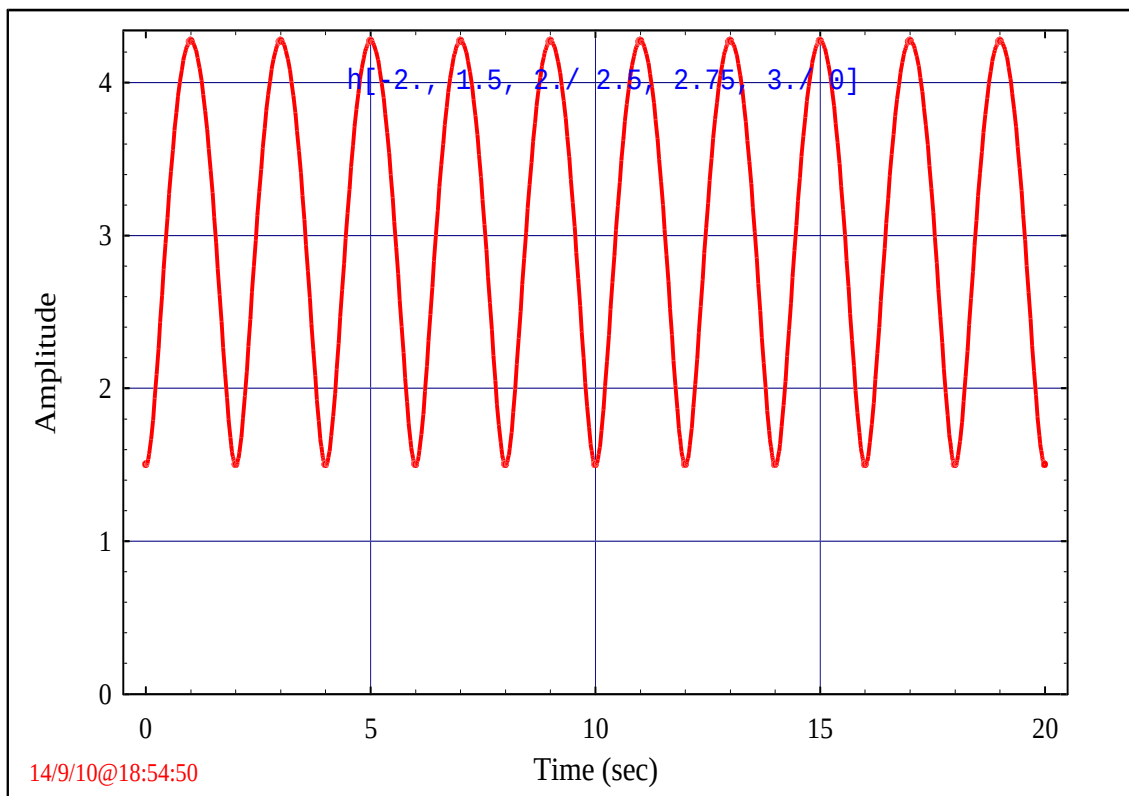


圖 4.3 此圖之三個成分波參數組為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, 1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$

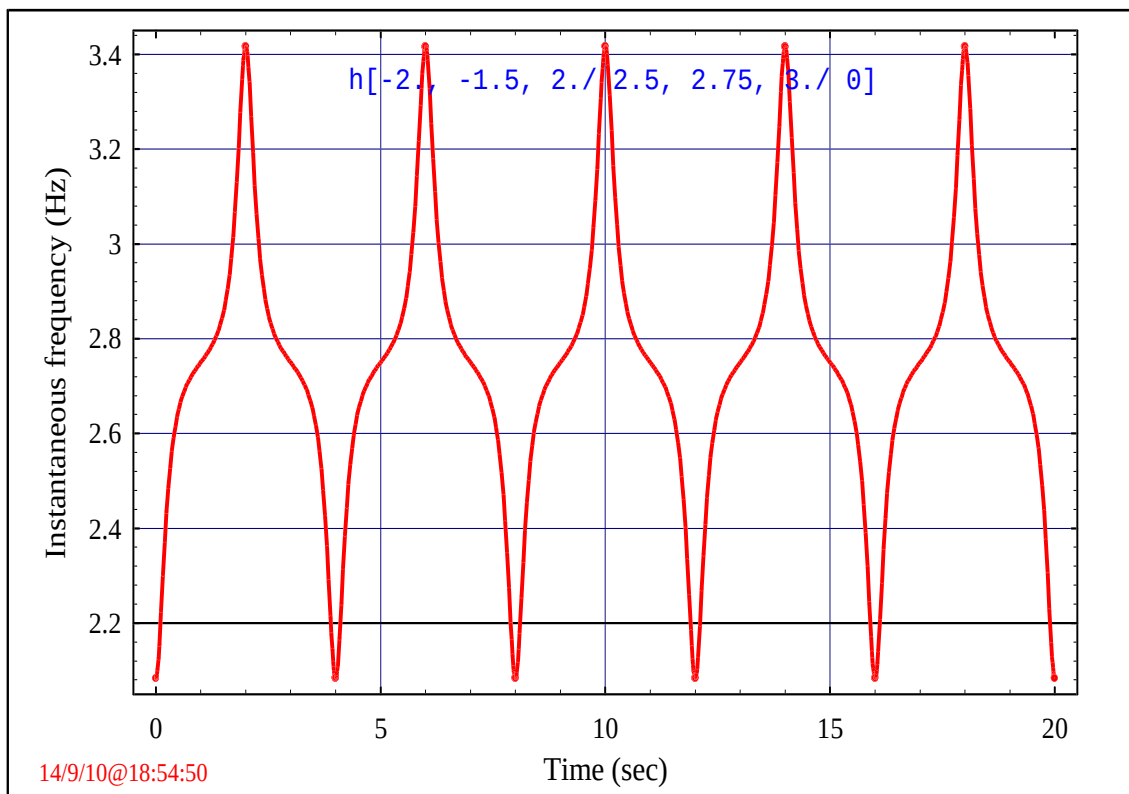
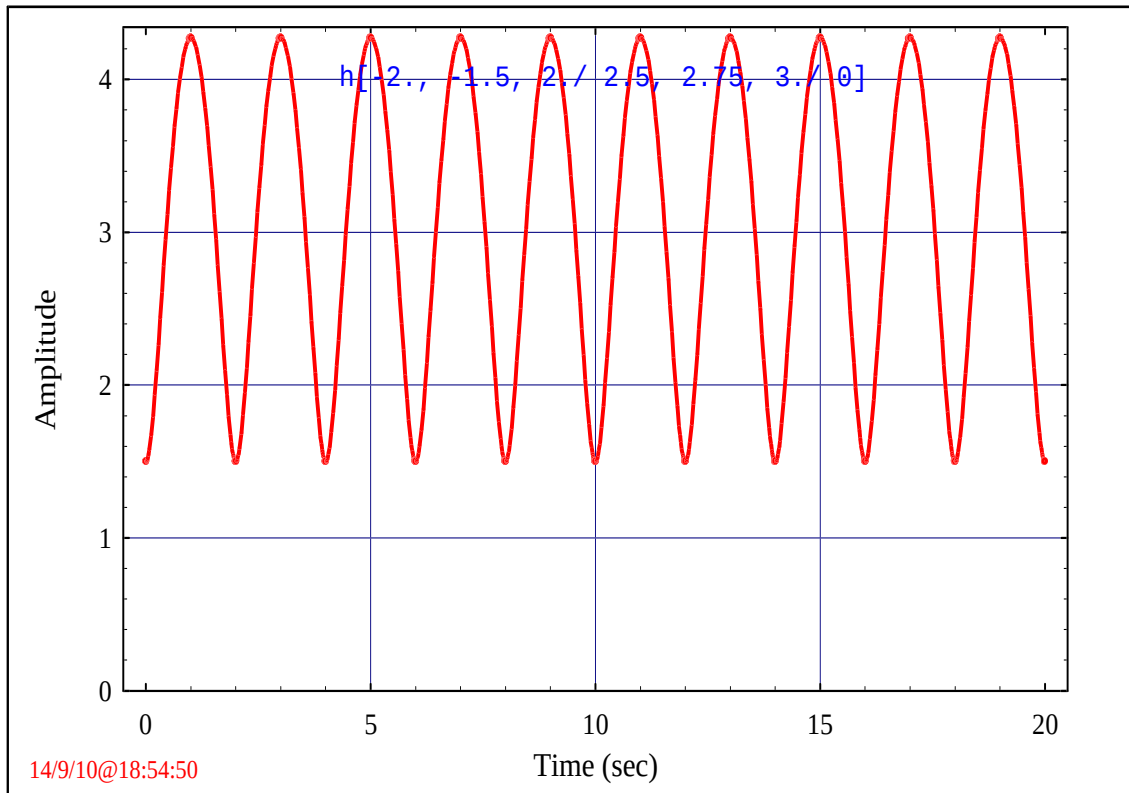


圖 4.4 此圖之調變曲線所對應之三個成分波參數為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, -1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 與上一圖相較，其參數差別僅在於其中一個成分相位。雖然振幅包絡線相同，但瞬間頻率分佈則倒置。

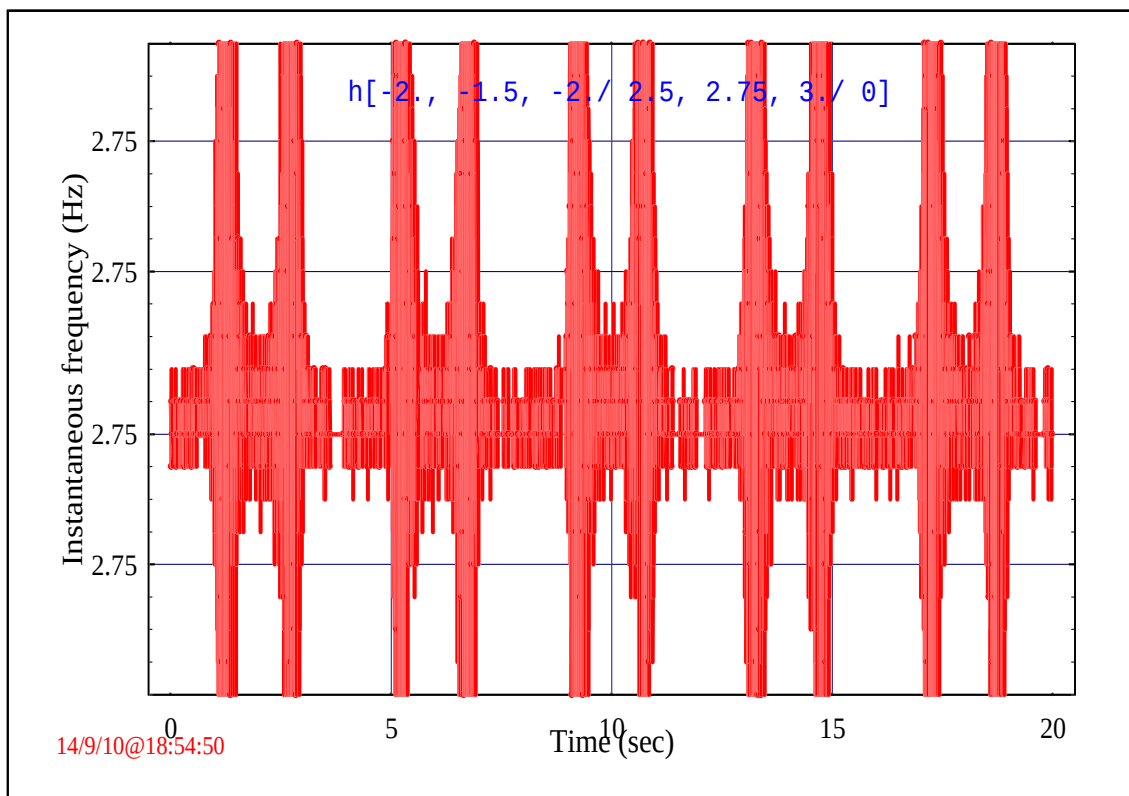
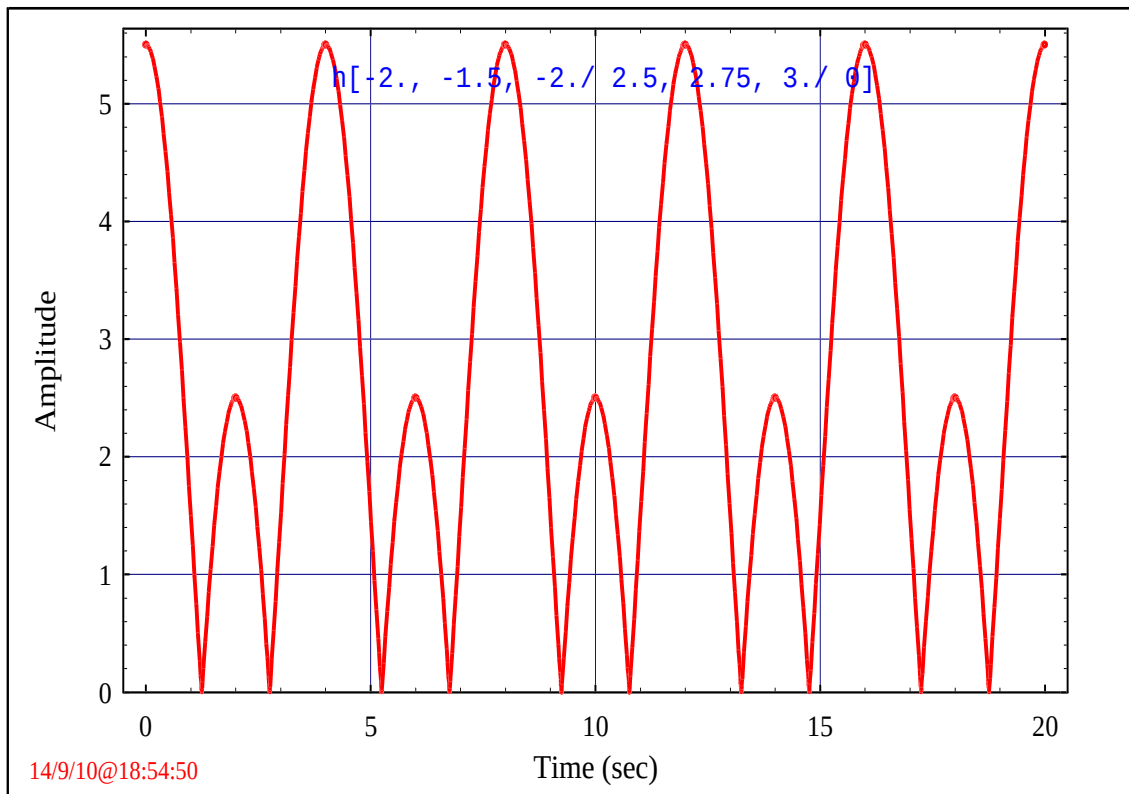


圖 4.5 此圖之三成分波參數為 $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, -1.5, -2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ 與上一個圖相較，其參數差別亦僅在於其中一個成分相位而已。此時振幅包絡線已全然不同，而瞬間頻率分佈則發生詭異情形。由此圖與上兩個圖可知相位改變對瞬間頻率所可帶來的衝擊，亦顯示其對可預期性的影響。另下子圖其垂直軸座標皆示同一數值乃是用以反應奇異點現象。

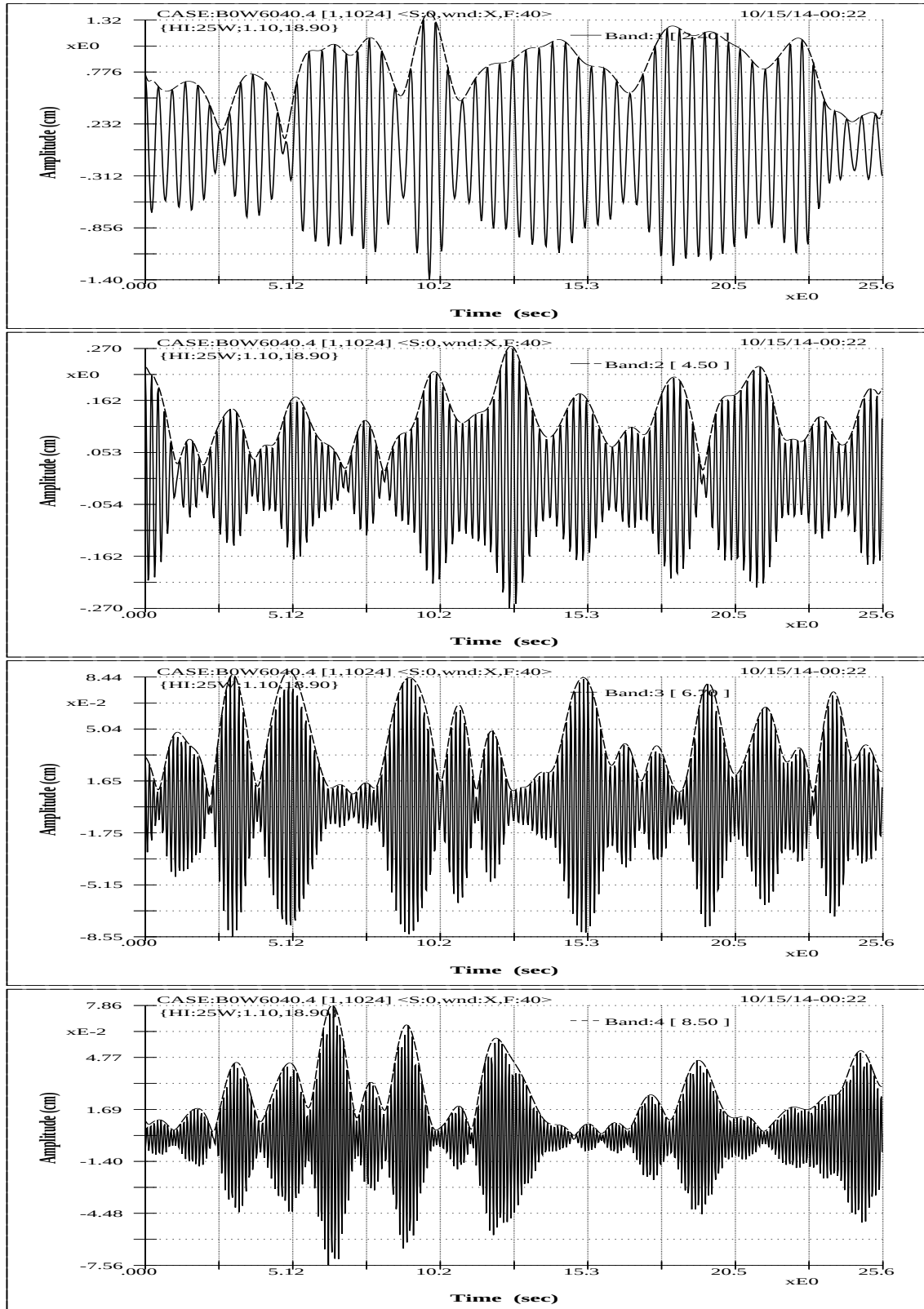


圖 4.6 循環水槽風生波浪訊號其四個頻帶之成分波波形（中心頻率分別為 2.4、4.5、6.7、8.5 Hz）暨其振幅調變（虛線所示包絡線）。

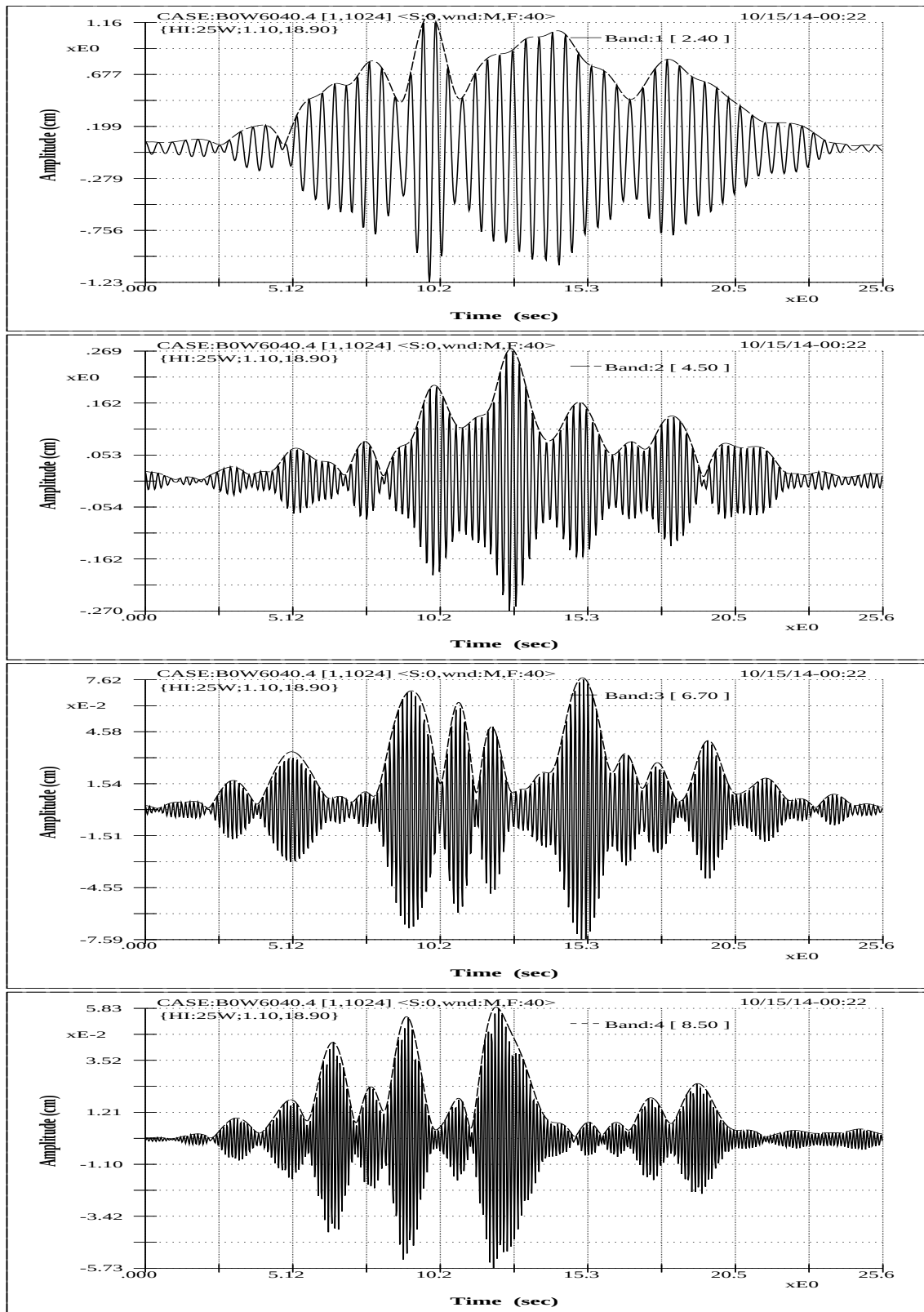


圖 4.7 上一圖波浪訊號其四個頻帶成分波加上資料罩窗後之波形暨振幅包絡線。

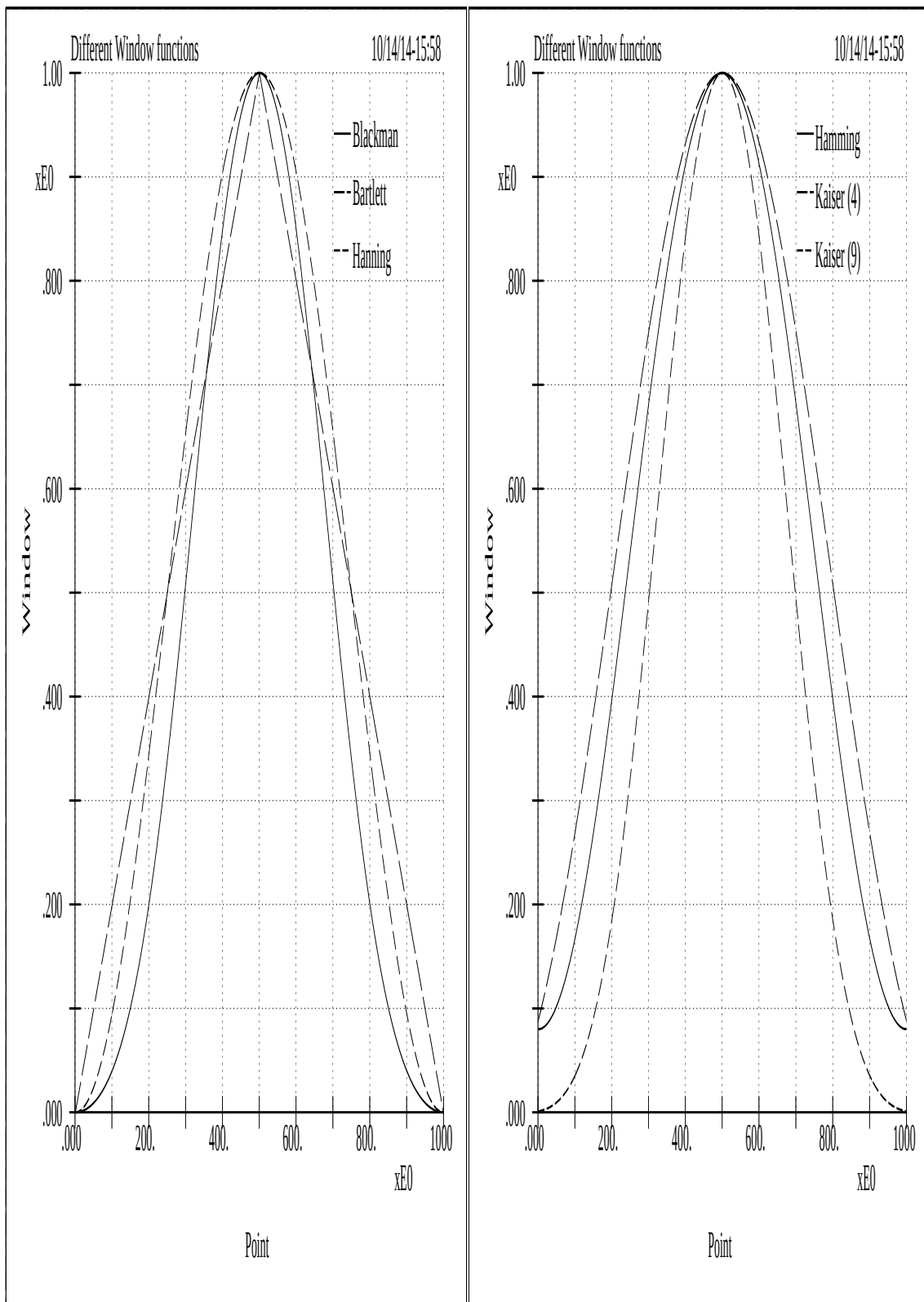


圖 4.8 數值計算所使用之各種數據罩窗。上一圖所用罩窗為Hamming window。

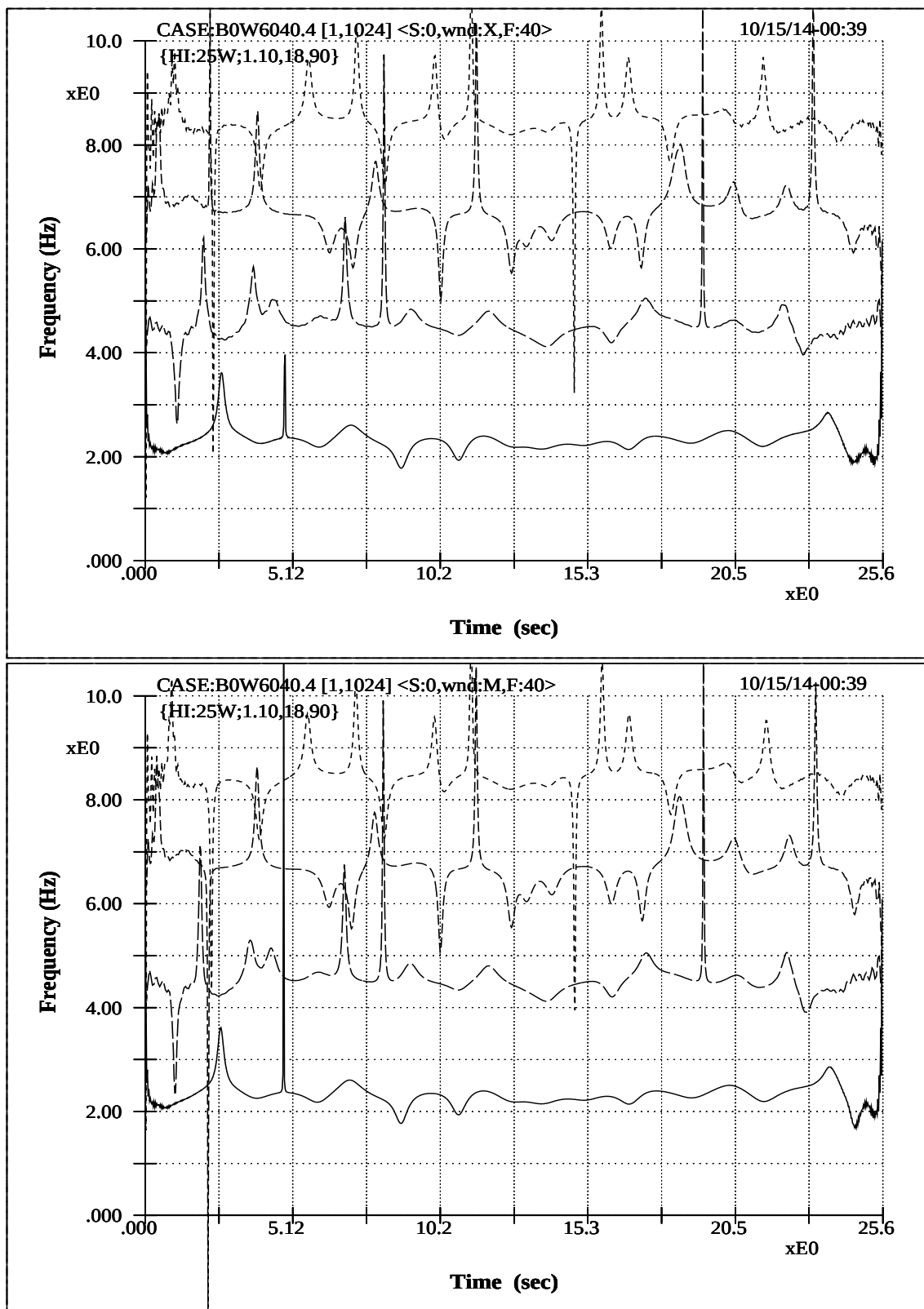


圖 4.9 此圖之上、下子圖分別示無數據罩窗（圖 4.6）及具有罩窗（圖 4.7）之四個頻帶的瞬間頻率分佈曲線。由其比較得以顯示瞬間頻率所受振幅調變的影響是在於振幅的相對變化率，而非僅由振幅大小決定。

第5章

技法優化

5.1 引言

數據處理與數學推演往往存在實際與理論未能完全配合的一些狀況，且資料集錄難免有軟硬體上的拘限。一般而言，理論偏屬理想狀況，而數值處理則朝符合理論的條件進行，也因此，數值處理常需考慮一些額外的因素，或涉有額外的步驟，比如說離散數值與連續數學就有其不同細節考量。另外，一些技法調適與優化亦或必須，這些一方面排除非真確現象、降減誤差、避免誤判，一方面提供多方位視野、助益辨析、展現另類觀點，再者，減化流程、增進效率。在這一章中我們討論數值處理的手法及一些分析優化的細節。

5.2 相位差分法

實數訊號之解析訊號 $z(t) = A(t)e^{i\phi(t)}$ 是由希伯轉換求得其虛部，而相位則由實、虛部的比值決定，因而直覺上瞬間頻率可以直接以此相位之時間差分計算之，但若以這一方式求取瞬間頻率則會產生如圖 5.1 所示之不連貫現象，此乃因為一個 z 值可對應多個 ϕ 的所涉變數。圖 5.1 之兩條曲線為正常與不正常情形之比較，另其不正確者乃故意降移至縱軸原點。為避免此一不當數值處理法，相位差分應以下面複數微分方式為之：

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}e^{i\phi(t)} + iA(t)e^{i\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.1)$$

$$= \frac{z(t)}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} + iz(t) \frac{d\phi(t)}{dt},$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{iz} \left[\frac{dz(t)}{dt} - \frac{z(t)}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \right]. \quad (5.2)$$

5.3 基礎頻帶轉換預處理

當把理論所涉連續函數的狀況應用在數值所涉離散計算時，往往會引入額外的效應，這當中最直接的問題就是解析度所涉的現象。在希伯轉換亦或解析訊號實虛部及相位求算過程中，我們並未預期有頻率偏差的現象，因為，就以此處風波水槽之訊號而言，其風生浪的主頻率約在 2.4 Hz，而資料集錄取樣頻率為 40 Hz，另再考慮理論下之水波其可能頻率是不會大於 10 Hz，也就是 Nyquist rate 不高於 20 Hz。因而此處將試驗訊號分成四個頻帶區，其中心頻率分別為 2.4、4.5、6.7、8.5 Hz，再探討各區帶上的瞬間頻率分佈。但是如果直接使用原始資料求算瞬間頻率分佈則所得結果會如圖 5.2 之上子圖所示。此子圖其個別頻帶的瞬間頻率分佈無法對應於原先的中心頻率，特別是在高頻區帶有顯著偏差，頻帶越高向下偏移越大。此一情形類似於離散波譜所涉折誤現象（aliasing），它相關於資料集錄的解析度要求，但此處的本質則稍有不同，蓋因希伯轉換與富立葉轉換不涉導數作用，但瞬間頻率則與導數息息相關。由前一節中的求算公式可知瞬間頻率相關於 $z(t)$ 與 $A(t)$ 的時間導數，而導數的精度相關於解析度的疏密，對高頻區帶而言，固定的取樣頻率其相對解析度就越低，因而無法反應局部變化，產生整體性的失真，劇變高頻現象消失，另整體曲線分佈降移。為改善這一現象，個別頻帶的訊號在求算瞬間頻率前需先作降頻之預處理，此乃將該頻帶訊號之中心頻率降到原點之零基準。設若頻帶訊號為 $z_b(t)$ ，而其中心頻率為 ω_c ，則降頻之訊號 $z_{b_0}(t)$ 為

$$z_{b_0}(t) = z_b(t)e^{+i\omega_c t}, \quad (5.3)$$

上式時領域降頻訊號實乃對原訊號加以 ω_c 週期調變，以此降頻訊號求得瞬間頻率

後再於頻率領域行恢復處理，此一恢復處理即將所有瞬間頻率都等量移升 ω_c 值。簡而言之，此處亦應用式 3.8 所代表的移位與調變雙向對應關係，即訊號所乘上的調變是其頻譜分佈之移降，而其回復則只涉簡單移升。圖 5.2 示基頻帶轉移之效應，由上下子圖比較可知：除了最低的一個頻帶分佈非常一致外，其它三個頻帶都有偏差，頻帶越高偏誤越大，特別是兩個高頻區帶，再者，其曲線變化性狀亦與常理甚是不符。

5.4 希伯波濾設計

正如前些章節中所述，希伯轉換與富立葉轉換有非常密切的關聯，也如是，在這一節中所牽涉的優化作為相當近似於離散富立葉轉換所涉觀念或技法，其乃相關於離散有限延時訊號與連續理論之理想狀況差異而來，而其目的則在提昇轉換純度，降減誤差或失真，特別是排減邊緣效應的干擾。基本上此處瞬間頻率求算可以視為兩個波濾的雙重作為，首先是頻帶濾波（band pass filtering），接著是希伯轉換之濾波（亦或說是單純的希伯轉換）。

表 3.1 所示之希伯轉換求算程式係在頻率領域處理，而式 2.15 所示方式則是在時領域的旋移乘積，而旋移乘積基本上等同濾窗作為，即在訊號波譜上施予一個波濾，也就是說，希伯轉換運作其實就是一個形式非常簡單的濾波，它不僅可以從頻率領域著手，亦可由時間領域處理。再者，無論表 3.1 或式 2.15 都是理想狀況下的處理流程，然而由於資料集錄及分析所涉的有限延時區段與有限頻寬，實際數值處理必須考慮一些改善作為。此外我們可以把前述的兩個波濾的雙重作為整合為一個波濾，而由在此一波濾其兩個領域的相互對應特性，吾人得以對希伯轉換的本質與技法優化有更清晰的認知。

由希伯轉換之旋移乘積式可知濾波所涉的脈衝響應權重係數是由 $\frac{1}{T}$ 而來，而此處的希伯波濾則是應用由 Parks - McClellan 提出之最小化最大誤差疊代演算法（Mini-max filter design）所得 [16]，這一疊代演算法是為設計最佳化有限脈衝響應濾波器（finite impulse response filter）的標準手法，其主要精神是在一定數目的權重係數下把通帶（pass band）的頻率響應誤差最小化，亦即將頻率

響應的等值起伏振盪（equiripple）降至最低。對希伯波濾而言，所提供的參數有三，即時領域上旋移乘積權重係數的數目（length of FIR）、起始代表頻率（start frequency）、終止代表頻率（end frequency）。另外，理想的濾窗設計需考量 Nyquist rate，而濾窗分佈一般是以一半 Nyquist rate 為分佈中心。在 FIR 設計上，相關於濾波的權重係數其重要考量因子是係數的多寡，以及數目量是偶數亦或奇數。在偶數選擇下，頻率濾窗是非對稱性分佈，其在低頻端的濾波作用基本上無顯著效應；在奇數選擇下，濾窗則是對稱性分佈，另外它所涉的最小化最大誤差數值求算流程穩定性佳、收斂性好而效率高。基於此一因素，濾窗一般都取對稱分佈。至於係數多寡則主要影響濾窗曲線的波動性，就一定的起始與終止代表頻率而言，係數量越少，波動越大，係數量越多，則主頻帶濾窗就趨於定值，唯係數分佈之長度，亦需考慮資料的抓取頻率是否匹配。圖 5.3 及 5.4 示係數量為四個不同偶數時的希伯波濾，其成對子圖之上子圖表時領域的旋移乘積係數分佈，下子圖表頻率領域的濾窗分佈。圖 5.5 及 5.6 則示係數量為四個不同奇數時的希伯波濾，其成對子圖亦是旋移乘積係數與頻率濾窗。由這些圖我們可以進一步體會解析訊號之數值求算方式，以及希伯濾窗參數選擇的相對反應。另一方面，就一定的係數長度而言，若把起始與終止頻帶加寬，則濾窗的波動性也加大，再者，此時可供選擇的係數長度範圍會縮小，而數值收斂所需最小長度變大。此外，當係數分佈長度變大時，訊號之高頻區帶在沒有足夠抓取頻率下將造成不收斂之現象，此乃相關於頻譜內差失敗的狀況（Remez error due to spectral interpolation failure），如圖 5.7 所示，此圖之上、下子圖分別使用 25 個及 45 個旋移乘積係數，就使用 25 個係數而論，訊號之四個頻率區帶的瞬間頻率皆可求得，但相應於 45 個係數的瞬間頻率曲線，則只能求算兩個低頻區帶。

圖 5.8 示濾窗起始頻率不同選擇下的振幅調變比較，另其兩子圖使用係數長度相同，就此一低頻區帶而言，起始頻率選擇與原點有些距離將較佳。

圖 5.9 示兩條不同性狀的振幅調變曲線，其實線的高頻振盪乃因邊緣效應之殘留，而虛線振幅則是對應於不當的起始與終止頻率，適當的希伯濾窗參數將可排除這些現象。

5.5 結語

這一章中主要探討的是數值處理的正確方式與優化作為，其目的在降減誤差、避免誤判，助益辨析。另希伯波濾優化基本上仍然需視實際訊號集錄及分析細節而定，其參數選擇需具彈性。❖

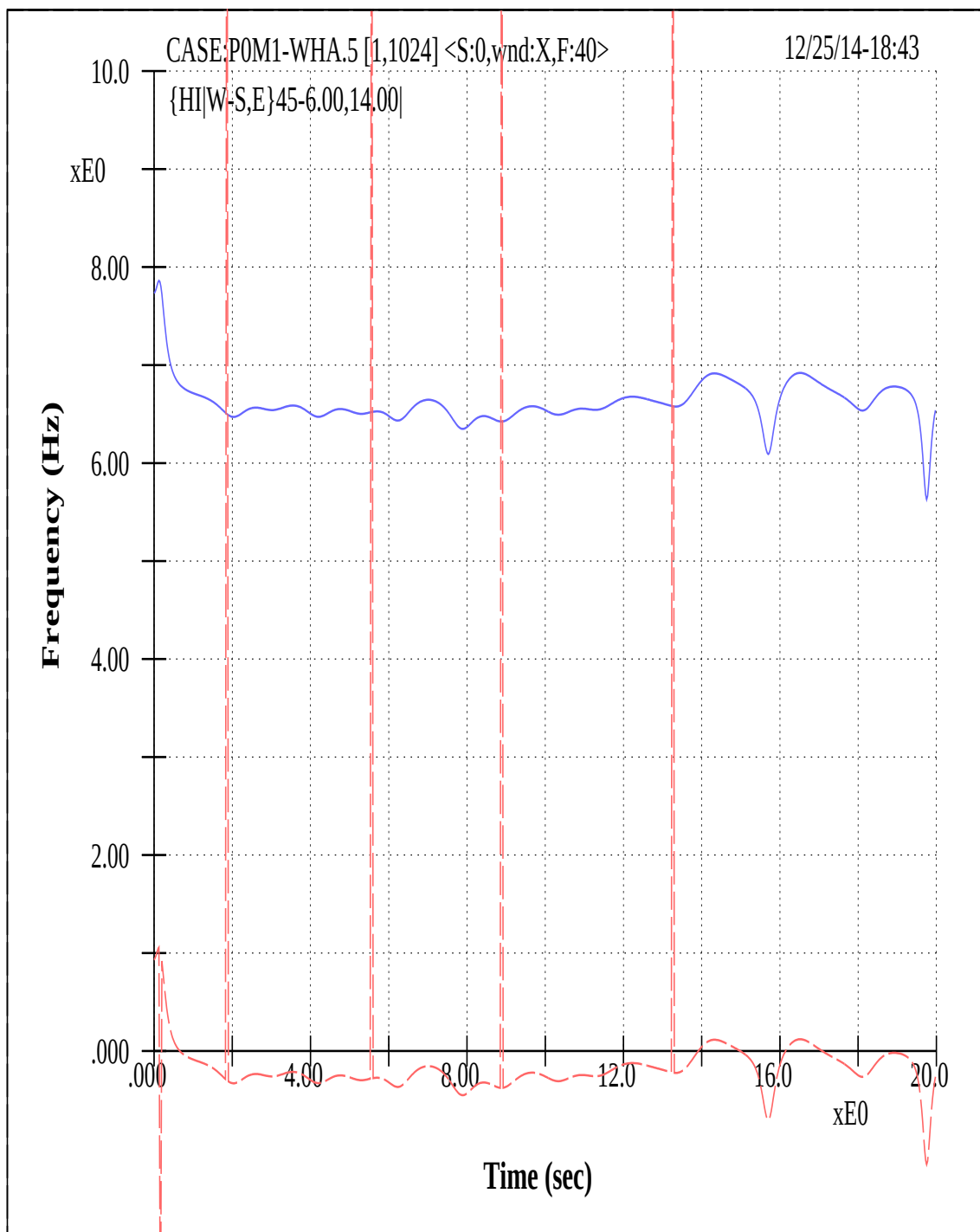


圖 5.1 解析訊號之瞬間頻率不宜直接以其實、虛部數值求算，此方式之求算易造成圖中虛線分佈之狀況，增加人為判定困擾。此虛線是故意將中心頻率降移至原點，其正確求算者是為實線分佈。

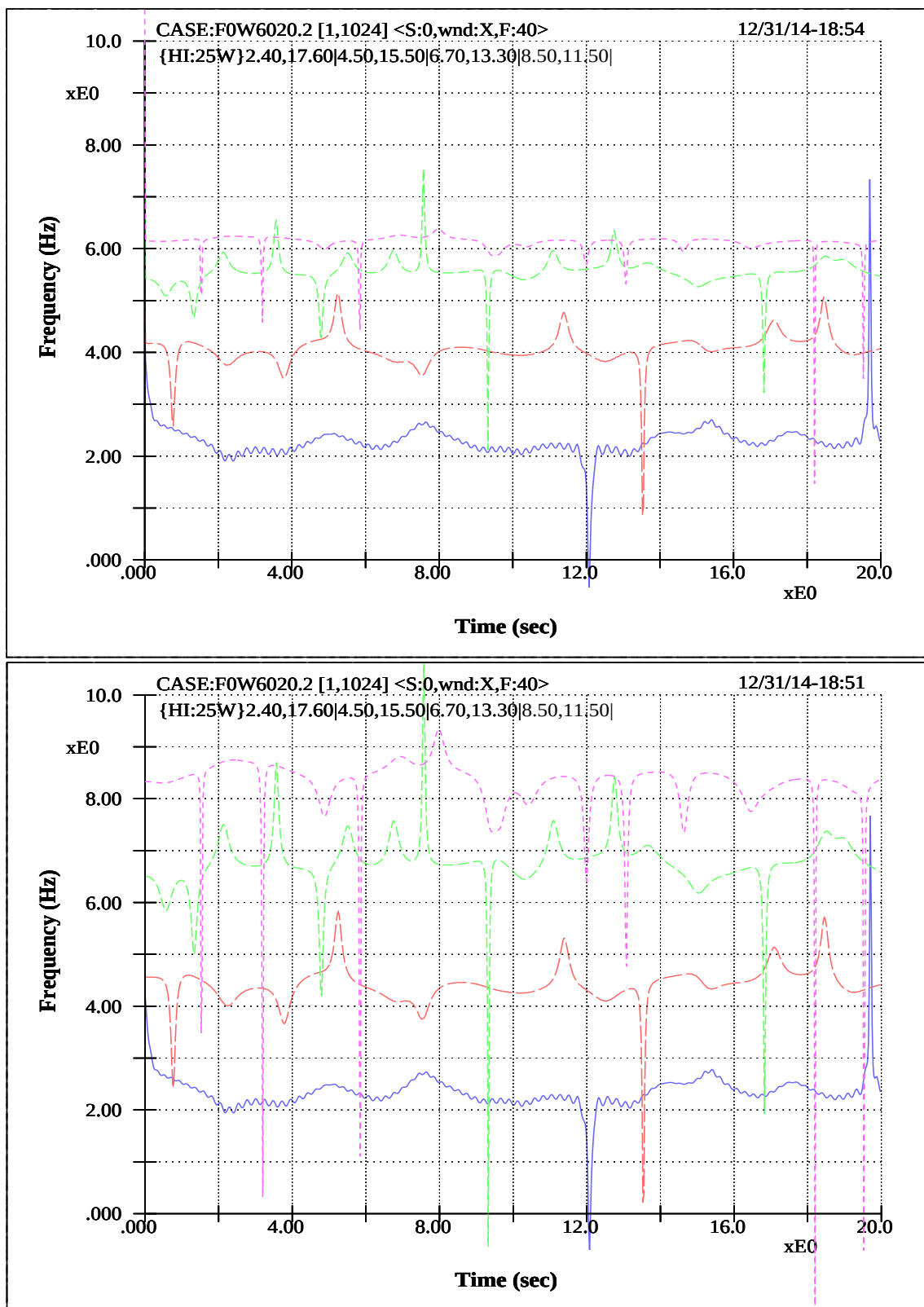


圖 5.2 此圖顯示基頻轉換之作用。其上、下子圖係分別為無、有基頻轉換之瞬間頻率分佈。對高頻區帶而言，資料集錄頻率相對不足，產生折誤現象，整體分佈偏降與偏小，區帶越高誤差越大。

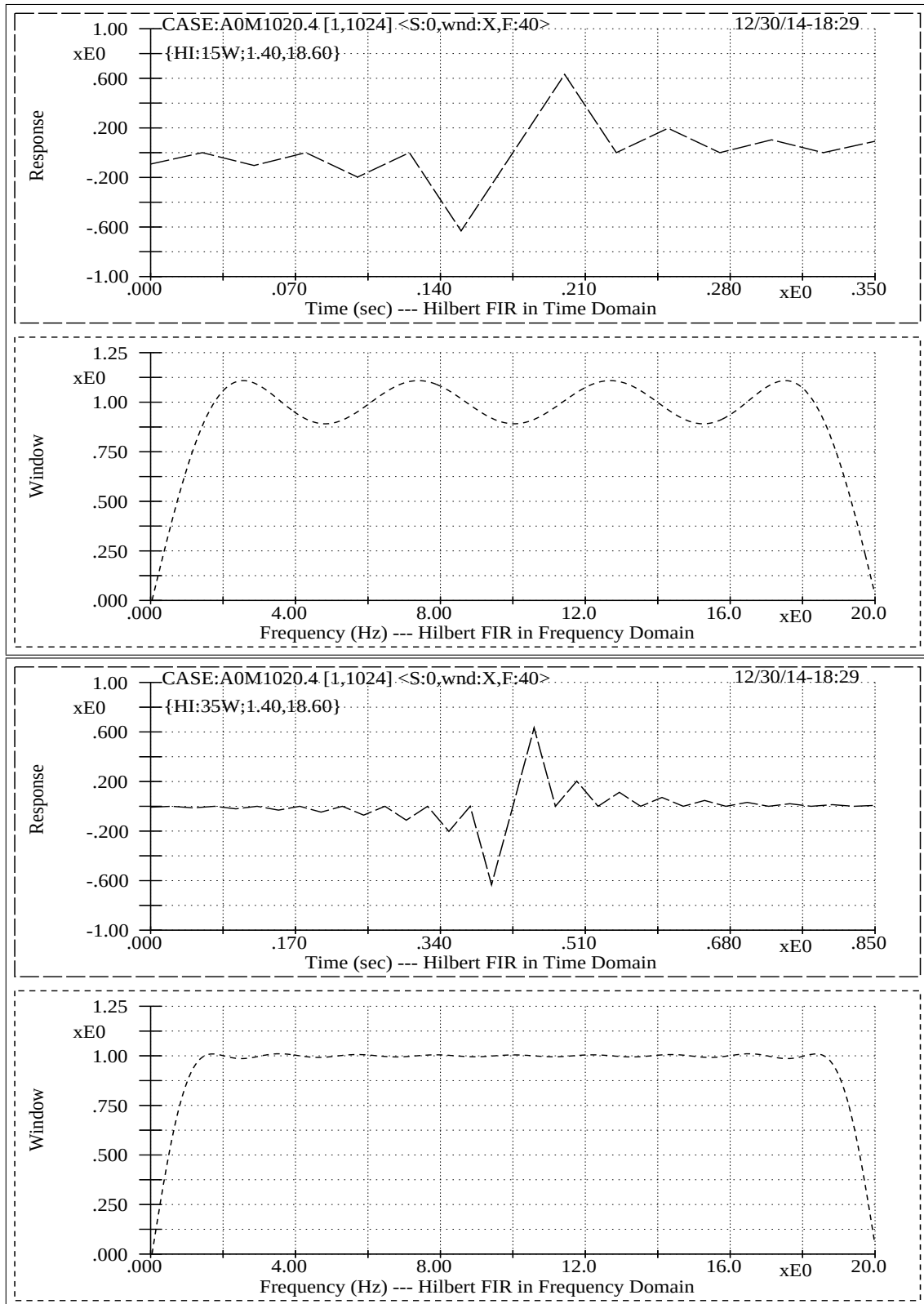


圖 5.3 相關於較少奇數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，其對應對在時間領域是為旋移乘積係數，在頻率領域是為濾窗。此圖使用係數量為 15 及 25。

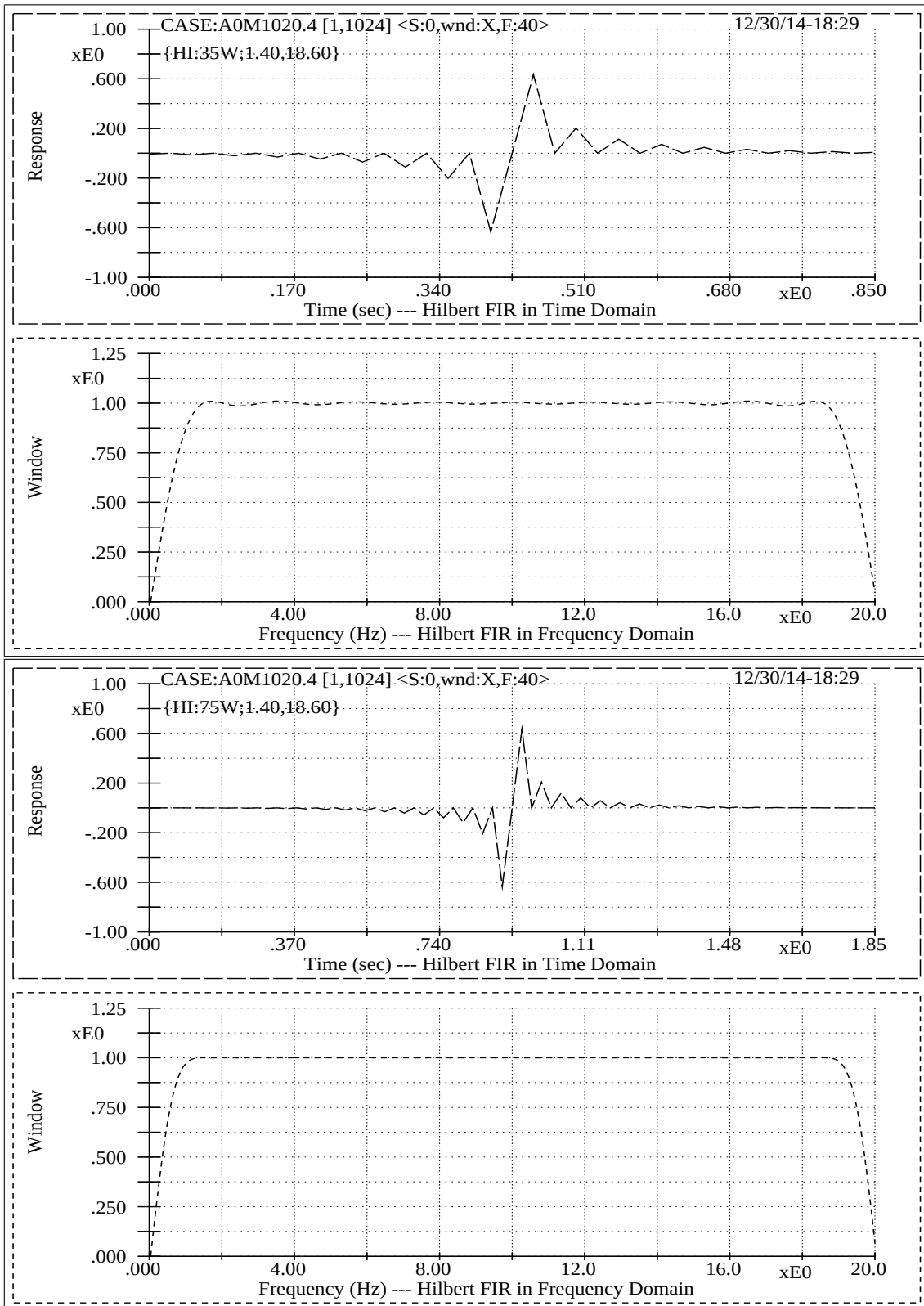


圖 5.4 相關於較多奇數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，此圖使用係數量為 35 及 75。

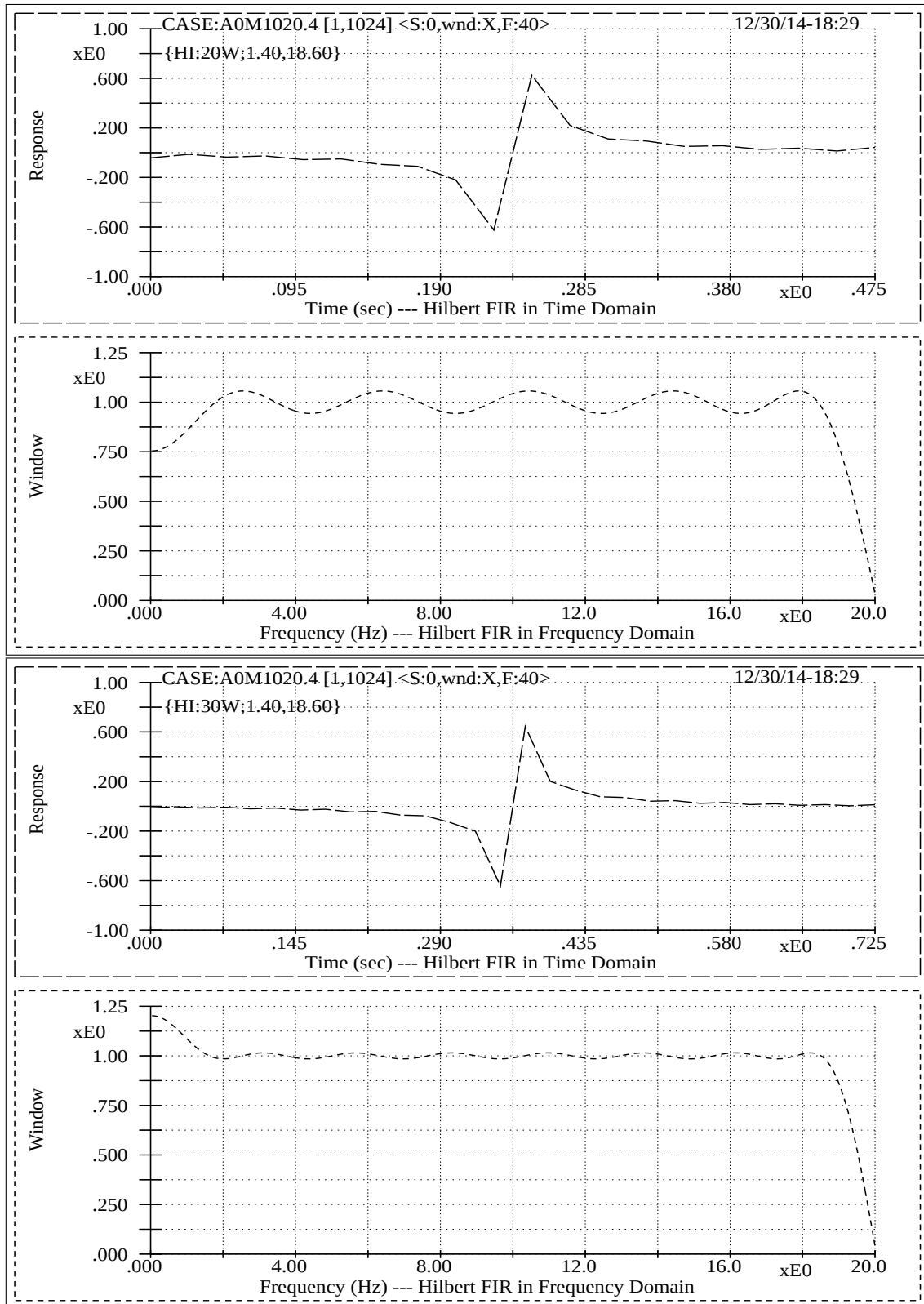


圖 5.5 相關於較少偶數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，其對應對在時間領域是為旋移乘積係數，在頻率領域是為濾窗。此圖使用係數量為 20 及 30。

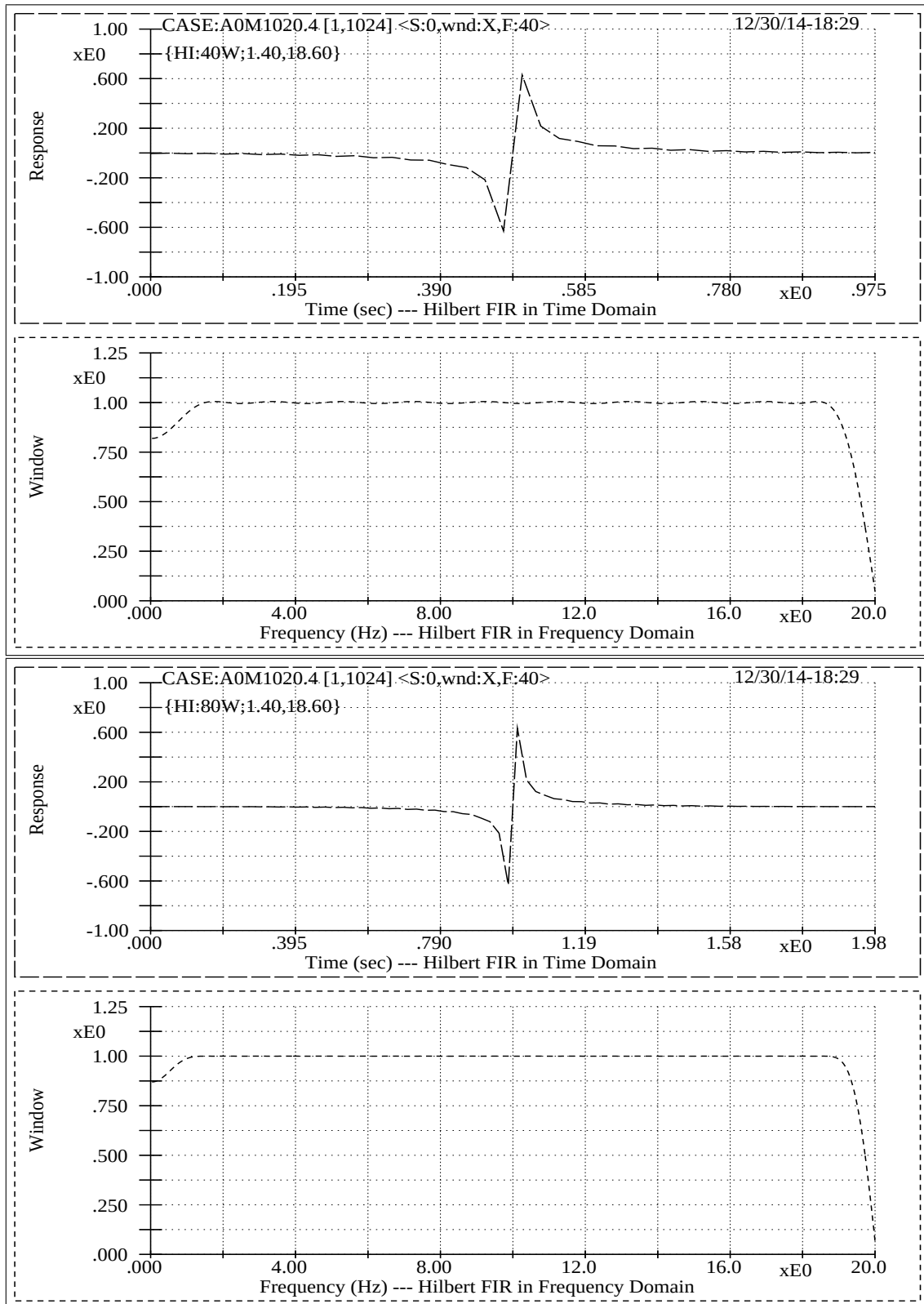


圖 5.6 相關於較多偶數量旋移乘積係數之希伯波濾其時與頻分佈對照圖，此圖使用係數量為 40 及 80。

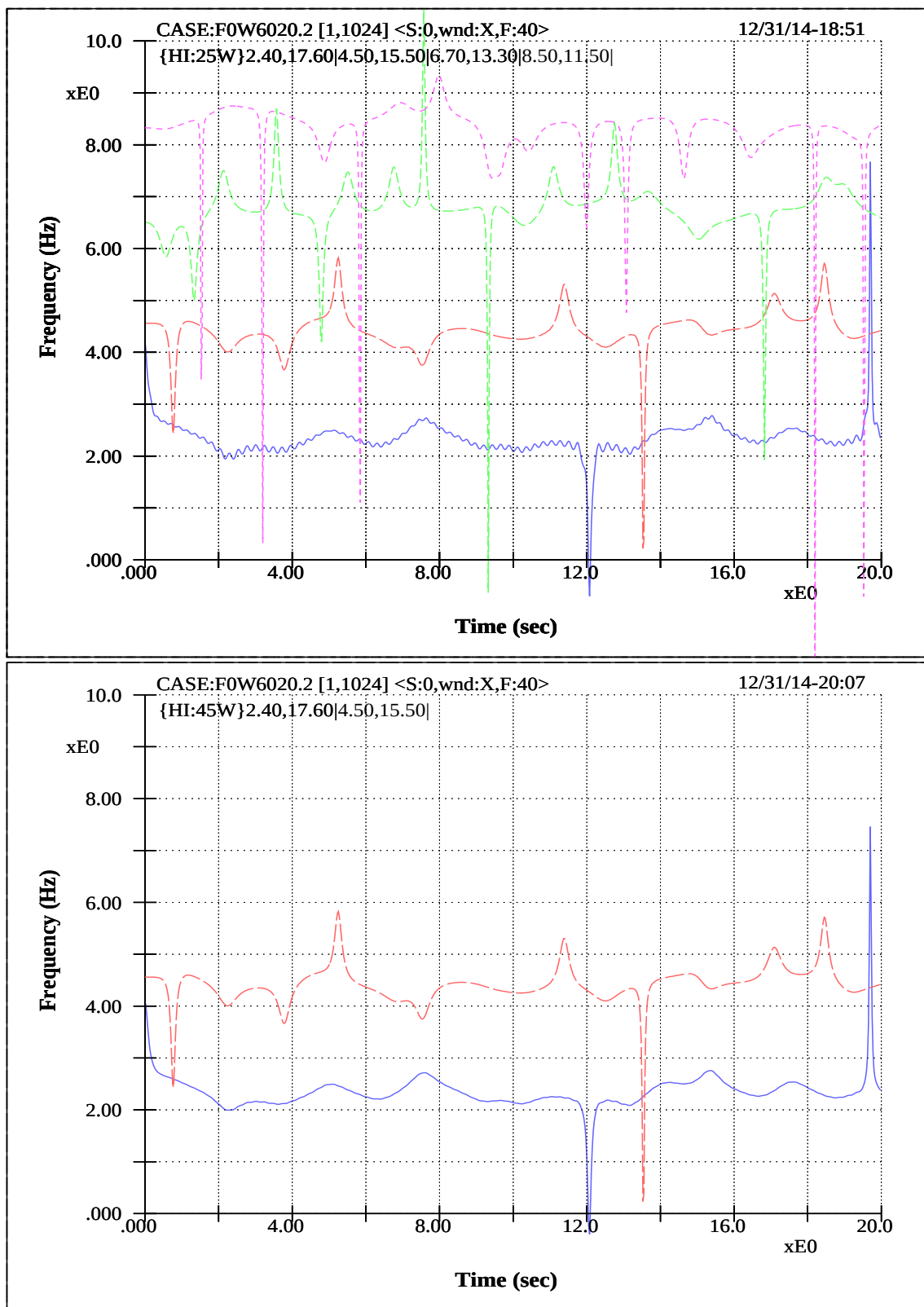


圖 5.7 使用不同旋轉乘積係數量之瞬間頻率分佈比較圖。上子圖係使用 25 個係數，下子圖則用 45 個係數。在下子圖中由於 Remez error 已無法求算最高的兩個頻帶，而上子圖的最低頻帶則有些微鋸齒波動。

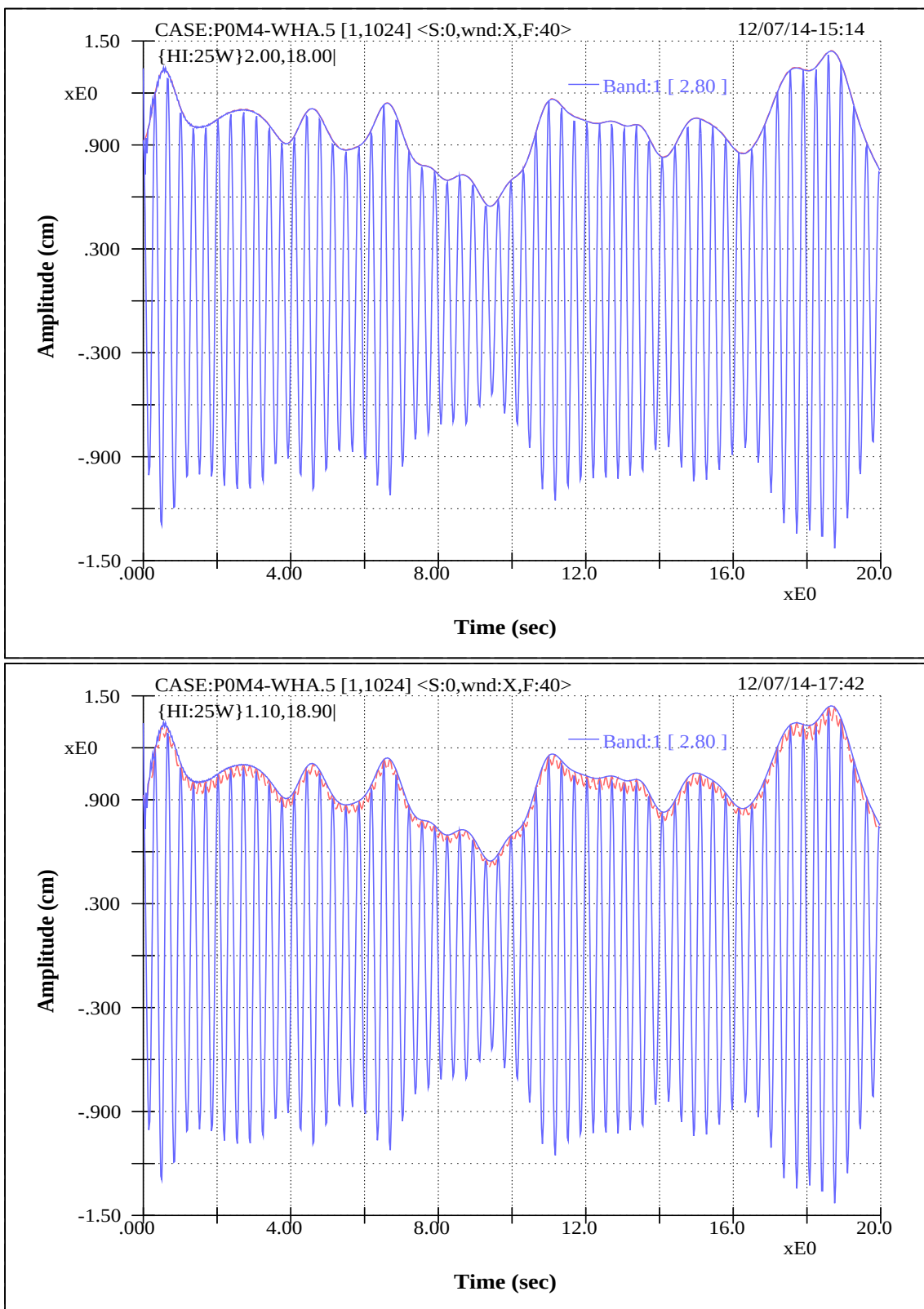


圖 5.8 此圖示希伯瀉窗其起始頻率之選擇對訊號波動振幅（包絡線）之影響。上下子圖所用權重係數量皆為 25 個，起始頻率在上子圖取 2.20 Hz，下子圖取 1.10 Hz。此圖顯示起始頻率與原點要有適當距離。

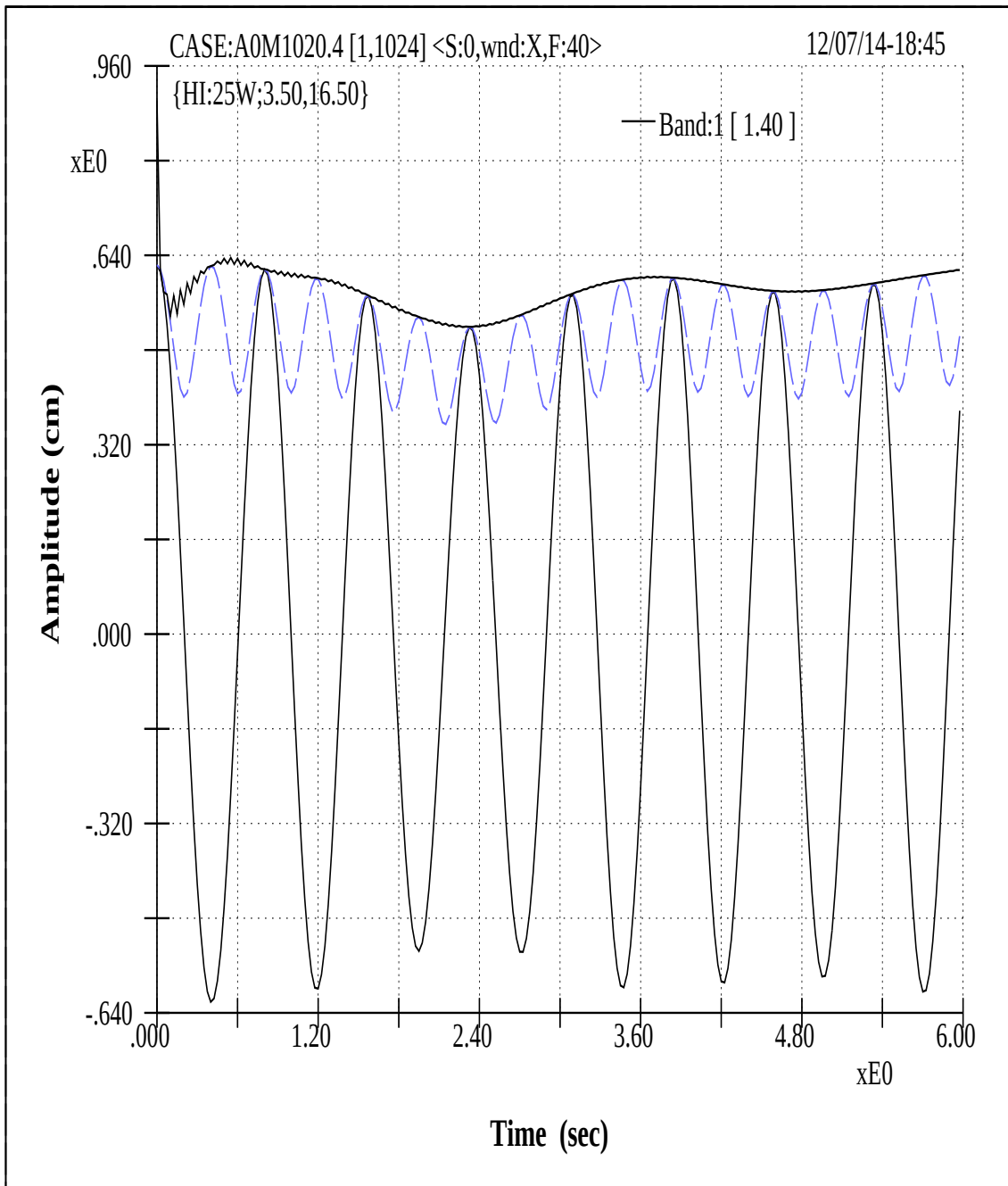


圖 5.9 此圖示兩個不同性狀的振幅（包絡線）波動。所用權重係數量為 25 個。其實線者乃相關於邊緣效應，而虛線者則相關於取用不適當的起始頻率。基本上，希伯波濾參數之選擇牽涉綜合性考量，其優化取捨需有彈性。

第6章

水波應用

6.1 引言

頻率與振幅之調變是解析訊號法的自然應用，亦且是此處水波探討的軸心課題。基本上，提到調變就會在乎「瞬間」及「局部」的變化。可是，由前頭的基礎理論探討亦或大量數據處理分析的現象來看，所必須面對的主要問題是在於「瞬間」及「局部」特徵的可預期性。這一問題的主要癥結可以用一個極其簡單的觀念解說：以頻率的觀點出發，那任何現象都難以「瞬間」及「局部」，過於強調「瞬間」及「局部」，不僅數學上會有奇異特徵，在物理上甚至造成很多矛盾，亦或難加解說。基於這些經驗認知，此處之水波應用案例偏向於巨觀視野而具統計觀點的定性探討。這些水波課題有：束波（bound waves）存在性之疑問；風波及機械波之波場與流場其整體調變特性物理；不同頻率成分波其能量成長及衰減生命期檢定。

6.2 試驗

此處所分析之資料取自於風浪流循環水槽之試驗，圖 6.1 為水槽設備及相關佈置圖。此一水槽為橢圓形狀，具循環水流，其上設有鼓風設施，亦可裝放移動式機械造波機。水槽寬為 31 cm，高為 45 cm，直線觀測斷面長度則為 5 m，而可變速鼓風機則位於觀測斷面的相對側，另其前方置有水平導風板，而垂直導流

板則設於半圓形水槽斷面，這些導流板用於純化風場及水流場，並降減二次流現象。至於機械造波機則為一具可調速馬達所帶動的契型衝擊式造波機，並可移動裝設。另所有試驗之水深皆為 24 cm，水位或波高量測是以電容式鉬金屬（tantalum）線為之，而水場流速則以雷射都卜勒儀量測，其量測點分別為靜水位以下 2、3、4、5、9 cm。此都卜勒雷射水流儀採一光色、四光速、二維雙束反向散射機制。再者整個試驗之數據集錄及其即時分析係以作者自行撰寫開發之程式為之，主要程式語言使用 ASYST 語言，並融合報表（spreadsheet）軟體及程式、Postscript 製圖語言等。所有過程均不假人手，初步資料產出及圖表生成均具自動化、即時化、客制專定化，嚴格管控品質與精度。

6.3 束波存在性問題

在這一節中我們以試驗水波資料探討水波是否存在有束波現象。束波（或捆綁波 bound waves）是為何物，一般而言，並無公認的定義，不同領域有其不同的觀點與認知。對水波而言，有些人認為存在有一些一起共同行動，而波速幾乎一致的成分波，而將其視為束波。但對我們研究水波物理的人而言，水波的延散性是波浪現象的礎石，這一延散性可以是線性行為亦可以是非線性現象引致，甚至於適用於水波不穩定性亦或側頻衍傳性（side band instability）[2, 7, 8]。然而一些人認為存在有相同相位速度的成分水波，故其合成水波包得以維持一定形狀傳播 [11, 12, 19]。就作者之認知，則尚未見這些研究有提供可靠的理論基礎亦或清晰的試驗或現場數據，整體而言可謂論點薄弱。此節中我們應用解析訊號分析法與希伯轉換研究頻率與振幅之調變情形，從而彰顯水波延散之本質，亦或及於非線性不穩定性現象之存在，同時驗證束波於水波之不存在性。

此處以最簡單的水波狀況，即以水槽之史脫克斯波其成分波傳播上的演化性狀加以解說。這裡的史脫克斯波有不同尖銳度、不同線性或非線性尺度，但不論其大小，我們都將見到其時間上與傳播上的延途調變，即其成分波相位速度差異及整體性狀的變動跡象都是相當明顯。此些不同史脫克斯波包含四種，其個別基礎協調頻率分別為 1.4、2.1、2.2、3.0 Hz，其能譜圖如圖 6.2 所示，另其基礎協調頻

率是由帶狀濾波所得，而其尖銳度則由其各別的振幅調頻曲線求取，另其基礎協調頻率的尖銳度則個別為 0.06、0.20、0.21、3.00。圖 6.3 以迄圖 6.6 表這些基載頻率及其協調頻率成分波的瞬間頻率變動曲線，包含其在歷時上的變化及在不同位置上（上、中、下游）的演化，由這些圖可見所有的成分波都具有變動性，即使是對尖銳度甚小的史脫克斯波亦然如此，此外越往下游其演化差異性也越明顯。圖 6.8、6.9 示基載協調頻率為 1.4 Hz 而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其基載成分及第二協調頻率成分之波形在時間與空間上的演化性狀。圖 6.10、6.11 則示另外兩個較高協調頻率者。對此一甚小史脫克斯波尖銳度而言，其基載頻率於時與空間的演化雖可說很小，然其第二協調頻率則已顯現出加強化，另亦可見一些調變的規律現象，亦或重覆顯現、規律變動之情形。

至於圖 6.12、6.13、6.14 所示四個協調頻率成分波的波形在時間與空間的演化性狀則非常明顯，這些圖係相關於基載協調頻率為 2.1 Hz 而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波，另一個有趣的現象是，對此一史脫克斯波而言，其高頻端協調成分波在時間與空間的演化規律性都有增強的趨勢，非僅其在中游位置點上高頻的的時間演化大致具有規律間格，而其下游斷面的調變現象規則性明顯比上、中游者來得規律，亦或說是性狀由複雜變的更為單純，這一現象或可說明水波不穩定性的離散聚合行為，亦且其紊亂降減而波場純化的能量行為。

綜上所述，此處水波資料可說完全不見成分波束捆在一起的行為，而足於對束波存在性提供相當程度的否定性。

6.4 機械波與風生波其波流場調變與側頻不穩性

在這一節中我們比較在同步量測下的波場與水流場其頻率暨振幅的調變性狀，此外也探討機械波與風生波所涉不同物理，亦或不同動力機制下的波流場調變對比關係。圖 6.15、6.16 示兩個不同史脫克斯波其表面波及水流場波動於其各個協調頻帶上的頻率調變曲線。圖 6.15 之基礎協調頻率為 1.6 Hz，而尖銳度為 0.06；圖 6.16 係為基礎協調頻率為 2.1 Hz，而尖銳度為 0.20。另相應之各頻帶的波場及水流場之振幅調變則示於圖 6.17 及圖 6.18。一個非常有趣的現象是：對此機械波

而言，其流場調變情況均較波場來得複雜，且有較高的不規則性，特別是較高頻帶區更相對明顯。此一現象之肇因應可歸之於系統之動力來源是在於水流場，也就是說水位或波高只是水流場的反應，此時水體的能量行為必然要比水面波場所代表的能量現象來得錯綜複雜，也就是說水面波動狀況僅只是水體機制綜合狀況下的表徵。

相對於前述史脫克斯機械波，圖 6.19、6.20 則示風生波狀況下（風速為 6.0 m sec^{-1} ）水測點分別的在水面下 2 cm 與 3 cm 時其波流場之各協調頻帶的頻率調變。另上子圖示波場，下子圖示其水流場。與前頭機械波者相比，我們可以查覺此時之調變性狀剛好相反，即水流場的調變此時已較波場者來的較不激烈。此時我們可以提供的簡單解說是說，此時系統之動力來源是為空氣之邊界層，水面波動乃此能量作用下的直接表現，而空氣之邊界層所含之不同尺度，相較於此時水體的不同尺度必然來得複雜及較高能量之尺度互作用。再者，水流場能量來源是在上面的風場，基本上能量的增長必然須由上而下遞降而來，也因為如此，較下深度所受驅動尺度與紊亂尺度均必降減，特別是高頻帶區。此外，接近水面之水體其亂流機制是極佳的消能機制，它對小尺度的影響特別巨大。

圖 6.21 及 6.22 示風生波狀況下兩個水流場不同量測位置下的波場與流場之振幅調變，圖 6.21 係水面下 2 cm 者，而圖 6.22 則為水面下 9 cm 者。就波場與流場的對應程度而言，其基礎頻帶吻合性在深水處並不如淺水處，再者高頻帶的波場與流場對應於深水處也較不明顯或更為紊亂，此乃因小尺度高頻成分的驅動力有限，而難以滲入深水處，此外在深水區底床及側邊影響相對較大，因而使整體的波流對應程度降減。

6.5 波浪其成長與衰減佔期比

在風的驅使下，波浪的興與衰是非常複雜的過程，它牽涉到風場與流場的互作用、多尺度之偶合與互制、線性與非線性行為、物理性及化學性變化（如鹽、溫）、等。另一方面要對水波進行追跡式的記錄也是不可能的任務，一者是水波的延散本質，一者是風場下沒有單一的弦性波，即其頻譜不存在一個狄拉克 δ 分

佈函佈。而且即使初始是爲一單純絃性波，只要一有成長或衰減，則其頻譜成分必然是將趨於鐘形分佈，此一情形也將產生波與波的互作用，不僅能量由一尺度傳遞到另一尺度，也引致風場與水體在自體間與異體間的能量物理更迭，甚而形成非線性暨重覆往返的水波不穩定現象亦或側頻不穩行爲（如前一節所示）。至於在紊亂之波流場狀況下，其複雜性自不待解說。如是之故，此處波浪的成長與衰減時程，我們所採取的觀點偏向於一種巨觀概念，亦或可說是一項綜合表徵探討，其乃將波浪劃分成幾個頻帶，並以個別頻帶所形成的水面的變動高程加以研判，統計其在時間上的振動幅度是增加或減少，亦即以水面變化的包絡線其斜率之正負所佔比例來加以區判，時導數爲正者屬成長期，爲負者屬衰減期。

表 6.1 示試驗室水波其在不同成分頻帶上的成長期（分子）與衰減期（分母）比值。所用水波一者爲風生波，一者爲史脫克斯波。圖 6.23 則爲該表的分佈性狀，其橫座標表協調頻帶的代表頻率。這些統計資料顯示，對這些波浪而言，在低頻、亦或高能量而波長相對較長成分波而言，其能量增益成長時程所佔生命期較其能量衰減期的佔比較諸高頻而低能量的成分相對來的小。以風生波而言，對主能量成分、即波長大的波，相對而言，大部分時程不易再獲得能量，但有較大的勢能可以釋放能量，如是而有較長減衰期；然而對能量少、波長短的小波，相對而言，它們花較多時程在獲取能量，而且其能量消散用的快。此些現象，在物理上亦甚合理。蓋小尺度的波動偏向於紊亂的尺度，而紊亂狀況是絕佳的消能機制，小尺度的它獲取的能量有限，但卻容易將之花費，故其成長佔期比相對必須較長。同理，大尺度成分屬於不易紊亂的狀況，另一方面因爲本身能量已大不易再累積能量，但它可向高頻短波釋放能量，助長短波的成長期。至於史脫克斯波而言，因爲此時的波與流場相對單純，而紊亂現象也遠較風生波來的輕微，因而前述能量機制明顯降減，另一方面非線性機制如側頻不穩定的的波與波互作用可能形成，亦即能量往返重覆遞轉機率增高，此時其波浪成長與衰減時程相對地接近，另一方面其同頻帶上的比值也較風生波者來的大。

由此節現象看來，波亦如人，而徵民胞物與之理。就以人們的睡眠來講，睡眠是能量獲取的表徵。年少時，眠也沉、睡也久，夜短夢少；及至人老，肉已頹、骨已僵，夜長夢多，戒之在得。

6.6 結語

此處的理論應用有三：驗證束波之不存在性；解析波場與水流場其不同尺度的能量物理；不同頻率成分水波其成長與衰減佔期比研究。受限於理論本質的數學基本特性，此處尚未能提供比較局部化亦或瞬間化的物理行為探討，然而我們以偏向統計及巨觀的處理手法將其應用在波流場之波動本質及能量行為探討，也可以很肯定的說，此處的例釋是不容置疑的。❖

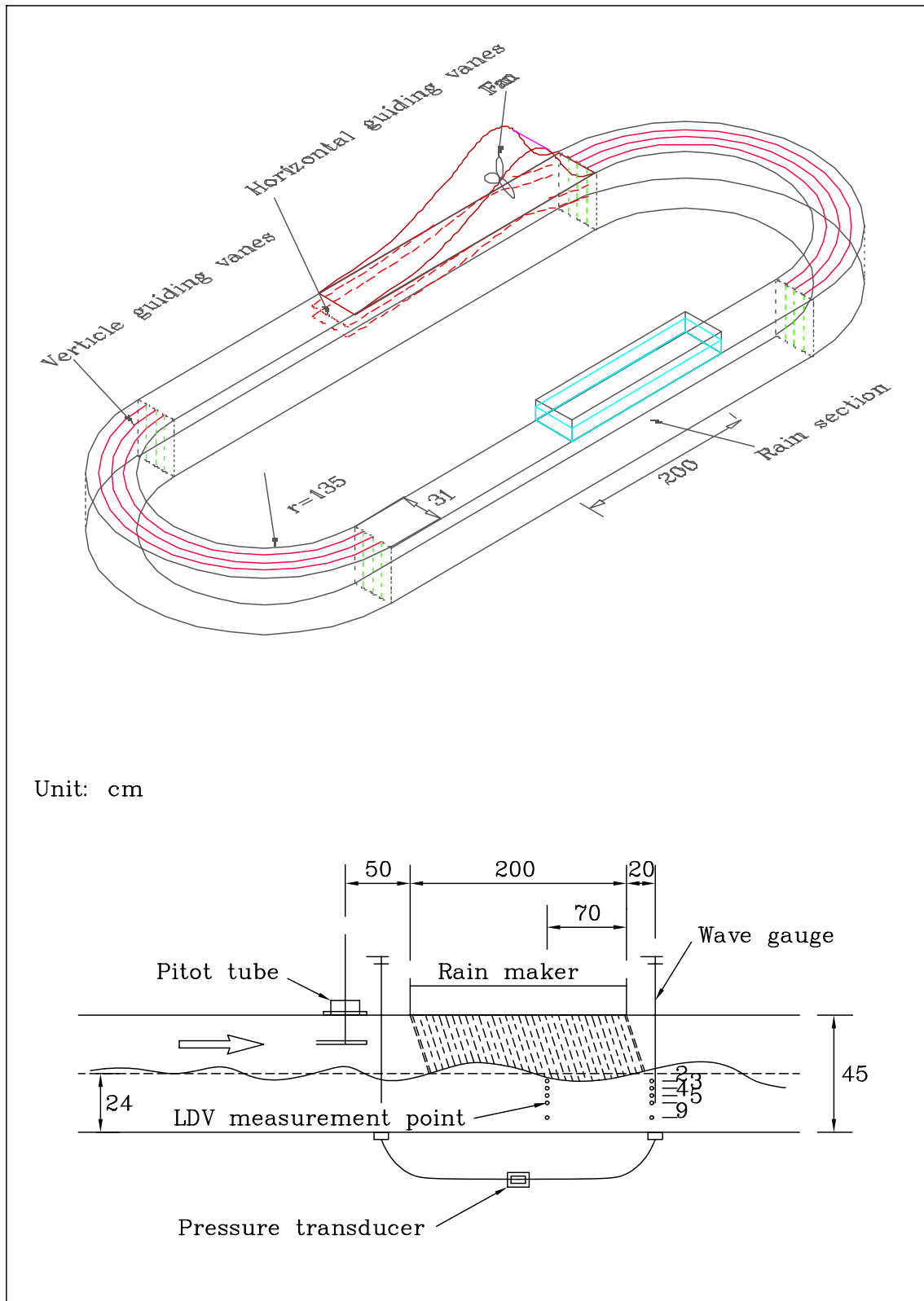


圖 6.1 水槽設備及相關佈置圖。

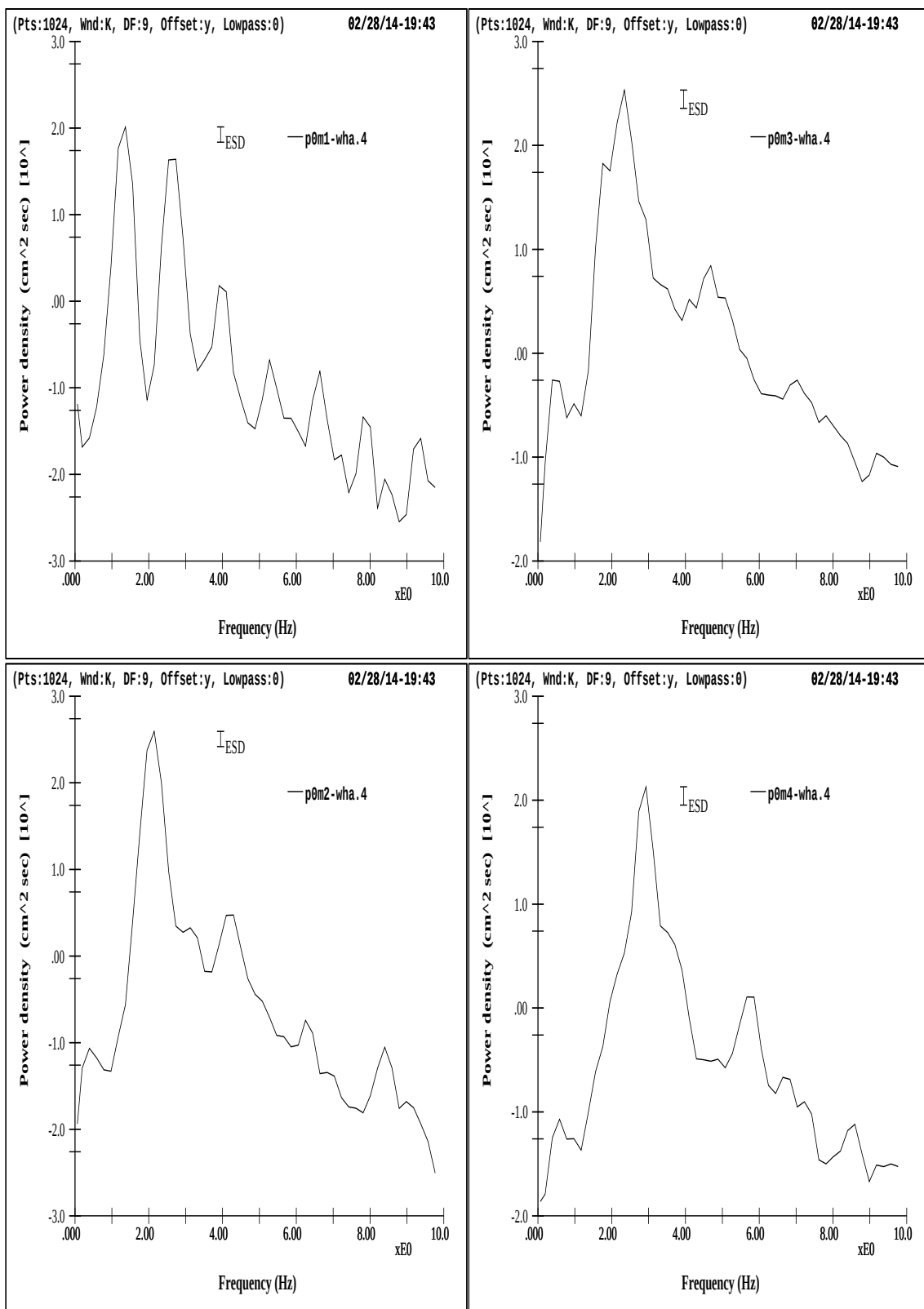


圖 6.2 此圖示四個不同基礎協調頻率之史脫克斯波之能譜。其四個基礎協調頻率分別為 1.4（上左）、2.1（下左）、2.2（上右）、3.0（下右）Hz，而個別尖銳度則分別為 0.06、0.20、0.21、3.00。

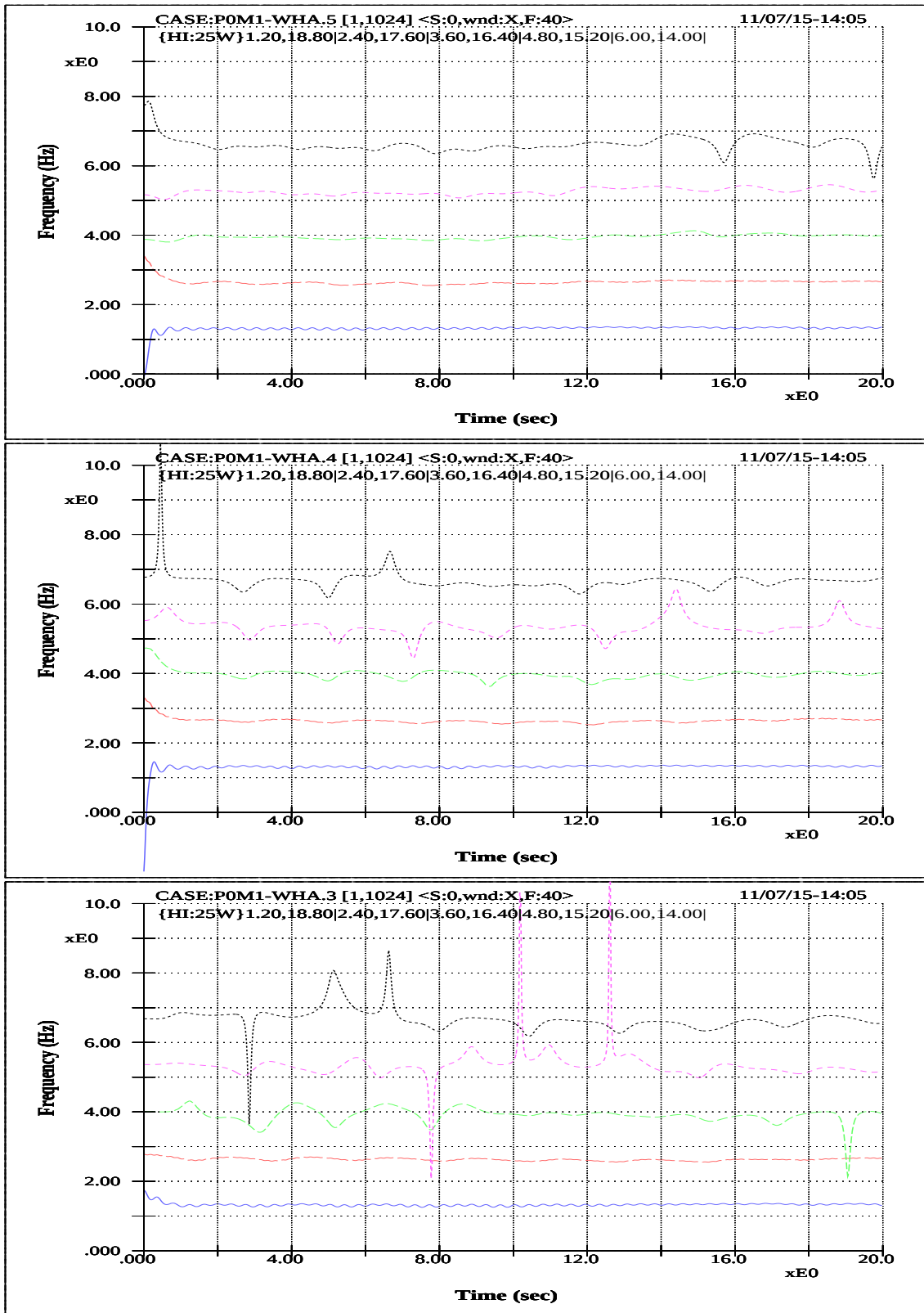


圖 6.3 此圖示基礎協調頻率為 1.4 Hz、而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上圖示上游的量測位置，離造波機之距離為 2.3 m；中圖為中游者，離造波機 3.5 m；下圖為下游者，離造波機 4.5 m。此波之尖銳度甚小，但有其時空上的演化，特別是高頻區帶。

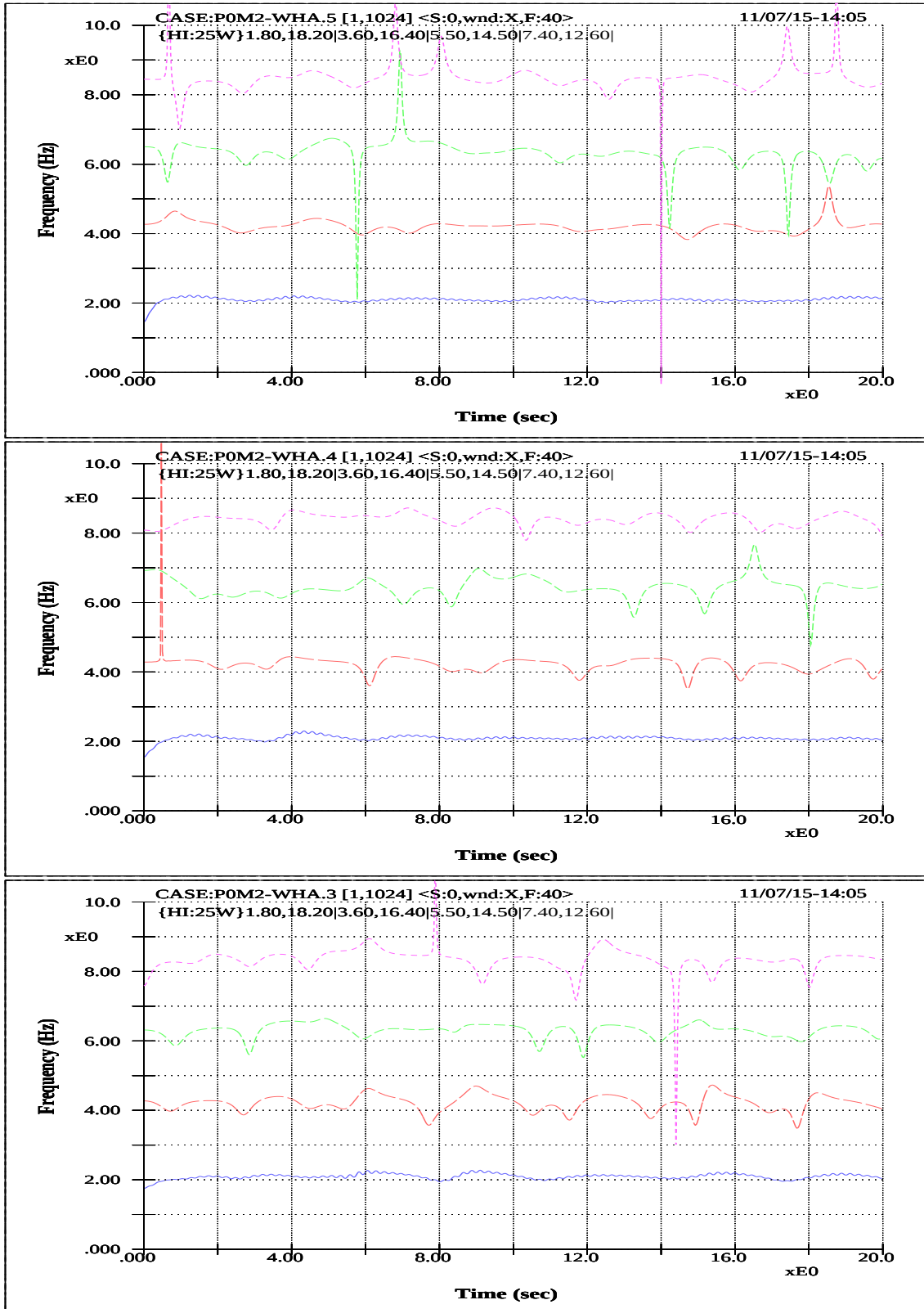


圖 6.4 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz、而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上、中、下圖之量測位置同前。很顯然地，各成分由單純而驅於調變化。

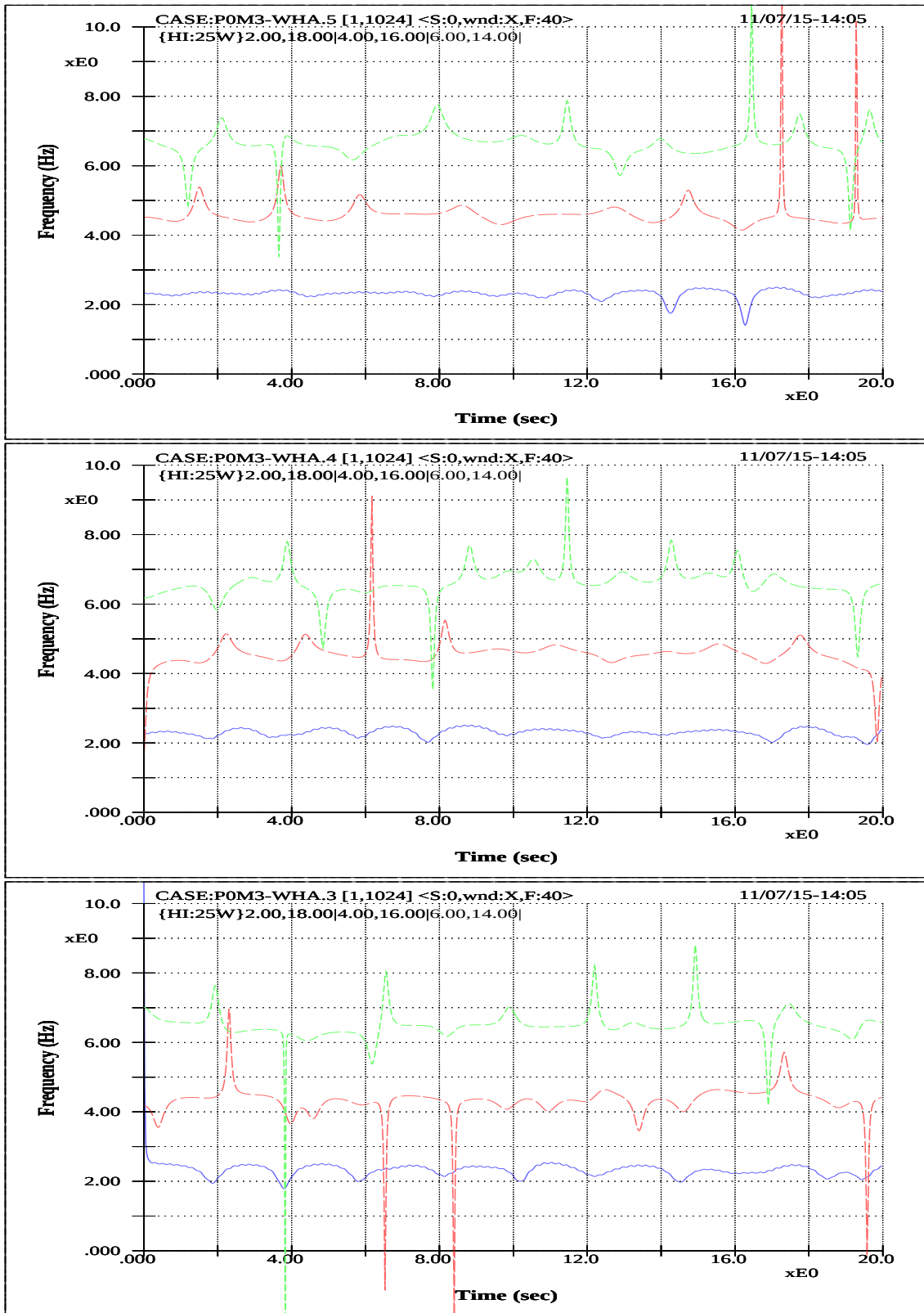


圖 6.5 此圖示基礎協調頻率為 2.2 Hz、而尖銳度為 0.21 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上、中、下圖之量測位置同前。同樣地，各成分由單純而驅於調變化。此圖之基礎協調頻率與尖銳度均僅微大於前一圖者，但其性狀變動已明顯強烈。

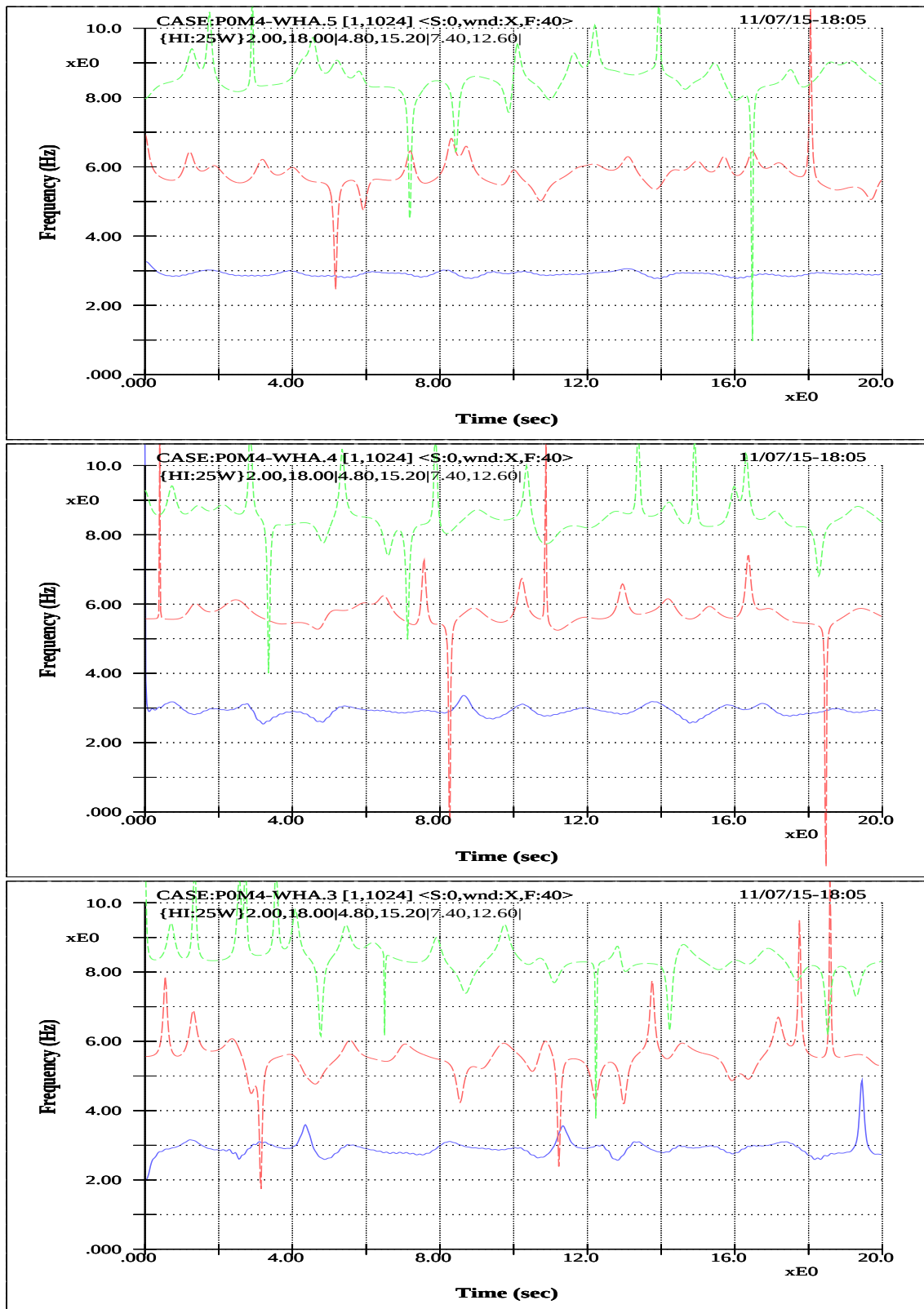


圖 6.6 此圖示基礎協調頻率為 3.0 Hz、而尖銳度為 0.30 之史脫克斯波其成分協調頻率之瞬間頻率在時間與空間上演化的性狀。上、中、下圖之量測位置同前。同樣地，各成分由較單純而驅於劇烈調變。此圖之基礎協調頻率與尖銳度均較前些者明顯為高，其性狀變動在上游位置已較顯著，而其時間與空間上演化的性狀更為激烈。

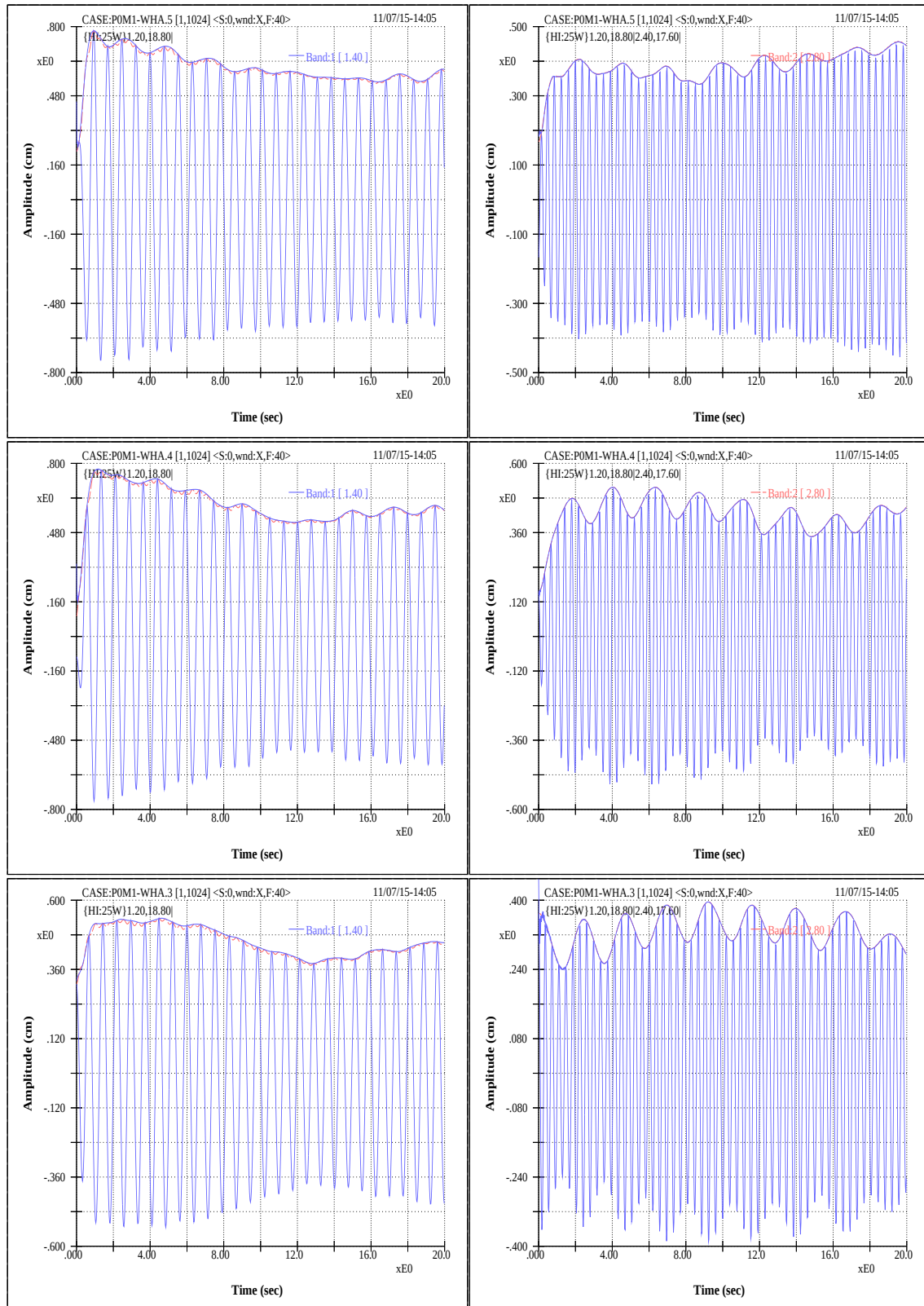


圖 6.7 此圖示基礎協調頻率為 1.4 Hz、而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其第一（左分圖）及第二（右分圖）成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。上圖示上游的量測位置，離造波機之距離為 2.3 m；中圖為中游者，離造波機 3.5 m；下圖為下游者，離造波機 4.5 m。比較有趣的性狀是第二協調成分隨時空而調變純化及顯著化現象。

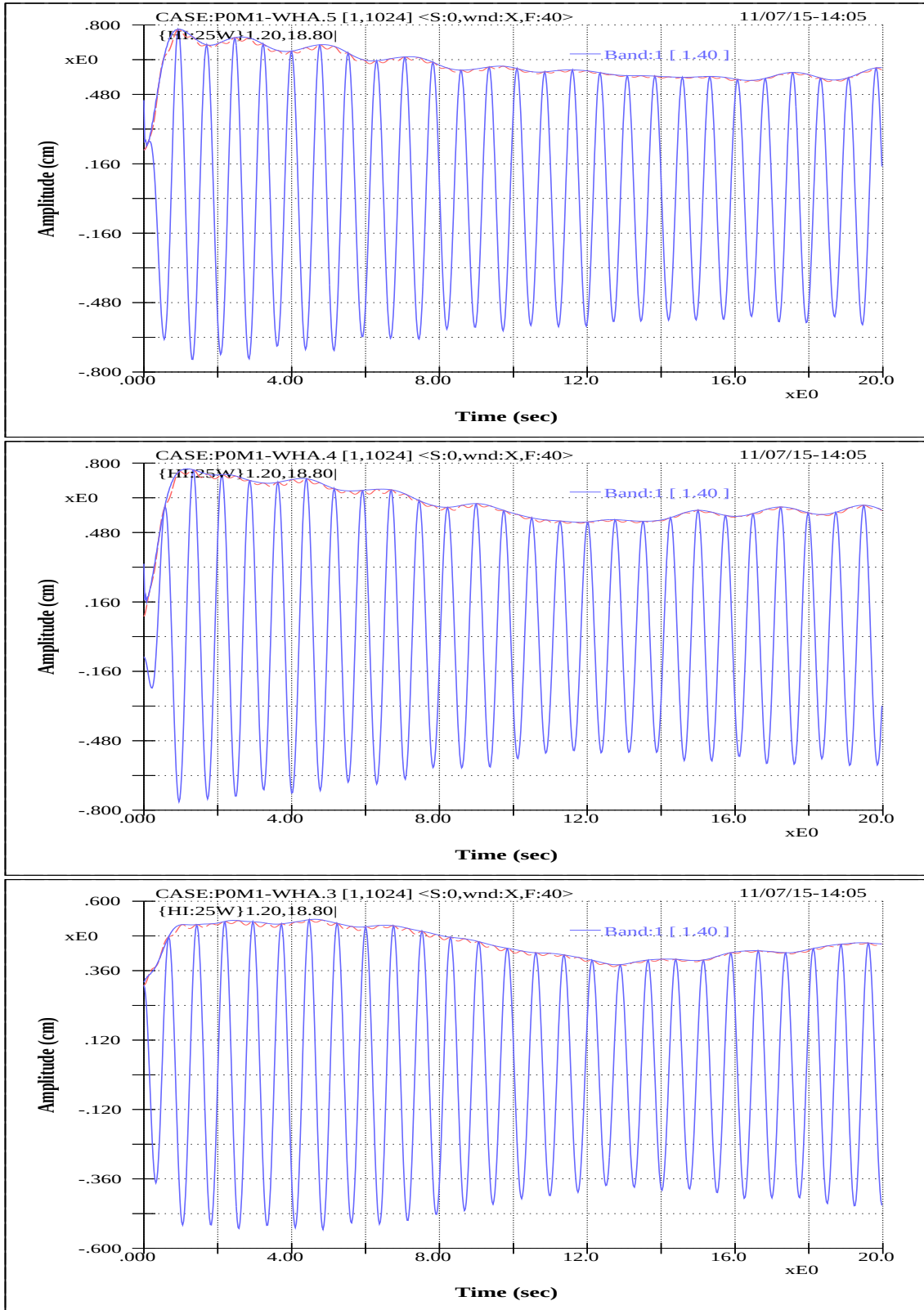


圖 6.8 此圖示基礎協調頻率為 1.4 Hz、而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其第一（主頻）成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。上圖示上游的量測位置，離造波機之距離為 2.3 m；中圖為中游者，離造波機 3.5 m；下圖為下游者，離造波機 4.5 m。

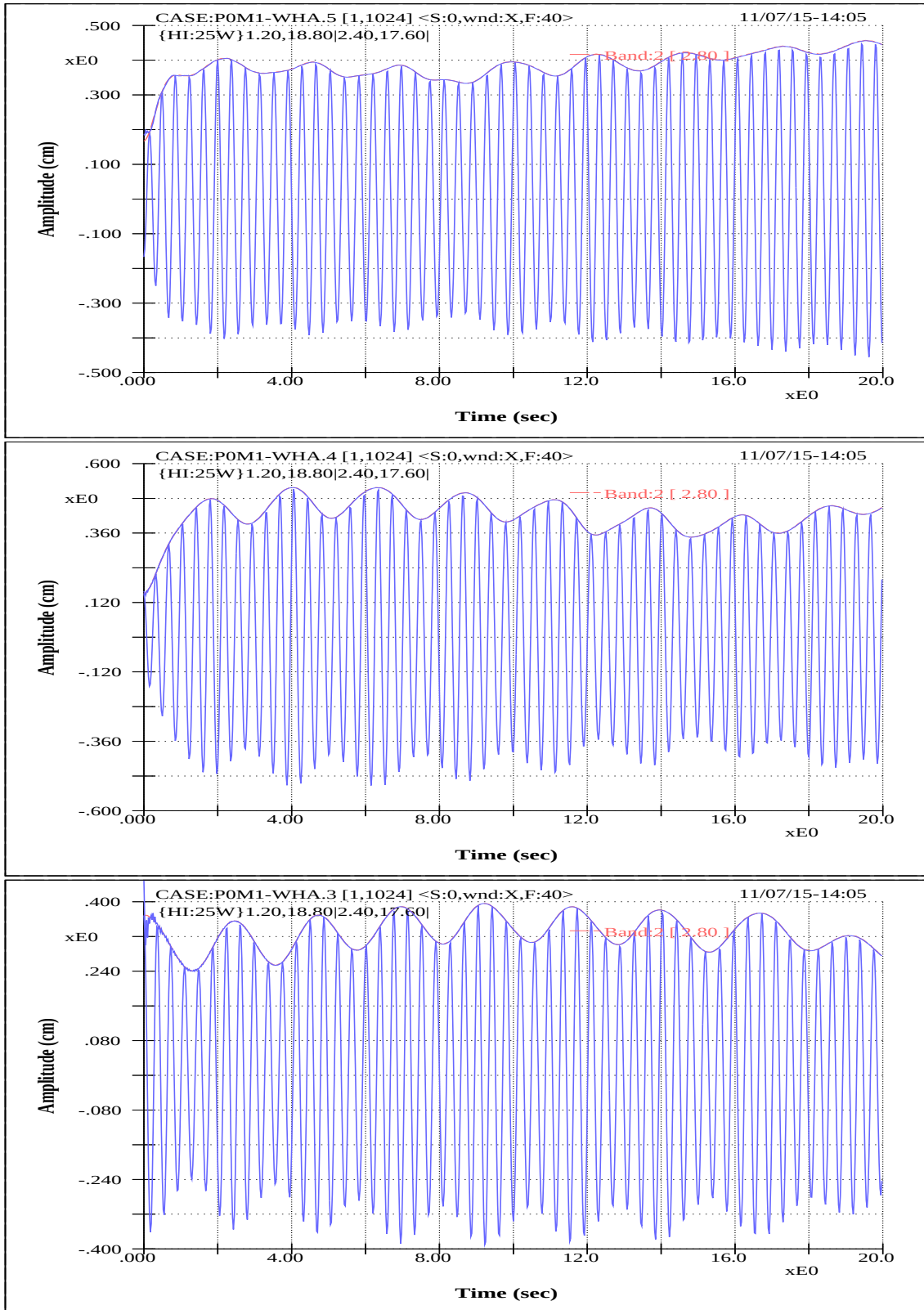


圖 6.9 此圖示上一圖之史脫克斯波其第二成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。其量測位置分別同上一圖。與主頻者比較，其有趣的性狀是第二協調成分隨時空而調變純化及顯著化現象。

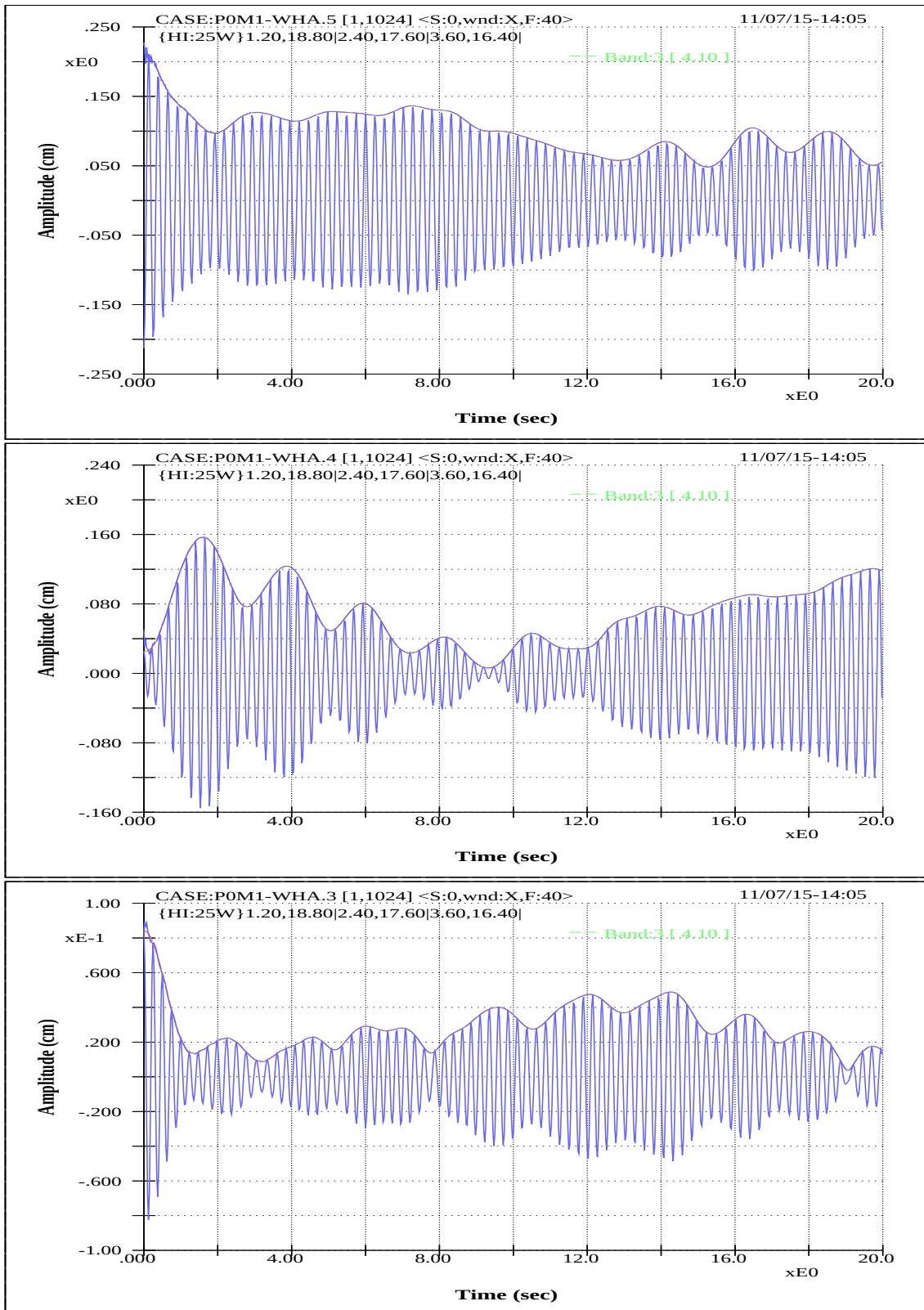


圖 6.10 此圖示上一圖之史脫克斯波其第三成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。其量測位置分別同上一圖。

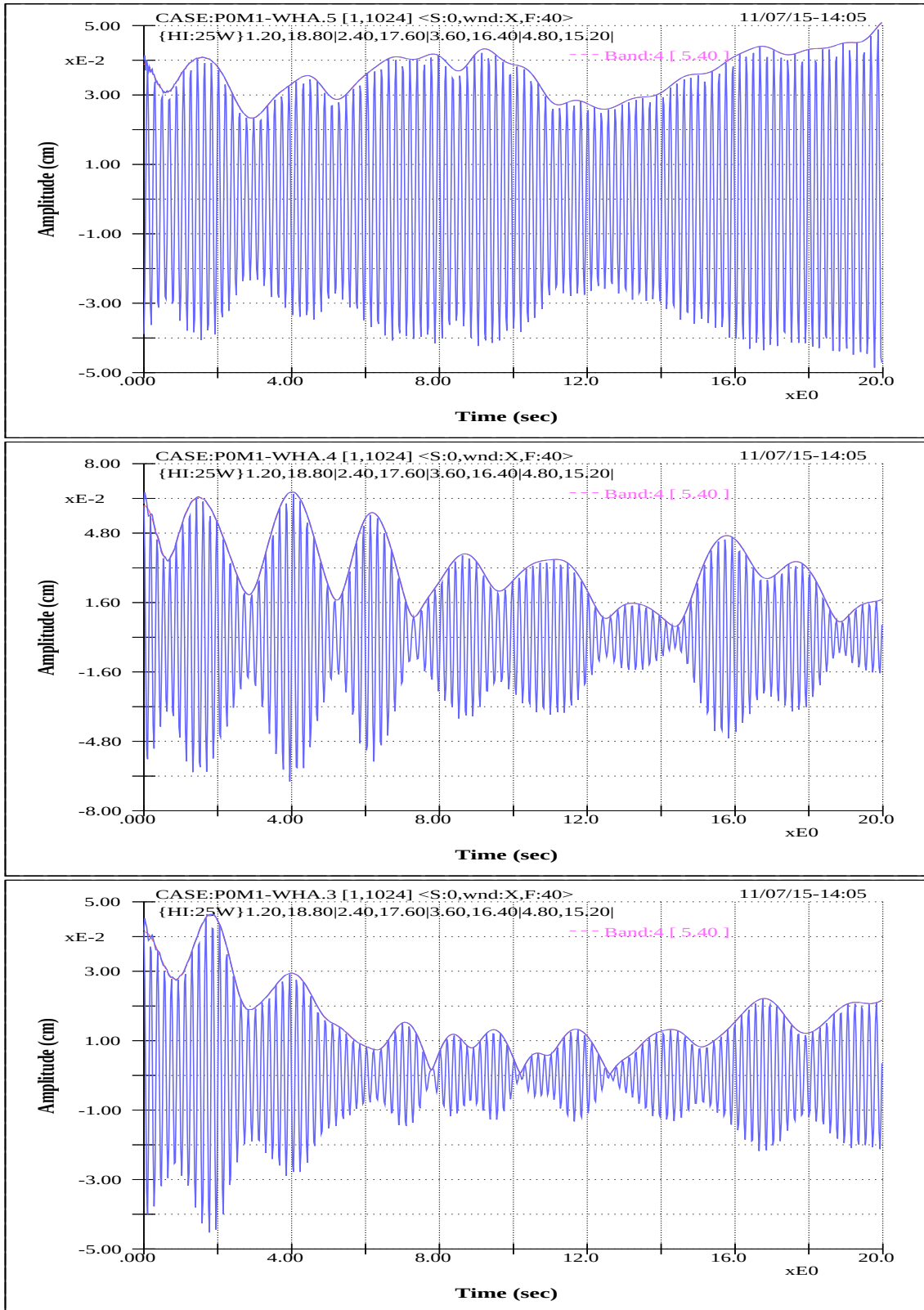


圖 6.11 此圖示上一圖之史脫克斯波其第四成分協調頻率之振幅在時間與空間上演化的性狀。其量測位置分別同上一圖。很顯然地，此一史脫克斯波之此些調變亦在時空上趨於增強。

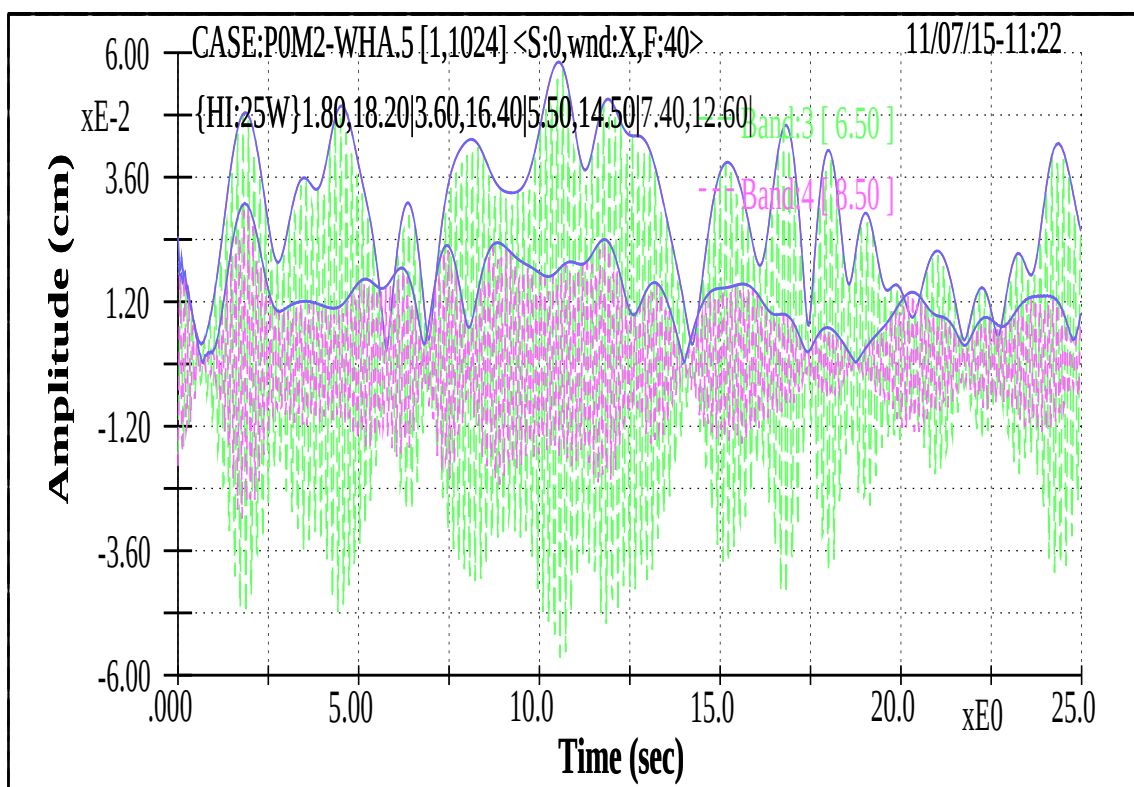
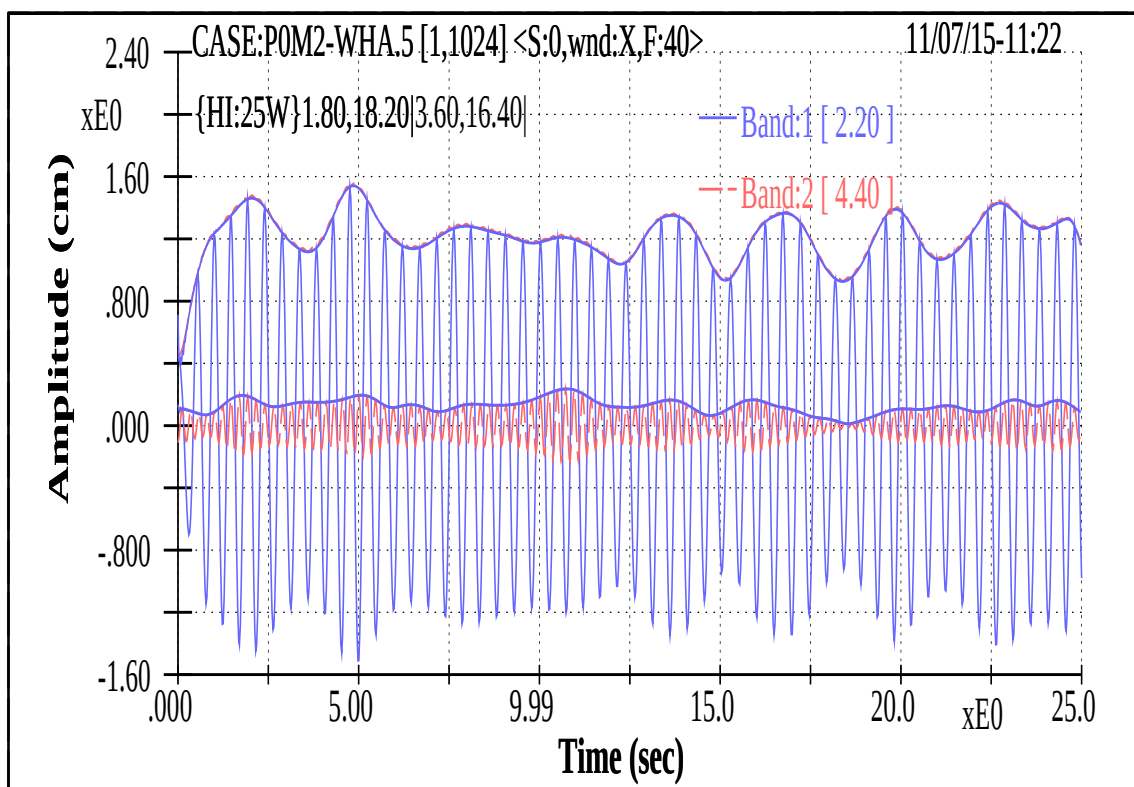


圖 6.12 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz、而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波其各成分協調頻率之振幅在上游位置點之演化性狀。其第一及第二成分示於上子圖；第三及第四成分示於下子圖。

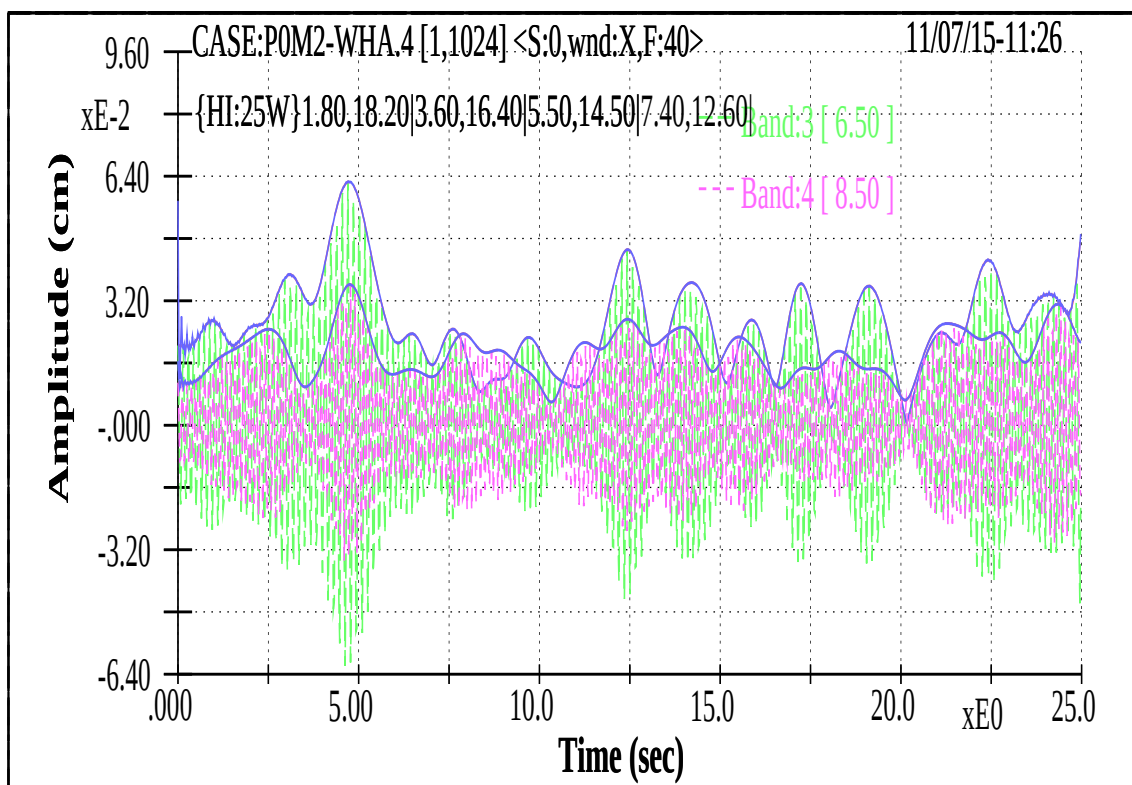
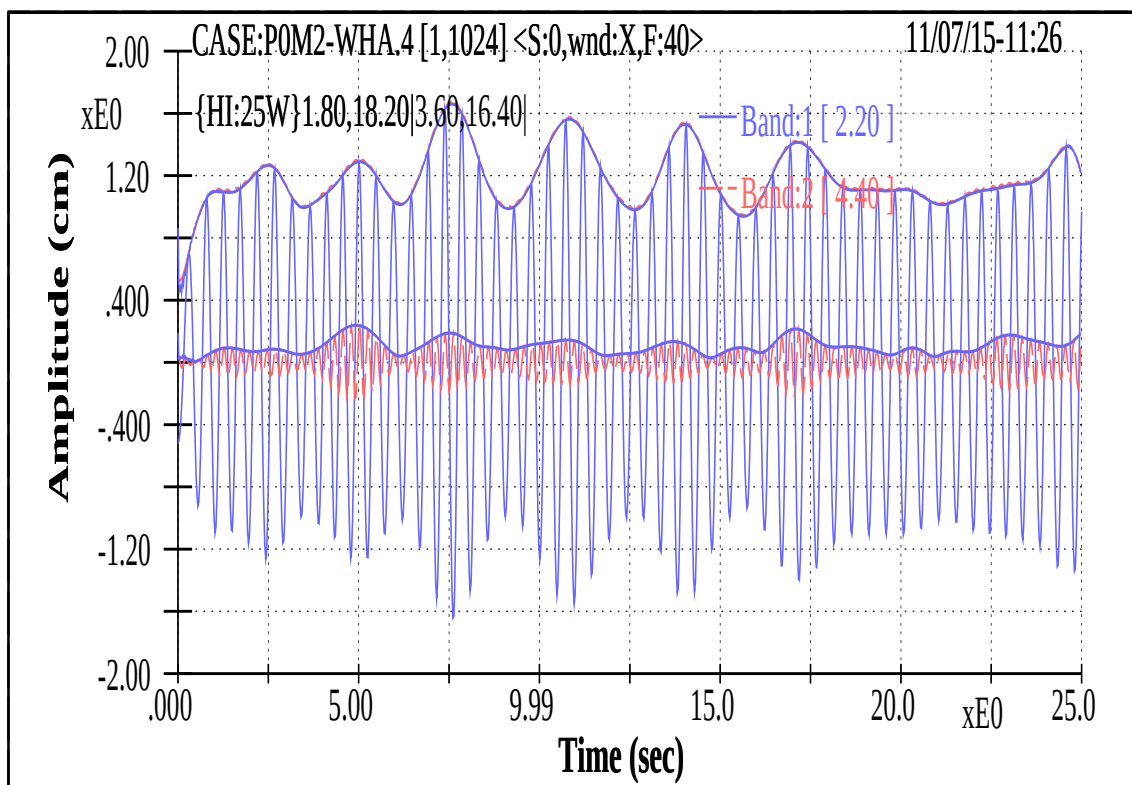


圖 6.13 此圖示前一圖之史脫克斯波其各成分協調頻率之振幅在中游位置點之演化性狀。其第一及第二成分示於上子圖；第三及第四成分示於下子圖。與上游者比較，各頻帶有調變規律化的趨勢。

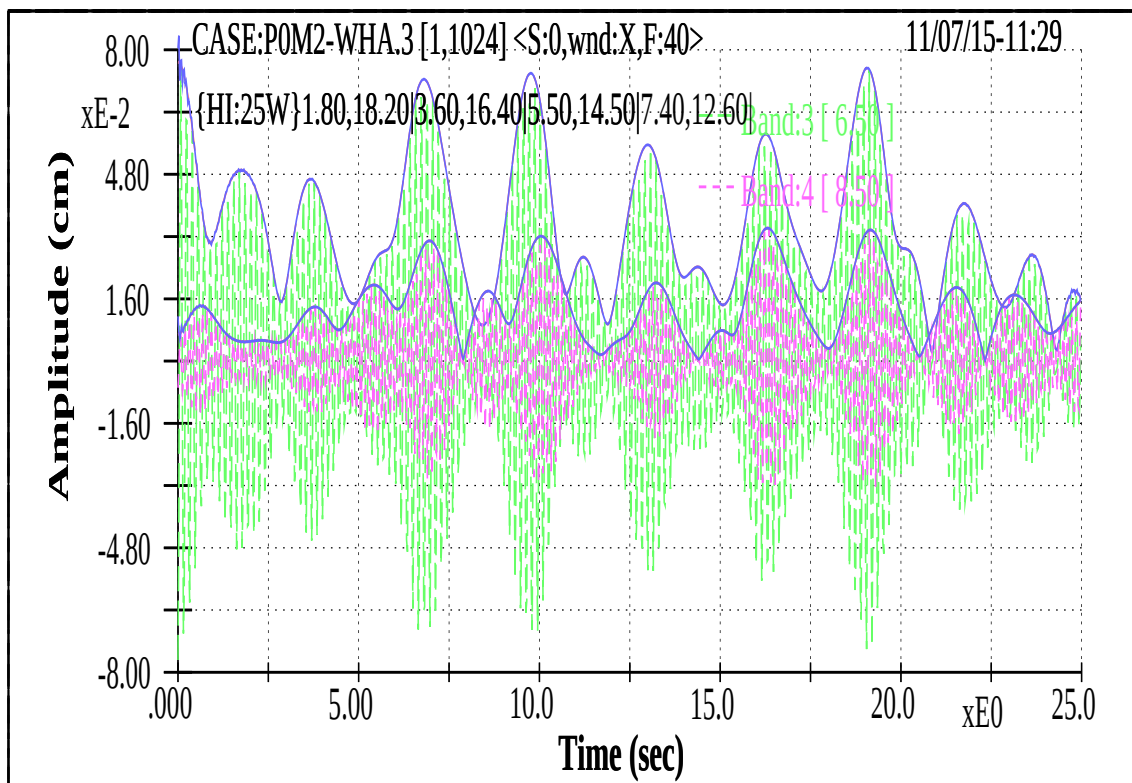
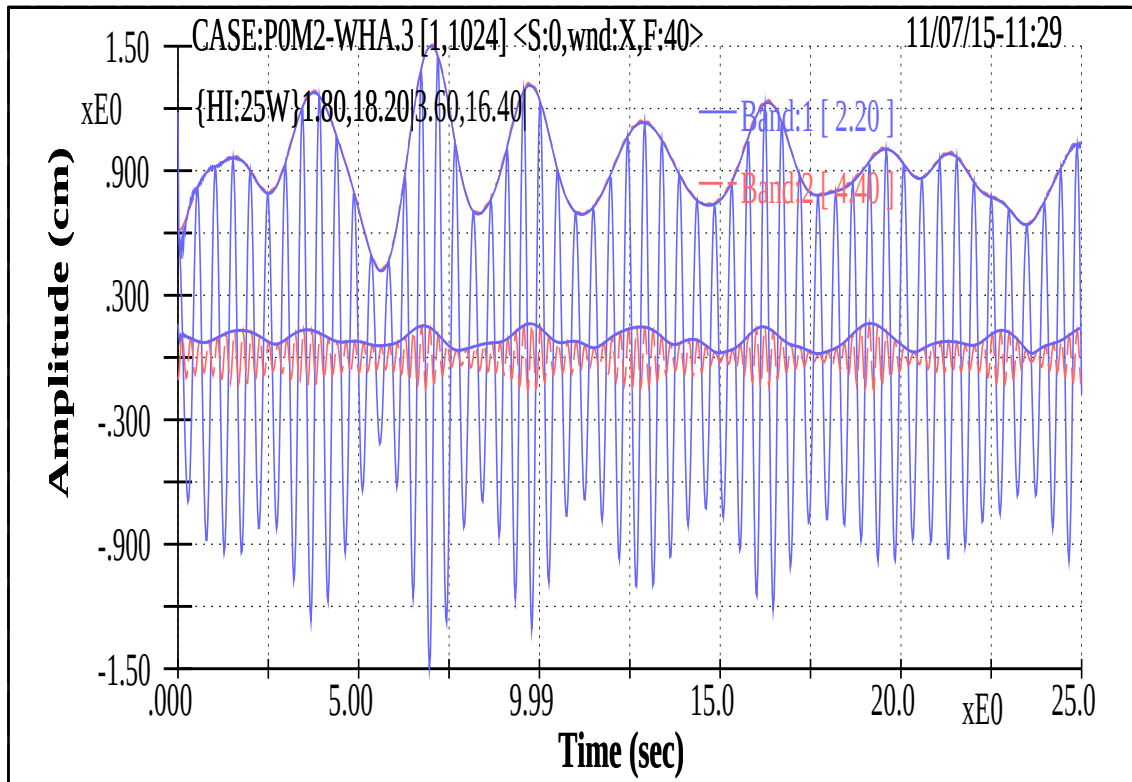


圖 6.14 此圖示前一圖之史脫克斯波其各成分協調頻率之振幅在下游位置點之演化性狀。其第一及第二成分示於上子圖；第三及第四成分示於下子圖。與上游者比較，同樣地，各頻帶有調變規律化的趨勢；而與中游位置點比較，則其調變幅度亦較增強。

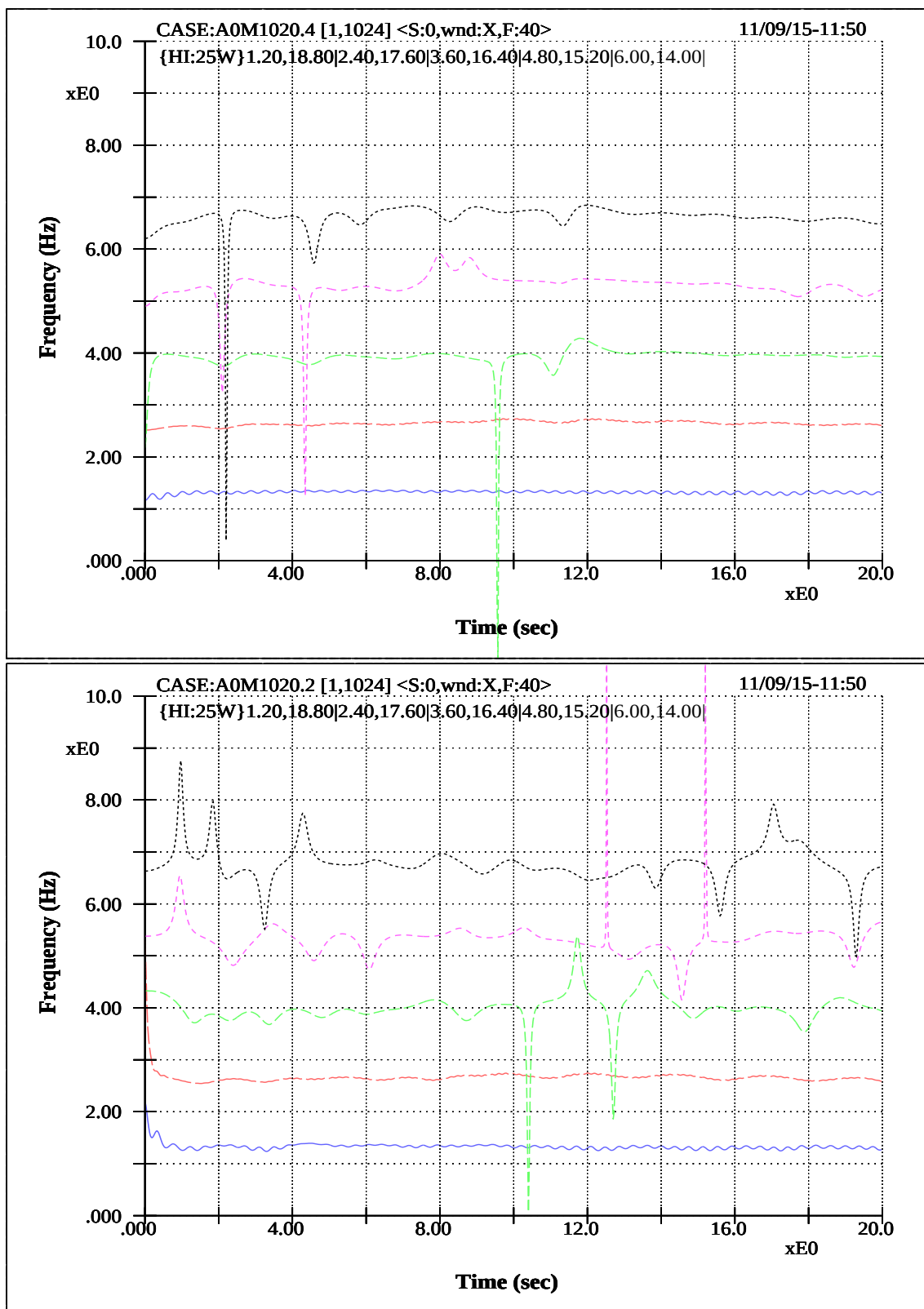


圖 6.15 此圖示基礎協調頻率為 1.6 Hz，而尖銳度為 0.06 史脫克斯波其表面波（上子圖）及水流場波動（下子圖）之各協調頻帶其頻率之調變曲線。水流場量測點為靜水位下 2.0 cm。

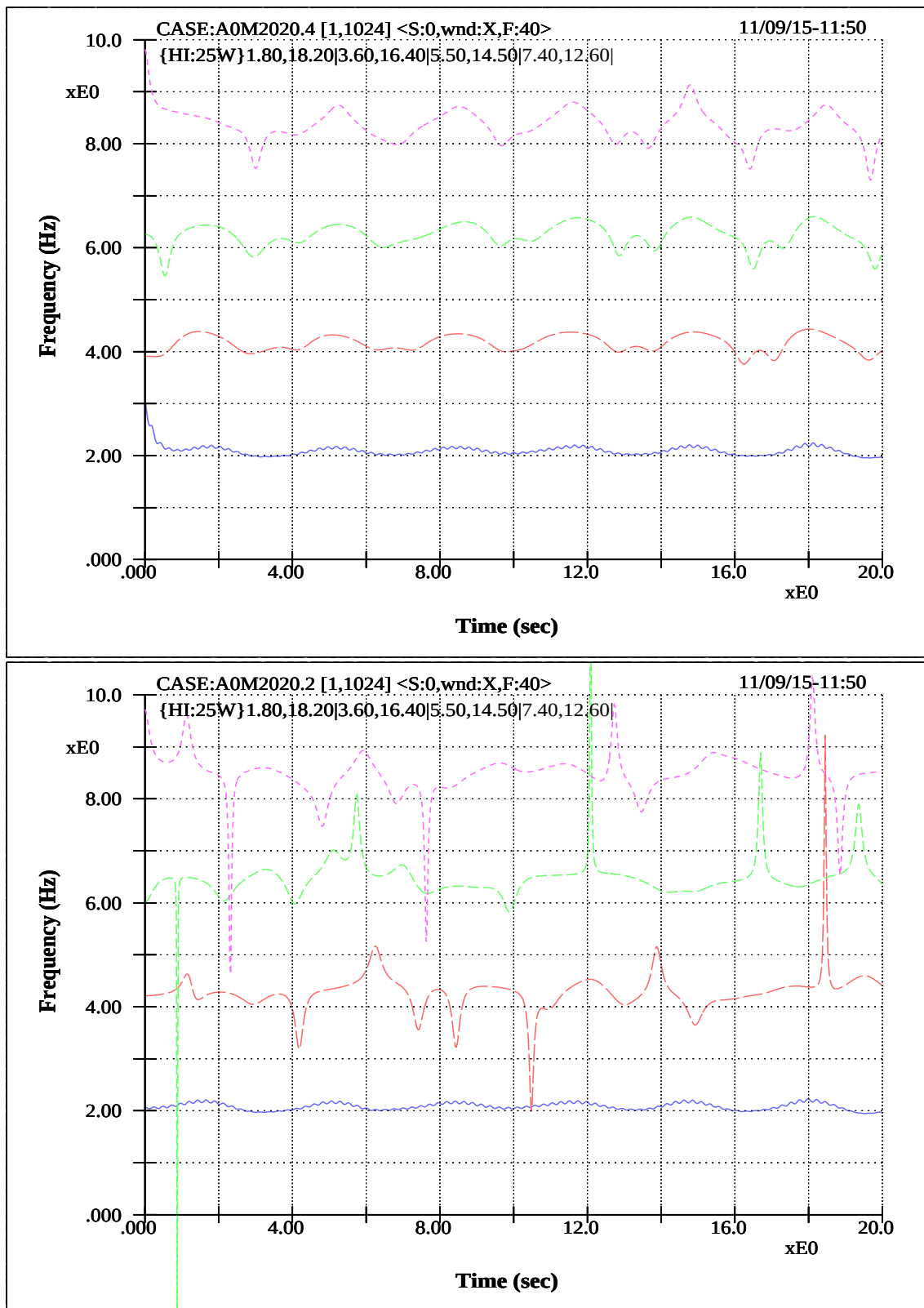


圖 6.16 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz，而尖銳度為 0.20 史脫克斯波其表面波（上子圖）及水流場波動（下子圖）之各協調頻帶其頻率之調變曲線。水流場量測點同為靜水位下 2.0 cm。綜合前一圖，一個有趣的現象是：對這些機械波而言，其流場調變情況均較波場來得複雜，且有較高的不規則性，特別是較高頻帶區更相對明顯。

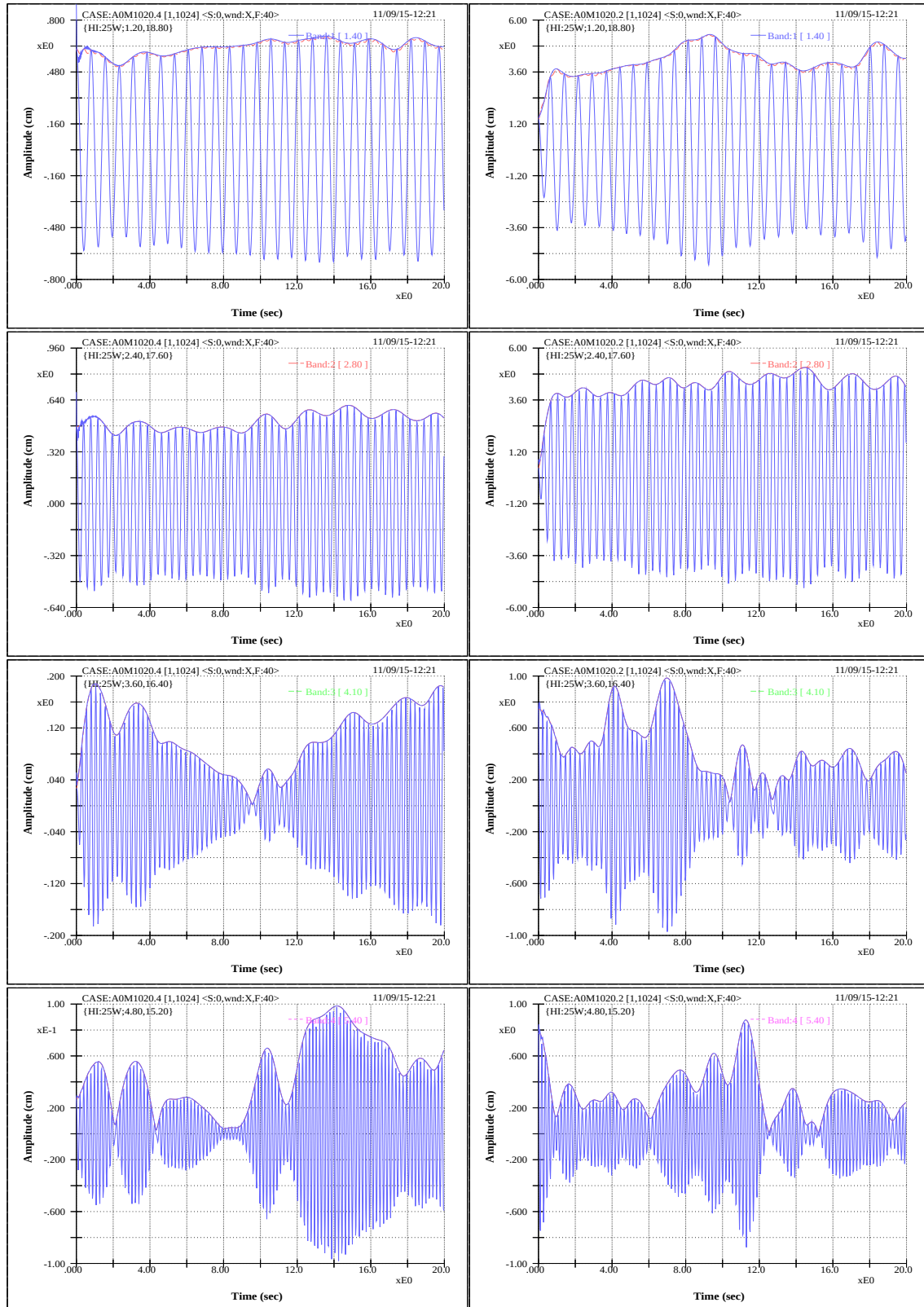


圖 6.17 此圖示基礎協調頻率為 1.6 Hz，而尖銳度為 0.06 之史脫克斯波其各協調頻帶之振幅調變曲線。左子圖為表面波者，右子圖乃水流場。很顯然地，在主要能量頻帶上，水流場的不規則度都大於水面波動。

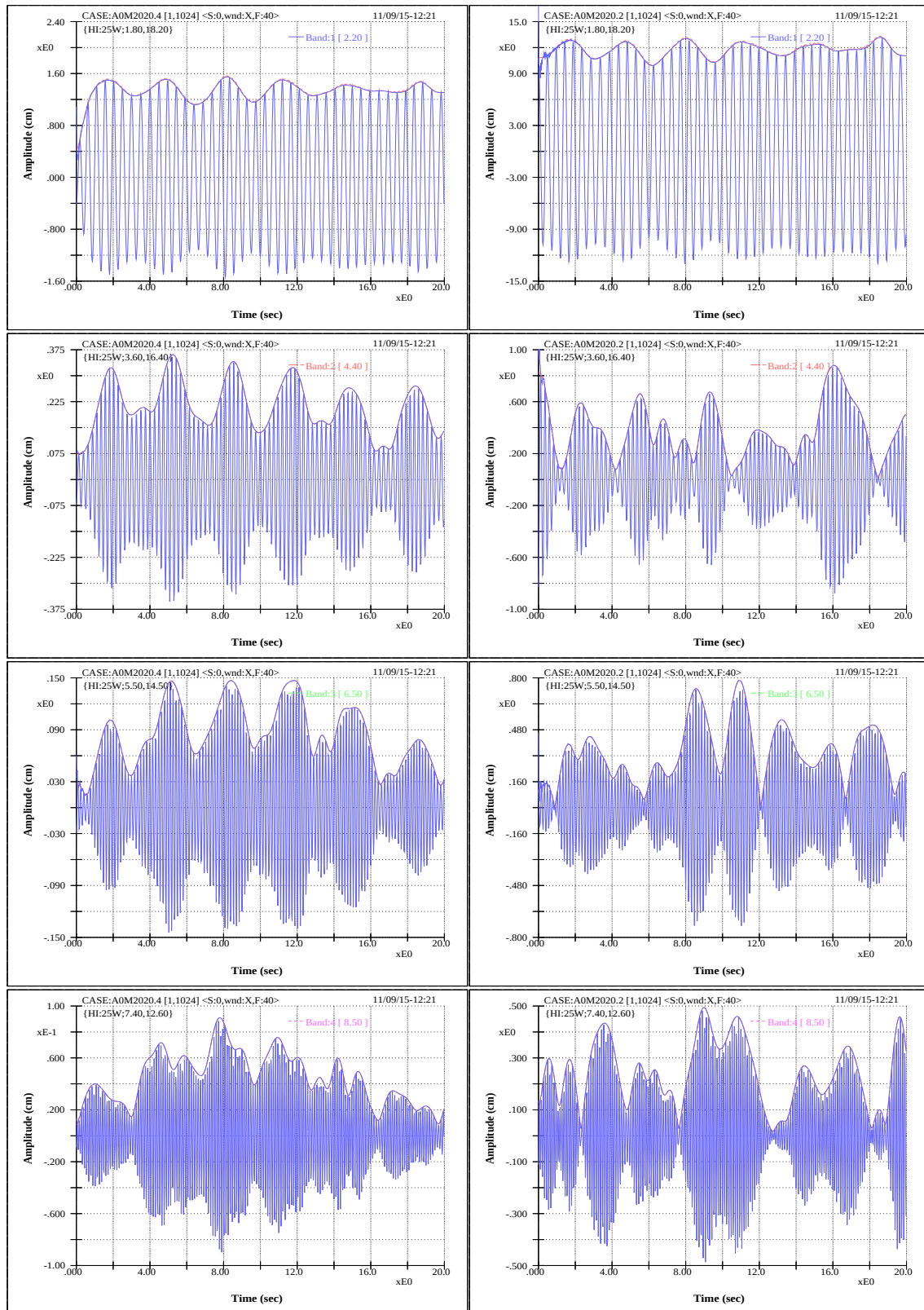


圖 6.18 此圖示基礎協調頻率為 2.1 Hz，而尖銳度為 0.20 之史脫克斯波其各協調頻帶之振幅調變曲線。左子圖為表面波者，右子圖乃水流場。在所有頻帶上，水流場的不規則度都大於水面波動。此圖與前兩圖，再再突顯能量之物理機制解說，亦可彰顯這些試驗其整體資料集錄管控之精度與信心度。

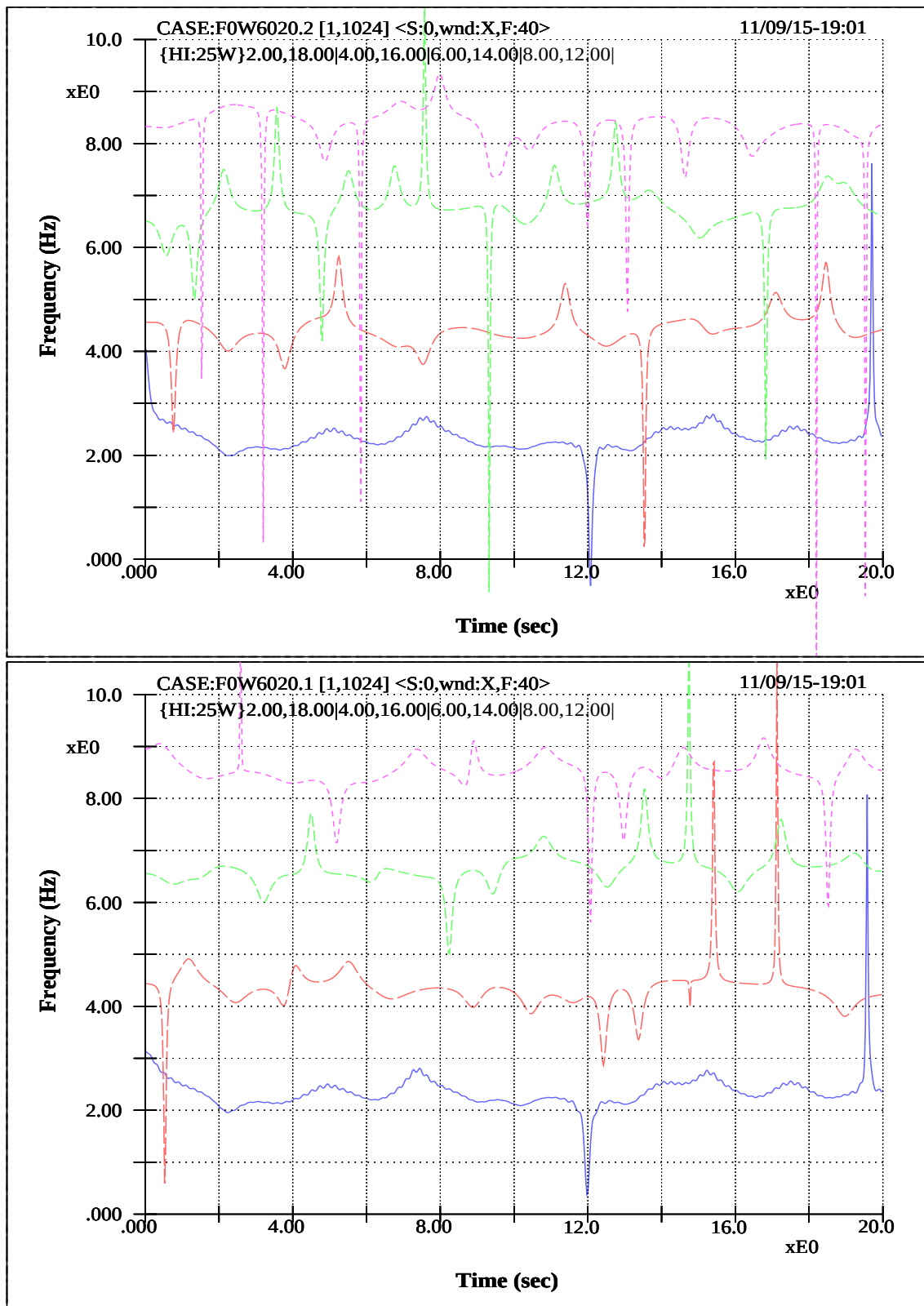


圖 6.19 此圖示風生波狀況下（風速為 6.0 m sec^{-1} ）的波流場其各協調頻帶的頻率調變。上子圖示其波場，下子圖示其水流場。此處水測點為在水面下 2 cm。

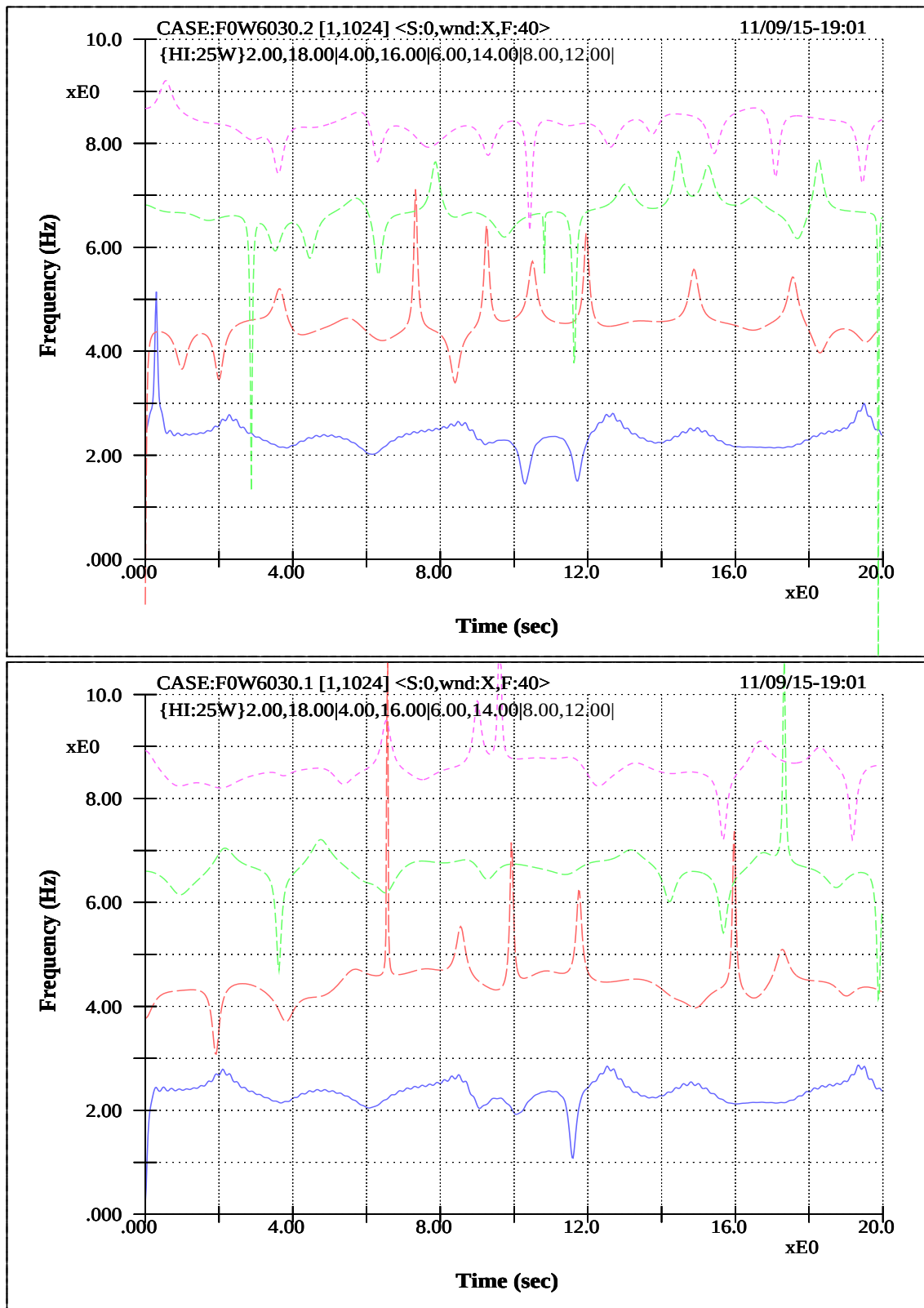


圖 6.20 上一圖風生波狀況下（風速為 6.0 m sec^{-1} ）的波流場其各協調頻帶的頻率調變。上子圖示其波場，下子圖示其水流場。此處水測點為在水面下 3 cm。綜合前一圖，我們可以查覺此時之波、流場調變性狀剛好相反於前述史脫克斯機械波相對性狀，即水流場的調變此時已較波場者來的較不激烈。

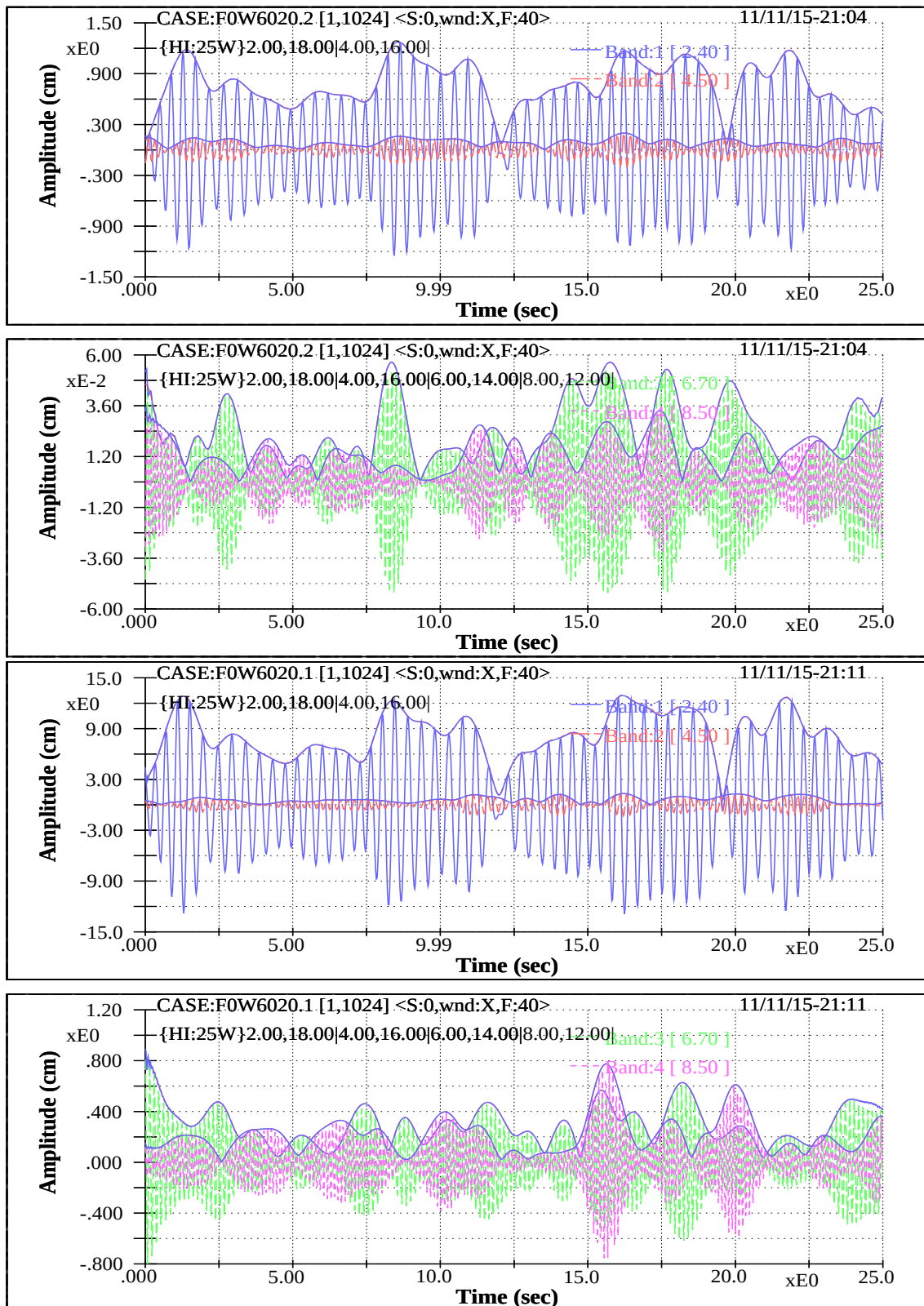


圖 6.21 風生波之波場與流場之振幅調變比較。此圖之水流場量測位置接近水面，係位於水面下 2 cm。對基礎頻帶而言，其吻合性非常好。

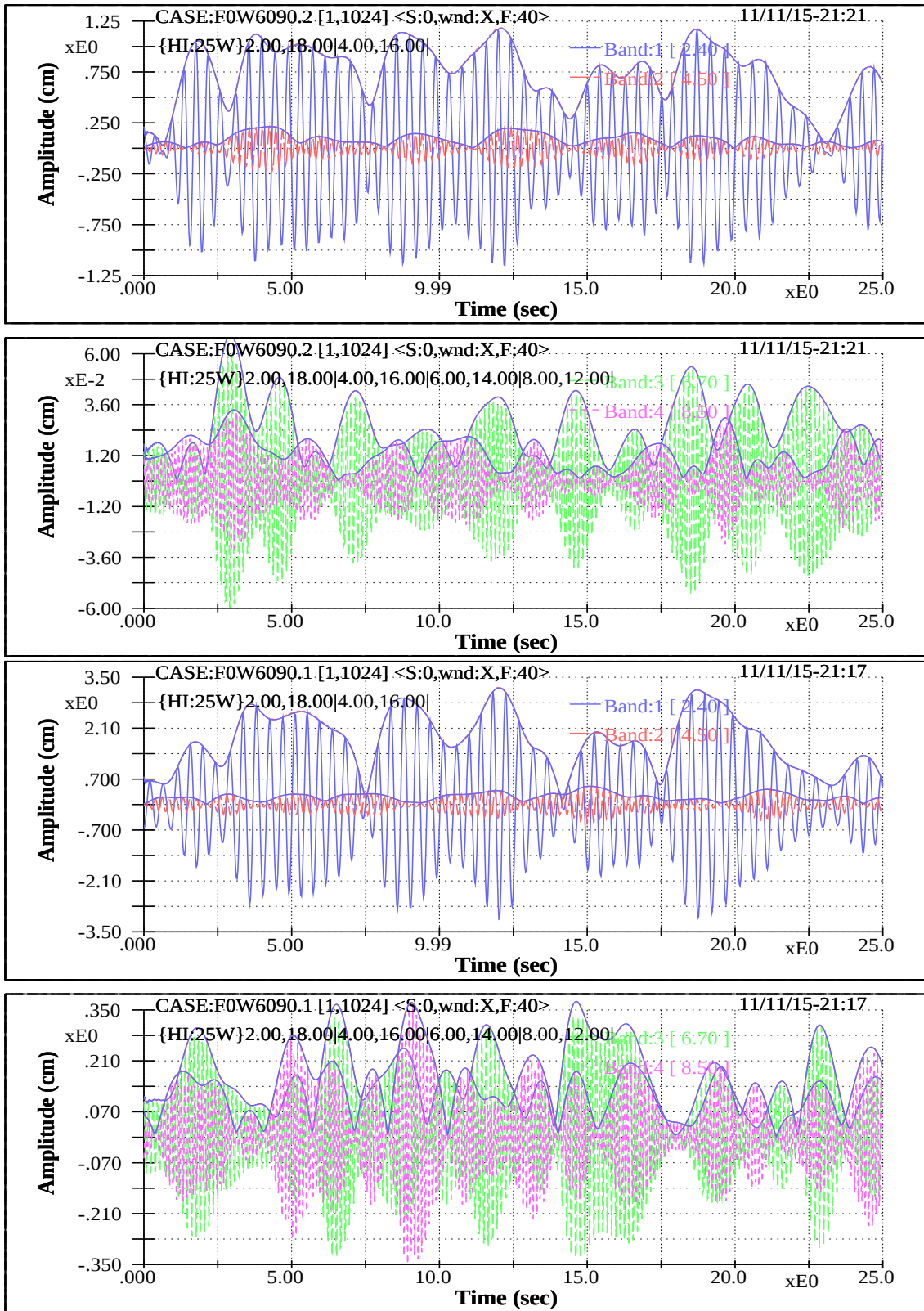


圖 6.22 風生波之波場與流場之振幅調變比較。此圖之水流場量測位置則在相對深水區，其乃位於水面下 9 cm。此時基礎頻帶的吻合性並不如淺水者，再者高頻帶的波場與流場對應也較不明顯或更為紊亂，此乃因小尺度高頻成分難以滲入深水處，此外底床及側邊影響相對較大，因而使整體的波流對應程度降減。

表 6.1 試驗室水波其在不同成分頻帶上的成長期（分子）與衰減期（分母）比值。所用水波一者為風生波，一者為史脫克斯波。各協調頻帶的代表頻率示於圖 6.23。對機械波而言其成分能量的興與衰可以從不同成分間能量遞轉往返之觀點視之。

Cases	Frequency band			
	Band 1	Band 2	Band 3	Band 4
Wind waves [†]	$\frac{.4697}{.5303}$	$\frac{.4943}{.5057}$	$\frac{.4950}{.5050}$	$\frac{.4998}{.5002}$
Stokes waves [‡]	$\frac{.4853}{.5147}$	$\frac{.4969}{.5031}$	$\frac{.5004}{.4996}$	$\frac{.5047}{.4953}$
[†] Wind wave cases under 6 m s^{-1} wind				
[‡] Mechanically generated Stokes wave cases with fundamental harmonic band centered at 2.2 Hz				

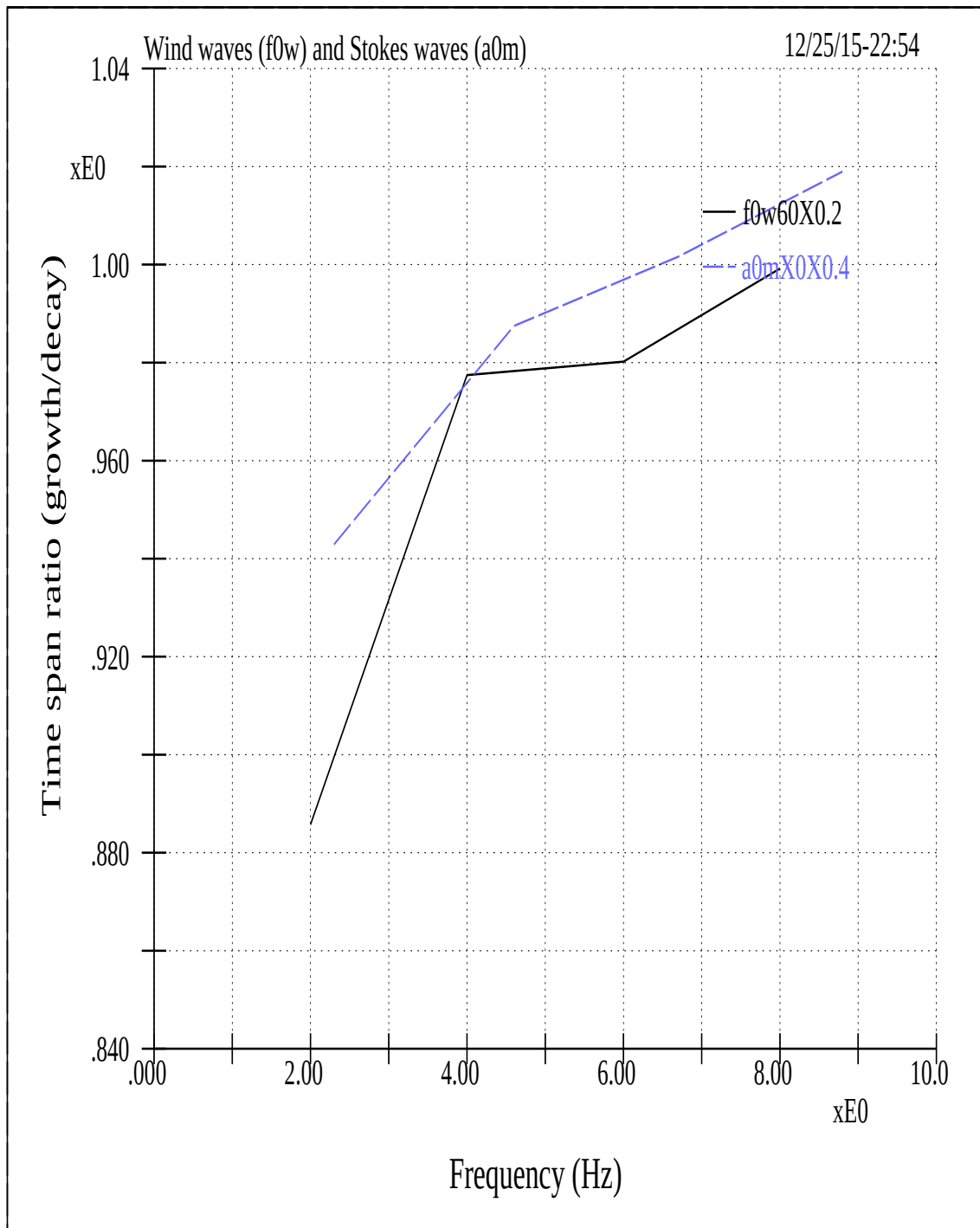


圖 6.23 試驗室水波其成長期（分子）對衰減期（分母）比值隨成分頻率大小而變動之趨勢。實線者為風場作用下的水波，虛線者為機械所造之史脫克斯波。對低頻成分、亦或高能相對長波而言，其能量增益成長時程所佔生命期較其能量衰減期的佔比值較諸高頻而低能量的成分相對來的小。一些能量物理解說如內文。

結論

時頻分析方法種類眾多、手法多元，各有其變動頻率表示方式，再者，每一種方法所涉數學及其結果往往跟我們的直覺，亦或所認定的物理，都有其合與不合之處，甚或引致新矛盾、帶來新問題。另一方面，什麼是恰適的瞬間頻率表示法仍就是開放性的問題，不論是學理本身或技法特性上，所謂一體適用、全能解析之數據處理法是不存在的。此處的時頻研究主題在於蓋博解析訊號法之瞬間頻率，其乃廣義時尺分析內的一個小分支。就一維原始訊號而言，訊號分析技法的內涵大致可歸屬一維、二維、亦或一維半，而解析訊號法之屬性可歸為一維半，若以時頻窗分佈的觀點來看，這一方法將頻率軸的分佈壓縮成一點，它應是海參堡定理的極端狀況。而極端狀況就需終極思維。此外，在此一思維及顧慮下，我們以偏向統計及巨觀的處理手法將其應用在波場與水流場之物理本質及能量行為探討。今將本研究主要內容歸結如下：

- 為對廣義時尺分析有比較全盤性的基礎認知，建立研究解析上的超然態度，報告中首先闡釋一些時頻分析概念，特別是相關於變動或非穩定形態之效應、時頻窗概念、海參堡定理、等。
- 為對蓋博解析訊號法之特性有其根源性的瞭解，此處推導並解說相關數學，其重點在彰顯解析訊號、瞬間頻率、希伯轉換、富立葉轉換之間的關係，雖其過程狀似複雜，但其結果卻是簡白，另參著其它訊號分析法之了解，得有清晰的表裡認知，庶幾秉持客觀謹慎，求實求是。

- 就希伯轉換與富立葉轉換之間的關係，討論其所涉諸多現象，如：劇變效應、相位糙音、黑盒子機制、波譜重覆性等。另其解說除了以數學本質說明外，亦以試驗數據實際例示。
- 說明解析訊號法瞬間頻率的一些行為特性，特別是可能的紛擾與矛盾現象，再者列出其基因，由數學概念解釋其產生所涉先天因素。這些概念如：「瞬間」與「頻率」的不容性、「規則度」與「支撐長度」的不同需求、頻率調變與振幅調變之間的糾葛等。此外，以數值模擬方式顯現這些行為特性及矛盾現象，並驗證瞬間頻率之驟變現象乃相關於波動振幅之相對變化率，也因此驟變瞬間頻率大底發生於能量相對很微小之局部，而負頻率之產生也與相位反向（phase reversal）無關。
- 數值處理通常需要考慮一些理論未所含蓋的狀況，亦或涉有額外的優化步驟，這些主要在降減誤差、避免誤判，再者提供多方位視野、助益辨析。此處指出一些必要而恰適的處理手法，並探討分析優化的細節暨其相應數值反響，這些如：一致性相位差分法、基礎頻帶轉換預處理手法、解析度所涉的現象、希伯波濾設計參數之選擇及其相應特性等。
- 此處研究結果預為指出解析訊號法應用在紛紜現象所必然遭遇的主客觀難題，特別是瞬間頻率分佈其現象之可重複性、物理之可預期性的問題。也因此其在複雜系統、亦或紛紜水波應用及解說上存在甚大挑戰。
- 由波浪在時間與空間上的調變行為及趨勢否定束波的存在性。
- 解析波場與水流場其不同尺度的能量物理及側頻不穩現象。
- 探討闡釋不同頻率成分水波其成長與衰減佔期比。也徵乎波亦如人。❖

參考文獻

- [1] Auscher, P. Wavelet bases for $L^2(\mathbb{R})$ with rational dilation factor. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 439–452. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [2] Benilov, A. Yu., and B. N. Filyushkin. Application of methods of linear filtration to an analysis of fluctuations in the surface layer of the sea. *Izv. Atmospheric and Oceanic Physics*, 6, 1970.
- [3] Cohen, L. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [4] Coifman, R., Y. Meyer, and M.V. Wickerhauser. Size properties of wavelet packets. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 453–470. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [5] Coifman, R., Y. Meyer, and M.V. Wickerhauser. Wavelet analysis and signal processing. In M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, editor, *Wavelets and Their Applications*, pages 153–178. Jones and Bartlett Publishers, Boston, New York, USA, 1992.
- [6] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 1992.
- [7] Debnath, L. *Nonlinear Water Waves*. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1994.
- [8] Feir, J.E. Some results from wave pulse experiments. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A299:54–58, 1967.
- [9] Gabor, D. Theory of communication. *Journal of the IEE*, 93:429–457, 1946.

- [10] Greenberg, M.D. *Advanced Engineering Mathematics*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1988.
- [11] Lake, B.M., and H.C. Yuen. A note on some nonlinear water wave experiments and comparison of data with theory. *J. Fluid Mech.*, 83:75–81, 1977.
- [12] Lake, B.M., and H.C. Yuen. A new model for nonlinear gravity waves, Part 1, Physical model and experimental evidence. *J. Fluid Mech.*, 88:33–62, 1978.
- [13] Lee, Y.R., and J. Wu. Continuous wavelet transform using a locally adapted time-frequency window. In *Proc. 18th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 95–106, 1996.
- [14] Lee, Y.R., and J. Wu. Wavelet and wavelet packet best basis for laboratory water waves. In *Proc. 18th Conf. On Ocean Engineering in Taiwan*, pages 83–94, 1996.
- [15] Meyer, Y. *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- [16] Oppenheim, A.V., and R.W. Schfer. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1975.
- [17] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flennerly. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, New York, USA, second edition, 1992.
- [18] Soumekh, M. *Fourier Array Imaging*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1994.
- [19] Su, M.Y. Evolution of groups of gravity waves with moderate to high steepness. *Phys. Fluids*, 25:2167–2174, 1982.
- [20] Wickerhauser, M.V. Acoustic signal compression with wavelet packets. In C.K. Chui, editor, *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, pages 679–700. Academic Press, Inc., San Diego, California, USA, 1992.

附錄一： 簡報資料

The Gabor Analytic Signal Procedure, the Hilbert Transform, and Their Applications

The Optimizations of Water Wave Time-Frequency Analyses (3/4)

水波時頻分析之優化— 蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用

李 勇 榮

運輸研究所
港灣技術研究中心
email: ronlee@ms4.hinet.net

<http://www.ihmt.gov.tw/>



1/59



2/59



Contents

1. Time frequency concepts and the Heisenberg uncertainty principal ➞
2. Theoretical background of instantaneous frequency, the analytic signal, the Hilbert transform, and the Fourier transform ➞
3. Inherited transform properties ➞
4. Numerical simulations, characterizations, and feature analyses ➞
5. Process optimizations ➞
6. Water wave applications and case studies ➞

Concepts of time-frequency window (1/2)

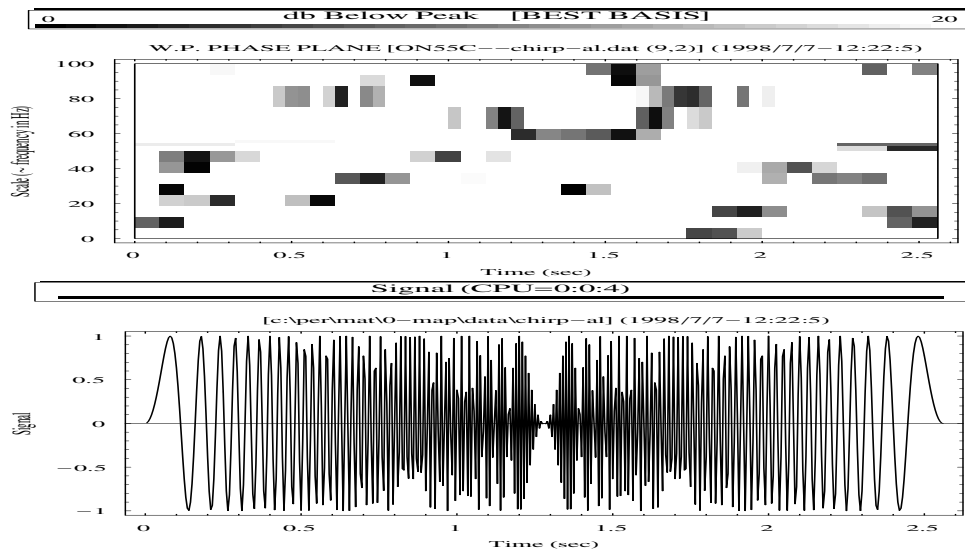


Figure 1: Phase plane of a wavelet packet's best basis time-frequency windows (top) for a linear chirp signal that is sampled under aliasing condition (bottom). Here wavelet packets associated with coiflet of 30 convolution weights is used. The original signal, if not under-sampled, has linear instantaneous frequency distribution from 0 to 100 Hz. Note the non-symmetric effects and the scattering of windows due to the composite frequency bands that form the wavelet.

Concepts of time-frequency window (2/2)

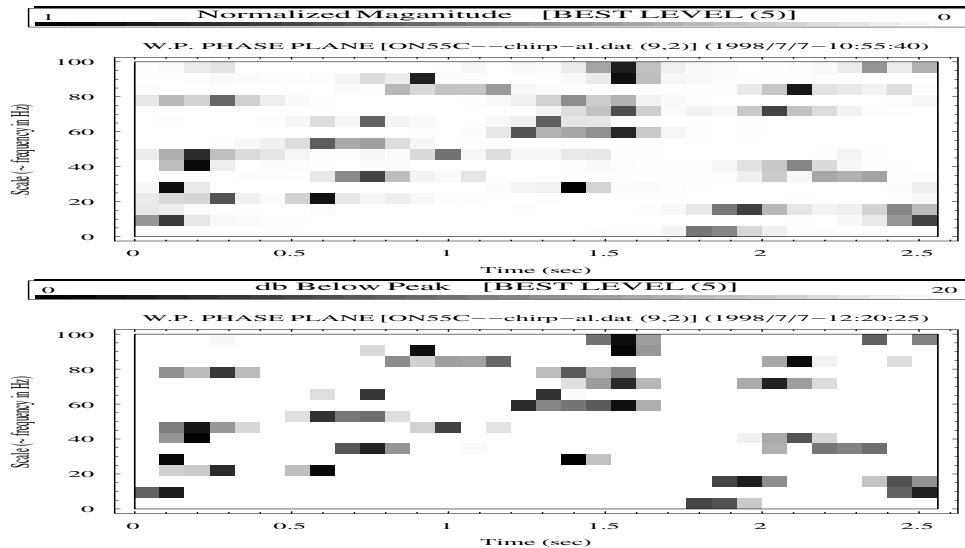


Figure 2: Phase planes (top: logarithmic measure; bottom: linear measure) of a wavelet packet's best level time-frequency windows using the same linear chirp and wavelet packets as in the previous figure. In view of the fact that a single orthonormal mother wavelet can yield many different wavelet packet representations, that there are basically infinitely many wavelet bases, and that we may use different graphic renderings, we are easily trapped in the dilemmas of choosing an appropriate basis.

The Analytic Signal and the HT

Complex signal and the instantaneous frequency

$$s_r(t) = a(t) \cos \phi(t), \quad (1)$$

$$z(t) = s_r(t) + s_i(t) = a(t)e^{i\phi(t)}, \quad (2)$$

$$\omega_i(t) = \phi'(t). \quad (3)$$

The instantaneous frequency and the Hilbert transform

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1} \{S(\omega) + S(\omega)\text{sgn}(\omega)\}. \quad (4)$$

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1} \{S(\omega)\} + \mathcal{F}^{-1} \{S(\omega)\} \star \mathcal{F}^{-1} \{\text{sgn}(\omega)\}, \quad (5)$$

$$z(t) = s(t) + i \left[s(t) \star \frac{1}{\pi t} \right]. \quad (6)$$

$$z(t) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7)$$

$$z(t) = s(t) + i \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (8)$$



5/59



6/59



$$\mathcal{H}[s(t)] = \widehat{s(t)} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (9)$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad (10)$$

$$\widehat{s(t)} = \frac{1}{\pi} (s \star f)(t) \quad (11)$$

$$\mathcal{F}[\widehat{s(t)}] = \widetilde{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} S(\omega) F(\omega) \quad (12)$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[s(t)]] = S(\omega) + i\mathcal{F}[\mathcal{H}[s(t)]] = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\widetilde{S}(\omega) = \begin{cases} -iS(\omega) & \omega > 0 \\ iS(\omega) & \omega \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$O_H(\omega) = -i\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -i & \omega > 0; \\ 0 & \omega = 0; \\ i & \omega < 0. \end{cases} \quad (15)$$

An ASYST word for Hilbert transform

Table 1: An ASYST word (equivalently, a subroutine in some programming languages) for performing the Hilbert transform of an array. The word takes a one dimensional array as its input argument. As is clearly seen, the basic algorithm is related to several processes that manipulate on the contents of the FFT of the input signal. It is therefore of no doubt that those inherent features of the Fourier transform are going to affect the explications of the results of the analytic signal procedure.

```
\ -----
\  A small program piece which finds the imaginary part of a real signal
\  based on the analytic signal procedure.
\  The computation makes use of the final results of complex calculus based
\  on Cauchy principal value integration.
\  The length of the input array will be automatically truncated to the
\  maximum allowable power of 2.
\ -----
: my.hilbert
fft  []size  n.fft.pts :=
dup  becomes>  t1

dup  sub[ 1 , n.fft.pts 2 / ]
0    +1      z=x+iy *
t1   sub[ 1 , n.fft.pts 2 / ] :=

      sub[ n.fft.pts 2 / 1 + , n.fft.pts 2 / ]
0    -1      z=x+iy *
t1   sub[ n.fft.pts 2 / 1 + , n.fft.pts 2 / ] :=

t1   ifft
zreal
; -----
\ -----
```



7/59



8/59

Inherited Hilbert Transform Properties

- A problematic mechanism of direct deconvolution
- Effects of transient and phase noise
- Spectral repeatability
- Autocorrelation coefficients and power spectra



The Problematic blackbox mechanism

Spectral division: $H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$

Direct deconvolution: $h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{G(\omega)}{F(\omega)} \right]$

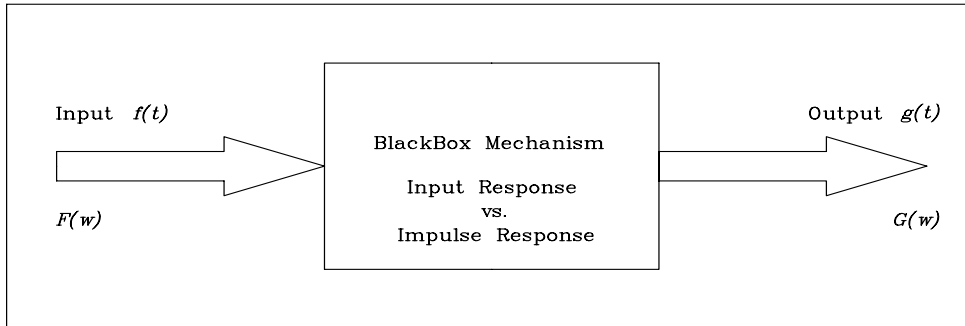


Figure 3: The simple blackbox here is to illustrate the following problem: Does direct quotient of spectral coefficients of two spectra physically significant? If a direct division of two spectra is taken, this blackbox implies that the output is the convolution of the input signal and a certain impulse response function, or alternatively speaking, the blackbox mechanism is the deconvolution between the output and the input signals. The concept is intuitively simple, but it is generally of little use due to the fact that the process is extremely error prone. The figure fully illustrates the inherent problems regarding a direct comparison of two spectra when there are concerns of non-stationary effects and other possible uncertainties.

Effects of ambiguity and phase noise

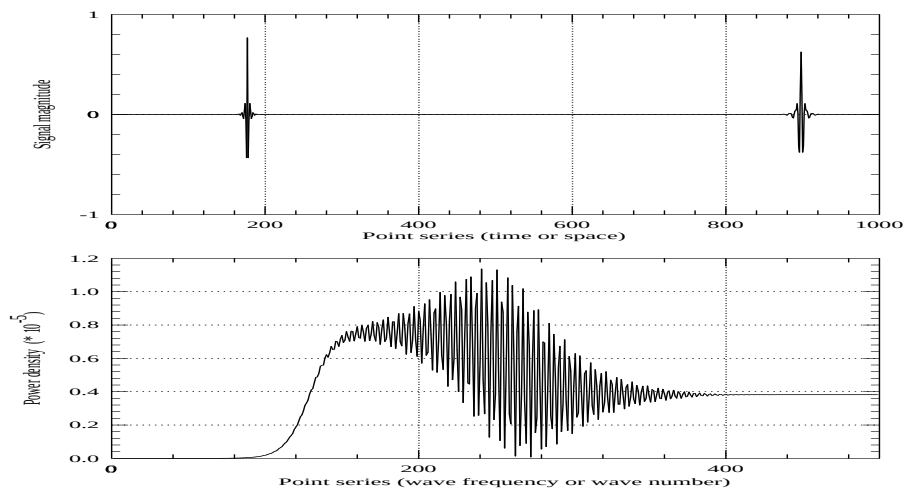


Figure 4: Effects of ambiguity and phase noise arising from local transient features of a signal are illustrated using two separated wavelets. Here two Lemarié wavelets located at two neighboring scales (the least two scales within a 1024-point series) are shown in the top figure. The pulse at left corresponds to the inverse wavelet transform for unit wavelet coefficient e_{600} ; the right corresponds to e_{470} . The power spectrum is shown in the bottom figure.



9/59



◀◀ ▶▶ ◀ ▶ 回舊 回新 ◻ 再見

12/59

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ 回舊 回新 ◻ 再見

110

Physical implication of the autocorrelation coefficients

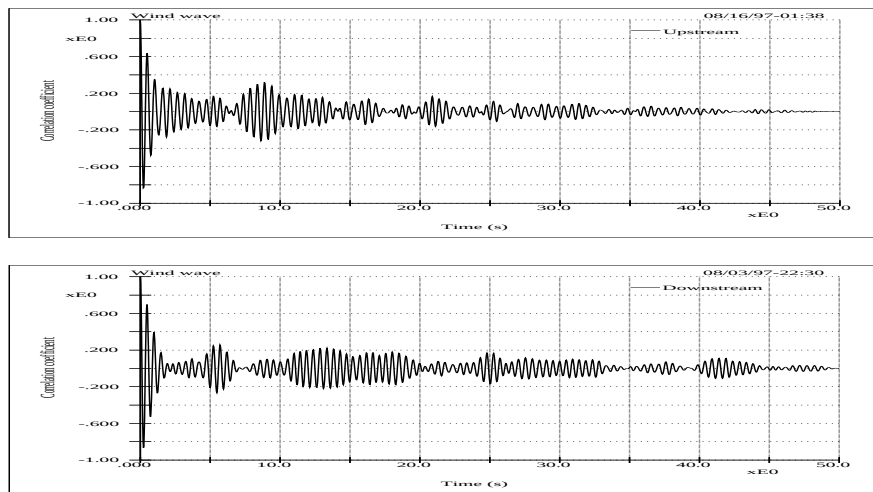


Figure 6: Wind waves in the tank soon lose their identities — the auto-correlation coefficients of two series of wind-wave signals measured at upstream and downstream locations in the oval tank. Here we see that the correlation level is low and diminishes rapidly. A sensible feeling is that these waves lose their identities extremely fast when viewed from Fourier spectral perspective.

Noisy wave form where natural frequency embedded

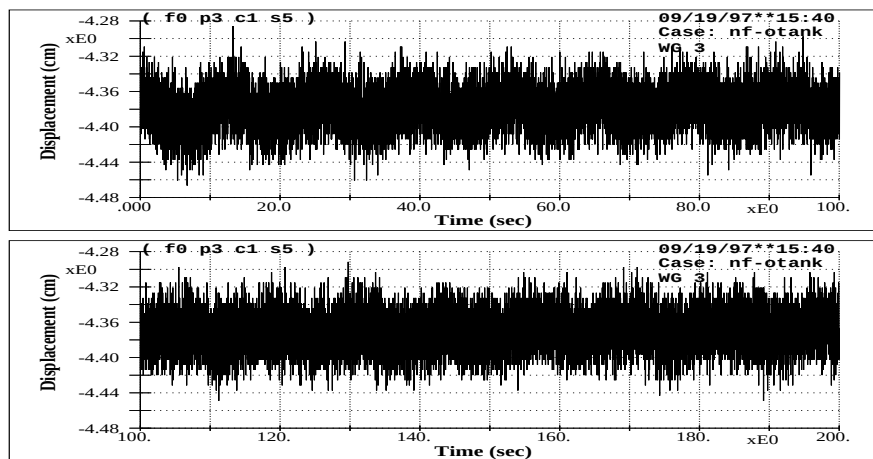


Figure 7: A noisy wave form in which the natural frequency of the wave tank imbeds within.



13/59



14/59



The autocorrelation function of the noisy wave form

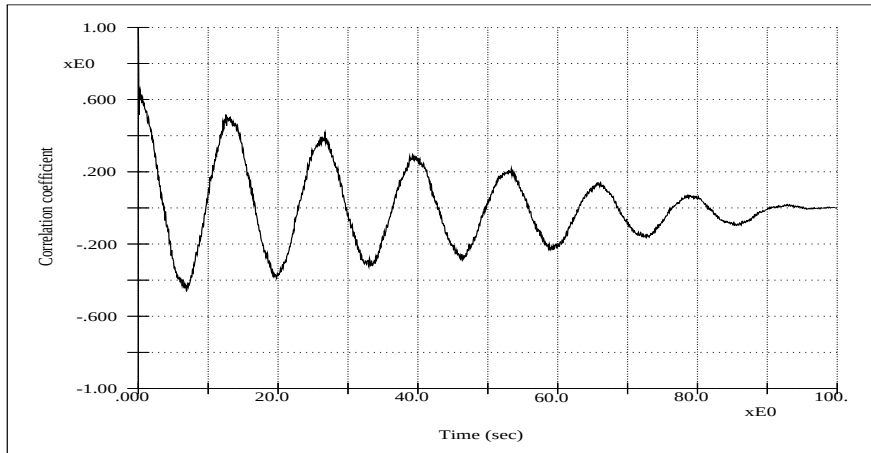


Figure 8: The embedded natural frequency of the wave tank – the figure shows the distribution of autocorrelation coefficients of the noisy wave form.

Minimally filtered signal of the noisy wave form

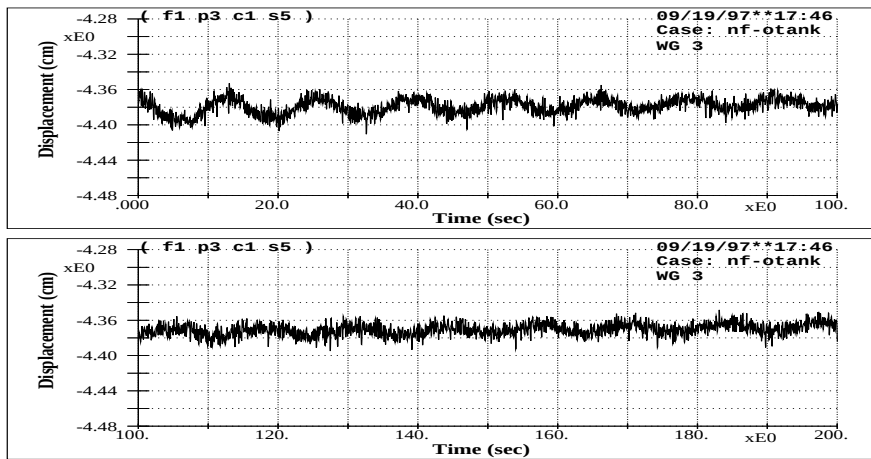


Figure 9: Low-pass signal of the noisy wave of little energy – Here Blackman filter with minimum degree of filtering is used. And one see that most of the noise is associated with relatively high frequency, in reference to those of water waves.

Power spectra for the noisy wave form

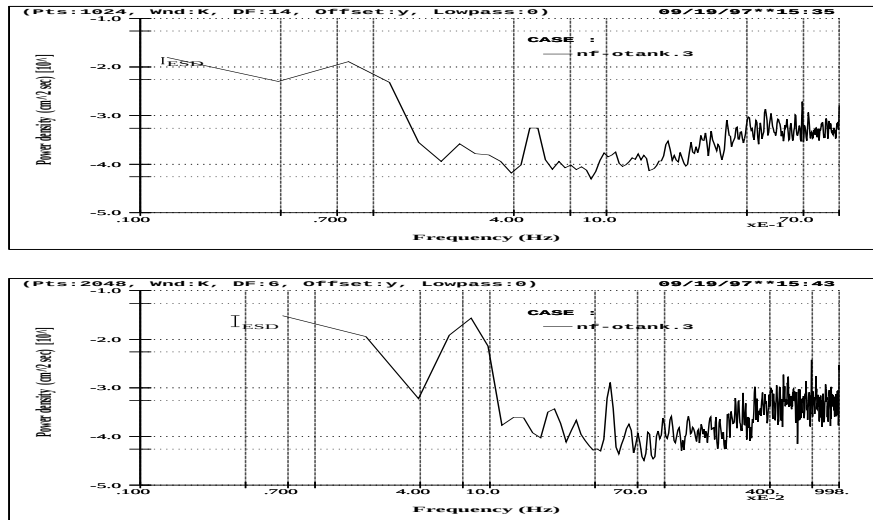


Figure 10: Power spectra for the signal shown in figure (Fig. 7). Since power spectrum is the Fourier transform of the auto-correlation function of the signal, the comparison with the auto-correlation curve indicates the existence of intricate differences between the two numerical implementations for a single formulation.

Characterizations and Numerical Modeling

CAUSES: Incompatible concepts and conflicting requirements

- The incompatible concepts between “instantaneous” and “frequency”
- The conflicting requirements of “support length” and “regularity”
- The interplays between amplitude modulation, frequency modulation, and phase

RESULTS: Paradoxes regarding the instantaneous frequency

- May not be one of the frequency in the spectrum
- Invariably continuous for a discrete spectrum
- May go well beyond the band, both higher or lower.
- May be negative.
- The whole signal at all time is needed to calculate any local
- Bear on local energy content



17/59



18/59





19/59

Simulations

$$s(t) = ae^{iat} + be^{i\beta t} + ce^{i\gamma t} = A(t)e^{i\phi(t)t}. \quad (16)$$

$$S(\omega) = a\delta(\omega - \alpha) + b\delta(\omega - \beta) + c\delta(\omega - \gamma). \quad (17)$$

$$A^2(t) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos[(\alpha - \beta)t] + 2ac \cos[(\alpha - \gamma)t] + 2bc \cos[(\beta - \gamma)t].$$

$$\omega_i(t) = \frac{1}{A^2(t)} \left\{ (a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + (\alpha + \beta)ab \cos[(\alpha - \beta)t] + (\beta + \gamma)bc \cos[(\beta - \gamma)t] + (\alpha + \gamma)ac \cos[(\alpha - \gamma)t] \right\}.$$



Continuously distributed and out of range

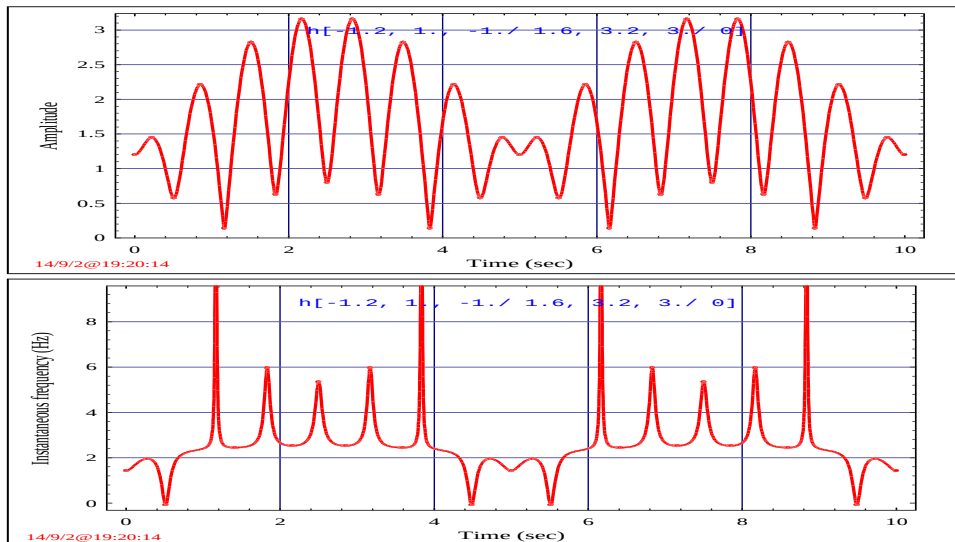


Figure 11: The amplitude and frequency modulation curves for a signal with three constituent components of the wave parameter set $\{(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)\} = [(-1.2, 1, -1); (1.6 \times 2\pi, 3.2 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$.



20/59



Negative frequency

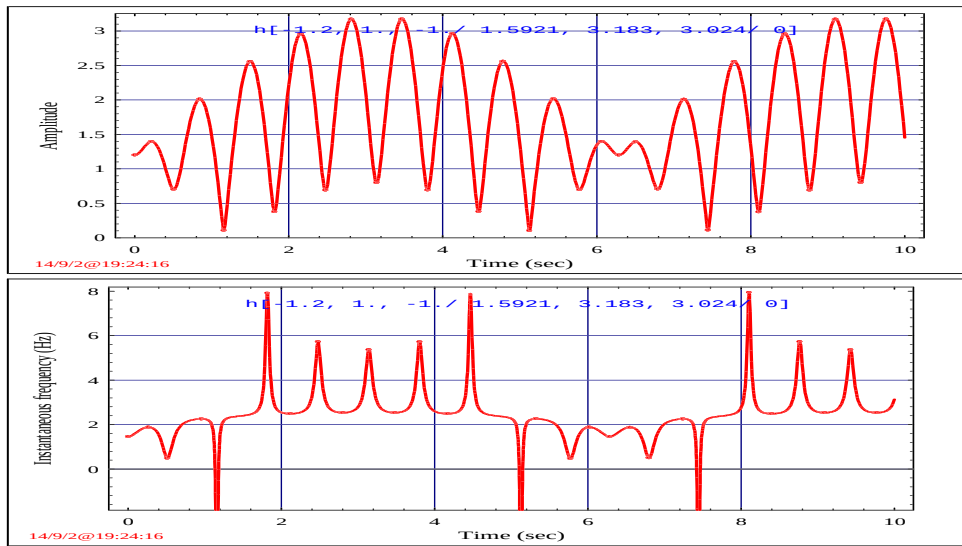


Figure 12: The amplitude and frequency modulation curves for a signal with three constituent components of another parameter set $\{(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)\} = [(-1.2, 1, -1); (1.592 \times 2\pi, 3.183 \times 2\pi, 3.024 \times 2\pi)]$. Here there are slight modifications to the frequencies of the sinusoidal constituents as used in the previous figure. As can be seen the modifications induce dramatic differences in the general shapes of the instantaneous frequency.

Phase effects

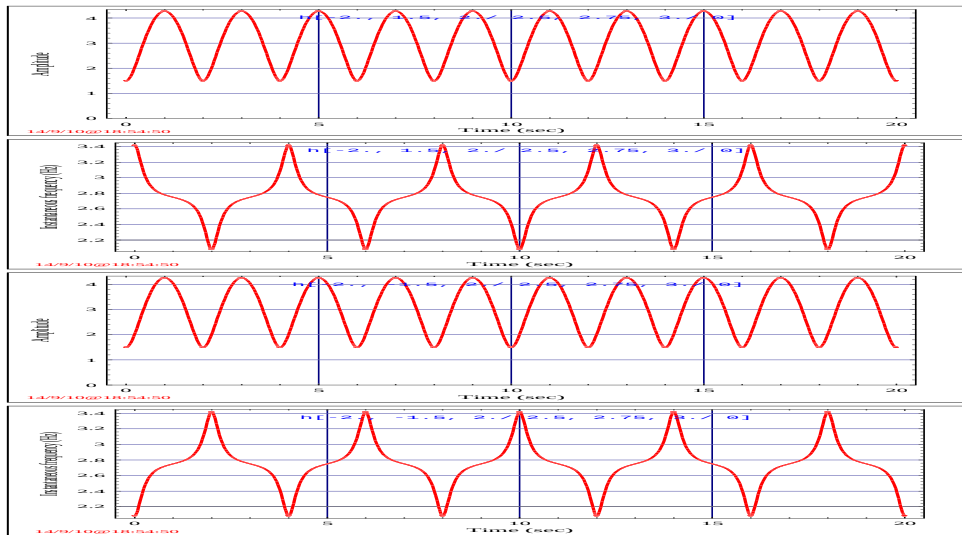


Figure 13: The amplitude and frequency modulations for two different sets of parameters, $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, 1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$ and $[(-2, -1.5, 2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$. Relatively, the only difference is a constant phase shift in one of the sinusoidal components. The figure is to be compared with the following one.



21/59



22/59



Another case of phase effects

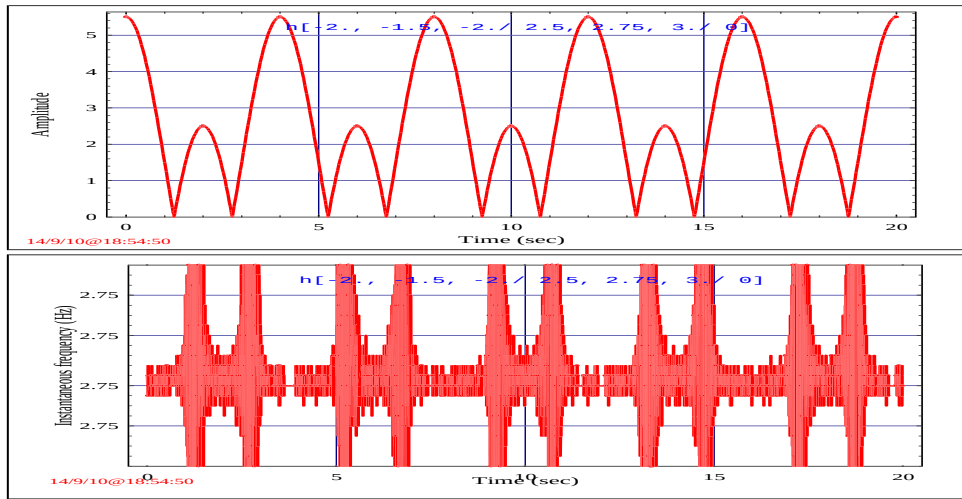


Figure 14: The amplitude and frequency modulations for another set of parameters $[(a, b, c); (\alpha, \beta, \gamma)] = [(-2, 1.5, -2); (2.5 \times 2\pi, 2.75 \times 2\pi, 3 \times 2\pi)]$. Again, there is only a constant phase shift in one of their sinusoidal components. This figure together with the previous one indicates the sensitivity of the instantaneous frequency on the relative phases of the spectral components. One concludes that the analytic signal procedure suffers severely from the phase noise effects just as the power spectra do. Note that the tick labels for the y axes of the instantaneous frequency are all of the same value; this is to reflect that the instantaneous frequencies are basically the same except that there exist unbounded points under machine-precision.

Amplitude modulations of band-filtered components

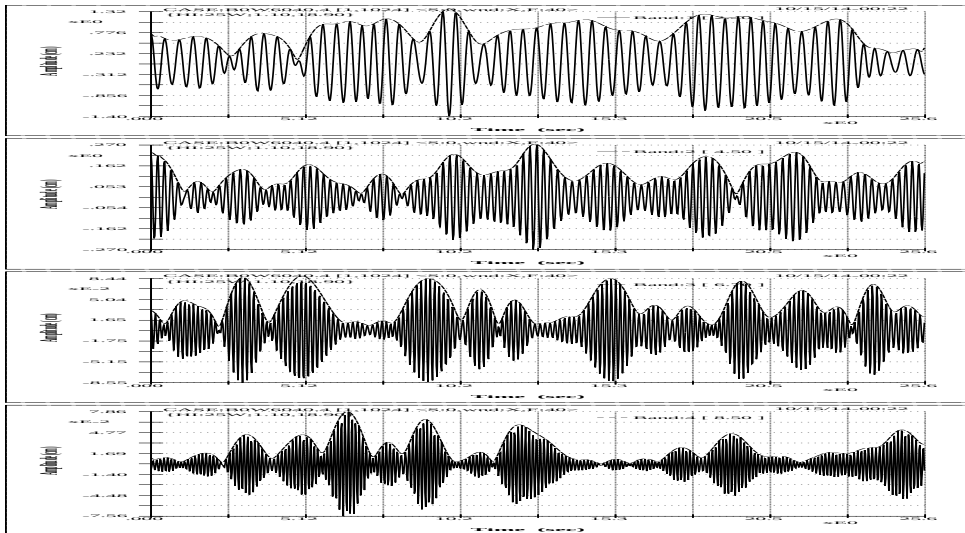


Figure 15: Amplitude modulation curves (the envelopes in dashed lines) for four different filtered bands of a wind wave signal in an oval tank.

Windowed band-filtered components

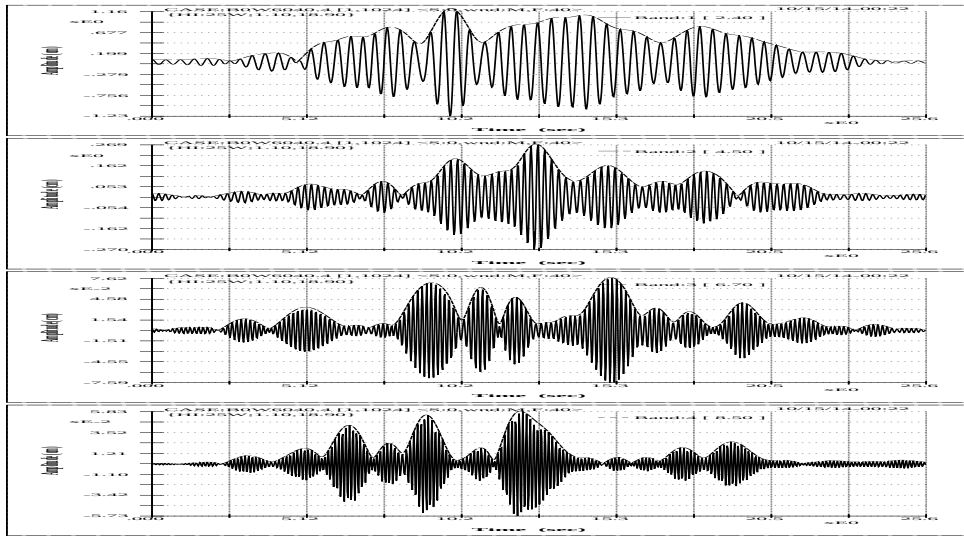


Figure 16: The windowed amplitude modulations for the four different bands of the same wind wave signal of Figure (Fig. 15).

Data windows

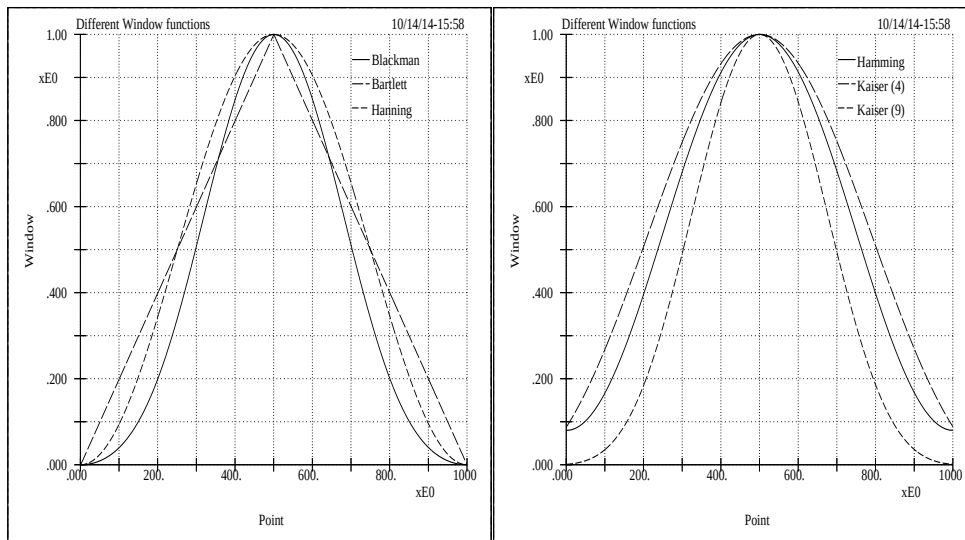


Figure 17: A few data windows for use in various numerical computations – the Hamming window is used in Figure (Fig. 16).



25/59



26/59



Amplitude's interplays -- relative rate of variation

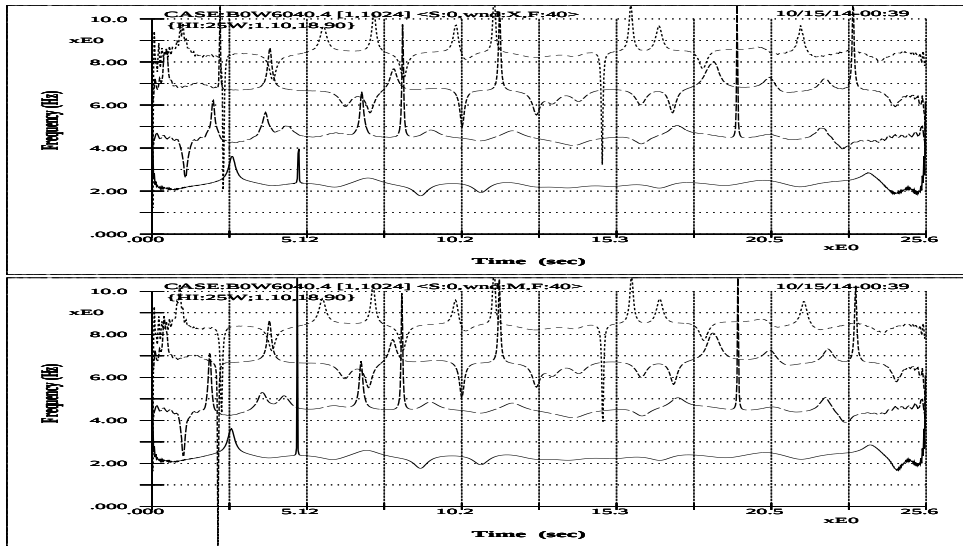


Figure 18: Instantaneous frequency distribution curves for the four different frequency bands with (bottom) and without (top) a data window being applied to the original signal (those shown in Figures (Fig. 15) and (Fig. 16)). The figure indicates that sharp variation of instantaneous frequency is mostly determined by local variation of amplitude envelope rather than its magnitude only.

Optimizations of Numerical Process

Twists and tricks

- Consistent differentiations of phases – automate the process
- Base band conversions – remove frequency aliasing
- Designs of Hilbert filters – fine-tune and reduce undesirable interferences
- Choices of filter parameters – case dependent

Consistent phase differentiations

$$z(t) = A(t)e^{i\phi(t)} \quad (20)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{z(t)}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} + iz(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (21)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{iz} \left[\frac{dz(t)}{dt} - \frac{z(t)}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \right] \quad (22)$$

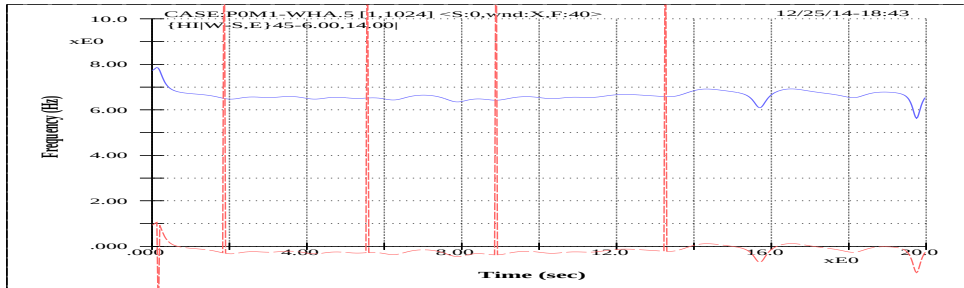


Figure 19: An improper treatment of the time differentiation of phase induces undesirable bad effects (shown as jumps) for the frequency modulation curves. The symptom is caused by a direct differentiation of phase values (arguments) based on the real and imaginary parts of z only. Note that the modulation curve situated around the horizontal axis (dashed line) is plotted with an offset equal to the value of the centering frequency of the solid line.

Aliasing and base band conversions

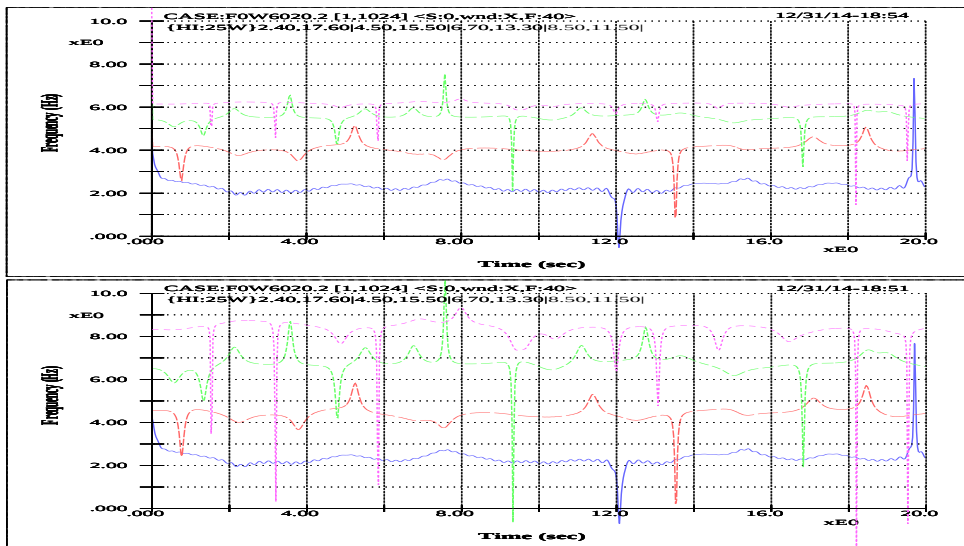


Figure 20: Frequency modulation curves without (top) and with (bottom) individual base band conversions. Without a base band conversion there is a frequency aliasing into the lower frequency region. And the aliasing downshifts of the center (or averaged) frequencies are ever more significant for higher frequency bands.



29/59



Hilbert filters -- odd number of convolution weights

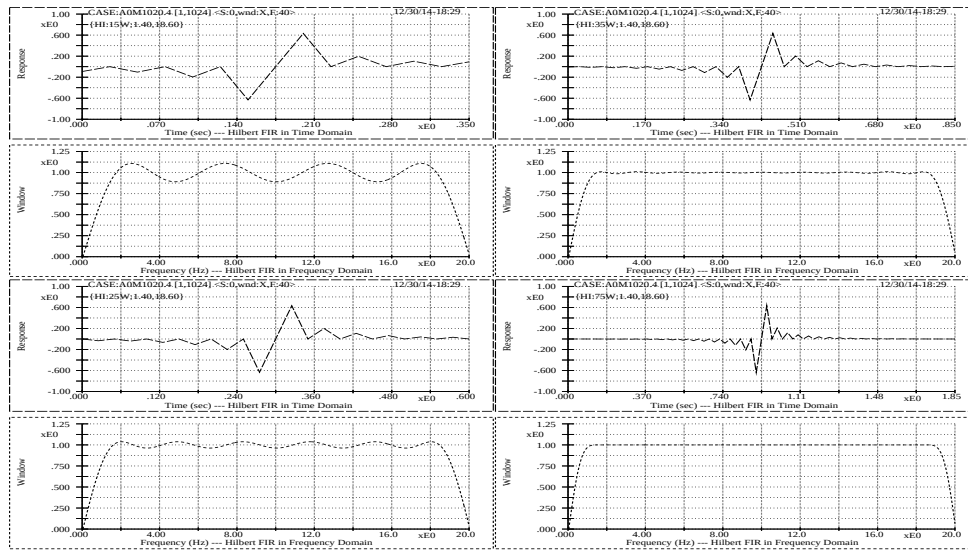


Figure 21: Hilbert filter pairs in time and frequency domains for various odd-value lengths (15、25、35、75) of convolution filter weights.

Hilbert filters -- even number of convolution weights

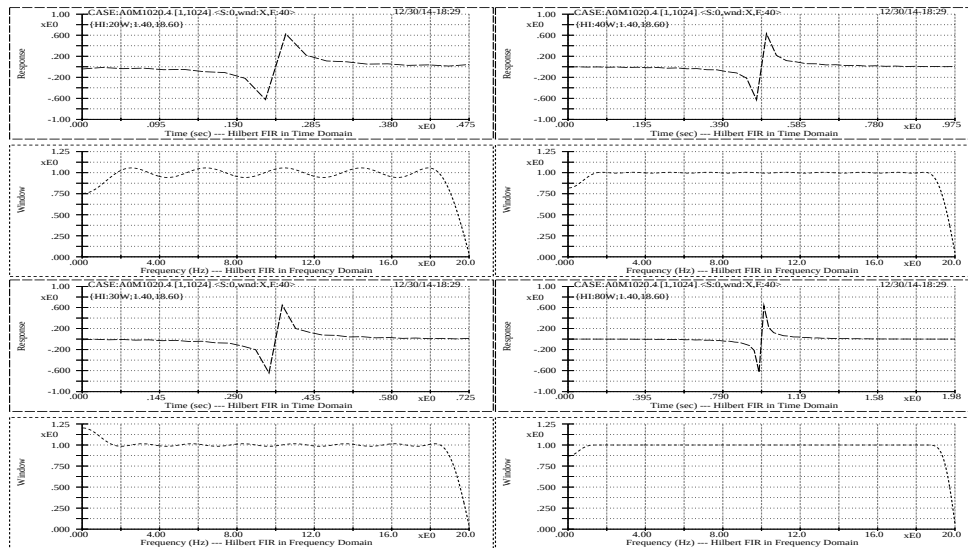


Figure 22: Hilbert filter pairs in time and frequency domains for various even-value lengths (20、30、40、80) of convolution filter weights.

Remez errors

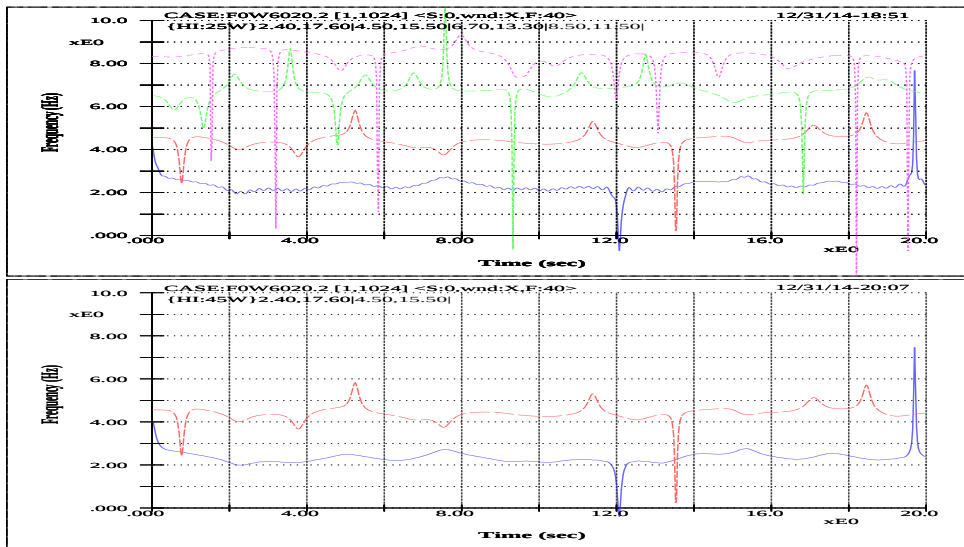


Figure 23: The frequency modulation curves for four individual bands of a signal using two different lengths of filter weight of 25 (top) and 45 (bottom) respectively. For the 45 convolution length the modulation curves can only be obtained for the lowest two bands. Beyond band 3 (centering around 6.7 Hz) there occur Remez errors.

Effects of start and end frequencies of Hilbert filter

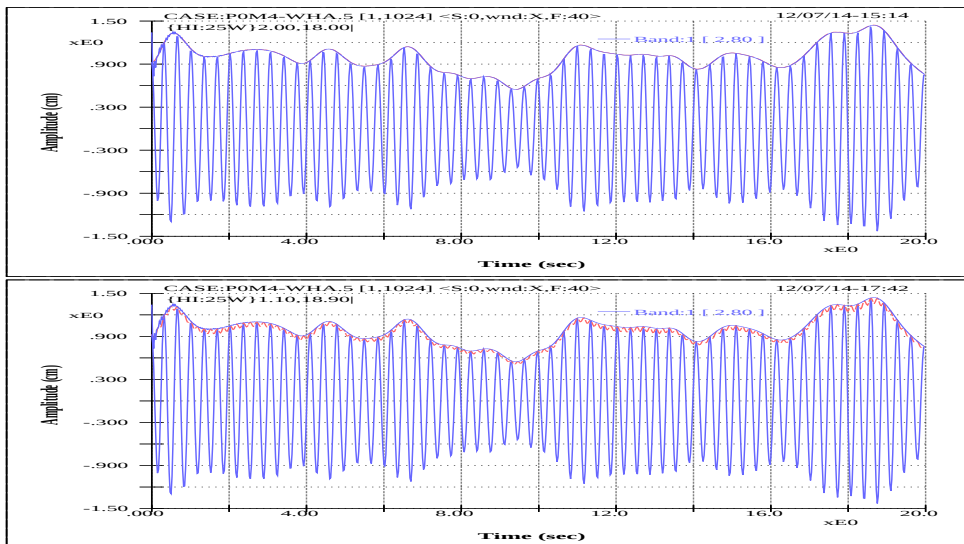


Figure 24: Effects on the amplitude modulation curves using Hilbert filter windows of the same filter length but with different start (as well as the end) frequencies. For the lowest band the start frequency of the Hilbert filter window is not to be chosen too close to the origin of the frequency axis.



33/59



34/59



Edge effects and improper filtering -- case dependent

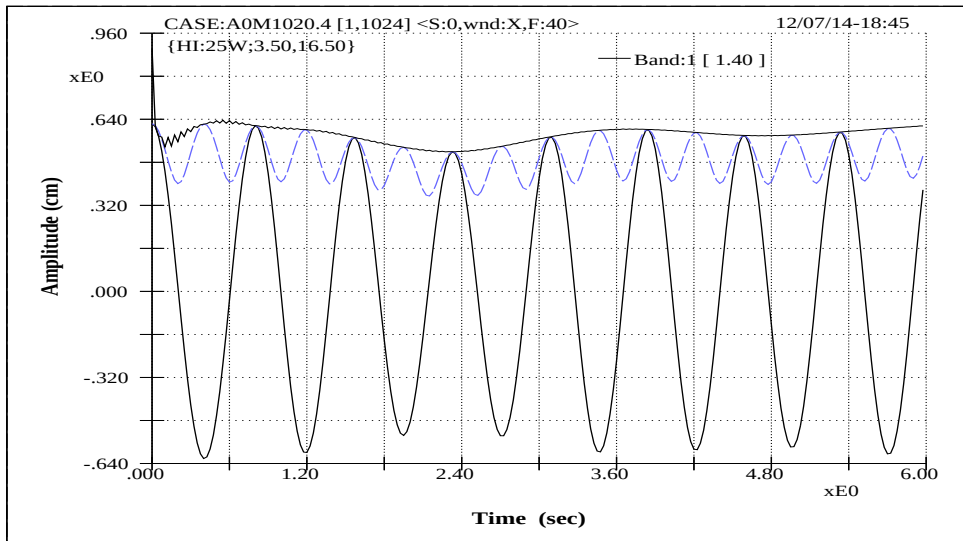


Figure 25: Two amplitude modulation curves with undesirable effects: the solid line is associated with edge effects; the dashed line is associated with an improper range of the Hilbert filter window. The proper choice of hilbert filter is not a fixed one. It is case dependent and needs flexibility.

Applications and Case Studies

A few macroscopic characterizations

- The negation of the existence of bound waves.
- Comparisons of modulation features in the wave and aqueous flow fields.
- Characterizations of wave growth and decay time span ratio.

Layout of experiment

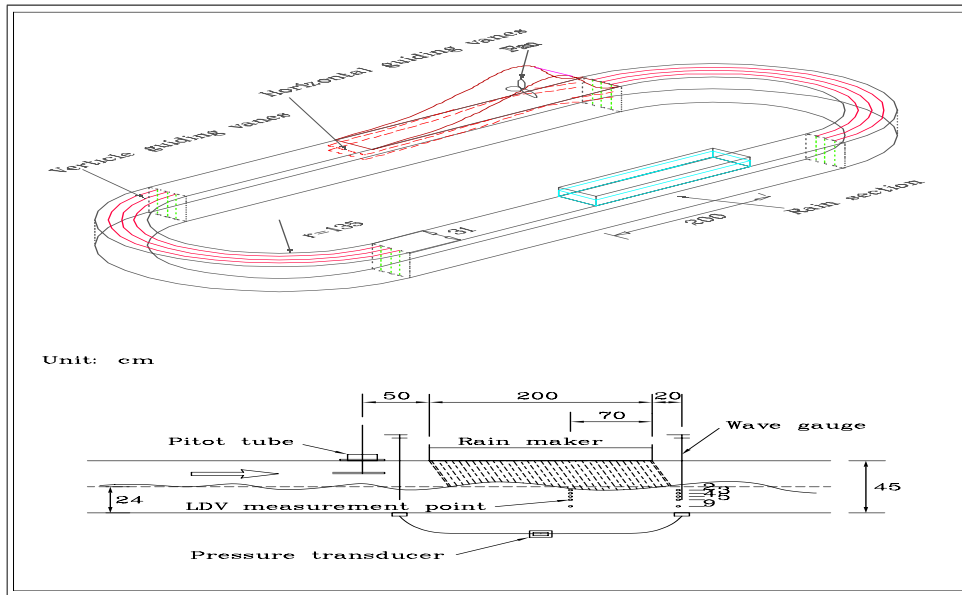


Figure 26: Schematic layout of experiment

Power spectra of four Stokes waves

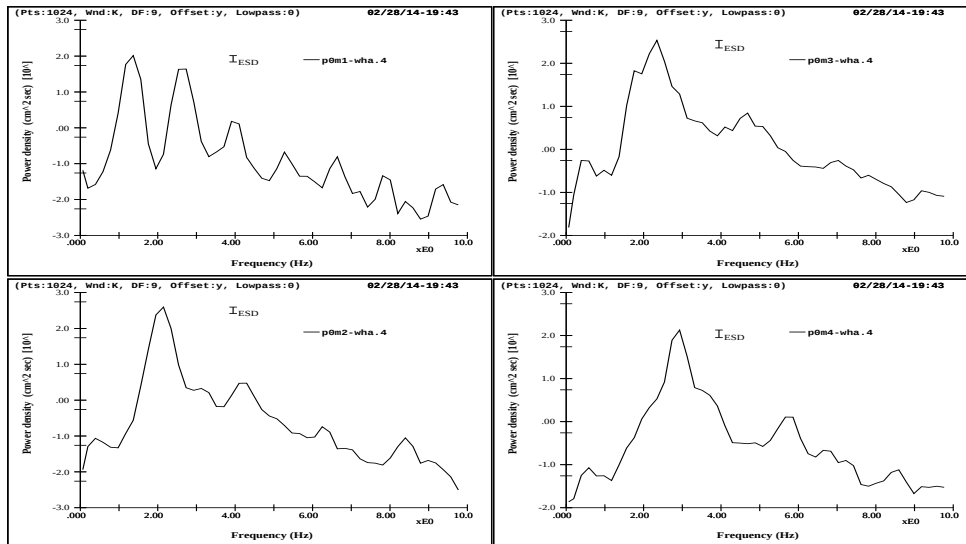


Figure 27: Power Spectra of the four Stokes waves with fundamental harmonic frequency of 1.4 (top left), 2.2 (top right), and 3.0 Hz (bottom right), respectively.



37/59



38/59



Evolutions of FMs of the Stokes wave (1.4 Hz, steepness 0.06)

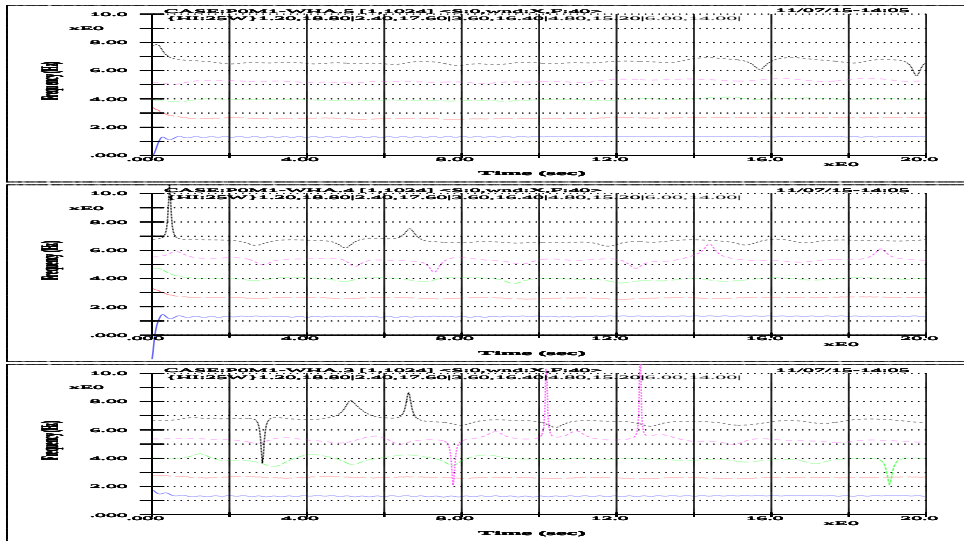


Figure 28: Downstream evolutions of the frequency modulation curves for the various harmonic components of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 1.4 Hz and corresponding wave steepness of 0.06. The top sub-figure is for station 2.3 m away from the wave generator. The middle sub-figure for 3.5 m. And the bottom sub-figure for 4.5 m.

Evolutions of FMs of the Stokes wave (2.1 Hz and steepness 0.20)

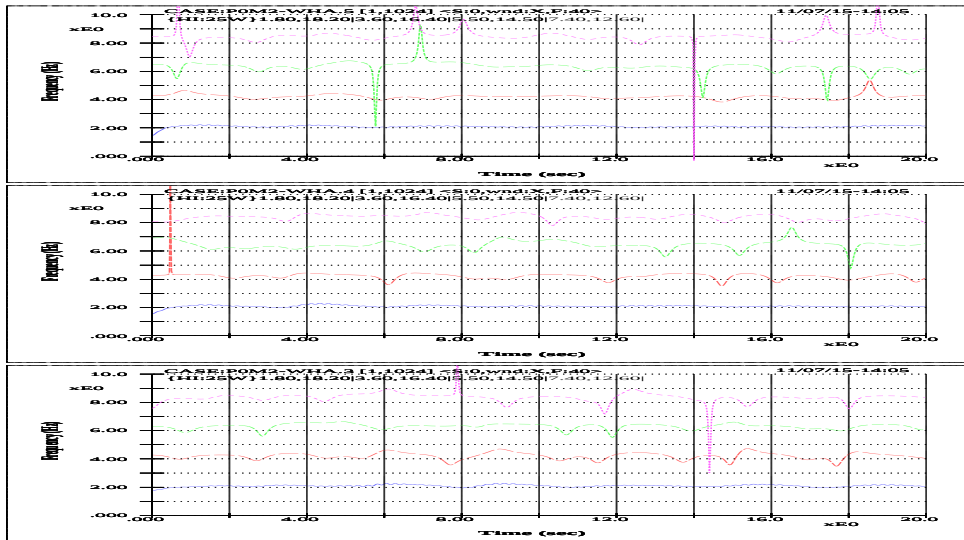


Figure 29: Downstream evolutions of the frequency modulation curves for the various harmonic components of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 2.1 Hz and corresponding wave steepness of 0.20. The measurement locations of the sub-figures are the same as those of the previous figure.

Evolutions of FMs of the Stokes wave (2.2 Hz and steepness 0.21)

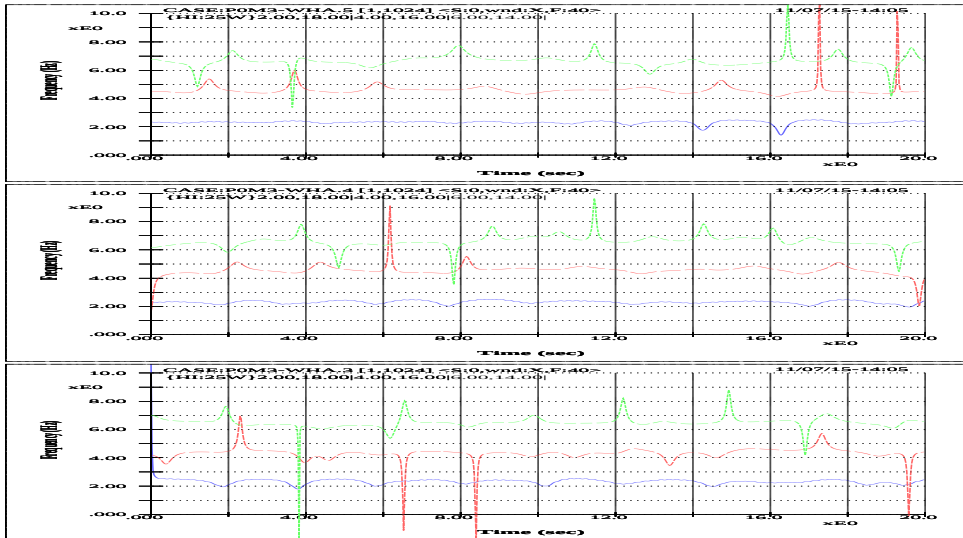


Figure 30: Downstream evolutions of the frequency modulation curves for the various harmonic components of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 2.2 Hz and corresponding wave steepness of 0.21. The measurement locations of the sub-figures are the same as those of the previous figure.

Evolutions of FMs of the Stokes wave (3.0 Hz and steepness 0.30)

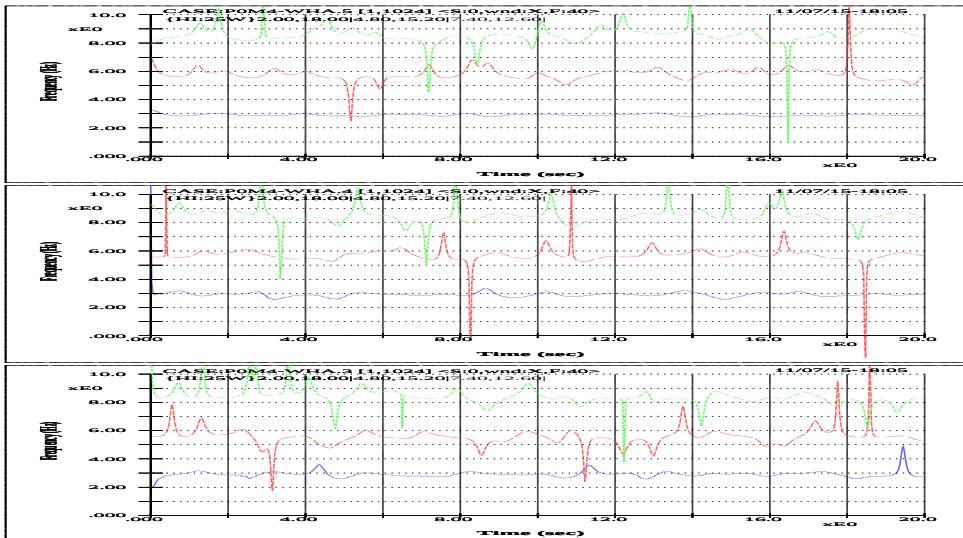


Figure 31: Downstream evolutions of the frequency modulation curves for the various harmonic components of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 3.0 Hz and corresponding wave steepness of 0.30. The measurement locations of the sub-figures are the same as those of the previous figure.



41/59



42/59



Evolutions of the AMs of the Stokes wave (1st, 2nd; 1.4 Hz, 0.06)

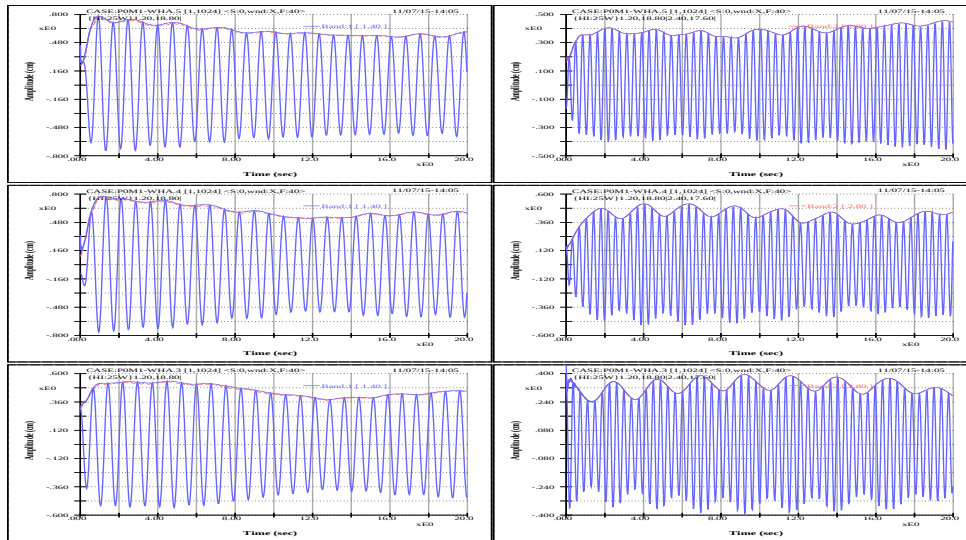


Figure 32: Downstream evolutions of the amplitude modulation curves for the first (left) and second (right) harmonic bands of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 1.4 Hz and corresponding wave steepness of 0.06.

Evolutions of the AMs of the Stokes wave (3rd, 4th; 1.4 Hz, 0.06)

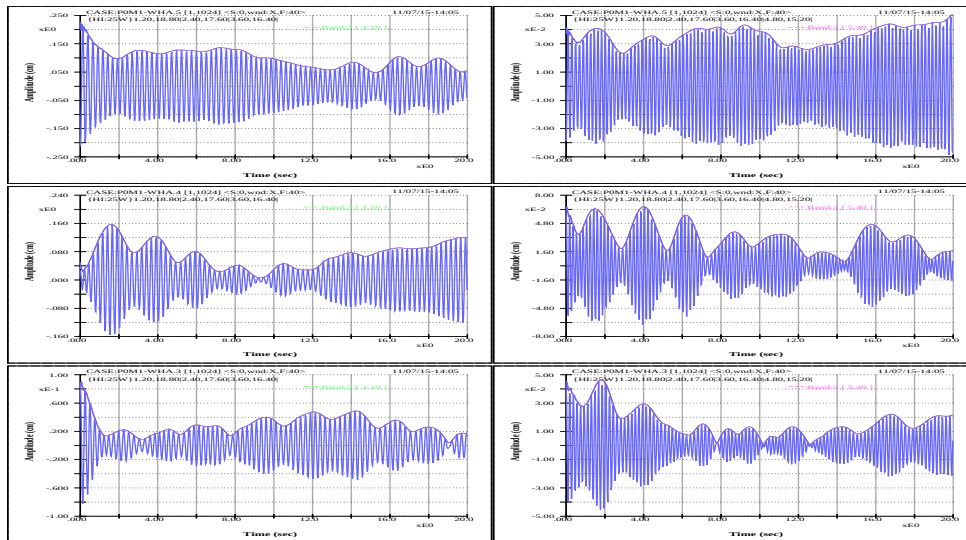


Figure 33: Downstream evolutions of the amplitude modulation curves for the third (left) and fourth (right) harmonic bands of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 1.4 Hz and corresponding wave steepness of 0.06.

Evolutions of the AMs of the Stokes wave (1st--4th; 2.1 Hz, 0.20)

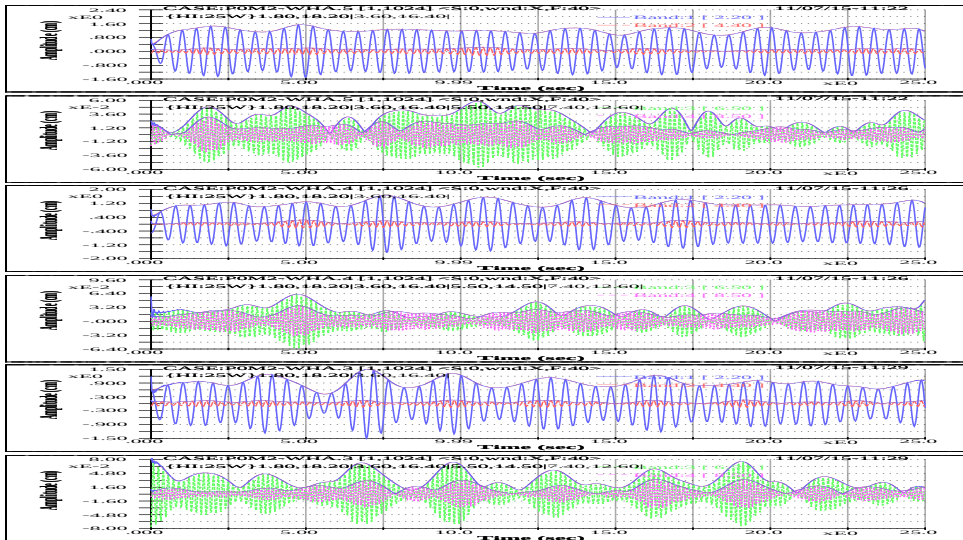


Figure 34: Downstream evolutions of the amplitude modulation curves (each two sub-figures is in a group) for all the harmonic bands of the Stokes wave with fundamental harmonic frequency of 2.1 Hz and corresponding wave steepness of 0.20. It is seen that the curves for the high frequency bands develop a more regularly oscillating (or up-and-down) pattern.

FMs in the wave and aqueous flow fields (Stokes, 0.06 and 0.20)

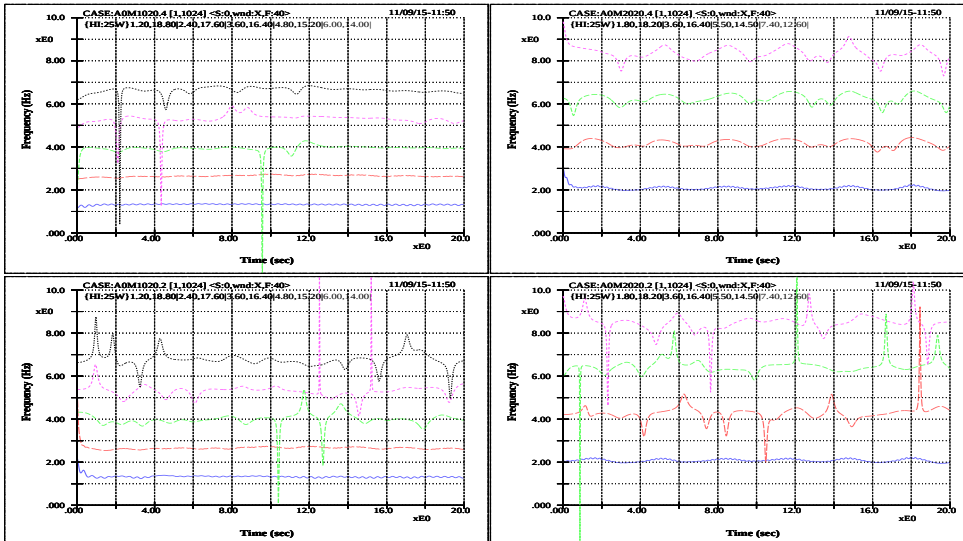


Figure 35: The frequency modulations curves in the wave (top) and aqueous flow (bottom) fields for the various bands of the Stokes waves with wave steepness values of the fundamental harmonics of 0.06 (left) and 0.20 (right). Here the aqueous flows are measured at 2 cm below the still water surface. It is seen that the flow fields are more complicate and their modulations are more significant and irregular, especially for the higher bands.



45/59



AMs in the wave and aqueous flow fields (1st--4th, Stokes, 0.06)

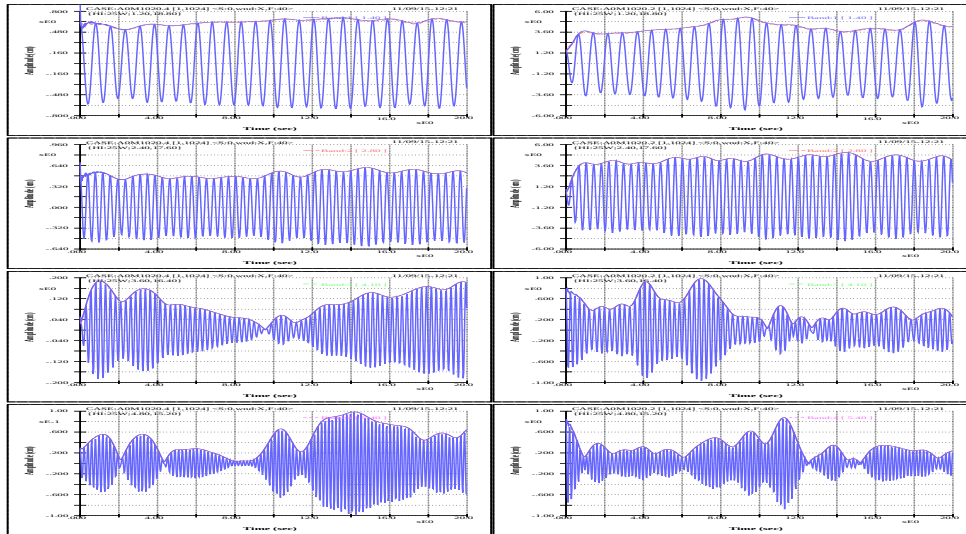


Figure 36: The amplitude modulation curves for the wave (left) and aqueous flow (right) fields for the various bands of the Stokes wave with wave steepness of the fundamental harmonics of 0.06. The aqueous flows are measured at 2 cm below the still water surface.

AMs in the wave and aqueous flow fields (1st--4th, Stokes, 0.20)

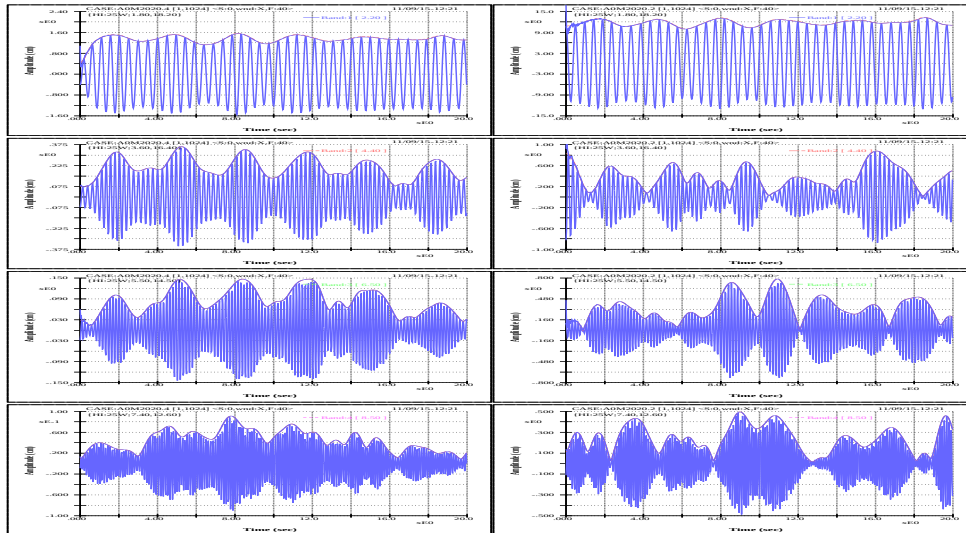


Figure 37: The amplitude modulation curves for the wave (left) and aqueous flow (right) fields for the various bands of the Stokes wave with wave steepness of the fundamental harmonics of 0.20. The depth of flow measurement is also at 2 cm below the still water surface. Here there is an indication that more turbulent features exist in the flow field than in the wave field for such a higher wave steepness value.

FM curves for wind waves and aqueous flows (depth 2 , 3 cm)

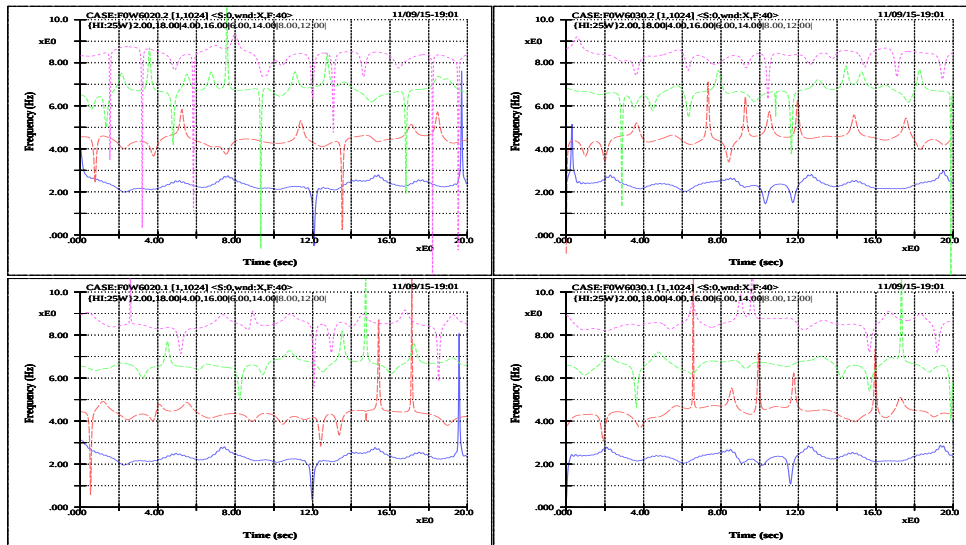


Figure 38: The frequency modulations curves for the 6 m sec⁻¹ wind wave (top) and the corresponding aqueous flow (bottom) fields. Here the two measurement sets are for aqueous flow measurement points at 2 (left) and 3 (right) cm below the still water surface. In contrast to the Stokes wave cases shown in several previous figures, the figure clearly shows that the modulations in the flow fields are not as violent as those of the surface waves.

AM curves in the wave and aqueous flow fields (Wind, depth 2)

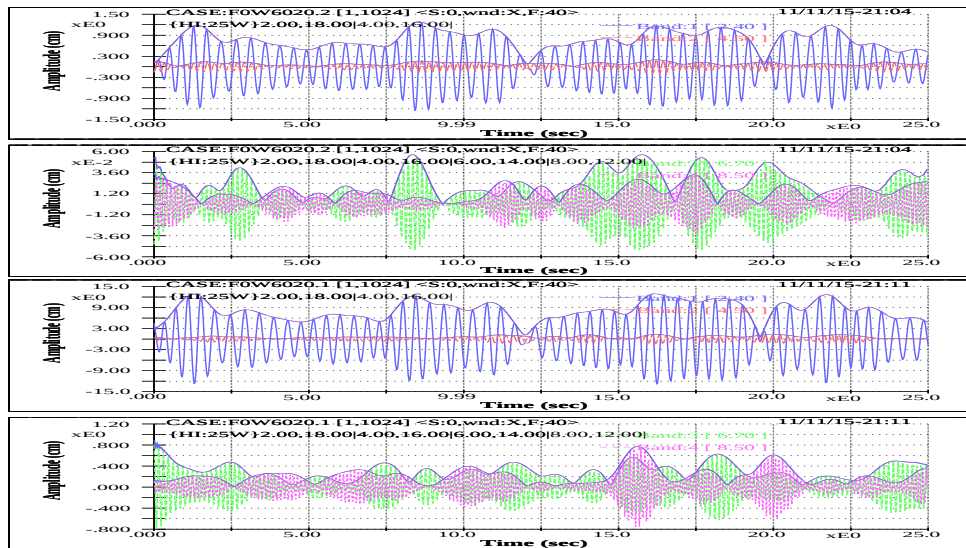


Figure 39: The amplitude modulation curves for the wave (top two sub-figures) and aqueous flow (bottom two sub-figures) fields. Here the flow is measured at 2 cm below the still water surface and the wind has a speed of 6.0 m sec⁻¹.



49/59



50/59



AM curves in the wave and aqueous flow fields (Wind, depth 9)

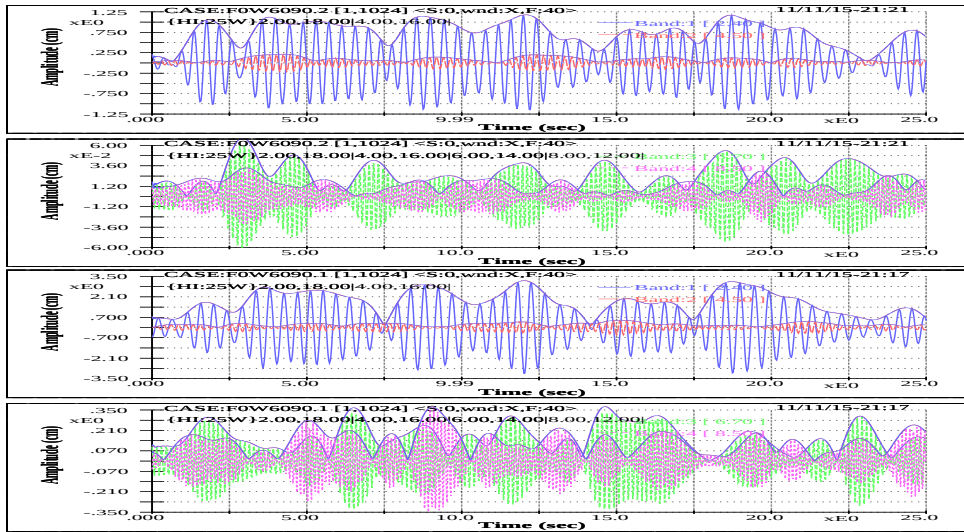


Figure 40: The amplitude modulation curves for the wave (top two sub-figures) and aqueous flow (bottom two sub-figures) fields in which the flow measurement points is 9 cm below the still water surface and the wind is the same as the previous figure. The modulation patterns show a tendency less directly brought down by the surface forcing, as are compared with those of the previous figure.

Wave growth to decay time span ratios

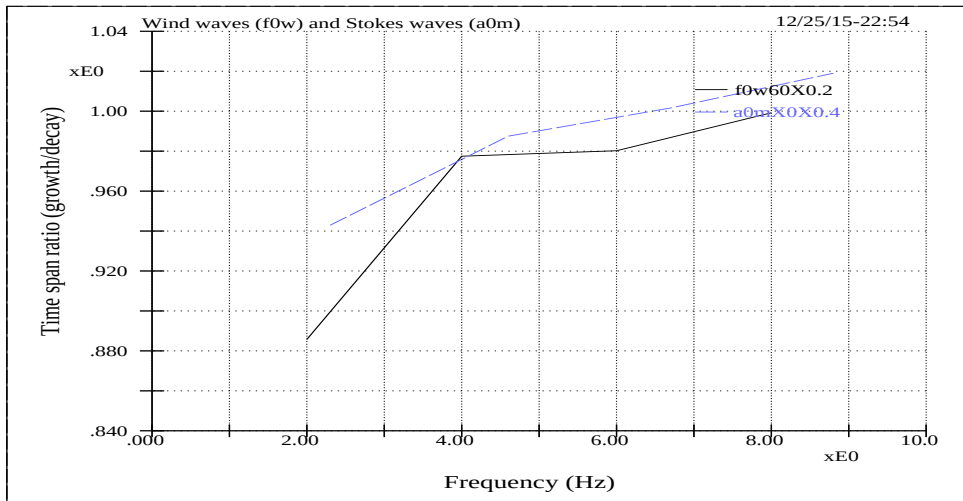


Figure 41: The characterization of wave growth and decay time span ratio as a function of representative center frequency of each individual band. The solid line is for the surface waves of 6.0 m sec^{-1} wind. The dashed line is for the Stokes wave cases with the fundamental harmonic frequency around 2.1 Hz. For the frequency range appropriate for the present oval tank experiments, it is seen that longer waves take relatively less time in gaining energy input. That is to say longer waves acquire energy in a relatively rapid process and spend relatively more time in giving out their energy. Explanations are given in the text.

Wave growth to decay time span ratios

Table 3: The wave growth to decay time span ratios for the wind wave and Stokes wave cases in the oval tank. Representative band frequencies should be referred to Figure (Fig. 41).

Cases	Frequency band			
	Band 1	Band 2	Band 3	Band 4
Wind waves [†]	$\frac{.4697}{.5303}$	$\frac{.4943}{.5057}$	$\frac{.4950}{.5050}$	$\frac{.4998}{.5002}$
Stokes waves [‡]	$\frac{.4853}{.5147}$	$\frac{.4969}{.5031}$	$\frac{.5004}{.4996}$	$\frac{.5047}{.4953}$

[†]Wind wave cases under 6 m s^{-1} wind

[‡]Mechanically generated Stokes wave cases with fundamental harmonic band centered at 2.2 Hz



53/59



54/59



Conclusions

- Instantaneous frequency — an open question
- The Gabor analytic signal procedure — one and a half dimension approach
- The frequency domain of the time-frequency window is compressed into one point — an extreme situation calls for utmost thought ☺
- Applications to complex or random wave systems — cautions needed and challenges ahead
- A few macroscopic wave characterizations — negation of bound waves, FM and AM of both surface waves and aqueous flow, wave growth and decay time spans

附錄二： 審查意見回覆表

交通部運輸研究所臺灣技術研究中心

自辦研究計畫期末審查意見回覆表

水波時頻分析之優化(3/4)－

蓋博解析訊號法與希伯轉換暨其應用

審查委員及審查意見	意見回覆
梁乃匡委員：	
1. 深入探討時頻分析數學與資料處理技術，可能可應用在實際問題上。	這一問題是歷來甚多委員所重視的。理論之實際應用始終是作者的研究初衷，也是作者對多年來在時頻分析探討所費心力進一步昇華的企盼，亦且是於公於私該盡、聊盡之責。另一方面，由基础研究以迄實際應用的歷程往往需經由試驗之精確掌控及釐定，特別是高階物理訊息之探討。作者於多年前，曾為這些方向，規劃並編列較大型且偏重於試驗驗證之四年度長期研究計劃，計劃及經費均經各部、會、院審核通過執行，國科會列案。不料幾乎所有預算均遭本中心主任及本科科長在本人未知下挪用一空，遂行不學無術、拉關係、搞利益輸送之意圖。其敗壞官箴、斲喪學術研究之風氣，實無以為甚。而各相關層級公務機關之怠惰也不堪與問。

審查委員及審查意見	意見回覆
岳景雲委員：	
1. 建議字體型式：第一章～第七章，與中心格式一致，圖隨文，第二章方程式請修訂。 2. P.69 風浪循環水槽試驗地點？ Pitot tube？量測風速？水深？ 3. P.71 尖銳度分別為 0.06、0.2、0.21、3.0 史托克斯波，是否加入水深因素（h）以 $U_r = \frac{HL^2}{h^3} = \frac{\left(\frac{H}{L}\right)}{\left(\frac{h}{L}\right)^3}$ 表示。	本報告編輯係以 $\text{\LaTeX}$ 程式為之。原始 $\text{\LaTeX}$ 程式及其甚多的擴充程式集（packages）均以英文為主，甚少考慮中文的使用。作者往昔曾投入甚多心力在這一系統的中文功能執行與擴充，但畢竟 $\text{\LaTeX}$ 尚未完美，無法盡如人意，一方面 $\text{\LaTeX}$ 本身的變動或安排邏輯與數學錯綜複雜，牽一髮動全身，一方面亦或改動太費時費力，投報率甚低，因而某些細節上仍取英文上實用或可以接受的方式。此些更改涉及修改核心程式（$\text{\LaTeX}$ kernel），尚無法達成。另報告中一些方程式的符號未完整正確顯示，係因本所所用印表機的驅動程式語言未能正確符合 Postscript 印表機語言，而印制廠未能使用作者所附給的電子檔印制所致，將要求注意這一問題。 所用試驗資料均取自於德拉瓦大學海氣互作用試驗室的循環水槽。另皮托管係量測風速用，而試驗水深為 24 cm。 因為所用試驗資料幾乎都屬於深水波，另一方面，由實測水波動流速亦得接近底床的波動甚小，因而未考慮水深的因子。

岳景雲委員：

- | | |
|--|---|
| <p>4. 本文俱有獨到見解，加強其在學術上、工程上之貢獻度。</p> | <p>這一研究的源起應屬於無心插柳性質，是作者先前為研究降雨對水波的影響的相關摸索過程的產物，它未能在該研究中有所著力，但還是產生一些柳暗花明的作用，為各種訊號分析學理帶來一些更深入的領悟，也是作者規劃進一步試驗及應用的動力來源，可惜正如答覆梁老師中所言，環境已然敗壞。</p> |
| <p>5. 佔期比（time spans ratio）與生命期是否一致？</p> | <p>基本上此處的佔期比與生命期是不相同的。佔期比在此係反應其能量的轉換是增亦或減，它的機制主要係因水波不穩（water wave instability）亦或測頻不穩現象（side band instability）或非線性行為等。</p> |

審查委員及審查意見	意見回覆
楊瑞源委員：	
1. 研究具基礎性之學術探討，水波之應用具體而嚴謹。 2. 建議可再增加波浪調頻過程中主頻與邊頻間的能量轉換關係。	這一研究屬於摸索過程的學習，是無心插柳性質的產物，雖然投入之結果往往未必能盡如原先所欲，但往往還是有不同回報或新啓示、新發現，另一方面也為作者先前規劃進一步試驗及應用帶來新動力，可惜正如先前答覆，環境已然不存在。 基本上這一課題是非常彈性化亦且複雜的學問。正如報告開頭引言所述，不同訊號分析法所涉學理非常龐雜，各有特質亦各有不足或不定性。單單主副頻的細部定義與區判就是甚大的問題，有太多可供研究的地方。另此處應用內容尚僅是現象表述，未涉及內部能量數理。主副頻間的能量轉換，無論理論上或試驗上均是一項大挑戰。

審查委員及審查意見	意見回覆
黃清哲委員：	
1. 本研究針對過去慣用的時頻分析提出新的分析方法，可克服舊有方法的缺點。 2. 利用 Gabor 方法分析訊號時，視窗函數為一指數衰減函數，第 6 章的分析應該說明所用指數函數為何？	此處所探討的是相關於希伯轉換之蓋博解析訊號法，它僅僅是廣泛時頻分析領域的一項類疇，或小分支，亦或一種表述方式，仍然有它的拘限性及不定性。只是一些研究者在使用某一特定技法時，往往會放大其長處而隱匿其不足，甚或不解其為假象。此一研究的重要精神是：由基礎建構，避免指鹿為馬，不選擇性表述。 這裡須對蓋博轉換（Gabor transform）、希伯轉換（Hilbert transform）、蓋博解析訊號法（Gabor analytic signal）這三者稍行說明。蓋博解析訊號法相關於希伯轉換，但它與蓋博轉換基本上是不太有關聯。蓋博轉換涉及模擬函基（function basis）所用的高斯函數罩窗，其指數衰減罩窗屬於 data window，其主要功能係模擬訊號的「有限生命期」（類似仔波的用途）。而此處的蓋博解析訊號法並未涉及這一指數罩窗，它所涉及的是頻率罩窗（Hilbert filter），這一頻率罩窗基本上同頻帶濾波窗或 narrow band filter，其主要功能係取得頻帶解析訊號，另含降減邊緣效應。本研究所涉頻帶濾波罩窗其參數選擇需視訊號本質作不同選擇，參數不定，另這些參數均有顯示在個別分析圖中。

黃清哲委員：

- | | |
|--|---|
| <p>3. 在造波水槽中造成 frequency modulation 的機制為何？（每一個 mode 的頻率會隨時間而改變）</p> <p>4. 建議後續的研究中，可探討水流 modulation 與 wave modulation 之間的關係。</p> | <p>依據作者的認知，它是物理本質反應於數理特性。它的機制主要係因水波不穩（water wave instability）或測頻不穩現象（side band instability），亦或非線性行為或外在因子等。</p> <p>本報告是有一些表面水波調變與水體波動調變的對照關係（6.4 節），並有一些對照現象解說，基本上由這些對照關係可以顯示出此處對試驗的掌控信心，亦且反應量測精度與分析的可靠性。其實，此一後續研究（另主要涉及仔波應用）正是作者當年提出一個涉及試驗之大型研究的核心重點（針對此課題，也在前主任內購置了一些或部分相關氣與水測儀），無奈正如先前答覆諸委員所提及的，體系已然敗壞，風氣早蕩然不存。</p> |
|--|---|