

# 試驗室方向譜模擬及測量技術發展規劃

計劃主持人：徐進華

協同主持人：歐陽餘慶

研究人員：陳明宗

張富東

## 誌 謝

本計劃執行過程中承三聯公司江景泉副理，國科公司陳玉書經理，暉特公司蘇茂松董事長，以及系統公司的江世達先生代為接洽國外機構，安排研習事宜，所惠良多，在此敬表謝意。此外作者在思考測方向譜的方法時，曾與台大海洋研究所陳慶生教授討論，獲得很大的啓發，故專此誌謝。最後本研究報告的初稿承蒙楊怡芸小姐、陳毓清小姐、以及林隆貞小姐協助打字，特別是楊怡芸小姐在時間緊迫下，以其熟練的技巧惠予配合，願在此致萬分的謝意。

# 試驗室方向譜模擬及測量技術發展規劃

## 目 錄

誌 謝.....	I
壹. 綜合說明.....	III
貳. 出國研習多方向造波設備報告.....	1
叁. 應用波高計與流速計測方向波譜的新方法.....	16

## 壹. 綜合說明

本計劃的目的在探討本所設置一多方向造波系統的可行性，並找出其最佳的方案，故本計劃的主要工作項目之一是出國研習多方向造波設備的功能及其目前發展的概況，有關這方面的心得可見於「出國研習多方向造波設備報告」一文中。

由於利用多方向造波設備在試驗室模擬海上波浪能否成功有一個先決條件，即必須對真實海面波浪的特性有所瞭解，特別是有關其能量在各方向上分佈的狀況，有鑒於此，本計劃的第二個目的即在瞭解目前測方向波譜技術的發展及建立本身的測量能力，有關這方面的研究結果寫在「應用波高計與流速計測方向波譜的新方法」文內。

# 出國研習多方向造波設備報告

徐進華

## 一、前 言

本次出國研習是屬於本所基本研究計劃「試驗室方向譜模擬及測量技術發展規劃」工作項目之一，其目的在瞭解多方向造波系統目前的發展及應用情形，作為本所評估未來購買此種設備及發展方向譜模擬技術的參考。

為達到以上目的，作者在十五天的行程中訪問了幾乎世界上所有著名的多方向造波機的製造公司與機構，並訪問了幾所有關的研究單位，在訪問中作者嚐試針對以下問題進行瞭解：第一是有關在實驗室模擬自然海面波浪的理論，第二是多方向造波系統的軟硬體目前的發展情形，包括其功能與限制，第三是此種設備在模型試驗與其他方面的應用情形。

以上諸問題若能獲得瞭解，再加上價格的考慮，將有助於本所決定是否應購買此種設備以增進本所未來研究的能力與範圍。另外，由於此種設備並無一個標準的規範，而需視買者的需要而定，故由本研習所獲得的資料，亦將在本所決定購買時，有助於決定適當的規範。

本報告首先將把作者參觀研習的幾家機構加以描述，且把作者在參觀中所見所聞，特別是與多方向造波機有關的加以說明，接著作者將針對上述的三個問題，將作者此行所獲得的資料綜合起來，做有系統的說明，最後並做一些結語。

## 二、研習過程

本次行程包括參觀日本石川島播磨重工業株式會社(簡稱IHI)，美國Arctec Offshore Corporation(AOC)，美國MTS Systems Corporation (MTS)，以及丹麥 Danish Hydraulic Institute (DHI)這四家製造多方向造波機的機構，另外並參觀了日本的大成建設株式會社，運輸省港灣研究所，以及運輸省第四港灣建設局，這三個機構，僅港灣研究所擁有多方向造波機的設備，其餘者僅最近由IHI提供了2-D的造波機，IHI 的人員爲了要顯示其設計與製造造波機的能力與經驗，故亦安排此行程，因此全部參觀行程如表一所示。

表 一

日 期	參 觀 機 構
10月 2日	上午：IHI，下午：大成機構
10月 3日	港研所
10月 4日	四建局
10月 5日	A O C
10月 6日	A O C
10月 9日	M T S
10月10日	M T S
10月12日	D H I
10月13日	D H I

各機構的現況與特徵如下：

IHI IHI 乃為一營業額約三、四十億美元的相當大的公司，它最早是以海洋和船舶的業務為主，但如今僅15~20%的業務與海洋有關。作者這次實際僅參觀IHI 位在橫濱的技術研究所中的船舶海洋研究部，主要參觀的設備包括一個 210 × 10 × 5米的 Towing Tank，以及一個70 × 30 × 3米的Seakeeping and Maneuvering Tank，兩者皆裝有IHI 自行設計製造的由油壓控制的2-D flap-type 造波機，其中，在Towing Tank的造波機，由於是建造於1966年，故顯得較老舊，IHI 目前計劃在明年將它改換為一個多方向造波機，另外，IHI 目前也正為船舶海洋研究部興建一些新的建築，當作者參觀時可以見到一些地基正在整理。

除參觀IHI 有關海洋及船舶的研究設備以外，作者並觀看了一卷介紹IHI 這家公司的錄影帶，故儘管此行無法看到IHI 的全貌，但由這卷錄影帶可以瞭解，IHI 目前的業務涉及海洋、陸地與空中三者，且技術相當的先進。另一方面，由於IHI 本身尚未按裝多方向造波機，故在此僅能與IHI 人員在口頭上討論一些有關多方向造波機的問題。IHI 目前僅為日本的港研所設計製造過一組多方向造波機，故有關這方面的討論將留待介紹港研所時行之。

大成建設 大成建設是日本幾家主要的建築公司之一，它在橫濱有一個技術研究中心，是日本建築界首次成立類似的研究單位(成立於1985年)，這個中心大約有130個研究人員(不包括研究助理)，它的海岸及水力工程部門在1982-1984年曾委託IHI設計其海洋沿岸水槽，其中包括兩具油壓驅動Plunger-type 2-D的不規則造波機，作者在IHI 人員的陪同下參觀了此一新穎的水槽，這個水槽不大(35.5 × 17.0 × 1.6米)，但具有由電腦控制的波、潮汐與沿岸流發生裝置，且具有一個功能相

當多的觀測台車，使做實驗極為方便。

港研所 港研所是目前日本唯一擁有多方向造波機的研究單位，此造波機是由IHI在1983年開始製造，歷經三年完成，它由35個piston type的造波板組成，每一個造波板（寬0.8米）皆由一個獨立的伺服馬達驅動，參觀此造波機是這次日本之行的主要目的之一。

當作者在IHI人員陪同下參觀港研所時，港研所的研究人員正利用多方向造波機做模型試驗，故有機會實地觀察此造波機的操作情形，在參觀時，港研所的人曾為我們示範產生斜角規則波以及多方向不規則波，但這時由於水槽內佈置有一些防波堤的模型，故波浪在被防波堤反射以後無法表現其完整的面貌，不過即使如此，我們仍可由造波板的運動看出其位置與速度的控制相當準確，只是此造波機位於水下的鋼架有明顯生鏽的現象。

除了參觀港研所大水深海洋構造物實驗場內的設備以外，我們還請教了港研所波浪研究室的高山知司室長一些問題，高山知司室長對利用多方向造波機模擬實際海面波浪的理論頗有研究，曾有很多這方面的著作，且目前港研所用來控制多方向造波機產生三度空間波浪的軟體，皆由波浪研究室自行開發。有關高山知司室長對多方向造波機目前發展情形的意見，我們將在下一節討論。

四建局 四建局位於下關的水理實驗場，最近也由IHI設計製造了六個2-D piston-type不規則造波機，這六個造波機也是由伺服馬達加以驅動，每一個造波板寬6米，高1.5米，即使體積相當大，但它們由兩個人即可移動，而不需要使用台車。此組造波機乃於1986年完工，目前完全看不出有腐蝕的現象。當我們參觀時，水槽內沒有水，不過IHI的人仍然示範產生規則波與不規則波兩種情形，當6個造波機排成一條直線時，可以看出6個造波板振動的極為一致。

AOC 位於美國加州的AOC是一家私人公司，規模不大，但擁有北美地區最大商業用的Towing and Seakeeping Basin (90×14.6×4.6米)，故極適合用於測試大尺度的模型。此外，AOC還有一個Wave and Current Basin，其內裝有一個AOC自行設計與製造的多方向造波機，利用這些設備，AOC從事了許多模型試驗，包括一些著名的海洋結構物及船隻的模型，除此之外，AOC也提供現場觀測的服務，另外它也設計與製造一些在實驗室或現場使用的儀器和設備，如SAFE JACKER System、Tow Monitoring System、Imaging、Mapping and Profiling Sonar System、以及造波系統等。

AOC為客戶設計與製造造波機(不包括為其本身製造者)僅有五年的历史，且其主要業務並非生產與製造(雖然它擁有一個以一個研究單位來講相當大的工廠)，當作者參觀時，AOC的人員正在測試控制其多方向造波機的新軟體，由於此軟體尚有毛病，故這個包含有40個Plungers的造波機，振動的非常不順暢，有時且完全失去控制，即使是在其他測試中，效果也不是很理想，但要指出的是AOC的這組造波機乃於1981年裝設完畢，故應不能代表其目前的技術。AOC目前據說正在為大陸上的大連工業大學以及西班牙海軍設計製造由伺服馬達驅動Flap-Type的多方向造波機。

MTS MTS是一家以製造材料與產品測試設備聞名的公司，它的總部位於美國明尼蘇答州，它去年的營業額大約一億三千萬美元，員工大約有一千三百人，除了美國以外，它在17個國家，包括香港，均設有銷售及服務中心，故MTS是作者此次所參觀的公司裏除IHI外規模較大者。

由作者親身的體驗，MTS的管理甚佳，且在採用先進技術上不遺餘力，一個明顯的例子是它在伺服控制方面發展出一種Direct

Digital Control System(DDC) ，這種系統與電腦連接，可非常精確地做即時的控制，且其設定的工作可完全經由電腦實施，再加上它是採用數位式的控制，故絕不會發生游移(drift) 的現象。MTS的DDC除應用在造波系統外，尚應用於路況模擬系統(road simulation system)，後者乃廣泛應用於汽車工業界。

MTS的多方向造波系統尚具有其他幾項特殊的設計，包括關節式連接的造波板以及波浪吸收系統，這些設計的功能我們將在下一節詳加說明。

MTS最早在1984年為U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station製造了一組具有60個造波板的多方向造波機，這些造波板即採用關節式連接的方式，且由伺服馬達驅動，但這組造波系統尚未採用DDC以及波浪吸收系統，據說MTS目前正為Oregon State University以及日本的Kagima Institute of Construction Technology建造的多方向造波機，將採用這些最新的設計。

由於MTS本身沒有試驗水槽，故作者此行無法實地觀看其造波機的操作情形，僅在最後參觀了明尼蘇答大學的St. Anthony Hydraulic Laboratory。

DHI DHI是一個研究與對外提供技術服務的機構，它雖由丹麥的Academy of Technical Sciences 在1964年建立，但目前屬於一個獨立，自給自足，且為非營利性的機構。DHI的研究興趣涵蓋海洋、海岸、港灣、河川、水資源以及環境等方面，研究的方法則包括數學與數值模式的建立、模型試驗、以及現場調查，另外，DHI也是世界上主要供應造波設備的機構之一。

DHI與Technical University of Denmark合作最早致力於在實驗室模擬自然海面的波浪，且獲得極大的成功，在發展出有關的理

論，且利用現場的觀測與實驗室的測量加以測試後，DHI 遂於1983年製造了一組多方向造波機，這組造波機是屬於油壓式，包含60個Paddles，每一個Paddle寬0.5米，這些Paddle且可以視水深，由hinged type轉變為piston-type。這組造波機經過六年使用後，仍處於非常好的狀況，當作者參觀時，曾目睹了由這組造波系統所產生的斜角規則與不規則波，多方向的短峰波，以及focusing waves，效果非常良好，且操作過程非常順利。

DHI在模擬真實海面波浪的理論上一直居於領先的地位，這一點特別表現在其軟體上—DHI的軟體據說一次即可達到重現現場所觀測的能譜以及原時間序列的目的，有關這方面較詳細的說明將延到下一節。另外，DHI最近也發展出類似於MTS的DDC之數位型控制系統，包括其硬體及軟體。最後作者這次也從DHI獲得許多有關模擬實際海面波浪理論及應用的論文，這些論文極有助於達到此行的目的。

### 三、討 論

在這一節裏，我們首先簡單地敘述利用多方向造波機產生三度空間波浪的基本原理，接下來就要把作者這次參觀研習所獲得的資料，特別是有關模擬的方法，造波系統軟硬體以及它們的應用三者目前的狀況加以說明。

多方向造波機基本上是由許多可獨立控制的造波板排成一列所組成，若它們以相同的頻率，相同的相位振動時，則仍將產生一個行進方向與造波板垂直的長峰波，但如果每一塊造波板的頻率雖相同，但相位不同時，則如圖一的情況，很明顯地將產生一個斜向進行的長峰波，這種情形當每一塊造波板愈狹時，愈能產生一個很理想的斜角的長峰波；若造波板的寬度相當大，則除了主要的波以外，還會產生一些額外波(spurious waves)，這些波與主要波週期相同，但行進方向不同，但無論如何，我們已利用了這樣一組造波機產生了一個斜角的規則波。將不同頻率不同方向的此種波疊加在一起，就形成了一個短峰波的水面。

有關模擬自然海面波浪的方法，即在決定各不同頻率不同方向成份波之振幅與相位，但這不是一件容易的事情，由於目前各種測量方法，尚無法有效地將海面上具有相同頻率但不同方向的分量分解出來，故我們目前尚無法如頻率譜一樣建立可靠之方向波譜的模型供實驗室模擬使用。另外值得一提的是，Sand\* (1979) 曾介紹一種方法，可將在現場同一位置上所測得的水面高度變化及兩個水平方向流速分量的時間序列，在實驗室加以重現，此種方法對我們要模擬現場所發生的一些特殊的波浪條件(如grouping或freak waves)可能有用。

---

\*Sand, S.E.(1979) Three-Dimensional Deterministic structure of Ocean Waves. Inst. Hydrodyn. and Hydraulic Engrg.,Tech. Univ. Denmark, series paper No. 24, 189 pp.

有關造波系統的軟硬體即根據以上的理論加以設計，由於採用具有回饋系統的伺服控制，故造波板的運動可經由電腦精密的控制，MTS和DHI目前且將此控制系統內所有信號傳遞與處理的部份皆改為數位化，這具有以下幾個優點：

- 一、可經由電腦做設定的工作，且由於每一個channel皆相同，故完成一個channel的設定工作以後，可以將結果在電腦裏直接複製給其他的channels，因此節省大量的時間。
- 二、當設定完以後，由於採用數位化控制，故不會發生游移(drift)的現象。
- 三、若要改進控制的流程，此種數位化控制系統亦極為方便。

另外，我們在上面也提到，由於造波板有一定的寬度，故若要產生較短的波，且行進於較大的角度，將不免產生額外的波，此種波的振幅與造波板的連接方式、造波板寬度與波長的比值、以及波行進的角度皆有關。前面也提過，若每一塊造波板的寬度愈小，則spurious waves 的振幅就愈小，但此時爲了要維持一相同的造波範圍，必須增加造波板(包括其控制與驅動系統)的數目，因此將增加成本。但另一種方法是採用關節式連接的造波板(如圖二所示)，根據Hemmingsen\* et al. (1978) 的計算，此種方式的連接將顯著降低spurious waves 的振幅，故若我們未來的試驗需產生較短的波，行進於較大的角度，或許應考慮此種特殊的設計。

另有一種設計也與減小試驗的誤差有關，我們曉得當波浪被模型

---

Hemmingsen, M., Nielsen, J.B., Sand, S.E., and Lundgren, H. (1978). Two-and three-dimensional reproduction of natural waves. Inst. Hydrodyn. and Hydraulic Engrg., Tech. Univ., Denmark, 237 pp.

反射回來以後，若造波板無法加以吸收，則這些波將重新被反射回試驗場內，形成額外的能量，因此，若我們未來的試驗牽涉到一些大的模型，最好採用具有波浪吸收系統的設備，此種系統還有另一個好處，它可以在試驗告一段落後，迅速地使水槽恢復平靜，因此可在很短的時間內即開始另一個試驗。

多方向造波系統的軟體目前各機構發展的狀況不太一樣，IHI本身沒有提供應用的軟體，其電腦主機也是由日本港研所自行負責，依照港研所的高山知司室長的意見，目前模擬海面波浪的方式還在繼續改良中，故使用此造波系統的單位應配合模擬方法的改進，自行設計軟體。由高山知司室長的研究報告中可以看出，他們目前已經有一些可用的軟體可模擬出相當接近於目標的方向波譜。另一方面，DHI由於他們本身即應用多方向造波機從事模型試驗的工作，再加上他們很早即開始發展模擬的理論與設備(前面所提到的Sand(1979)和Hemmingsen et al.(1978)的研究，就是DHI和Technical University of Denmark合作進行者)，故DHI目前擁有最完整，能直接產生三度空間波浪的軟體，這些軟體除可產生各種方向波譜外，尚可如前面所說的，在實驗室裏重現原波浪記錄的時間序列，且效果相當理想(見圖三)。

AOC的軟體所根據的原理與DHI類似，但目前似還在修改中，故作者此行無法見其示範。至於MTS的多方向造波系統也擁有功能強大的軟體，此軟體並不以產生某一特定的方向波譜為目的，但它很方便讓使用者將二度空間(包括斜角)的波浪組合成三度空間者，故這一套軟體允許使用者設計自己的程式，然後將其併入到原架構裏，故這樣的設計頗適合我們未來測試及建立新的模擬的方法。

有關多方向造波設備的應用，作者此行所獲得的資料較少，日本的港研所目前尚致力於模擬方法的改良，IHI雖也從事船舶的模型試驗，且本身又製造多方向造波設備，但他們至少在目前尚未應用此種設備

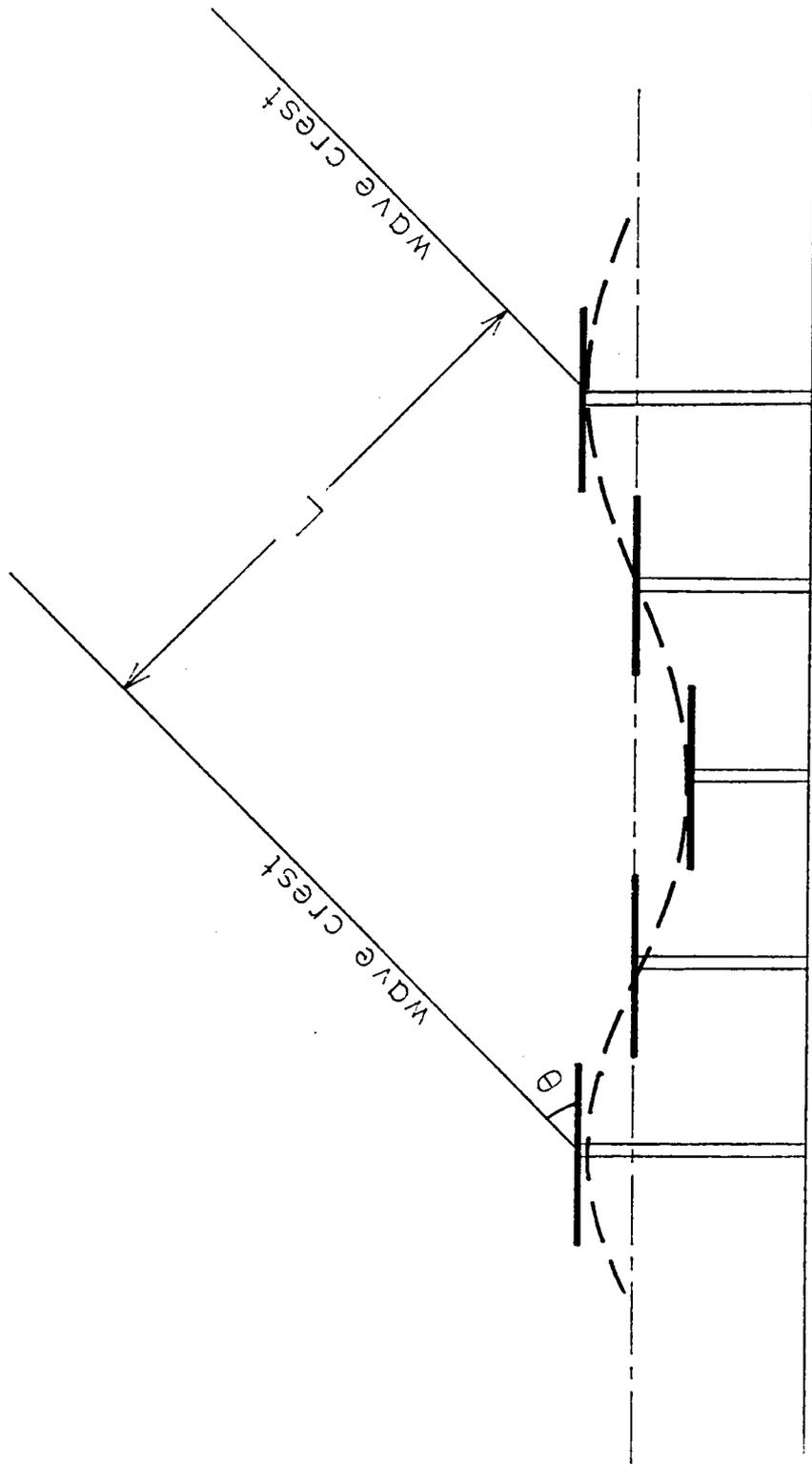
來做模型試驗。AOC的一部份業務也與模型試驗有關，但作者卻發現他們很少接受客戶委託在三度空間波浪場中進行試驗，而DHI的研究人員的確曾接受一些如Foster Wheeler Petroleum Development Ltd.的機構委託進行一些深海結構物在3D波浪中的模型試驗，但為數並不多，其一部份原因是我們目前還無法建立可信賴的方向波譜之模型做為試驗的依據，故儘管目前世界上幾個主要的水工試驗室皆裝設有此種設備，但其大規模的應用似為時尚早。

此種設備尚未普及的另一個原因是它的價格十分昂貴，以一個具有31個造波板(每個寬0.6米高1.5米)，32個驅動單元(採用關節連接方式)的系統而言，若包括電腦及軟體，MTS目前的估價大約為2.5百萬美元，其他廠商的價格至少也在1.6百萬美元以上，此種設備由於非大量生產，且規格差異極大，故其價格難免有很大的出入，據說美國德拉瓦大學土木系曾根據別人的設計圖自行仿造，使成本降低約90%以上，因此不失為一可行的方法。

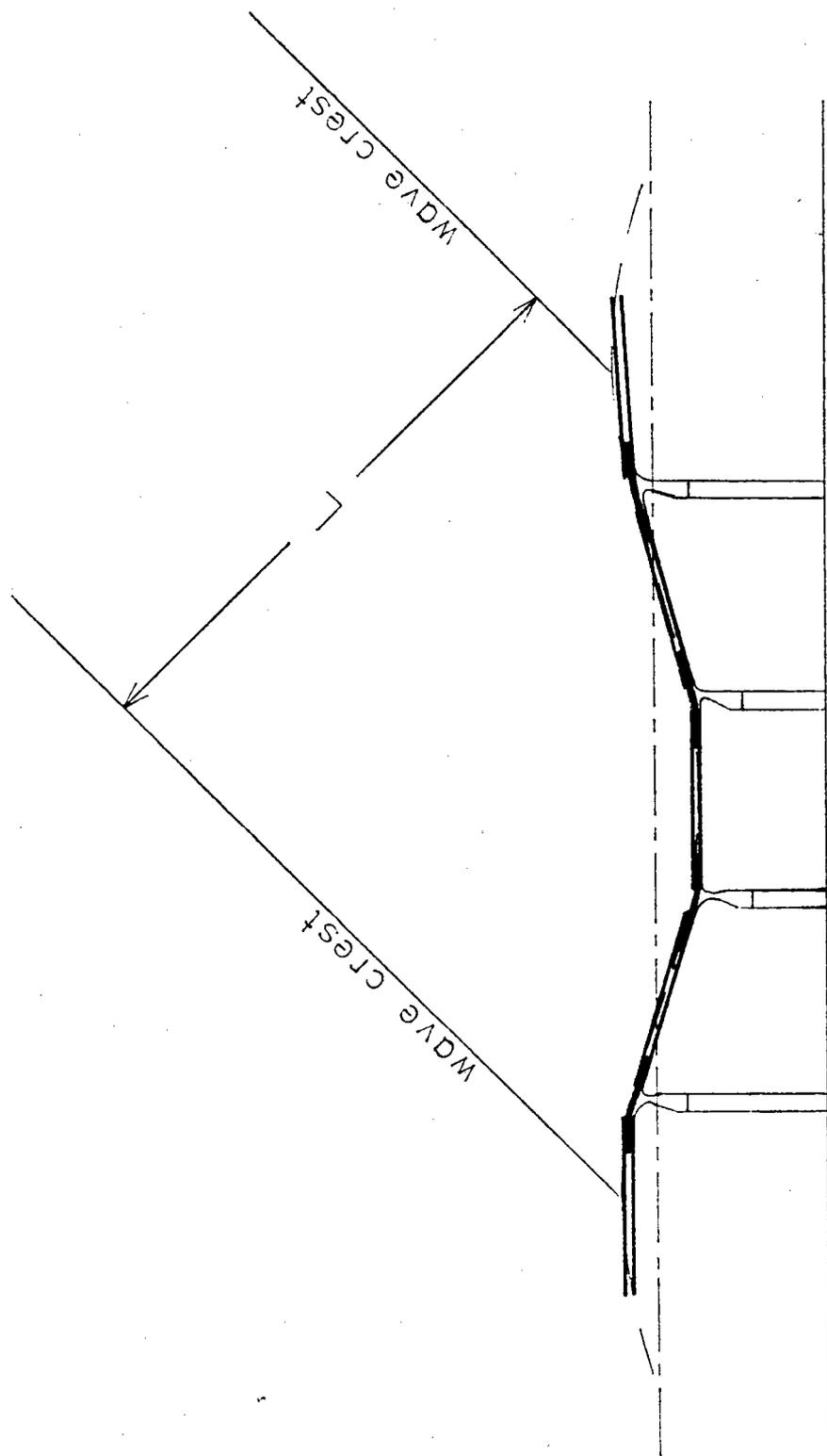
#### 四、結 語

由此行所獲得的資料顯示，目前多方向造波系統的軟硬體皆已發展成熟，但此種設備尚未被普遍應用於模型試驗或其他的研究中，其主要原因是我們對各種狀況下的海面波能量的方向分佈尚未獲得足夠的瞭解，因此一般人仍選擇在二度空間波浪場內進行試驗，利用其結果做為設計的依據，故加強海上方向波譜的測量與多方向造波系統的應用有密切的關連，在下一章我們即研究如何改進方向波譜的測量，希望能對此有幫助。

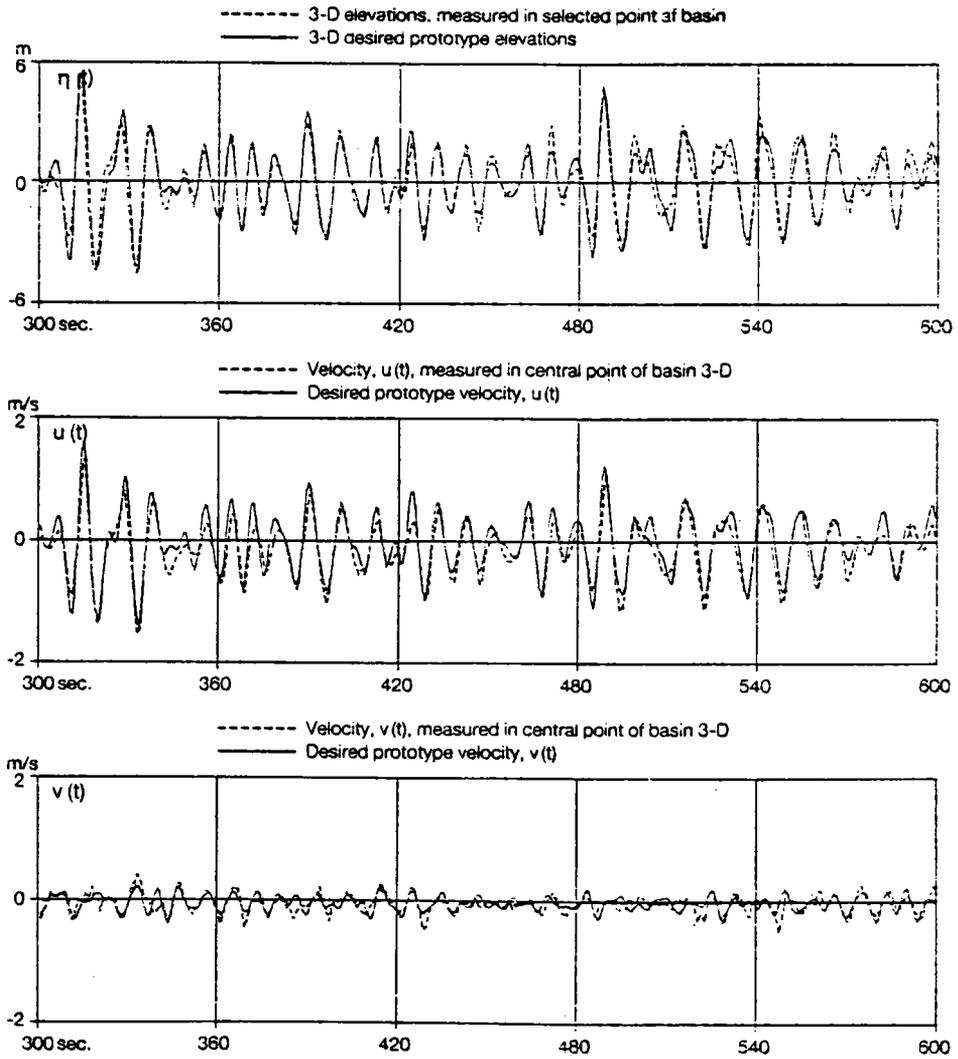
當海面波浪由深海進入淺海時，受地形影響產生折射，故在水深較淺時，波將轉為較接近於長峰波，且行進於垂直海岸線方向，因此多方向造波系統應用在海岸結構物的設計上功用較有限，考慮到這一點以及上述的原因，本所目前似不需急於購買此甚為昂貴之設備。



圖一 波進行的角度  $\theta$  與造波板相位差之間的關係



圖二 關節式連接的造波板；與圖一相比明顯將產生較佳的結果



圖三 DHI 將現場記錄在 3-D 水槽內重現的一組測試資料

# 應用波高計與流速計測方向波譜的新方法

徐進華

## 摘 要

當我們在數點上使用波高計與雙向流速計的組合測方向波譜時，若各組儀器間的距離與波長相比甚小時，根據Borgman & Yfantis (1979)對一些實測資料所做的分析顯示，由於誤差的放大，使用多組儀器比僅在一點上使用一組波高計與流速計，助益十分有限，具體地說，即使我們使用很多組儀器，依照以往的方法，仍無法獲得方向分佈函數(spreading function)高於二階的富氏係數有意義的解，但目前我們將提出一種特殊的處理方法，使由兩組儀器的測量即至少可相當準確地估計第三階的富氏係數，若更進一步使用經特殊安排的第三組儀器，則亦可獲得有意義的第四階富氏係數的解。

在建立化減誤差的方法後，我們且以數值模擬的方式來進行測試，由於資料蒐集時的誤差無法加以模擬，因此僅能對隨機誤差(random error)的部份加以測試，但目前的方法應能適用在有顯著儀器與人為的誤差情況下。

## 一、前 言

海面上的波浪具有紛紜與多方向的性質，後者表在海面上可能同時存在有頻率相同但能量進行方向不同的分量，瞭解能量在各方向的分佈(亦即方向波譜)不僅對海上施工與航行有意義，且對波浪生成的理論以及其他與波浪預測有關的理論之應用有很大的幫助。

方向波譜的測量到目前為止已經有一段很長的歷史，各種方法被發展(詳情請閱Panicker(1974))，每一種方法在解析度，作業困難度，適用地區，以及價格方面各有優劣，目前除各種遙測方法外，在現場所使用者，仍以Longuet-Higgins et al.(1963)所發展的heave-pitch-roll buoy 方法居多，但此種方法基本上僅能決定方向分佈函數(directional spreading function)的前五個富氏係數，故它的解析度相當有限；此方法的一大優點是可應用在深海的現場。

另一種目前常用在現場的方法是在同一點使用波高計和一個可測兩水平方向分量的流速計，此種方法類似於heave-pitch-roll buoy 法，乃經由觀測較多物理量來決定方向分佈函數的富氏係數(當使用buoy時，我們所獲得的是同一位置上的水面位移  $\zeta$  以及  $\partial\zeta/\partial x$  和  $\partial\zeta/\partial y$  隨時間變化的量； $x$  和  $y$  表水平座標)，但另一方面，我們也可將兩水平方向的流速分量視為在Barber(1963)所發展出的波高計陣列法中所測得的另兩點波高記錄的代替品，因此目前使用一波高計和一流速計所獲得的資料實相當於在三點裝設壓力式或其他型式的波高計而形成一陣列所獲得者；但目前的方法作業較方便，且能得到較佳的結果(Heteren & Keyser 1982)。此種方法亦僅能得到二階以下的富氏係數。

若欲估計更高階的富氏係數，我們可進一步測海面的曲率(如使用一種Clover-leaf buoy (Cartwright and Smith, 1964))，或在更多點上測波高與流速的變化，但前者因長波的曲率甚小，故僅能估計較短的波，而後者當各組儀器間水平距離遠小於波長時，由於誤差

的放大，使估計高階富氏係數亦變為不可能，即使是頻率較高波長較短的波，因其能量較小，受「噪音」影響較顯著，因此仍無法獲得有意義的解(Borgman & Panicker, 1970)。Borgman & Yfantis (1979)又曾在一稱為Exxon Ocean Test Structure的20ft×40ft平台上按裝5個波高計和11個雙向電磁流速計，其資料經通盤分析後顯示，引述Dean (1982)的話，” marginal advantages due to the availability of a large number of sensors”，實際上，Borgman & Yfantis發現，由於平台尺寸不夠大，即使是第三階富氏係數，其估計值亦有些不可信，但目前我們將發展出一種特殊的處理方法，可化解一部份誤差放大的現象，使儀器與儀器間距離甚小時，經由兩組儀器的測量(第二組儀器實際僅需使用一雙向流速計即可)仍可相當準確地估計第三階富氏係數，且由經特殊安排的第三組流速計，我們可進一步估計第四階富氏係數有意義的解。

當在兩點或兩點以上的位置進行觀測時，我們在各頻率上皆可獲得一組方向分佈函數的富氏係數之聯立方程式，Allender et al. (1989)曾導出此方程式在各種方法中的一個通式，但目前我們將針對在兩點測波高與流速的方法，導出此聯立方程式特殊的型式，由此聯立方程式我們將發現誤差的來源，故接下來我們將介紹化減誤差的方法，這些方法包括利用額外一組流速計的測量結果來消除此聯立方程式的一部份誤差。

建立了化減誤差的方法後，我們且以數值模擬的方式來測試此種方法改善估計值準確度的狀況，由於資料蒐集時所產生的誤差無法適當地加以模擬，在此我們僅能就隨機誤差(random error)的部份加以測試，但目前的方法曾將儀器與人為的誤差考慮在內。

## 二、基本方程式

在本節中我們將導出利用在兩點所測得的波高與流速記錄計算分佈函數的線性聯立方程式，由此方程式的形式我們可瞭解誤差放大的情形，故得以找出縮小誤差的方法。為達到以上目的，我們僅需如其他方法一樣假設波為線性，並假設波的統計性質無論在空間與時間上皆為穩定(stationary)，故可應用stochastic Fourier-Stieltjes integral的理論。

當波浪場為一時間與空間之穩定隨機過程時，其水面位移變化 $\zeta(\bar{x}, t)$ 可表為

$$\zeta(\bar{x}, t) = \iint_{\bar{k}^n} dA(\bar{k}, n) \exp\{i(\bar{k} \cdot \bar{x} - nt)\} \quad (2.1)$$

(參考Phillips 1977)，上式即表stochastic Fourier-Stieltjes integral，其中 $dA(\bar{k}, n)$ 為一隨機變數，具有以下性質：

$$E[dA^*(\bar{k}, n)dA(\bar{k}', n')] = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{k}, n \neq \bar{k}', n'; \\ X(\bar{k}, n) d\bar{k} dn & \text{if } \bar{k} = \bar{k}', n = n'. \end{cases} \quad (2.2)$$

上式中 $E[\ ]$ 表期望值(expected value)，星號表共軛複數， $X(\bar{k}, n)$ 即為此波浪場的波數頻率譜(wave number, frequency spectrum)。由(2.1)式的逆轉換可求出 $dA(\bar{k}, n)$ (實際僅能用finite Fourier transform來作為此種屬於極限性質函數的近似)，代入(2.2)後即可獲得波在波數與頻率空間上能量的密度分佈，但此種方法實際仍不可行，因我們目前僅能在少數點上測 $\zeta$ 隨時間的變化，故無法提供足夠的資料對時間空間兩者皆做富氏轉換，若我們將其中某一點的座標定為 $\bar{x} = (0, 0)$ 則(2.1)可改寫為

$$\zeta(\bar{0}, t) = \int_n dZ(n) e^{-int} \quad (2.3)$$

其中

$$dZ(n) = \int_{\bar{k}} dA(\bar{k}, n) \quad (2.4)$$

上式雖對整個  $\vec{k}$  的空間加以積分，但對其真正有貢獻者，依線性波的理论，僅來自於能滿足  $n = \sqrt{gk}$  的一個圓周，此種現象對較長的波特別是如此(短波將受長波影響產生都卜勒平移)。根據同樣線性波的理论，我們在同一點，深度為  $z_0$  的位置上所測得  $x$  方向的流速變化

且

$$u(\vec{0}, t) = \int_{\vec{n}} dU(n) e^{-int} \quad (2.5)$$

$$dU(n) = G(n) \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}, n) \cos \theta \quad (2.6)$$

其中

$$G(n) = n e^{kz_0} \quad (2.7)$$

而  $\theta$  則表各成份波與  $x$  軸的交角，同理在  $y$  方向的流速變化

$$v(\vec{0}, t) = \int_{\vec{n}} dV(n) e^{-int} \quad (2.8)$$

且

$$dV(n) = G(n) \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}, n) \sin \theta \quad (2.9)$$

若我們且在第二點(設極座標為  $(D, \alpha)$ )測水面位移及  $x, y$  方向流速變化則可預期

$$\begin{cases} \zeta(D \cos \alpha, D \sin \alpha, t) = \int_{\vec{n}} dZ_2(n) e^{-int} \\ dZ_2(n) = \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}, n) e^{i\beta(\theta, n)} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} u(D \cos \alpha, D \sin \alpha, t) = \int_{\vec{n}} dU_2(n) e^{-int} \\ dU_2(n) = G(n) \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}, n) \cos \theta e^{i\beta(\theta, n)} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} v(D \cos \alpha, D \sin \alpha, t) = \int_n dV_2(n) e^{-int} \\ dV_2(n) = G(n) \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}, n) \sin \theta e^{i\beta(\theta, n)} \end{cases} \quad (2.12)$$

在(2.10)–(2.12)中， $\beta(\theta, n)$ 表各成份波由第一點行進到第二點所產生的相位差，此相位差除與兩點相對位置有關外，並與波的頻率  $n$  和波的行進方向  $\theta$  有關，由一個簡單的計算可得

$$\beta(\theta, n) = Dk \cos(\theta - \alpha) \quad (2.13)$$

經由以上分析，我們可得下面一組方程式：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dZ^*(n)dZ(n)] &= \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dZ^*(n)dU(n)] &= G(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \cos \theta d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dZ^*(n)dV(n)] &= G(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \sin \theta d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dU^*(n)dU(n)] &= G^2(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \cos^2 \theta d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dU^*(n)dV(n)] &= G^2(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \sin \theta \cos \theta d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dZ^*(n)dU_2(n)] &= G(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \cos \theta e^{i\beta(\theta, n)} d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dZ^*(n)dV_2(n)] &= G(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \sin \theta e^{i\beta(\theta, n)} d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dU^*(n)dU_2(n)] &= G^2(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \cos^2 \theta e^{i\beta(\theta, n)} d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dU^*(n)dV_2(n)] &= G^2(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \sin \theta \cos \theta e^{i\beta(\theta, n)} d\vec{k} \\ \frac{1}{dn} \mathbb{E}[dV^*(n)dV_2(n)] &= G^2(n) \int_{\vec{k}} X(\vec{k}, n) \sin^2 \theta e^{i\beta(\theta, n)} d\vec{k} \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

由兩點的觀測實際尚可獲得更多的方程式，但這些方程式將與上面的式子有相依的關係，因此由上式可看出在第二點上實際僅需裝置一流速計測  $u_2$  和  $v_2$  即可獲得所需的資料。上式仍可進一步改寫，由於離散關係式  $\sigma = \sqrt{gk}$  存在，波數頻率譜  $X(\bar{k}, n)$  可化簡為

$$X(\bar{k}, n) = \Psi(\bar{k})\delta(n - \sigma) \quad (2.15)$$

其中  $\delta$  表 Dirac delta function，而

$$\Psi(\bar{k}) = \int_n X(\bar{k}, n) dn \quad (2.16)$$

表波數譜(wave-number spectrum)，(2.15)式暗示對某一個固定的  $\bar{k}$   $X(\bar{k}, n)$  僅在  $n = \sigma$  時有值，相反地，若我們考慮一固定的  $n$ ，則積分

$$\int_{\bar{k}} X(\bar{k}, n) d\bar{k} = \int_{\bar{k}} \Psi(\bar{k})\delta(\sigma - n) d\bar{k} \quad (2.17)$$

其中

$$\sigma = \sqrt{gk} \quad (2.18)$$

上式即暗示被積分的函數僅在  $\bar{k}$  的量滿足  $\sqrt{gk} = n$  的一個圓周上不為零，由於

$$d\bar{k} = k dk d\theta$$

再由(2.18)

$$k dk = (2\sigma^3/g^2) d\sigma$$

故(2.17)最後可改寫為

$$\begin{aligned} \int_{\bar{k}} X(\bar{k}, n) d\bar{k} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \Psi(k, \theta)\delta(\sigma - n)(2\sigma^3/g^2) d\sigma d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} S(n, \theta) d\theta \end{aligned}$$

其中

$$S(n, \theta) = 2 \frac{n^3}{g^2} [\Psi(k, \theta)]_{k=n^2/g}$$

(參看 Phillips 1977, §4.1),  $S(n, \theta)$  即為一般所說的方向頻率譜 (directional frequency spectrum) 或簡稱方向波譜 (directional spectrum), 由以上的討論及類似的推論, (2.14) 此時可全部改為

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{dn} E[dZ^* dZ] = \int_0^{2\pi} S(\theta) d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dZ^* dU] = G \int_0^{2\pi} S(\theta) \cos \theta d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dZ^* dV] = G \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dU^* dU] = G^2 \int_0^{2\pi} S(\theta) \cos^2 \theta d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dU^* dV] = G^2 \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dZ^* dU_2] = G \int_0^{2\pi} S(\theta) \cos \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dZ^* dV_2] = G \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dU^* dU_2] = G^2 \int_0^{2\pi} S(\theta) \cos^2 \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dU^* dV_2] = G^2 \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta \\ \frac{1}{dn} E[dV^* dV_2] = G^2 \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin^2 \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta \end{array} \right. \quad (2.19)$$

上式由於僅考慮一固定的頻率, 故我們不需要將頻率  $n$  與各函數之間的關係明白加以顯示, 上式中連虛部共含 15 個方程式, 但我們無法直接利用它們解  $S(\theta)$ , 必須將  $S(\theta)$  展開為富氏級數

$$\begin{aligned} S(\theta) = & A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + \dots \\ & + B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

將(2.20)代入(2.19)後可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{dn} E[dZ^* dZ] = 2\pi A_0 \\ \frac{1}{dn} E[dZ^* dU] = G\pi A_1 \\ \frac{1}{dn} E[dZ^* dV] = G\pi B_1 \\ \frac{1}{dn} E[dU^* dU] = G^2 \left( \pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_2 \right) \\ \frac{1}{dn} E[dU^* dV] = G^2 \frac{\pi}{2} B_2 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

及另外10個含全部  $s(\theta)$  之富氏係數的線性聯立方程式，這10個方程式因相當長，故我們僅將它們列在附錄中，這10個方程式與(2.21)不同的地方是它們等號左邊的項是在不同點所測資料間的 covariances，由這10個方程式我們自然仍無法求出所有富氏係數，但在假設更高階的富氏係數可忽略的情況下，似可利用此10個方程式求出高於二階的另10個富氏係數(在(A.1)-(A.5)中我們僅列出第七階以下富氏係數的項，其原因即在此)，此10個係數在一般情形下應已包含幾乎所有不可忽略的富氏係數，故可提供一相當完整的解，但實際情況並非如此單純。

在(A.1)-(A.5)中未知數的係數含積分  $\int_0^{2\pi} e^{i\beta(\theta)} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} m\theta d\theta$ , ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), 這些積分當  $dk$  很小時，將隨  $m$  的增加而迅速地減小，使  $A_3, B_3, A_4, \dots$  的係數遠小於二階以下富氏係數者，且愈高階的愈小，因此當我們利用(2.21)估計出二階以下富氏係數後，由於這些估計值必含有誤差，故在代入(A.1)-(A.5)後，此誤差將被顯著地放大，使我們完全無法估計高階的富氏係數，若我們仔細觀察(A.1)-(A.5)可發現有些方程式(例如(A.3)和(A.4)的虛部)中的  $A_3$  和  $B_3$  的係數仍可與其他係數相比，但此時由於我們實際所測得的 covariances 的虛部具有很大的相對誤差(因其真實值較小)，故仍無法加以應用。在 Borgman & Yfantis(1979)的結果裡，當儀器的間隔小於波長的十分之一時，即完全無法獲得有意義的  $A_3$  與  $B_3$  的值，但我們在下面將發現一些補救的辦法，使在任何合理的情況下，至少可相當準確地估計第三階和第四階的富氏係數。

### 三、決定波的主要行進方向

在介紹特殊由(A.1)-(A.5)估計富氏係數的方法以前，我們先決定波的主要行進方向，此方向不僅本身在實用上有其重要性，且在後面將被利用來降低(A.1)-(A.5)解的誤差。

由於在(2.5)和(2.8)中  $u(t)$  和  $v(t)$  代表一組互為正交的分量，在圖一中，

$$\begin{cases} u_c(t) = u(t) \cos \phi + v(t) \sin \phi \\ u_p(t) = -u(t) \sin \phi + v(t) \cos \phi \end{cases} \quad (3.1)$$

求  $u_c(t)$  和  $u_p(t)$  的 Fourier-Stieltjes coefficients 產生

$$\begin{cases} dU_c(n) = dU(n) \cos \phi + dV(n) \sin \phi \\ dU_p(n) = -dU(n) \sin \phi + dV(n) \cos \phi \end{cases}$$

故  $u_c(t)$  和  $u_p(t)$  的 autospectral density function

$$\begin{cases} \frac{E[dU_c^* dU_c]}{dn} = \frac{E[dU^* dU]}{dn} \cos^2 \phi + \frac{E[dV^* dV]}{dn} \sin^2 \phi + 2 \frac{E[dU^* dV]}{dn} \sin \phi \cos \phi \\ \frac{E[dU_p^* dU_p]}{dn} = \frac{E[dU^* dU]}{dn} \sin^2 \phi + \frac{E[dV^* dV]}{dn} \cos^2 \phi - 2 \frac{E[dU^* dV]}{dn} \sin \phi \cos \phi \end{cases} \quad (3.2)$$

上式中 cross-spectrum  $E[dU^* dV]/dn$  為純實數，式中且消去各波譜隨頻率  $n$  變化的關係，由上式我們可很明顯地看出  $E[dU_c^* dU_c]/dn$  為角度  $\phi$  的函數，故若我們能選擇一個  $\phi_0$ ，使  $E[dU_c^* dU_c]/dn$  為極大值，則可定義此  $\phi_0$  即為波行進的主要方向，由(3.2)， $\phi_0$  將滿足

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{E[dU_c^* dU_c]}{dn} \right) &= 2 \left( \frac{E[dV^* dV]}{dn} - \frac{E[dU^* dU]}{dn} \right) \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ &\quad + 2 \frac{E[dU^* dV]}{dn} (\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

或改寫為

$$\left( \frac{E[dV^*dV]}{dn} - \frac{E[dU^*dU]}{dn} \right) \sin 2\phi_0 + 2 \frac{E[dU^*dV]}{dn} \cos 2\phi_0 = 0$$

因此  $\phi_0(n)$  須滿足

$$\tan 2\phi_0 = 2 \frac{E[dU^*dV]/dn}{E[dU^*dU]/dn - E[dV^*dV]/dn} \quad (3.3)$$

注意  $\phi_0(n)$  在不同的頻率  $n$  可能有不同的值，此外，上式亦可能產生兩個不同的解，分別代表  $E[dU_c^*dU_c]/dn$  的極或極小值，由於兩者相差  $90^\circ$ ，故我們可利用風向與地形的資料加以區分。還有一點值得注意的是，由(2.21)及類似的  $E[dV^*dV]/dn$  的表式，上式並可改寫為

$$\tan 2\phi_0 = \frac{B_2}{A_2} \quad (3.4)$$

此顯示若經由座標轉換使  $\phi_0 = 0$  則可得  $B_2 = 0$ ，此種性質我們在下面將加以利用。

#### 四、特殊的解法

在第二節最後曾提到，當兩組儀器間距離很小時，因聯立方程式(A.1)-(A.5)的係數大小相差懸殊，使我們常無法直接用一般解聯立方程式的方法獲得有意義的解，由於cross-spectrum  $E[dU^*dV_2]/dn$  等的虛部也很小，故它們本身在估計時就會產生很大的相對誤差，因此我們首先就要來解決這項問題。在下面爲了簡化公式起見，我們將cross-spectrum分母中的 $dn$ 消去。

在用實測資料估計cross- and auto-spectrum時，需用類似於下面的方法求其樣本平均

$$\overline{dU^*dV_2} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N dU_i^* dV_{2i} \quad (4.1)$$

(在上式中我們用橫線表平均值的估計值，以和真正的平均值加以區分)，其中 $dU_i$  和  $dV_{2i}$  表某一次觀測的樣本(sample)，在實際觀測時，由於觀測長度有限， $dU_i$  和  $dV_{2i}$  通常用finite Fourier transform來取代，因此它們本身即有bias error，但目前更嚴重的誤差將來自於 $N$ 很小所產生的隨機誤差(random error)，此種誤差常以估計值的標準偏差(standard deviation)來表示，根據波譜分析的理論，它們具有以下的誤差範圍(bound)：

$$\begin{cases} \sigma[\text{Re } \overline{dU^*dV_2}] \leq \sqrt{E[dU^*dU]E[dV^*dV]}/N \\ \sigma[\text{Im } \overline{dU^*dV_2}] \leq \sqrt{E[dU^*dU]E[dV^*dV]}/N \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $\sigma[\ ]$  即表隨機值的標準偏差，Re和Im分別表實部與虛部，由於 $E[dV^*dV]$  和  $E[dV_2^*dV_2]$  應無差別，在(4.2)式中我們且以前者來取代後者。由上式我們可看出，若

$$\frac{|E[\text{Re } dU^*dV_2]|}{\sqrt{E[dU^*dU]E[dV^*dV]}} \quad \text{and} \quad \frac{|E[\text{Im } dU^*dV_2]|}{\sqrt{E[dU^*dU]E[dV^*dV]}} \quad (4.3)$$

很小，則(4.2)常規化(normalized)後所代表的相對誤差將很大，因此須增加  $N$  的量來先降低絕對誤差值，但因波浪場有時無法長時間地維持穩定，且儀器的記憶空間有限，因此不可能無限制增加  $N$  的量，但下面將有一種方法可在不改變  $N$  的情況下，消去部份的誤差。另外要指出的是(4.3)與信號分析理論中常用的 coherence function 有相同的意義。

我們仍用  $\overline{dU^* dV_2}$  為例加以說明，首先由(2.6)和(2.12)

$$dU = G \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}) \cos \theta$$

$$dV_2 = G \int_{\vec{k}} dA(\vec{k}) \sin \theta e^{i\beta(\theta)}$$

上式仍將頻率  $n$  的符號消去，由於  $dA(\vec{k})$  僅在  $\vec{k}$  滿足  $n = \sqrt{gk}$  的圓周上有值，故上式可近似表為

$$dU = G \sum_{\theta_i} dA(\theta_i) \cos \theta_i$$

$$dV_2 = G \sum_{\theta_i} dA(\theta_i) \sin \theta_i e^{i\beta(\theta_i)}$$
(4.4)

(4.4)在下一節模擬  $dU$  和  $dV_2$  時將加以應用，目前我們應用它僅為了方便說明(以下的說明亦可應用在原式)。由(4.4)我們可獲得

$$dU^* dV_2 = G^2 \sum_{\theta_i} \sum_{\theta_j} dA^*(\theta_i) dA(\theta_j) \cos \theta_i \sin \theta_j e^{i\beta(\theta_j)}$$
(4.5)

在等號右邊諸項裡， $i=j$ 的項平均值將不為零；表在各角度上的能量密度，其他所有  $i \neq j$  的項，由於  $dA(\theta_i)$  和  $dA(\theta_j)$  為 uncorrelated，其平均值應為零，但實際上當我們僅以有限數目的樣本來估計平均值時，這些項將無法完全消去，因而構成隨機誤差的一大來源，為清楚地顯示

這些誤差的性質及大小，我們仔細分析其中任一項

$$dA^*(\theta_i)dA(\theta_j) \cos \theta_i \sin \theta_j e^{i\beta(\theta_j)} \quad (4.6)$$

若將  $dA(\theta_i)$  表為  $R_i + iI_i$ ，將  $dA(\theta_j)$  表為  $R_j + iI_j$ ，則上式展開後可表為

$$\begin{aligned} & [(R_i R_j + I_i I_j) \cos \beta(\theta_j) - (R_i I_j - I_i R_j) \sin \beta(\theta_j)] \cos \theta_i \sin \theta_j \\ & + i [(R_i R_j + I_i I_j) \sin \beta(\theta_j) + (R_i I_j - I_i R_j) \cos \beta(\theta_j)] \cos \theta_i \sin \theta_j \end{aligned} \quad (4.7)$$

式中當  $Dk \ll 1$  時， $\beta(\theta_j)$  在任何角度上皆遠小於1，故

$$\begin{aligned} \cos \beta(\theta_j) & \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2(\theta_j) \\ \sin \beta(\theta_j) & \approx \beta(\theta_j) \end{aligned} \quad (4.8)$$

因此(4.7)的實部與虛部中主要的項分別為

$$(R_i R_j + I_i I_j) \cos \theta_i \sin \theta_j \quad \text{and} \quad (R_i I_j - I_i R_j) \cos \theta_i \sin \theta_j \quad (4.9)$$

前者含  $i=j$  的情況，而後者則僅在  $i \neq j$  時有值，表完全屬於誤差的項，因此目前  $Dk \ll 1$  的情況下

$$\left| E[\text{Re } dU^* dV_2] \right| \gg \left| E[\text{Im } dU^* dV_2] \right|$$

但由(4.9)，若僅考慮  $i \neq j$  的情況，它顯示  $\overline{dU^* dV_2}$  的實部與虛部的絕對隨機誤差值應有相同的一個量級，故  $\overline{dU^* dV_2}$  的虛部之相對隨機誤差將比實部大，(4.9)並顯示  $\overline{dU^* dV_2}$  的隨機誤差主要部份，不論是實部或虛部，皆與  $\overline{dU^* dV}$  相同(可想像兩組儀器幾乎位在同一點上)，但我們已知  $E[dU^* dV]$  的虛部應為零，故估計值  $\text{Im } \overline{dU^* dV}$  若不等於零，應完全來自於  $(\overline{R_i I_j} - \overline{I_i R_j}) \cos \theta_i \sin \theta_j$  這些誤差項的和，因此我們可利用  $\text{Im } \overline{dU^* dV}$  將  $\text{Im } \overline{dU^* dV_2}$  大部份的隨機誤差消去。

在(4.7)的虛部裡因此目前僅剩下

$$(R_i R_j + I_i I_j) \sin \beta(\theta_j) \cos \theta_i \sin \theta_j$$

由(4.8)及(2.13)，上式可改寫為

$$(R_i R_j + I_i I_j)(Dk \cos(\theta_j - \alpha)) \cos \theta_i \sin \theta_j \quad (4.10)$$

由上式，若波的主要行進方向與兩組儀器連線的方向相差不遠(應免兩者互相垂直)，則  $\cos(\theta_j - \alpha) = O(1)$ ，故化減後的  $\text{Im} \overline{dU^* dV_2}$ ，真實值與誤差皆與  $\text{Re} \overline{dU^* dV}$  相差  $Dk$  的一個量級，表  $\text{Im} \overline{dU^* dV_2}$  的相對隨機誤差此時與  $\text{Re} \overline{dU^* dV}$  的相對隨機誤差(表為  $\epsilon_r$ )可有一相同的量級。

利用類似的處理亦可消去  $\overline{dZ^* dU_2}$  和  $\overline{dZ^* dV_2}$  虛部中使其相對誤差擴大的項，另外在  $\overline{dU^* dU_2}$  和  $\overline{dV^* dV_2}$  裡，這些項原本即互相抵消(故  $\overline{dU^* dU}$  和  $\overline{dV^* dV}$  的虛部完全等於零)，因此我們目前所獲得的 cross spectra 的虛部，其相對誤差皆能維持很小。接下來我們檢查(A.1)-(A.5)中各未知數係數的大小，發現在(A.3)和(A.4)的虛部中， $A_3$  和  $B_3$  的係數並不小於其他的係數，因此可獲得

$$\begin{cases} b_1 \approx C_{11} A_3 + C_{12} B_3 \\ b_2 \approx C_{21} A_3 + C_{22} B_3 \end{cases} \quad (4.11)$$

其中

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{G^2} \frac{\text{Im} \overline{dU^* dU_2}}{dn} - \frac{3}{4} A_1 \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \cos \theta d\theta - \frac{1}{4} B_1 \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \sin \theta d\theta \\ b_2 = \frac{1}{G^2} \frac{\text{Im} \overline{dU^* dV_2}}{dn} - \frac{1}{4} A_1 \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \sin \theta d\theta - \frac{1}{4} B_1 \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \cos \theta d\theta \end{cases}$$

且係數矩陣

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \cos \theta d\theta & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \sin \theta d\theta \\ -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \sin \theta d\theta & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin \beta(\theta) \cos \theta d\theta \end{bmatrix}$$

利用(4.11)即可有效地估計  $A_3$  與  $B_3$  的值。

以上討論未考慮資料蒐集時所產生的誤差，此種誤差可能來自於儀器的 gain and phase factor、流速計的傾斜、方位角的偏差、時間與空間解析度的限制、以及其他完全屬於 noise 的誤差等，這些誤差

大抵無法經由以上的處理獲得消滅(一些屬於兩組儀器共通的誤差，包括 bias errors，仍可互相抵消)，但因它們大部份僅比例性地影響(4.7)內的每一項，故即使無法消去，其影響亦不若其本身的項，例如，在定方向時，若產生  $\Delta\theta$  的誤差，則(4.7)的虛部將多出類似於

$$\Delta\theta(R_i I_j - I_i R_j) \cos\theta_i \sin\theta_j$$

的項或其他更小的項，由此項所產生的相對誤差約為  $O(\Delta\theta\epsilon_r/Dk)$ ，因此將不會顯著地超過  $\epsilon_r$ ，另一方面，由測量時的 noise 所產生的誤差應比由(4.9)所產生者小一個量級，故仍不會明顯地大於  $\epsilon_r$ 。在所有可能的儀器與人為的誤差裡，僅儀器的 phase factor  $\phi(n)$  可能導致  $\overline{dU^*dV_2}$  的相位產生變化，使其虛部產生大約  $\phi \cdot E[\text{Re}dU^*dV_2]$  的絕對誤差，因此其相對誤差約為  $O(\phi/Dk)$ ，此種誤差雖嚴重，但似不會發生在電磁式流速計上，且即使發生，我們仍可經由使  $x$  和  $y$  方向的 phase factor 一致來加以控制，故整體來說資料蒐集時的誤差應不會影響(4.11)式的應用。最後我們且強調，當  $Dk$  很小時，波浪的非線性效應對以上分析的影響也非常有限，這可由(4.9)不含  $\beta(\theta_j)$  的事實加以印證。

到目前為止，我們僅用到(A.1)-(A.5)中的兩個方程式，其他方程式未知數的係數皆很小，故將產生誤差放大的現象，例如在(A.3)和(A.4)的實部裡， $A_3$  和  $B_3$  的係數為零，而  $A_4$  和  $B_4$  的係數最大者為積分  $\int_0^{2\pi} \cos\beta(\theta) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} 2\theta d\theta$  但此時在(A.3)實部裡的  $A_0$  和  $A_2$  項，以及在(A.4)實部裡的  $B_2$  項皆含  $\int_0^{2\pi} \cos\beta(\theta) d\theta$ ，此積分在  $Dk \ll 1$  時遠大於前者，故在估計  $A_4$  和  $B_4$  時， $A_0$ ， $A_2$  和  $B_2$  的誤差將被顯著地放大，因此由表面上來看似無法利用此二式來估計  $A_4$  與  $B_4$ ，但若仔細分析可發現，經由特殊的處理，此種誤差放大的現象仍可加以避免，同樣的方法亦適用在(A.1)和(A.2)的實部，但由它們我們仍僅能估計  $A_3$  與  $B_3$ ，故將和(4.11)重覆。

在(A.4)實部的等號右邊最大的項為

$$\frac{1}{4}B_2 \int_0^{2\pi} \cos\beta(\theta) d\theta$$

由(2.21)和(2.19)

$$B_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta$$

故代入後可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) d\theta \quad (4.12)$$

但此時由(2.19)，(A.4)實部等號左邊為

$$\int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta \cos \beta(\theta) d\theta \quad (4.13)$$

比較(4.12)和(4.13)可發現兩者極接近，實際上當  $Dk \ll 1$  時，由(2.13)和(4.8)，則(4.12)和(4.13)可近似表為

$$\int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{D^2 k^2}{4} \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (4.14)$$

及

$$\int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{D^2 k^2}{2} \int_0^{2\pi} S(\theta) \sin \theta \cos \theta \cos^2(\theta - \alpha) d\theta \quad (4.15)$$

故(4.14)和(4.15)內主要的項可互相抵消，不僅如此，由(4.9)的第一項顯示，兩者估計值的隨機誤差之主要部份亦將互相抵消，故抵消後的真實值與  $B_2$  的比值為  $O(D^2 k^2)$  (很小)，而其隨機誤差主要將來自於(4.7)實部中剩餘的

$$-(R_i I_j - I_i R_j) \sin \beta(\theta_j) \cos \theta_j \sin \theta_j \quad (4.16)$$

上式可化簡為類似於(4.10)的形式，且根據同樣的道理可判斷，由這些項所產生的隨機誤差與  $B_2$  的比值應為  $O(Dk \cdot \epsilon_r)$ ，故(4.14)和(4.15)抵消後應具有  $O(\epsilon_r/Dk)$  的相對誤差，由這項結果可看出，若可用的資料有限，使  $\epsilon_r$  的值無法降低到很小，則兩組儀器間的距離亦不能取很小，故目前估計  $A_4$  和  $B_4$  仍受兩組儀器間距離的限制(前面由(4.11) 估計  $A_3$  和

$B_3$ 時，幾乎沒有任何的限制)，但此項限制仍可經由加裝第三組儀器來解決。

我們將第三組電磁流速計按裝於如圖二所示的位置，故和(4.5)比較

$$dU^*dV_3 = G^2 \sum_{\theta_i} \sum_{\theta_j} dA^*(\theta_i)dA(\theta_j) \cos \theta_i \sin \theta_j e^{-i\beta(\theta_i)}$$

且由上式所求出與(4.7)對應的項為

$$\begin{aligned} & [(R_i R_j + I_i I_j) \cos \beta(\theta_j) + (R_i I_j - I_i R_j) \sin \beta(\theta_j)] \cos \theta_i \sin \theta_j \\ & + i [-(R_i R_j + I_i I_j) \sin \beta(\theta_j) + (R_i I_j - I_i R_j) \cos \beta(\theta_j)] \cos \theta_i \sin \theta_j \end{aligned} \quad (4.17)$$

比較(4.7)和(4.17)可發現，若我們用  $(\overline{dU^*dV_2} + \overline{dU^*dV_3})/2$  取代  $\overline{dU^*dV_2}$ ，其效果相當於從  $\overline{dU^*dV_2}$  的實部與虛部分別消去

$$\sum_i \sum_j -(R_i I_j - I_i R_j) \sin \beta(\theta_j) \cos \theta_i \sin \theta_j$$

和

$$\sum_i \sum_j (R_i I_j - I_i R_j) \cos \beta(\theta_j) \cos \theta_i \sin \theta_j$$

兩誤差來源，後者我們在前面已利用  $\overline{dU^*dV}$  消去其主要的一部份，如今用較複雜的步驟我們且消去實部中由(4.16)所代表的誤差來源，故此時(4.14)和(4.15)估計值的差值的誤差將降為  $O(\epsilon_r)$ ，同樣的情形也發生在(A.3)的實部，故我們得到另一組方程式

$$\begin{cases} d_1 \approx D_{11}A_4 + D_{12}B_4 \\ d_2 \approx D_{21}A_4 + D_{22}B_4 \end{cases} \quad (4.18)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 = & \frac{1}{G^2} \frac{\text{Re } \overline{dU^*dU_2} + \text{Re } \overline{dU^*dU_3}}{2dn} - \frac{1}{2}(A_0 + A_2/2) \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) d\theta \\ & - \frac{1}{2}(A_0 + A_2) \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \cos 2\theta d\theta - \frac{1}{2}B_2 \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \sin 2\theta d\theta \end{aligned}$$

$$d_2 = \frac{1}{G^2} \frac{\operatorname{Re} \overline{dU^* dV_2} + \operatorname{Re} \overline{dU dV_3^*}}{2dn} - \frac{1}{4} B_2 \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) d\theta$$

$$- \frac{1}{2} A_0 \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \sin 2\theta d\theta$$

且係數矩陣

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \cos 2\theta d\theta & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \sin 2\theta d\theta \\ -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \sin 2\theta d\theta & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) \cos 2\theta d\theta \end{bmatrix}$$

以上估計  $A_4$  和  $B_4$  的方法尚未考慮資料蒐集時所產生的誤差，此項誤差目前的影響較大，因為當(4.14)和(4.15)的主要部份互相抵消後，此部份由儀器與人為因素所產生的誤差大都無法隨之抵消，這些誤差的相對值原本很小(定為  $\epsilon_a$ )，但與(4.14)和(4.15)剩餘項相比，卻能使(4.18)式中的  $d_1$  和  $d_2$  產生  $O(\epsilon_a/D^2 k^2)$  的相對誤差，故除非  $\epsilon_a$  極小，否則儀器間的距離  $D$  仍將受相當大的限制，例如當  $\epsilon_a = 5\%$  時， $Dk$  需大於 0.7，表儀器間的距離需大於波長的十分之一，但此項限制仍可經由以下特殊安排而全部或部份地解除。

我們在此仍假設資料蒐集時的誤差大都使測量的信號產生比例性的變化，而那些具有噪音性質的信號，因與真實信號無相關性，故在估計 covariances 時，僅能產生次小的誤差，故若我們能設法經由座標轉換來降低  $E[dU^* dV]$  的絕對值，則資料蒐集時的誤差的絕對值也將減小，因此使(4.18)內  $d_2$  的相對誤差獲得改善。

由(2.21)我們知道  $E[dU^* dV]$  與  $B_2$  成正比，另一方面(3.4)顯示若將  $x$  軸定塹波的主要行進方向，可獲得  $B_2 = 0$ ，因此可達到上述的目的，但此項安排無法改善(4.18)內  $d_1$  的相對誤差，故目前僅能應用(4.18)的第二式，由此單獨一個式子當然無法估計  $A_4$  和  $B_4$  兩者，但下面有一種方法可消去式中  $B_4$  的項。

當  $Dk$  很小時，由(4.8)可分別計算(4.18)內  $D_{21}$  和  $D_{22}$  的近似為

$$\begin{cases} D_{21} \approx \frac{D^2 k^2}{16} \pi \sin 2\alpha \\ D_{22} \approx -\frac{D^2 k^2}{16} \pi \cos 2\alpha \end{cases} \quad (4.19)$$

故若  $\alpha = 45^\circ$ ，則(4.17)內的  $D_{22} \cdot B_4$  可忽略，實際上還有另一種情況使  $B_4$  的項亦可消去；若分佈函數在主要行進方向兩邊成對稱分佈，且  $x$  軸選在波的主要行進方向時，所有的  $B_i$  將為零，因此  $D_{22} \cdot B_4$  亦可消去。對此種對稱分佈的性質我們自然不能事先抱以太大的期望，因此在放置儀器時，我們可依風向與地形大略的估計波的主要行進方向，然後將儀器裝置在與此方向成  $45^\circ$  的直線上，在這種情況下，當我們根據實測資料估計到真正的波的主要行進方向後，將  $x$  軸轉換至此方向(此時  $B_2 \approx 0$ )，則可期待(4.18)的第二式內  $B_4$  的項可由上述兩種原因中任一種，或在各佔一半的情況下加以忽略，因此我們可單獨用(4.18)的第二式來估計  $A_4$ ，至於  $B_4$  實際是否為零，我們可在最後經由(4.18)的第一式概略地加以估計。

## 五、測 試

在本節中我們將利用數值模擬的方式來測試上節所敘述各種改善富氏係數估計值的方法，由於儀器與人為的誤差無法適當地加以模擬，故目前僅著重與隨機誤差有關的部份。由於前面僅用到 Fourier-Stieltjes coefficients，故目前只需在模擬各角度上  $dA(\theta)$  之隨機值後，利用類似於(4.4)的公式求  $dZ, dU, dV, \dots$  等，然後再利用估計樣本平均的方式(4.1)計算(A.1)-(A.5)等號左邊各項 covariances，要強調的是此種模擬方式，特別是在(4.4)內用有限項數的疊加來取代 Fourier-Stieltjes integral，並不完全符合原隨機過程的性質，故利用它所估計的 covariances 不一定滿足(4.2)式，雖它們具有一個相同的隨  $N$  值變化的趨勢。但無論如何，我們可經由控制(4.4)內的項數，使模擬之 covariances 的誤差與實際狀況不僅趨勢相同，且量也符合期望（依或然率的觀點），因此能使測試儘量接近於實際。

基於以上原因，我們目前在(4.4)中選擇72個  $dA(\theta_i)$ ，每個  $\theta_i$  的間隔相等，且平均分佈於  $0$  到  $2\pi$  間，此72個  $dA(\theta_i)$  將對應到72個  $S(\theta_i)$ ，故由這些所估計的(2.19)等號左邊各項 covariances，若不考慮隨機誤差，應為此72項的和，而非等號右邊各項的積分，但我們可證明72項的和極接近原積分，故幾乎可完全避免 bias error 的影響。

在模擬  $dA(\theta_i)$  前，我們先設定在某一個頻率上做為標的(target)的方向波譜

$$S(\theta) = 0.9033 \cos^{20} \left( \frac{\theta - \bar{\theta}}{2} \right) \quad (5.1)$$

此即為一般所常用的 generalized cosine-squared 函數；前面的係數定為 0.9033 將使  $\int_0^{2\pi} S(\theta) d\theta = 1$ ，因此(5.1)的形式與分佈函數相同，雖其含意不同，在(5.1)中冪數選擇為20即為Goda(1985)所建議在工程應用上可使用在風浪波譜尖峰處的冪數。當  $S(\theta)$  設定後，我們即可決定各角度上  $dA(\theta_i)$  的實部與虛部之 variances(我們已知在一個穩定的波浪場

中， $dA(\theta_i)$ 的實部與虛部應有相同的 variance，且兩者的期望值皆為零)，根據這些條件，我們即可利用在電腦上模擬隨機數的副程式來產生  $dA(\theta_i)$ 實部與虛部一系列的隨機值，我們目前所使用的副程式為一般根據 congruential method 所設計者，此副程式原僅能產生一或然率為均勻分佈的隨機數，但我們使用12個此種隨機數的和，並經過適當的平移和 scaling 後，做為每一個  $dA(\theta_i)$ 的樣本，故所獲得的  $dA(\theta_i)$ 極接近高斯的分佈，但目前的方法並不需要  $dA(\theta_i)$ 為高斯分佈，故即使僅使用三、四個均勻分佈隨機數的和來模擬  $dA(\theta_i)$ ，亦可得完全類似的結果，另外要注意的是， $dA(\theta_i)$ 的實部與虛部須為 uncorrelated，且不同的  $dA(\theta_i)$ 亦必須維持 uncorrelated，故我們在使用模擬隨機數的副程式時，需在每模擬一種隨機變數時，選擇一個「獨立」的起始值。有關此極重要的 uncorrelated 的性質，我們曾在計算時利用比較  $\overline{\text{Re } dA(\theta_i) \text{Im } dA(\theta_i)}$  和  $\overline{dA^*(\theta_i)dA(\theta_i)}$  的值，以及比較  $\overline{dZ^*dZ}$  和  $(\overline{dU^*dU} + \overline{dV^*dV})/G^2$  的值加以驗證，發現其結果非常理想。

模擬了(2.21)和(A.1)-(A.5)內各項 covariances 的估計值後，即可利用前面的方法估計各項富氏係數，圖三至圖十一即為目前測試的結果，在所有這些測試裡，我們定頻率  $n = 0.3 \text{ Hz}$ ，故波數  $k = 0.0036 \text{ cm}^{-1}$ ，我們並假設(5.1)式中波的主要行進方向  $\bar{\theta} = 27^\circ$ ，而儀器則位在  $\alpha = 54^\circ$  的方向。在(4.4)中尚牽涉到一個參數  $G$ ，此參數與頻率  $n$  以及流速計所放的深度  $z_0$  有關(參考(2.7))，但因它目前為定值，且在(2.21)和(A.1)-(A.5)內會抵消，因此在模擬時可不加以考慮。在以上情況下我們於是測試了在各種不同樣本數目以及不同的儀器距離情況下，利用上述的方法改善富氏係數解的狀況。

首先我們測試當儀器距離固定為  $Dk = 0.29$ ，但樣本數目  $N$  不同時的狀況，圖三和圖四即顯示二階以下富氏係數估計值隨  $N^{1/2}$  增大而變化的情形，圖上的虛線表根據理論所推算估計值的隨機誤差(以估計值的標準偏差來代表)隨  $N^{1/2}$  變化的情形(兩者成反比)，值得注意的是，

當我們由(2.21)的第一式估計  $A_0$  後，再代入(2.21)的第四式來估計  $A_2$  時，誤差將被放大一倍，因此在圖四中圓圈記號偏離正確值較遠。圖三和圖四並顯示在目前的模擬中所獲得 covariances 之誤差確與實際狀況相差不遠。

在圖三和圖四裡的解實際乃應用以往的方法所估計者，但圖五和圖六則顯示在相同的條件下，利用各種不同的方法所估計  $B_3$  和  $B_4$  的值，圖五中的三角符號表  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差未經任何化減時，由(4.1 1)所獲得的結果，此結果顯示當  $N$  較小時，因  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  的相對誤差大，故無法獲得可信的  $B_3$  值，但若我們應用  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV}$  (圓圈記號)或應用  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_3}$  (叉號)來降低  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差，則圖五顯示即使  $N$  非常小，亦可獲得有意義的解。同樣情形也發生在估計  $B_4$  時，此時因  $\text{Re} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差無法利用  $\text{Re} \overline{dU \cdot dV}$  來降低，故在圖六中圓圈符號即表利用第三組流速計的測量來降低(4.18)中  $d_1$  和  $d_2$  的誤差後所獲得的結果，在圖六中我們且將  $x$  軸轉換至儀器所在的方向，然後經同樣化減誤差的步驟得到叉號所示的結果，(實際結果應與圖六所顯示者相差一個正負號)，此時由(4.19)可看出，因  $\alpha = 0$ ，(4.18)內的  $D_{21}$  和  $D_{12}$  皆為零，故可由(4.18)的第二式直接估計  $B_4$ ，但更重要的是此時  $B_4$  的係數最大，故可獲得較準確的結果。

我們在這裡並未顯示  $A_3$  和  $A_4$  的值，它們兩者的真實值分別為 0.02 和 -0.02，故皆很小，因此儘管它們在估計時有較大的相對誤差(絕對誤差應相彷彿)，但不會對分佈函數的形狀產生很大的影響。圖五和圖六中的虛線也代表利用目前化減誤差方法來估計  $B_3$  和  $B_4$  時，其估計值理論上應有的標準偏差，但此項偏差我們在估計時僅考慮主要項的影響，因此僅能做為參考。

接下來我們要測試目前的方法在儀器距離不同時改善準確度的情形，在圖七和圖八裡我們固定使用100個樣本求各種樣本平均，而  $D_k$  的值則從0.036變化到2.9，圖七內的三條實線代表在三種不同情況下，使

用(4.11)所獲得的結果，其中標號1的實線表  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  完全未經化減誤差處理過的結果，標號2的實線則代表  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  的大部份誤差已利用  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV}$  消去而獲得的結果，而標號3的曲線則是利用  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_3}$  消去  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差所獲得的結果，由這些結果看出，若不使用目前的方法降低  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差，則只要  $Dk$  小於 0.2 時(表儀器間距離小於波長的三十分之一)，即無法估計  $B_3$  的值，在 Borgman & Yfantis(1979) 的分析裡，當  $Dk$  僅小於 0.6 時(圖中箭頭所指之處)，已經無法獲得可信賴的  $B_3$  的解，此種差距可能是由兩種原因所造成：第一種原因可能是 Borgman & Yfantis 使用樣本的數目少於我們目前在模擬試驗中所使用者，或是其 bias error 或儀器誤差較大的緣故；另一個可能的原因是他們在估計所有三階以上的富氏係數時，是嚐試解原來類似於 (A.1)-(A.5) 的線性聯立方程式，而非解如 (4.11) 般的二階聯立方程，由於聯立方程式的階數愈大，誤差放大的影響愈易失去控制，故在此情況下， $Dk$  必須更大，才能克服此種現象，在圖七裡我們也將直接解 (A.1)-(A.5) 所獲得的  $B_3$  值描成虛線，這些虛線顯示，即使  $Dk$  相當大，直接解 (A.1)-(A.5) 仍無法獲得有意義的解，僅有在標號3所代表的情況下，兩種解法才獲得同樣準確的結果。當  $Dk$  更大時，解原來聯立方程式所獲得的結果反而比由 (4.11) 式所估計者準確，這是因為在 (4.11) 式裡所忽略的項此時已逐漸變為重要。

圖八和圖七類似，但顯示  $B_4$  的估計值，此時因  $\text{Re} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差無法利用  $\text{Re} \overline{dU \cdot dV}$  消去，故圖八中無標號2的實線，圖八另一與圖七不同之處是，若直接解 (A.1)-(A.5) 所獲得  $B_4$  的解，在  $Dk$  很大時皆無法令人滿意，主要原因是在 (4.17) 內被忽略的項，只有在  $D$  更大時方才重要，且不會引起顯著誤差放大的現象。在圖八裡箭頭所指的位置也代表在 Borgman & Yfantis(1979) 分析中曾估計  $B_4$  的最小  $Dk$  的值。

當  $Dk$  更大時，我們並可利用所有 (A.1)-(A.5) 的實部和虛部來估計更高階的富氏係數，但要注意的是若我們仔細分析 (A.1)-(A.5) 內各未知數

的係數可發現，原10x10的係數矩陣可被安排成以下的形式

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} & \dots & c_{03} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{40} & \dots & c_{43} \end{bmatrix} & & 0 \\ & 0 & \begin{bmatrix} c_{54} & c_{55} & \dots & c_{59} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{94} & c_{95} & \dots & c_{99} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

故很明顯地在第一組方程式裡必須消去一個方程式(例如(A.5)的實部)才能形成一組線性獨立的方程式組，而在第二組方程式中又必須消去一個未知數才能獲得唯一的一組解，目前我們所消去的是 $B_7$ 這一項，由於 $B_7$ 可預期很小，故這項選擇將不會影響我們估計其他的富氏係數，且不會影響我們獲得與實際相當接近的方向波譜。

圖九、十和十一即代表在三種情況下所獲得的方向波譜與實際之比較，三個圖裡的實線皆代表做為標的方向波譜，虛線則代表利用各種不同的處理方式所估計的方向波譜，其中，在圖九中的虛線依dash的長度(由小到大)分別代表使用一組，二組或三組儀器所估計者，由於使用一組儀器僅能估計二階以下富氏係數，故圖九中最短的虛線實際相當於由一般heave-pitch-roll buoy所獲得者，故由圖九我們可看出，即使儀器間隔很小(圖九中的 $Dk$ 約為0.29)，若使用二組或三組流速計，再配合目前的方法，可顯著改善我們估計方向波譜的能力。

對於較短的波( $Dk = 3.11$  表波長約為儀器間隔的兩倍)，若不考慮儀器誤差或其他因素，圖十且顯示我們可獲得更準確的結果，在圖十中，最短的折線代表利用兩組儀器所獲得的結果，此時即使我們無法利用  $\text{Re } \overline{dU \cdot dV_3}$  和  $\text{Re } \overline{dU \cdot dU_3}$  來消除(4.18)內  $d_1$  和  $d_2$  的誤差，但仍可有效地估計第四階富氏係數，故所獲得的方向波譜與實際的波譜已無太大的差別，僅尖峰的位置有一個很小的平移，且在原本無能量的方向產生一些振盪，此振盪在使用第三組流速計化減更多的誤差後將減小，此時我們甚至可利用原來的聯立方程式(A.1)-(A.5)解出有意義的第五階富

氏係數，圖十中最長的折線與次長者區別即在於前者將解出的  $A_5$  和  $B_5$  考慮在內，故使實際不存在的振盪減低到最小，因此我們可想像，若實際的分佈函數為 bimodal，則在目前的情況下，第二個 mode 應可加以辨認。

當  $Dk$  值更大時，若不增加樣本的數目(圖九和圖十皆使用100個樣本)，已無法再增加解的準確度，爲了要顯示目前使用兩組或最多三組儀器的方法，若不考慮誤差的問題，應足以估計所有不可忽略富氏係數的解，故在圖十一裡我們定  $Dk = 6.3$  (表儀器間距離約等於波長)，然後分別在  $N = 100, 400, 800$  的情況下，利用三組儀器的方式估計方向波譜，其結果顯示當  $N$  值愈大時(折線的長度愈長)，估計的方向波譜幾乎已和做爲標的者無法加以區分。

## 六、結 論

我們目前已發展出利用兩組波高計與流速計測方向波譜的方法，以往因儀器間距離不足造成誤差放大的現象已一部份被解除，故在任何一種情況下皆至少可估計方向分佈函數的第三階富氏係數，若我們更進一步加裝另一組流速計，並將三組流速計排成一線，且間隔相等，其所補充的資料將有助於我們進一步降低誤差，因此可達到估計第四階富氏係數的目的。

在距離甚近的兩點所測得的各項資料，其彼此間的統計性質與在一點上所測得者應相差不大，重視其差異，並利用兩者共同點來消除誤差，使我們得以從在第二點上所獲得的額外資料估計較多的富氏係數，而利用第三組流速計，再加上 covariances 對稱的性質，我們可消去更多的誤差，故可獲得更多富氏係數的解。我們在此也避免解高階聯立方程式，因此消除了更多誤差放大的現象。

最後要強調的是，由於現場作業的困難，故使用愈少的儀器或按裝儀器在愈少的點上，通常意謂著成本的大量降低及測量成功率的顯著提高，故目前的方法比在很多點上(各點的距離仍須相當大)使用波高計的陣列式方法好，且所估計的方向波譜已和實際波譜極接近，但目前的方法應用在深海尚有困難，為解決此問題，且為了更進一步降低測量時的複雜度，我們目前尚在發展一種僅利用一組波高計和流速計即可估計較高階富氏係數的方法。

附錄：計算高階富氏係數之聯立方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{G} \frac{E[dZ^* dU_2]}{dn} = & A_0 \int_0^{2\pi} \cos \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{A_2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 3\theta + \cos \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_3}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 4\theta + \cos 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{A_4}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 5\theta + \cos 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_5}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 6\theta + \cos 4\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{A_6}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 7\theta + \cos 5\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_7}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 8\theta + \cos 6\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_2}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 3\theta + \sin \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_3}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 4\theta + \sin 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_4}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 5\theta + \sin 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_5}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 6\theta + \sin 4\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_6}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 7\theta + \sin 5\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_7}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 8\theta + \sin 6\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{G} \frac{E[dZ^* dV_2]}{dn} = & A_0 \int_0^{2\pi} \sin \theta e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{A_2}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 3\theta - \sin \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_3}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 4\theta - \sin 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{A_4}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 5\theta - \sin 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_5}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 6\theta - \sin 4\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{A_6}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 7\theta - \sin 5\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_7}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 8\theta - \sin 6\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_1}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 2\theta + 1) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_2}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 3\theta + \cos \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_3}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 4\theta + \cos 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_4}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 5\theta + \cos 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_5}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 6\theta + \cos 4\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_6}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 7\theta + \cos 5\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
 & + \frac{B_7}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 8\theta + \cos 6\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

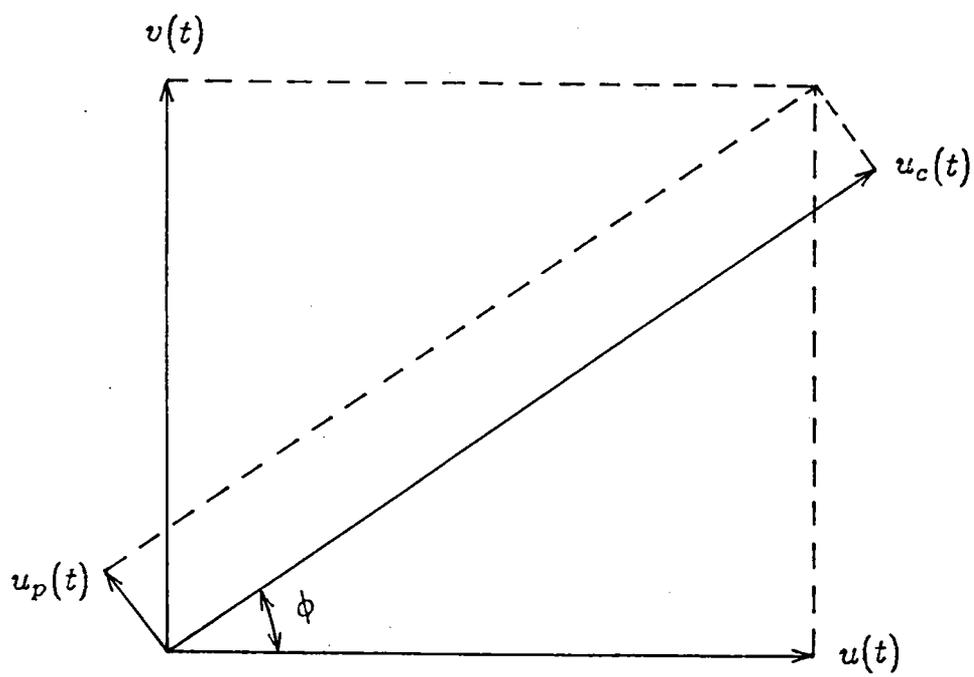
$$\begin{aligned}
\frac{1}{G^2} \frac{E[dU^* dU_2]}{dn} = & \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_2}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos 2\theta + \frac{1}{2} (\cos 4\theta + 1) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos 3\theta + \frac{1}{2} (\cos 5\theta + \cos \theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_4}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos 4\theta + \frac{1}{2} (\cos 6\theta + \cos 2\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_5}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos 5\theta + \frac{1}{2} (\cos 7\theta + \cos 3\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_6}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos 6\theta + \frac{1}{2} (\cos 8\theta + \cos 4\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_7}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \cos 7\theta + \frac{1}{2} (\cos 9\theta + \cos 5\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\sin \theta + \sin 3\theta] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_2}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \sin 3\theta + \frac{1}{2} (\sin 5\theta + \sin \theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_4}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \sin 4\theta + \frac{1}{2} (\sin 6\theta + \sin 2\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_5}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \sin 5\theta + \frac{1}{2} (\sin 7\theta + \sin 3\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_6}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \sin 6\theta + \frac{1}{2} (\sin 8\theta + \sin 4\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_7}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \sin 7\theta + \frac{1}{2} (\sin 9\theta + \sin 5\theta) \right] e^{i\beta(\theta)} d\theta \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G^2} \frac{E[dU^* dV_2]}{dn} = & \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_1}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 3\theta + \sin \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_2}{4} \int_0^{2\pi} \sin 4\theta e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_3}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 5\theta - \sin \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_4}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 6\theta - \sin 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_5}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 7\theta - \sin 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_6}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 8\theta - \sin 4\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_7}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 9\theta - \sin 5\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_1}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 3\theta + \cos \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_2}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 4\theta + 1) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_3}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 5\theta + \cos \theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_4}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 6\theta + \cos 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_5}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 7\theta + \cos 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_6}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 8\theta + \cos 4\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_7}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos 9\theta + \cos 5\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \tag{A.4}
\end{aligned}$$

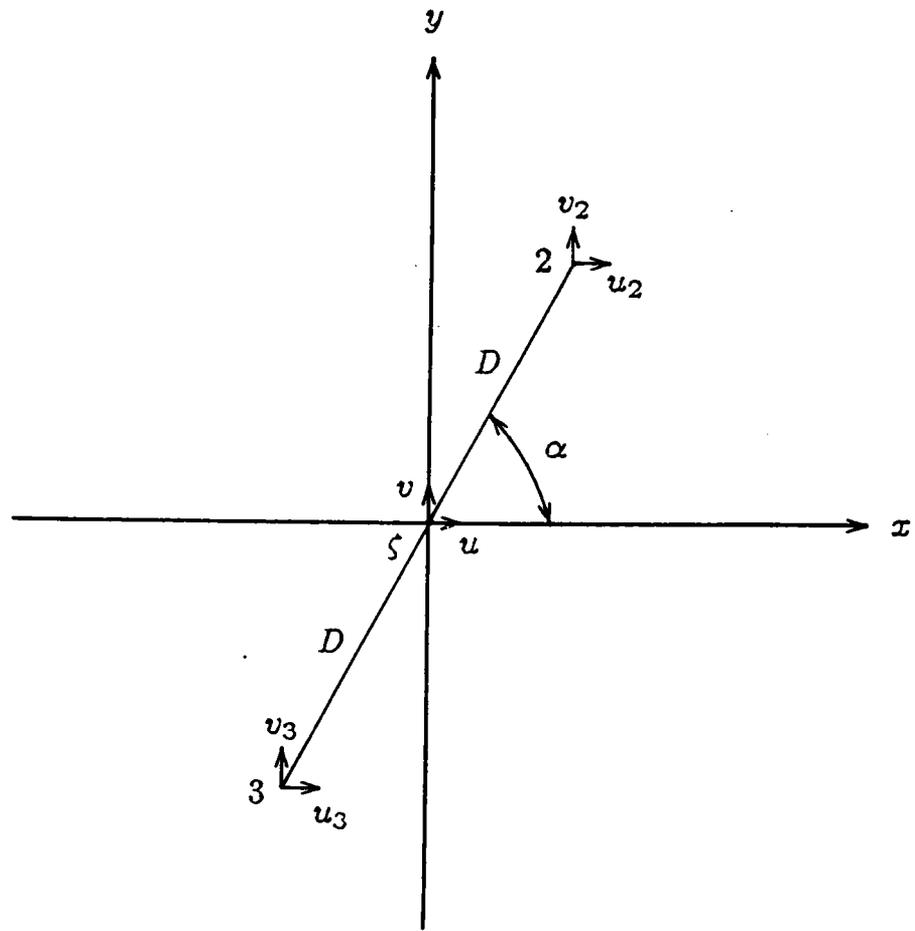
$$\begin{aligned}
\frac{1}{G^2} \frac{E[dV^* dV_2]}{dn} = & \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \cos 3\theta) e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_2}{2} \int_0^{2\pi} [\cos 2\theta - \frac{1}{2}(\cos 4\theta + 1)] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_3}{2} \int_0^{2\pi} [\cos 3\theta - \frac{1}{2}(\cos 5\theta + \cos \theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_4}{2} \int_0^{2\pi} [\cos 4\theta - \frac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos 2\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_5}{2} \int_0^{2\pi} [\cos 5\theta - \frac{1}{2}(\cos 7\theta + \cos 3\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{A_6}{2} \int_0^{2\pi} [\cos 6\theta - \frac{1}{2}(\cos 8\theta + \cos 4\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{A_7}{2} \int_0^{2\pi} [\cos 7\theta - \frac{1}{2}(\cos 9\theta + \cos 5\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [3 \sin \theta - \sin 3\theta] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_2}{2} \int_0^{2\pi} [\sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_3}{2} \int_0^{2\pi} [\sin 3\theta - \frac{1}{2}(\sin 5\theta + \sin \theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_4}{2} \int_0^{2\pi} [\sin 4\theta - \frac{1}{2}(\sin 6\theta + \sin 2\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_5}{2} \int_0^{2\pi} [\sin 5\theta - \frac{1}{2}(\sin 7\theta + \sin 3\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta + \frac{B_6}{2} \int_0^{2\pi} [\sin 6\theta - \frac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 4\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta \\
& + \frac{B_7}{2} \int_0^{2\pi} [\sin 7\theta - \frac{1}{2}(\sin 9\theta + \sin 5\theta)] e^{i\beta(\theta)} d\theta \tag{A.5}
\end{aligned}$$

## 參 考 文 獻

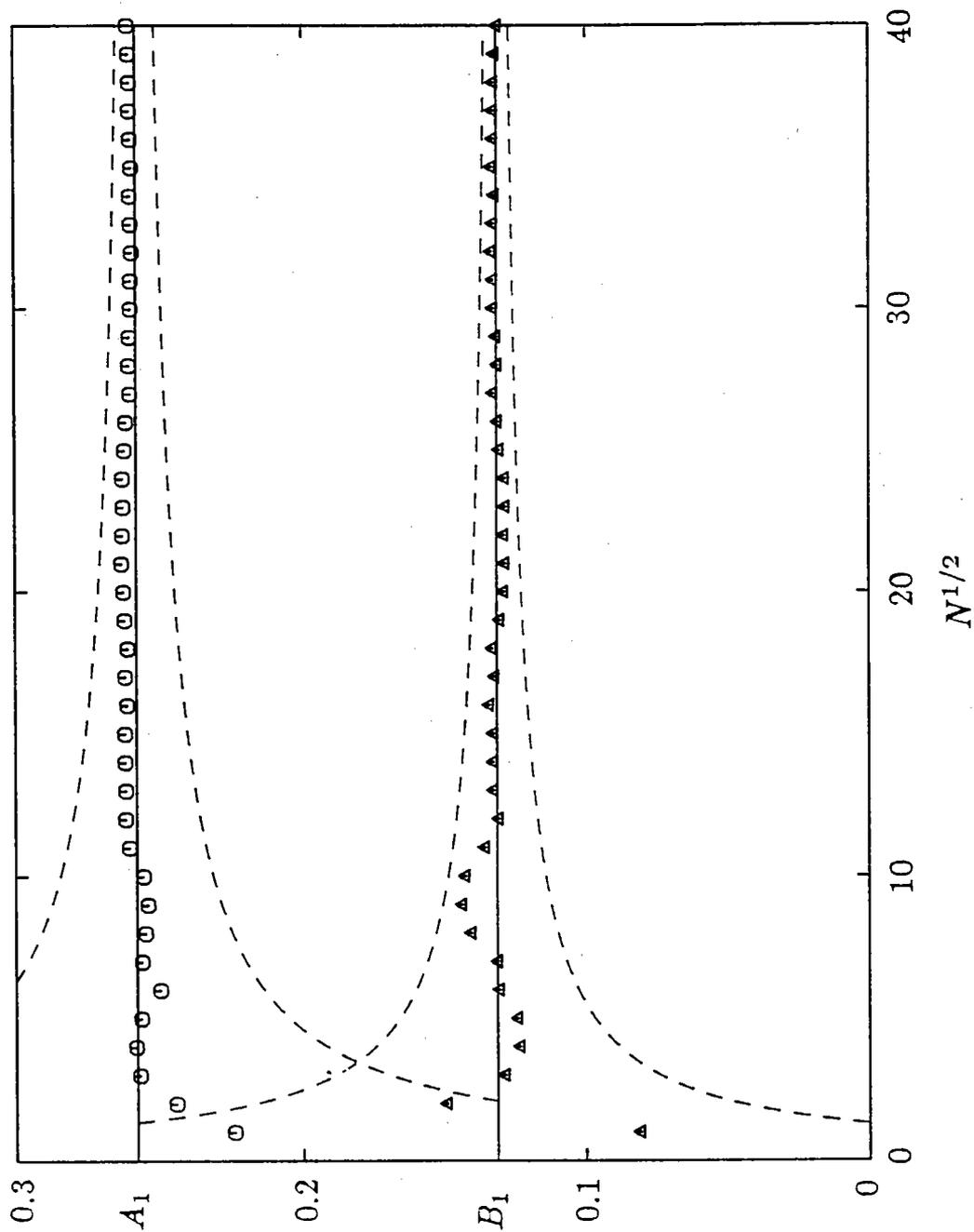
- Allender, J., Audunson, T., Barstow, S. F., Bjerken, S., Krogstad, H. E., Steinbakke, P., Vartdal, L., Borgman, L. E. & Graham, C. 1989 The WADIC project: a comprehensive field evaluation of directional wave instrumentation. *Ocean Engng*, Vol. 16, No 5/6, pp 505-536.
- Barber, N. F. 1963 The directional resolving power of an array of wave recorders. *Ocean Wave Spectra*, pp 137-150. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc.
- Borgman, L. E. & Panicker, N. N. 1970 Design study for a suggested wave gage array off Point Mugu, California. Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, *Tech. Rep.* HEL 1-14.
- Borgman, L. E. & Yfantis, E. 1979 Three-dimensional character of waves and forces. *Proc. Conf. on Civil Engineering in the Ocean*, IV, pp 791-804.
- Cartwright, D. E. & Smith, N. D. 1964 Buoy techniques for obtaining directional wave spectra. *Trans. Buoy Technology Symp.*, Washington, pp 112-121.
- Dean, R. G. 1982 The NRC workshop on wave measurement technology: a summary. *Proc. Conf. on Directional Wave Spectra Applications*. pp 220-232.
- Goda, Y. 1985 *Random Seas and Design of Maritime Structures*. University of Tokyo Press.
- Heteren, J. & Keyser H. 1982 Directional Spectra: comparison of three methods. *Proc. Conf. on Directional Wave Spectra Applications*. pp 116-128.
- Longuet-Higgins, M. S., Cartwright, D. E. and Smith, N. D. 1963 Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy. *Ocean Wave Spectra*, pp 111-136. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc.
- Panicker, N. N. 1974 Review of techniques for directional wave spectra. *Proc. Int. Symp. Ocean Wave Measurement and Spectral Anal.*, New Orleans, pp 669-688. Contrib. no. 3391 of Woods Hole Oceanog. Inst.
- Phillips, O. M. 1977 *The Dynamics of the Upper Ocean*, 2nd edn. Cambridge University Press.



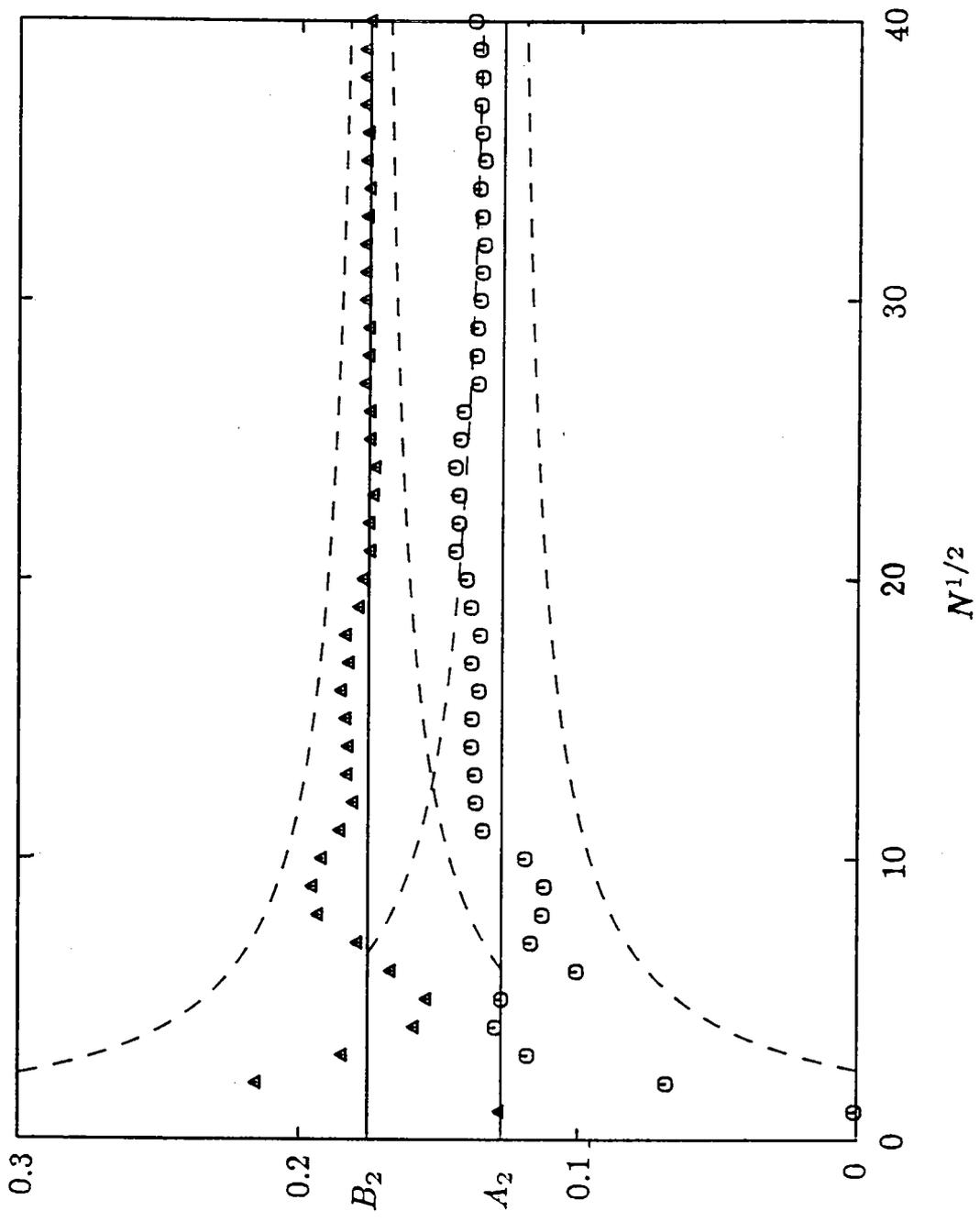
圖一 互為正交分量之座標轉換。



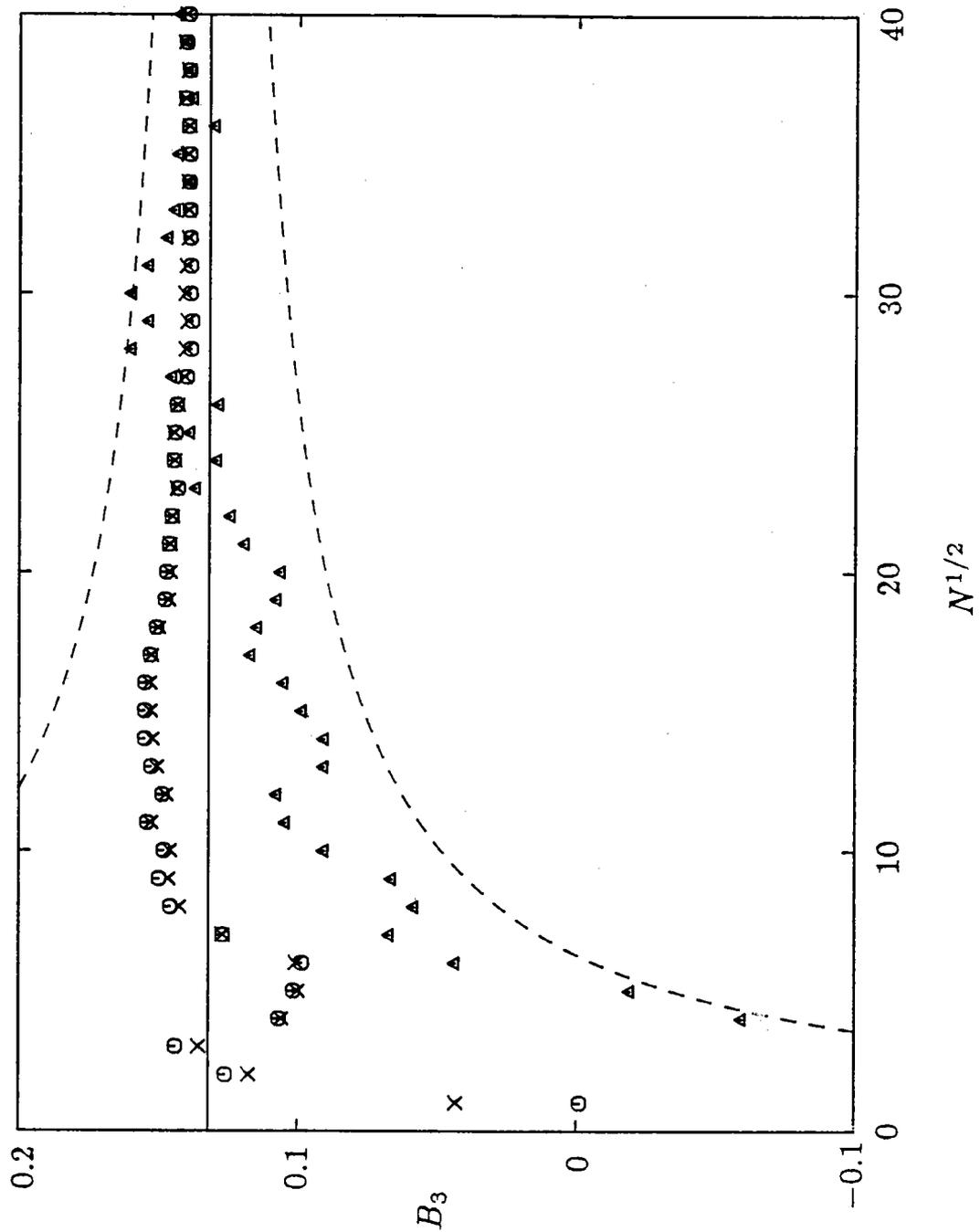
圖二 測量位置與測量項目。



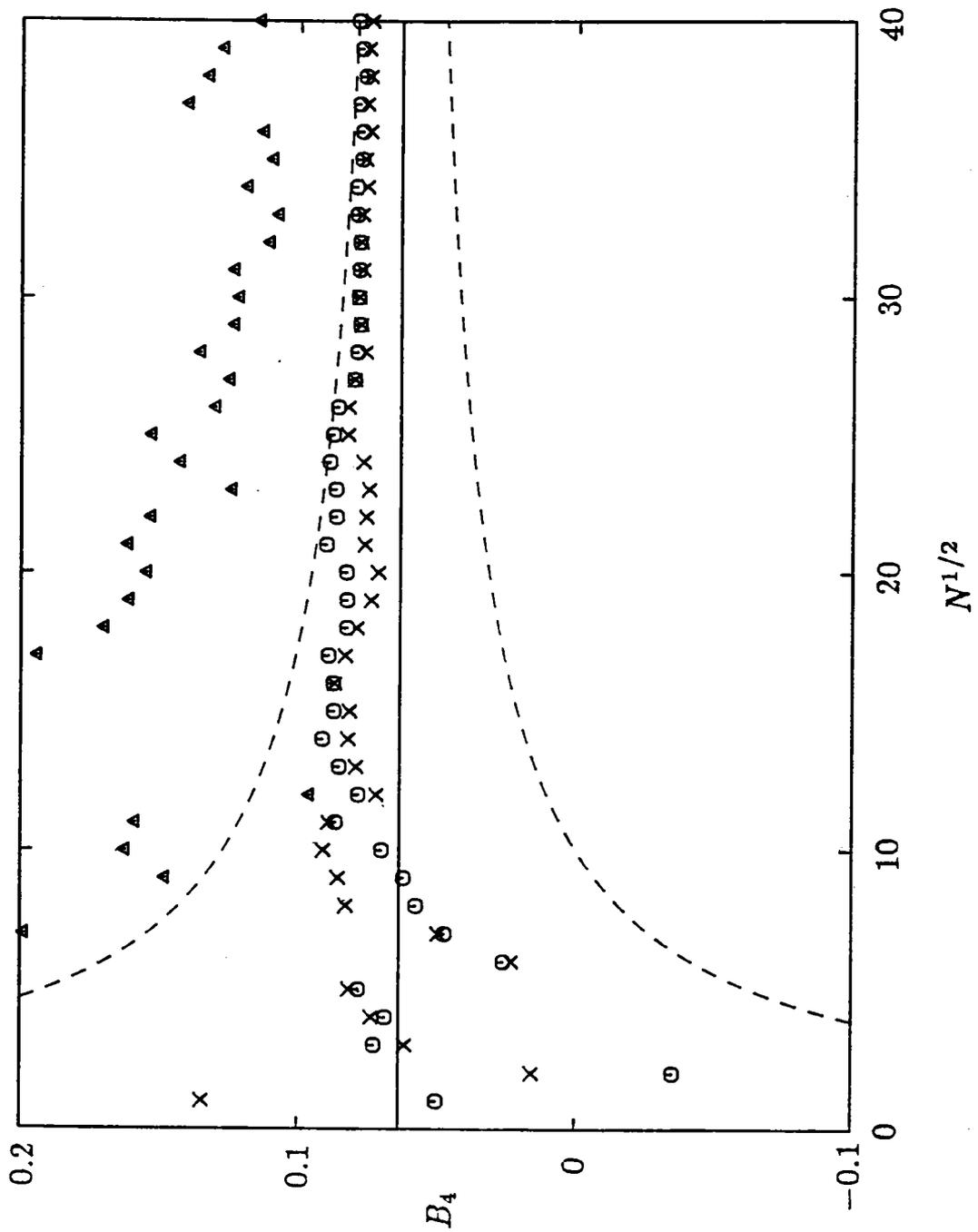
圖三 在模擬試驗中所估計第一階富氏係數，虛線表根據理論所推算估計值的標準偏差。



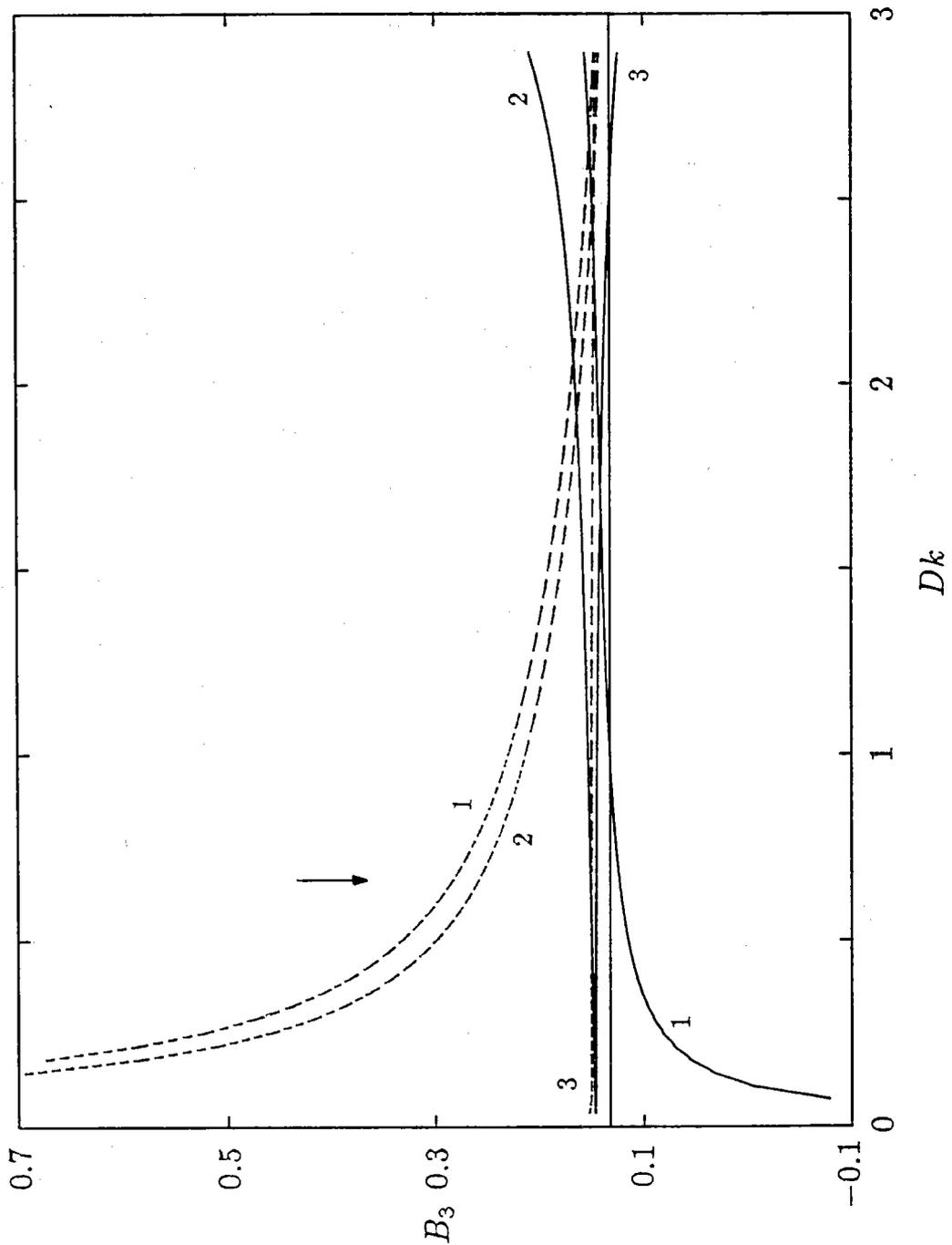
圖四 在模擬試驗中所估計第二階富氏係數，虛線表估計值的標準偏差



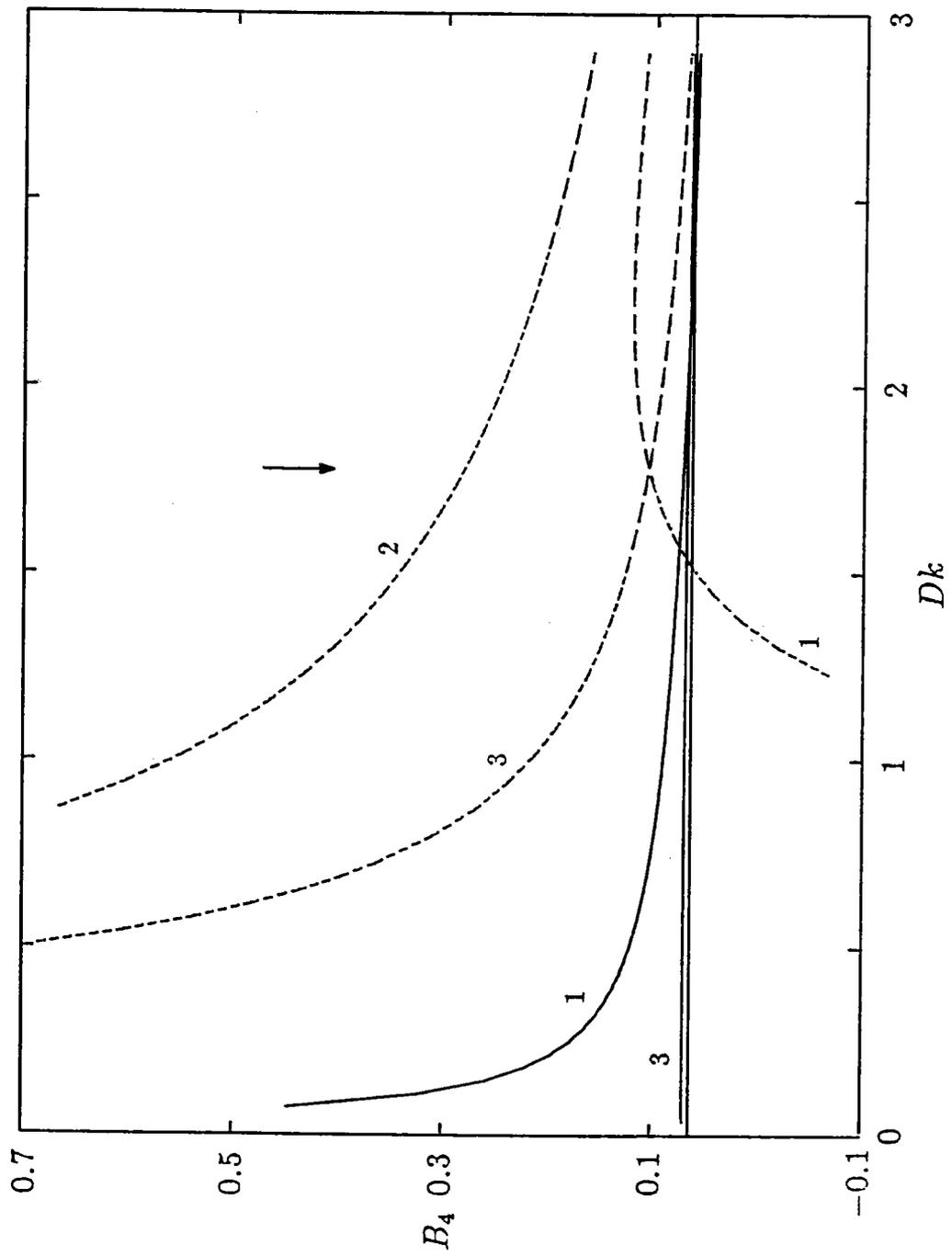
圖五 在模擬試驗中用三種不同處理方式所估計  $B_3$  的值，儀器間距離皆固定為  $Dk = 0.29$ ，三角符號表未經任何消滅誤差處理直接應用(4.11)所獲得的結果，圓圈符號表利用  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV}$  消去(4.11)內  $b_2$  的大部份誤差後所得的結果，叉號表利用  $\text{Im} \overline{dU \cdot dV_3}$  來降低誤差時所獲得的結果，虛線則表在後兩種情況下利用主要的項推算估計值的標準偏差。



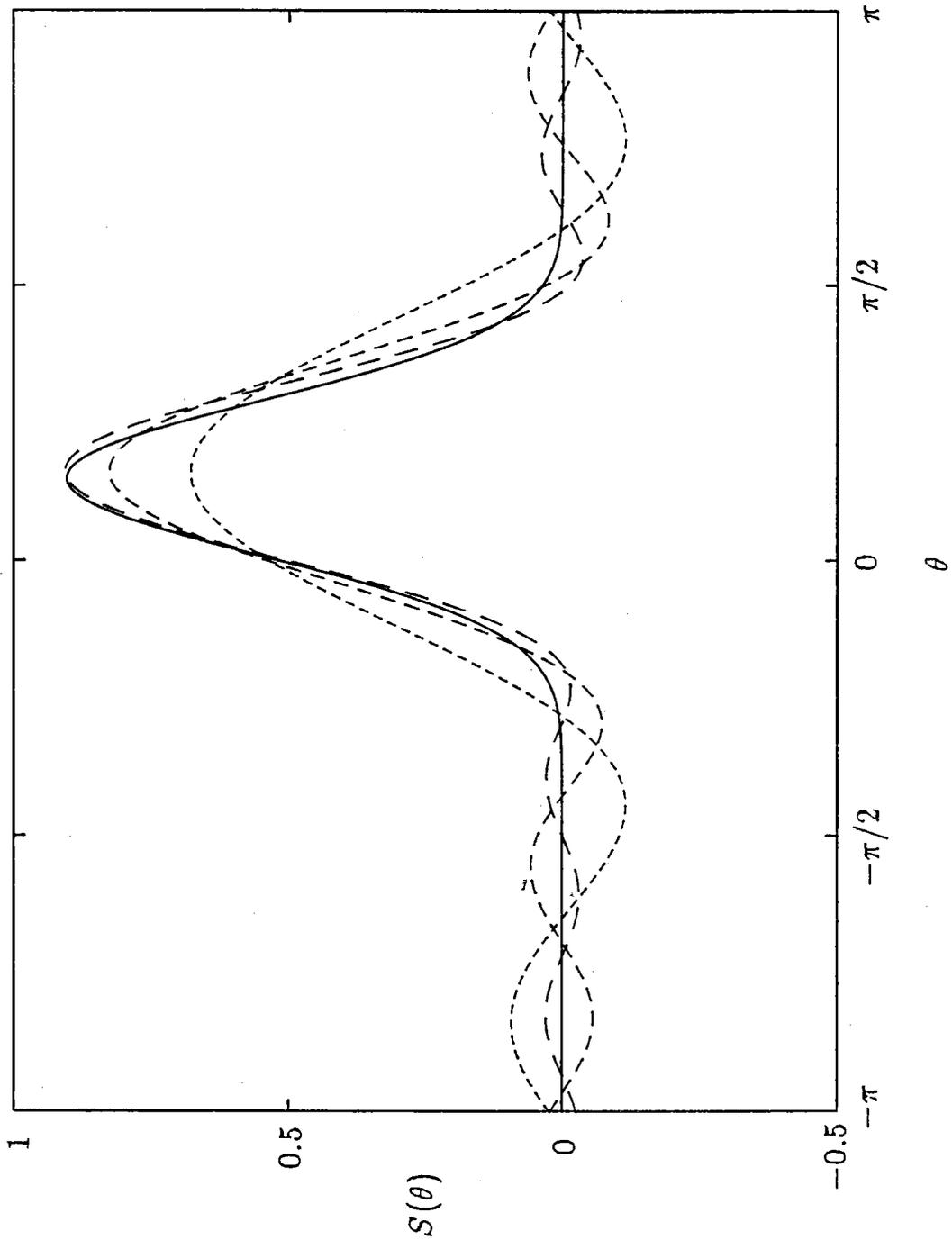
圖六 與圖五情況大致相同的  $B_4$  的估計值，但此時圓圈符號表利用第三組流速計的測量結果消去(4.18)內  $d_1$  和  $d_2$  的大部份誤差後所獲得的結果，叉號則表經由座標轉換更進一步改善準確度的情形。



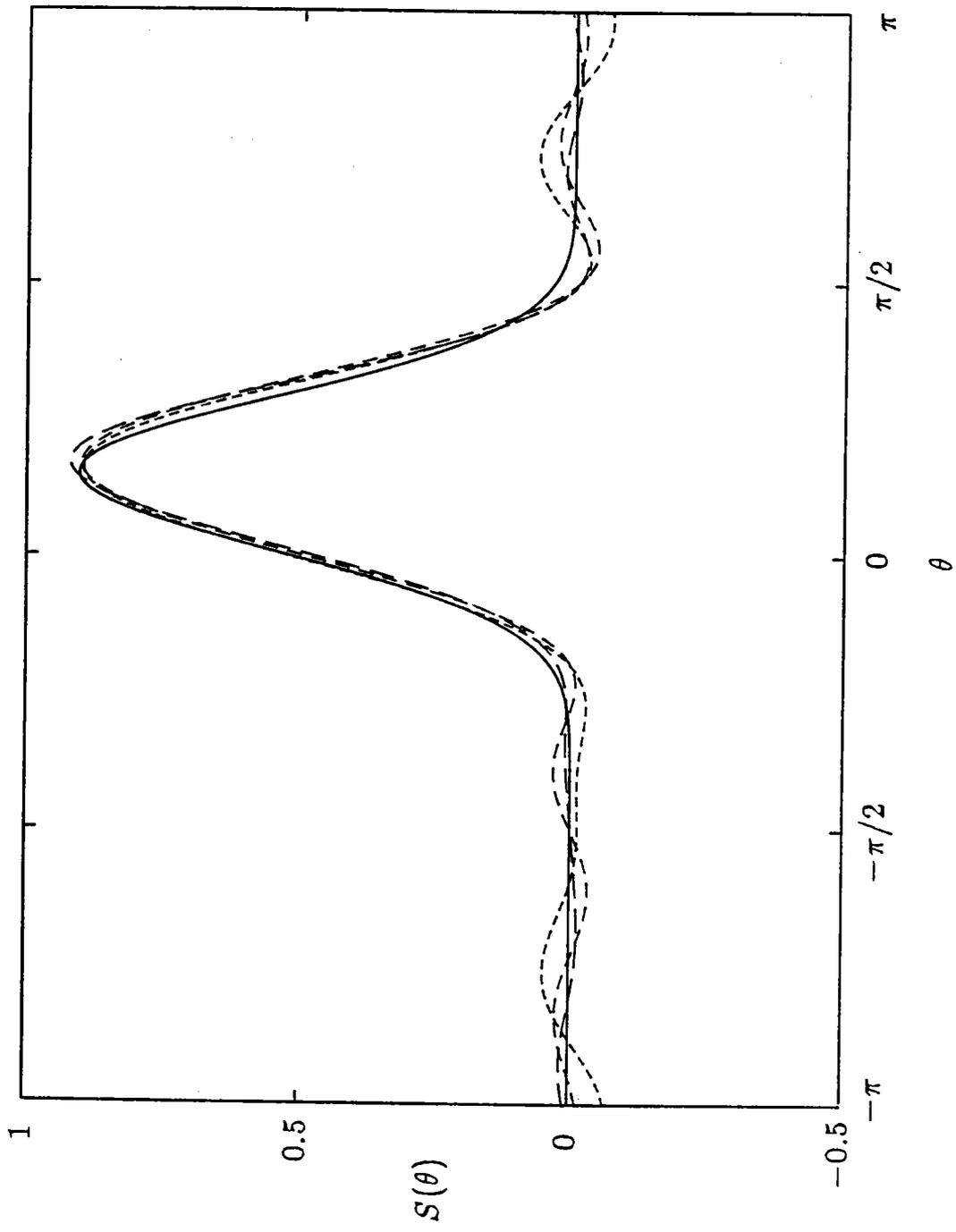
圖七 在各種不同儀器間隔情況下所估計的  $B_3$  值，樣本數目固定為100，標號1的曲線表未經誤差消滅處理時的結果，標號2表利用  $\text{Im} \overline{dU^*} \overline{dV}$  化減誤差時的結果，標號3表利用  $\text{Im} \overline{dU^*} \overline{dV_3}$  化減誤差時的結果，虛線與實線的差別在於前者是經由解(A.1)-(A.5)所獲得的結果，而後者則是解(4.11)，箭頭所指的位置表 Borgman & Yfantis(1979)曾估計出有意義的  $B_3$  之  $Dk$  最小的值。



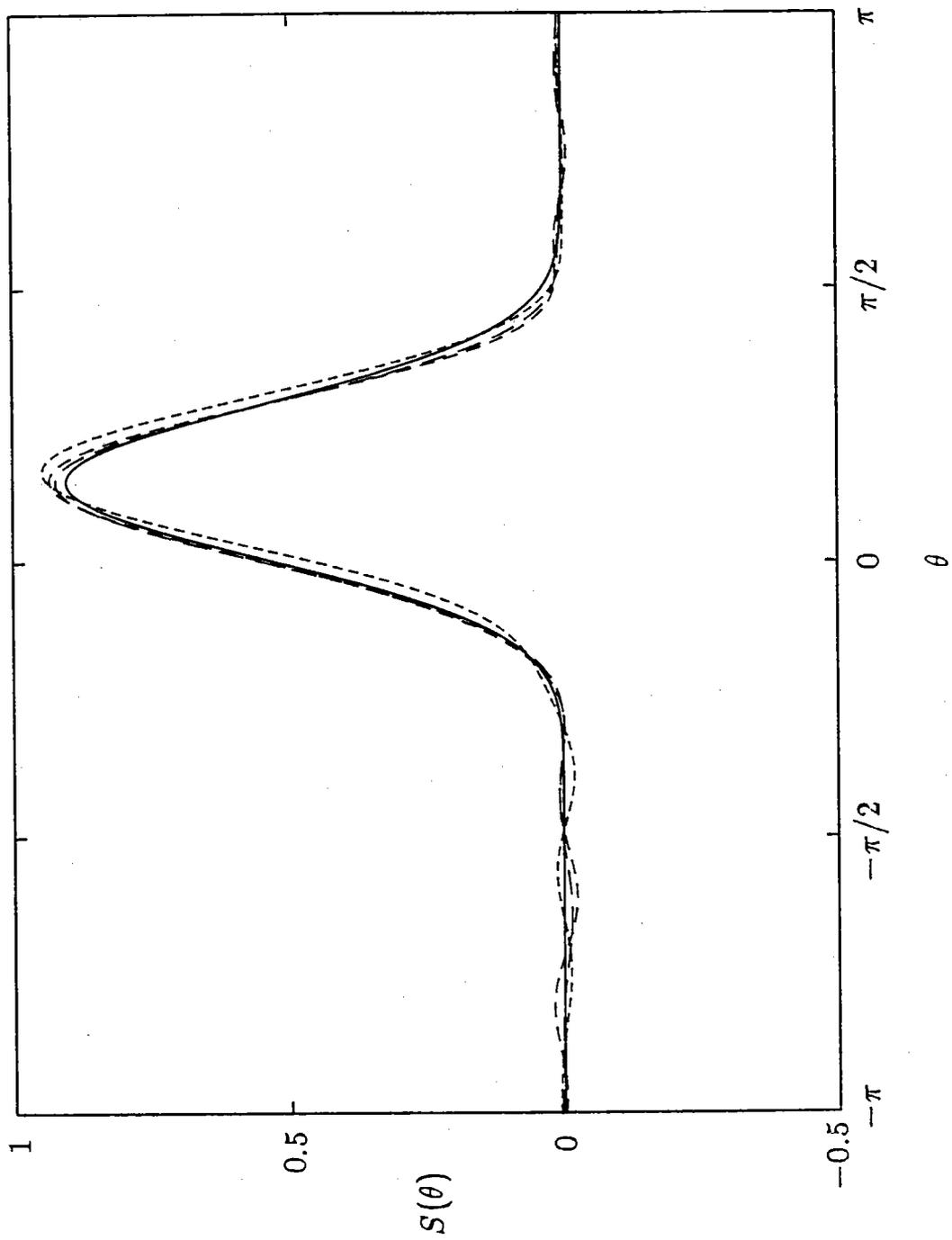
圖八 與圖七相同情況  $B_4$  的估計值，由於  $\text{Re} \overline{dU \cdot dV}$  無法被用來降低  $\text{Re} \overline{dU \cdot dV_2}$  的誤差，故圖上無標號2的實線



圖九 在模擬試驗中所估計的方向波譜與做為標的者之比較， $Dk = 0.29$ ,  $N = 100$ ，實曲線代表標的方向波譜，三條虛線依dash的長度(由小到大)分別代表使用一組、二組和三組儀器測量，並利用目前的方法來降低誤差時所獲得的結果。



圖十 類似於圖九，但此時  $Dk = 3.11$ ，且所有的虛線皆代表由兩組以上儀器測量，並儘可能地降低誤差所獲得的結果，其中dash最長和次長的虛線皆代表應用三組儀器所獲得的結果，但後者未將所解出的  $A_5$  考慮在內。



圖十一 在  $Dk = 6.3$  情況下，利用三組儀器的測量，並配合目前降低誤差的方法所估計之方向波譜，三條虛線依dash的長度(由小到大)分別代表  $N = 100, 400, 800$  情況下所獲得的結果。