

用路人出發時間選擇之旅次鏈基礎 依時性交通量指派模型之研究¹

A TIME-DEPENDENT TRIP-CHAIN BASED TRAFFIC ASSIGNMENT MODEL FOR TRAVELER DEPARTURE TIME CHOICES

王中允 Chung-Yung Wang²
宋奕緯 Yi-Wei Sung³

(109年5月7日收稿，109年9月4日第一次修正，109年11月9日第二次修正，
110年2月1日第三次修正，110年11月30日定稿)

摘要

隨著行動通訊媒體的普及，用路人在現今的都市路網上，隨時皆可能接收到完整的路網資訊。因此，對於行程規劃的需求上，如何提供用路人預測性的交通資訊，以選擇最佳出發時間及導引旅運路線，避免擁擠與事故發生，增進運輸效率，便成為一項重要的研究課題。本研究基於用路人旅次鏈基礎的旅運型態，詮釋用路人為避免尖峰時段的交通壅塞，發展出用路人出發時間選擇之依時性交通量指派模型，並考量在時空路網中交通流量傳導過程之車流狀態變化須符合之先進先出原則，以及反應道路流出容量限制對旅行時間的影響，以利未來在運輸規劃實務應用上做準備。本研究將本問題以雙層規劃的方式建立模型，進行相關數學性質的證明，發

-
1. 本研究係行政院科技部專題研究計畫 MOST 107-2410-H-606-011 之部分成果，作者在此感謝科技部之經費補助。
 2. 國防大學運籌管理學系教授（聯絡地址：112 臺北市北投區中央北路二段 70 號；電話：02-28966301 #604406，E-mail：stellar@ms35.url.com.tw）。
 3. 國防大學運籌管理學系講師（聯絡地址：112 臺北市北投區中央北路二段 70 號；電話：02-28966301 #604939，E-mail：yiwei7611@gmail.com）。

展出一個迴圈式的求解演算法進行模型求解，並以數值範例驗證模型的正確性並展現其特性，最後提出結論及建議。

關鍵詞： 旅次鏈基礎、出發時間選擇、依時性交通量指派、先進先出原則、路段流出容量限制

ABSTRACT

With the popularity of mobile communication media, travelers could receive complete road network information at any time on the current urban road network. Therefore, how to provide travelers predictive traffic information for the demand of trip planning, such as selecting a suitable departure time, guiding the travel route, avoiding congestion and accident, and improving transportation efficiency, has become an important research issue. This study, based on trip-chain route choice pattern interpreting the traveler's behavior of avoiding rush-hour traffic congestion, develop a traveler departure time choice time-dependent traffic assignment model. Furthermore, to ensure this model is applicable for transportation planning practice, this study considers the change of traffic flow propagation in the time-space network must satisfy the first-in-first-out (FIFO) principle, and the reflection of travel time influenced by link outflow must comply capacity constraint. Therefore, this paper formulated a bi-level programming model, and relevant mathematical properties are proved. We develop the iteration scheme solution algorithm to solve the model and provide numerical examples for model validation. Finally, some concluding remarks and future research directions are presented.

Key Words : *trip-chain based, departure time choice, time-dependent traffic assignment, first-in-first-out principle, link outflow capacity constraint.*

一、前言

由於近年私人運具持續成長，導致都市道路容量時常過飽和壅塞，並於尖峰時刻發生交通延誤等服務水準低落問題。用路人為因應上述狀況，在旅運時最普遍的因應措施即為「選擇適當出發時間」或「改變旅運路線」。而隨著行動通訊媒體的普及，用路人在現今的都市路網上，隨時皆可能接收到完整的路網資訊。因此，對於行程規劃的需求上，如何提供用路人預測性的交通資訊，以選擇最佳出發時間及導引旅運路線，避免擁擠與事故發生，提升運輸服務水準，便成為一項重要的研究課題。而透過所提供的預測性旅行時間與交通路網資訊，可應用於商用車輛選擇最佳出發時間及路徑導引、規劃物流貨運配送巡迴模式、時效性物流配送規劃、商用車隊即時派遣、緊急救援車輛路線規劃等，亦可導引用

路人充分利用替代道路避開壅塞路段、降低旅行時間不確定感，並避免擁擠、事故發生，將有助於增進整體路網運輸效率。

一般而言，路段上的旅行時間會受到路段流量影響，亦即路段流量增加將導致旅行時間變長，當用路人在尖峰時段出行時將因壅塞而體驗到較長的旅運時間，將致使用路人選擇其他離峰時段出發或選擇其他旅行時間較短之路徑，因此路段旅行時間長短將影響用路人出發時間／路徑選擇行為。由於用路人旅運行為傾向選擇最適當的時間出發，以避開旅次行為中的交通壅塞，並在最適當的時間到達目的地。Janson^[1]、Ran 等人^[2]認為用路人在進行出發時間與路徑選擇時，常考慮出發時間的負效用、路徑實際的旅行時間及到達時間負效用，且用路人一般希望越晚出發越好，亦即越接近最晚出發時間，其負效用越小。Friesz 等人^[3,4,5]以變分不等式建構出發時間與路徑選擇均衡模型，並在旅行成本加入提早或延遲到達迄點的懲罰值，使得用路人產生選擇出發時間的旅運行為。Chen 與 Hsueh^[6]建立離散時間出發時間／路徑選擇動態使用者最佳化模型。Chen 與 Chang^[7]、Chen 等人^[8]以負效用軟時窗概念，將用路人出發時間及到達時間轉化為負效用函數納入問題中求解。然而，該研究並未校估出發及到達時間負效用，且無法確保車流符合先進先出原則。

在實務上用路人通常不會固定其出發時間，當無提早或未準時到達的懲罰 (penalty) 時，用路人會選擇出發時間以最小化旅行時間。對於工作旅次而言，用路人一特定時間範圍中選擇最佳化其出發時間與路徑旅行時間，以避開交通壅塞的狀況。當整體路網的用路人皆選擇最適時間出發，將可更有效且合理地運用各道路的容量以避免交通壅塞。而通常愈早出發則負效用愈高，反之亦然。因此，用路人會在由最早出發時間與最晚出發時間所組成的出發時窗中，選擇其負效用最小的最適出發時間。然而，用路人出發時間及到達時間負效用不易校估，為詮釋出發時間選擇的行為特性，本研究將用路人出發時間選擇轉化為「網路問題」來處理，亦即將用路人出發時間負效用，以虛擬路段來代表不同時間出發的路段旅行時間，並於網路上形成一個含出發時間選擇的依時性交通量指派問題來進行求解。

而針對用路人的路徑選擇行為，以往相關的研究，多以動態交通量指派模型或依時性用路人路徑選擇模型的課題進行討論，Carey^[9]、Merchant 與 Nemhauser^[10]首先以數學規劃方法建立一離散性、單一迄點、非線性依時性系統最佳化模型，以分析用路人在路網上的動態旅運行為，並可藉以求得各路段的流量及所反映的旅行時間。Friesz 等人^[11]、Matsui^[12]、Ran 與 Boyce^[13]、Ran 與 Shimazaki^[14,15]以最佳化理論構建依時性路網均衡模型，然而模型較為複雜且不易求解，且未能考量用路人旅次鏈的路徑選擇行為。由於考慮時間向度的路網均衡問題屬於非對稱性的路網均衡問題 (Chen^[16])，無法建立最佳化數學規劃模型，但可以用變分不等式 (variational inequality, VI) 建立模型。Friesz 等人^[3,4]、Friesz 與 Mookherjee^[17]、Han 等人^[18]以變分不等式建構動態路網均衡問題，並透過線性成本函數確保流量傳導過程符合 FIFO 原則。

就巨觀角度而言，不同出發時間使用相同路段之車流，先進入路段的車流應會比後進入路段的車流先離開該路段，不應存在車流超越現象。為確保車流符合 FIFO 原則，相關

研究多著重於依時性旅行時間函數的討論 (Astarita^[19]、Carey 等人^[20]、Chen^[16]、Friesz 等人^[3]、Nie 與 Zhang^[21]、Ran 與 Boyce^[22]、Wu 等人^[23]、Xu 等人^[24]、Zhu 與 Marcotte^[25])，其中以線性的路段成本函數可確保模型符合 FIFO 限制；而非線性的路段成本函數，則無法保證滿足 FIFO 原則。然而，就依時性路段成本函數而言，非線性的函數卻較符合現實狀況。顯然的，利用成本函數的設計，很難避免先進後出 (first-in-last-out, FILO) 的不合理現象。Luo 等人^[26] 以額外限制式方式確保無論線性或非線性成本函數均可符合先進先出原則，然而該研究並未考量路段容量限制及用路人出發時間選擇的問題。

由於實際道路寬度及交通號誌時制的限制，路網中各路段皆有可允許車流通過的容量上限，而交通量指派的结果應能反映車輛因道路容量受限而發生壅塞的過飽和現象。Chen 與 Hsueh^[27]、Patriksson^[28] 指出動態模型具有時間向度概念，導致容量限制可能發生在路段流入率或流出率變數所表現的時間點上。Chen 與 Wang^[29] 首先以變分不等式建構含路段容量限制之動態用路人均衡模型，並假設容量限制發生在路段入口處，然而，在實際車流狀態下交通壅塞現象多發生於路段出口處，因此，路段容量亦應限制對於路段的流出率進行限制方較合理，王中允與宋奕緯^[30] 則率先建立出含路段流出限制之依時性交通量指派模型，並發展出求解演算法，由數值範例中，驗證了模型及求解演算法的正確性。

前述有關依時性或動態的用路人旅運選擇模型，多著重以旅次起迄對間的依時性路徑選擇行為進行模型的建立，忽略了用路人旅運過程中，因某些附帶的社經活動所造成路徑選擇的改變，Hägerstrand^[31] 即提出活動理論 (activity-based theory)，指出用路人在起迄點間常有必須完成的某些活動，亦即用路人在起點至迄點的單一旅次外，還包含起迄點間其他必要經過且完成之旅次活動，並以「旅次鏈」的形式串接在起迄對之間。此外，在許多實證研究均指出旅次鏈的行為存在於用路人的旅運行為中 (Currie 與 Delbosc^[32]、Hensher 與 Reyes^[33]、Holzapfel^[34]、McGuckin 等人^[35]、Stopher 等人^[36]、Thill 與 Thomas^[37])。Maruyama 與 Harata^[38] 認為個體用路人存在著旅次鏈行為，若將旅次鏈視為個別獨立的單一旅次處理，將造成旅次間聯結關係無法呈現而衍生後續旅運需求預測不一致的問題。為了克服上述問題，Maruyama 與 Harata^[38,39]、Wang 與 Chen^[40] 將用路人旅次鏈行為納入考量，建立含旅次鏈行為之路網均衡模型。然而上述路網均衡模型均忽略了不同時間與空間向度間交互作用下，所造成的用路人旅次鏈路徑選擇行為改變，也因此就無法適切地反映出在不同時空條件下用路人旅次鏈的路徑選擇行為。

Lam 與 Yin^[41] 提出活動基礎 (activity-based) 依時性交通量指派模型，以考量用路人活動點與路徑選擇的效用函數建構變分不等式模型，利用 BPR 函數建立時空路網，並以巢化對角化法進行求解。然而，Lam 與 Yin^[41] 利用變分不等式所建立之模型並未固定路段旅行時間，因此所構建出的可行解空間將為一非凸集合 (non-convex set)，此時變分不等式所建立之模型可能不成立。同時，該模型亦忽略各時空路段間交互影響可能產生違反 FIFO 條件的不合理現象，且未探討路段流出容量限制對於用路人旅次鏈路徑選擇行為的影響，並僅以家、工作及用餐三個節點建立測試路網，無法展現用路人多個活動參與狀況下的旅次鏈路徑選擇行為。王中允與陳相武^[42]、Wang 與 Chen^[40]、Wang 等人^[43] 提出

旅次鏈基礎路網均衡模型，並以 0-1 指示變數說明旅次鏈定義限制式。Luo 等人 [26] 進而建立依時性旅次鏈基礎路段旅行時間推估模型，除確保滿足先進先出原則，並發展一迴圈式的求解演算法，結合拉氏法 (Lagrangian approach) 及梯度投影法 (gradient projection method) 進行求解，求解效果良好；然而該研究未考量因路段容量限制而發生壅塞的過飽和現象及出發時間選擇的旅運行為，導致分析結果無法適切符合實務現象。

綜上所述，出發時間選擇在未來用路人行程管理上將扮演極重要的角色，鑑於傳統著重以靜態交通量指派進行分析，將無法有效詮釋用路人選擇出發時間的現象，因此，必須以考量時間向度的依時性交通量指派模型為基礎，而就用路人路徑選擇行為而言，旅次鏈的行為存在於用路人的旅運行為中，若忽略了旅次鏈活動所造成用路人路徑選擇的影響，將無法適切地反映路網上的運輸需求 (王中允與陳相武 [42]、Wang 與 Chen [40])，而就依時性交通量指派模型而言，路段流量先進先出 (first-in-first-out, FIFO) 原則及路段容量限制則是必須考量的限制條件 (Luo 等人 [26]、王中允與宋奕緯 [30])。綜上所述，本研究之進行，首先針對研究問題及相關文獻進行分析，其次建立依時性用路人出發時間選擇旅次鏈基礎交通量指派模型，並進行相關數學性質的證明，以及求解演算法的設計，說明模型求解的步驟，在利用測試路網進行數值範例的驗證與分析後，最後提出結論與建議。

二、模型建立

2.1 符號說明

首先，茲將本研究所採用的符號說明如下：

a	路段編號
c	理想路段旅行時間向量
$c_{a(t)}$	路段 a 在時區 t 的理想旅行時間
$c_{a_0(t)}$	路段 a 在時區 t 自由旅行時間
$c'_{a(t)}$	路段 a 在時區 t 旅行時間導數
$c_{pk}^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 從第 i 時窗中 k 時區出發使用路徑 p 之理想旅行時間
$c_{\hat{p}k}^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 從第 i 時窗中 k 時區出發使用旅次鏈路徑 \hat{p} 之理想旅行時間
$\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 從第 i 時窗中 k 時區出發使用旅次鏈路徑 \hat{p} 之一般化理想旅行時間
$\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r^i s*}$	均衡條件下之一般化旅次鏈路徑 \hat{p} 之理想旅行時間
d	尋優方向向量
DEPE	最早出發時區
DEPL	最晚出發時區 DEPE
$d_{pk}^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 間從第 i 時窗中 k 時區出發的旅次鏈路徑尋優方向
$h_{pk}^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 從第 i 時窗中 k 時區出發符合使用者均衡狀態下通過路徑 p 之流量

$h_{pk}^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 在從第 i 時窗中 k 時區出發符合使用者均衡狀態下通過旅次鏈路徑 \hat{p} 之流量
i	出發時窗
k	流量在時窗中的時區
m	第一層迴圈運算次數
w	第二層迴圈運算次數
l	第三層迴圈運算次數
n	活動點變數
ε_u	流入率收斂標準值
ε_β	額外限制式對應的拉氏乘數收斂標準值
ε_τ	估計旅行時間收斂標準值
$NINT$	四捨五入取整數化
N^{rs}	起迄對 (r,s) 間旅次鏈路徑所經過活動點之集合
P	傳統起迄端點路徑變數
\hat{p}	旅次鏈路徑變數
\hat{p}^*	旅次鏈路徑變數之最短路徑
$\bar{q}_k^{r^i s}$	起迄對 (r,s) 在時區 k 之旅旅運需求量
r	起點變數
s	迄點變數
t	路段之進入時區
Δt	在先進先出限制條件中，流量在前、後時區の間隔，本研究稱為滯後時差 (lag)
\mathbf{u}	路段流入率向量
$u_{a(t)}$	路段 a 在時區 t 之流入率
$v_{a(t)}$	路段 a 在時區 t 之離開率
$x_{a(t)}$	路段 a 在時區 t 之車輛數
$\mathcal{V}_{r^i k}$	從 i 時窗虛擬起點 r^i 出發到第 k 時區起點的出發時間負效用
$\beta_{1a(j)}$	路段 a 在時區 j 流入之路段容量限制對應的拉氏乘數
$\tilde{\beta}_{1a(j)}^{w+1}$	路段 a 在時區 j 流入之第 $w+1$ 個路段容量限制式對應的估計拉氏乘數值
$\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}$	路段 a 在時區 t 流入之先進先出限制對應的拉氏乘數
$\tilde{\beta}_{2a(t)(t+\Delta t)}^{w+1}$	路段 a 在時區 t 流入之第 $w+1$ 個先進先出限制式對應的估計拉氏乘數值
$\bar{\delta}_{pka(t)}^{r^i s}$	(0,1) 指示變數，為起迄對 (r,s) 間在第 i 時窗中時區 t 旅次鏈路徑 \hat{p} 與路段 a 之關係
$\bar{\gamma}_{pkn(t)}^{r^i s}$	(0,1) 指示變數，表示從第 i 時窗中 k 時區出發的起迄對 (r,s) 間在時區 t 路徑 p 通過第 n 個活動點

- $\bar{\lambda}$ 預先設定之移動步幅
- $\hat{\pi}_k^{r^i s}$ 起迄對 (r, s) 中在第 i 時窗中時區 k 出發之最短旅次鏈路徑旅行時間
- τ 估計路段旅行時間向量
- $\tau_{a(t)}$ 路段 a 在時區 t 之估計旅行時間
- Ω_τ 以估計路段旅行時間描述之可行解區域
- *
- ρ 步幅調整參數，為一介於 0~1 間的常數

2.2 時空路網

本研究為反映用路人出發時間選擇的旅運行為，將出發時間選擇以負效用的方式加以表示，並納入時空路網中：針對每一起點 r ，增加一虛擬起點 r^i ，再以虛擬路段連接虛擬起點 r^i 與每一起點 $n_k, k \in [DEPE^{r^i}, DEPL^{r^i}]$ ，其中時區 k 介於最早出發時間 (DEPE) 及最晚出發時間 (DEPL) 之間。而此虛擬出發路段 $r^i \rightarrow n_k$ 的成本，即等於出發時間負效用 $U_{r^i n_k}$ ，其中實體路網與時空路網間流入率、流出率及車輛數的關係，當加入估計旅行時間後，可展開如圖 1(b) 之時空路網，至於先進先出限制以及路段流出容量限制的時空路網表示方式，則可參考 Luo 等人^[26] 及王中允與宋奕緯^[30] 的說明。

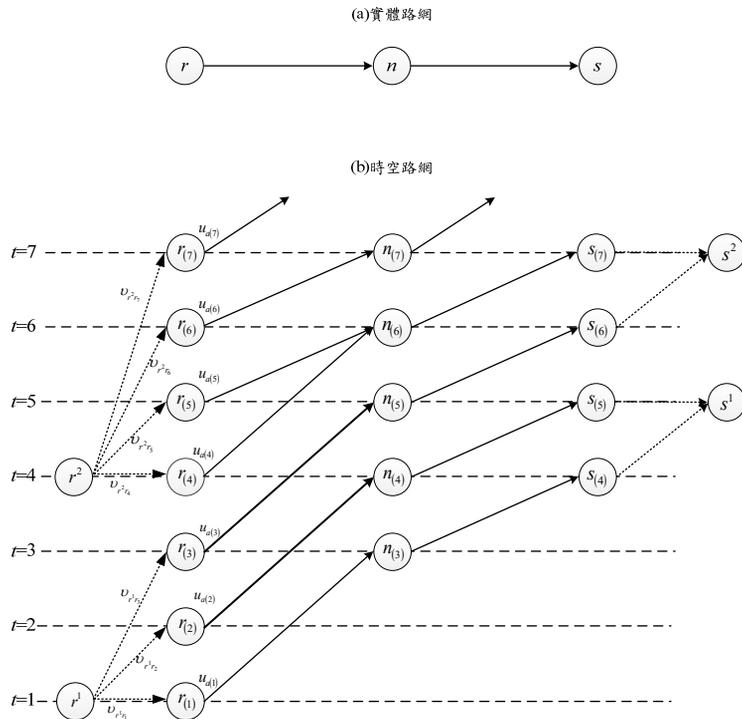


圖 1 時空路網示意圖

2.3 最佳化原則與模型建立

本研究所構建之模型為基於用路人觀點，考慮選擇最適時窗出發以避開路段上的交通壅塞，並於一旅次鏈中完成多個附帶活動點的路徑選擇決策，因此首先定義用路人的旅次鏈旅運活動如下：

『用路人在主要起迄點間進行路徑選擇的過程中，所必須完成的一連串的次要活動』

在考量用路人一旅次鏈中完成多個附帶活動點的路徑選擇決策上，用路人基於擁有完整路網資訊、依時性運輸需求已知、選擇對本身最有利的旅次鏈路徑、不考慮用路人到達次要活動點的時窗限制及出發時間選擇等前題假設下，將達成以下依時性旅次鏈用路人出發時間選擇最佳化原則：

用路人在同時窗 i 中同一個時區 k 下起迄對 (r, s) 中被使用到的旅次鏈路徑 \hat{p} 之一般化旅次鏈路徑旅行時間必小於或等於其他未被使用到旅次鏈路徑的一般化旅次鏈路徑旅行時間，而此一般化旅次鏈路徑旅行時間 $\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r's*}$ 由出發時間負效用 $v_{r'rk}$ 、理想旅行時間 $c_{\hat{p}k}^{r's*}$ 與違反 FIFO 原則與路段流出率容量限制所增加之額外延滯成本 $\beta_{\hat{p}k}^{r's*}$ 所組成。上述依時性旅次鏈用路人最佳化原則，可以式 (1) 表示：

$$\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r's*} \begin{cases} = \hat{\pi}_k^{r's} & \text{if } h_{\hat{p}k}^{r's*} > 0 \\ \geq \hat{\pi}_k^{r's} & \text{if } h_{\hat{p}k}^{r's*} = 0 \end{cases} \quad \forall r, s, i, \hat{p}, k \quad (1)$$

其中

$$\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r's*} = v_{r'rk}^* + c_{\hat{p}k}^{r's*} + \beta_{\hat{p}k}^{r's*} \quad (2)$$

$$c_{\hat{p}k}^{r's*} = \sum_a \sum_t C_{a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r's} \quad (3)$$

$$\hat{\pi}_k^{r's} = \min_{\hat{p}} \left\{ \tilde{c}_{\hat{p}k}^{r's*} \right\} \quad (4)$$

$$k = \left(i + v_{r'rk}^* \right) + NINT \left(\begin{array}{l} \sum_a \sum_t C_{a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r's*} + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\tilde{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \delta_{\hat{p}ka(j)}^{rs} \\ + \sum_a \sum_t \beta_{2a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r's*} \end{array} \right) \quad (5)$$

上式 (2) 為定義 $\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r's*}$ 為從 i 時窗出發中第 k 時區在起迄對 (r, s) 間依時性旅次鏈路徑 \hat{p} 的一般化旅行時間 (generalized travel time)，並由出發時間負效用、該旅次鏈路徑的旅行時間、違反路段流出率容量限制的等候延滯與違反 FIFO 原則之對偶成本所組成。式 (3) 為一般化旅行時間由所有使用到的路段旅行時間所加總，其中 $\delta_{\hat{p}ka(t)}^{r's}$ 為 0-1 整數的鄰接變數。式 (4) 為通過所有旅次鏈活動點之最小一般化依時性旅次鏈旅行時間。式 (5) 中定義起迄對 (r, s) 間從時窗 i 中虛擬起點 r' 至時區 k 出發的旅次鏈路徑 \hat{p} ，其出發時區 k 的計算方式。

依據本研究探討主題，考量用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇之現象，在此建立一雙層規劃模型，其中上層模型為推估的路段旅行時間 與各路段流量所求得之理想路段旅行時間平方差的極小化目標。一般而言，路段旅行時間會受到路段流量影響，亦即路段流量增加將導致旅行時間變長，致使用路人為避免壅塞選擇其他時間出發或選擇其他旅行時間較短之路徑，因此路段旅行時間長短將影響用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇行為，就傳統靜態交通量指派模型而言，由於並未考量路段流量在時間向度的改變，因此並沒有估計路段旅行時間，以及理想路段時間的差異，然而考量用路人路網上依時性出發時間／旅次鏈路徑選擇行為時，由於不同的估計路段旅行時間，會形成不同的時空路網，也就會產生不同的路段選擇，並據以計算出不同的理想路段時間，因此上層模型即是希望求得估計與理想的路段旅行時間之間的一致性。

而下層模型則考量在上層模型所估計路段旅行時間固定在 所建立的時空路網下，基於路網上各起迄對間用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇行為所求得的均衡流量，據以計算出各時區的理想路段旅行時間，當推估與理想的旅行時間差異極小時，則可滿足用路人最佳化原則，並求得正確的依時性路段旅行時間。在此建構出雙層規劃模型如下：

$$\min \sum_a \sum_t [c_{a(t)} - \tau_{a(t)}]^2 \quad \forall a, t \quad (6)$$

S.t.

估計路段旅行時間非負限制式：

$$\tau_{a(t)} \geq 0 \quad \forall a, t \quad (7)$$

依時性用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇限制條件：

$$\sum_r \sum_i \sum_k v_{r,i,k}^* [u_{r,i,k}^* - u_{r,i,k}^*] + \sum_a \sum_t c_{a(t)}^* [u_{a(t)} - u_{a(t)}^*] \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega_c \quad (8)$$

式 (8) 為本研究建立的依時性用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇變分不等式模型，其中 Ω_c 代表此一模型可行解區域，並由路段估計旅行時間固定在 t 時所構建而得，此一可行解區域為凸集合，並由以下限制條件所組成：

依時性旅次鏈流量守恆限制式：

$$\sum_{\hat{p}} \sum_k h_{\hat{p}k}^{r,s} = \bar{q}^{r,s} \quad \forall r, s, i, k \quad (9)$$

依時性旅次鏈流量傳導限制式：

$$u_{\hat{p}ka(t)}^{r,s} = h_{\hat{p}k}^{r,s} \bar{\delta}_{\hat{p}ka(t)}^{r,s} \quad \forall r, s, i, a, \hat{p}, k, t \quad (10)$$

$$\sum_t \bar{\delta}_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s} = 1 \quad \forall r, s, i, \hat{p}, a \in \hat{p}, k \quad (11)$$

$$\bar{\delta}_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s} = \{0, 1\} \quad \forall r, s, i, a, \hat{p}, k, t \quad (12)$$

依時性旅次鏈流量非負限制式：

$$h_{\hat{p}k}^{r^i s} \geq 0 \quad \forall r, s, i, \hat{p}, k \quad (13)$$

路段流入率／出發時間／旅次鏈定義限制式：

$$u_{r^i r_k} = \sum_s \sum_{\hat{p}} h_{\hat{p}k}^{r^i s} \quad \forall r, i, k \quad (14)$$

$$u_{a(t)} = \sum_{rs} \sum_i \sum_{\hat{p}} \sum_k h_{\hat{p}k}^{r^i s} \bar{\delta}_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s} \quad \forall a, t \quad (15)$$

$$\tilde{c}_{\hat{p}k}^{r^i s} = v_{r^i r_k} + \sum_a \sum_t c_{a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s*} + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \delta_{\hat{p}ka(j)}^{r^i s} + \sum_a \sum_t \beta_{2a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s*} \quad (16)$$

$\forall r, s, i, \hat{p}, k$

$$k = (i + v_{r^i r_k}^*) + NINT \left(\begin{array}{l} \sum_a \sum_t c_{a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s*} + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \delta_{\hat{p}ka(j)}^{r^i s} \\ + \sum_a \sum_t \beta_{2a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s*} \end{array} \right) \quad (17)$$

$$v_{r^i r_k} = f(DEPL^{r^i}, k) \quad \forall r, i, k \quad (18)$$

依時性旅次鏈定義限制式：

$$h_{\hat{p}k}^{r^i s} = h_{\hat{p}k}^{r^i s} \prod_{n \in N^{r^i s}} \bar{\gamma}_{\hat{p}kn(t)}^{r^i s} \quad \forall r, s, i, k, t, p \in (r, s), \hat{p} \in (r, s) \quad (19)$$

$$\bar{\gamma}_{\hat{p}kn(t)}^{r^i s} \in \{0, 1\} \quad \forall r, s, i, n \in N^{r^i s}, p \in (r, s) \quad (20)$$

額外限制式 (路段流出率容量限制式)：

$$\sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} u_{a(j)} = v_{a(t+\bar{c}_{a(t)})} \leq CAP_a \quad \forall a, j \quad (21)$$

額外限制式 (先進先出限制式)：

$$c_{a(t)} \leq c_{a(t+\Delta t)} + \Delta t \quad \forall a, t, \Delta t = 1, \dots, T - t, u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0 \quad (22)$$

上述式 (9) 為自起點 r 出發經過 i 時窗中 k 時區至迄點 s 之流量守恆限制式；式 (10) 透過指示變數表達經過旅次鏈路徑 \hat{p} 之流量傳導過程，若自起點 r 出發經過 i 時窗中 k 時區，在路徑 p 上至迄點 s ，旅次鏈路徑流量於 t 時區通過路段 a 時，鄰接變數 $\bar{\delta}_{pka(t)}^{r's} = 1$ ；反之， $\bar{\delta}_{pka(t)}^{r's} = 0$ 。式 (11) 代表自起點出發經過 i 時窗中 k 時區通過旅次鏈路徑 \hat{p} 至迄點 s ，旅次鏈路徑流量僅可在 t 時區通過路段 a 最多一次；若流量未通過路段 a ，則其在抵達迄點前必定經過路網中其他路段；式 (12) 代表鄰接變數均為 0-1 整數。

式 (13) 說明旅次鏈路徑流量為非負；式 (14)~(15) 表示出發及中途 (intermediate) 路段總流量為分別為各自旅次鏈路徑流量加總；式(16)為一般化旅次鏈路徑總旅行時間由出發時間負效用、旅次鏈路徑旅行時間加總、違反路段流出率容量限制與先進先出限制條件的對偶變數所組成；式 (17) 為起迄對 (r,s) 間從時窗 i 中虛擬起點 r' 至時區 k 出發的旅次鏈路徑 \hat{p} ，其出發時區 k 的計算方式。其中當估計路段旅行時間 $\tau_{a(t)}$ 固定時，式 (10)~(12)、式(15)~(17) 之鄰接變數均為 0-1 變數；式 (18) 定義從 i 時窗中時區 k 出發之負效用函數，並由最晚出發時區 (DEPL)、理想出發時區所組成。

式 (19)~(20) 為前述所說明之依時性旅次鏈定義限制式，以及活動點/路徑鄰接矩陣變數 $\bar{\gamma}_{pka(t)}^{r's}$ ，為一已知的 0-1 指示變數；式 (21) 為確保流量符合流出率路段容量限制，其中路段 a 在 $t + \check{c}_{a(t)}$ 時區的流出率是由 t 至 $t + \check{c}_{a(t)}$ 的流入率加總所組成。式 (22) 為確保符合 FIFO 原則，其中當路段 a 在時區 t 及 $t + \Delta t$ 下流入率均大於 0，即當 $u_{a(t)} > 0$ 及 $u_{a(t+\Delta t)} > 0$ 時 FIFO 限制條件始存在作用。

本研究運用雙層規劃模型所建構之依時性路網均衡問題，具有下列五點優勢：

1. 下層變分不等式問題的解在時空路網固定於 Ω_τ 的子集合時為凸集合 (convex set)，亦即存在求解式 (8) 之有利數學性質。對上層問題而言，此雙層規劃模型始終存在可行解，故即使路段估計旅行時間與理想路段旅行時間不一致，亦可保證有解。
2. 下層模型僅對受限解子集有作用，且當時空路網固定在 Ω_τ 的子集合時，下層模型可視為一時間向度固定下之依時性旅次鏈基礎之交通量指派模型。
3. 當上層模型所推估的路段旅行時間 τ 與下層模型所產生的理想旅行時間均一致時，即滿足差異的最小平方目標函數，因此估路計段旅行時間可用來預測在依時性旅次鏈使用者均衡原則下的理想路段旅行時間。
4. 由於雙層規劃模型之可行解空間為非凸集合，其解會受到由不同的估計旅行時間 τ 所構建的時空路網結構 Ω_τ 影響，當上層模型的決策變數 τ 改變時，其下層模型的決策變數 \mathbf{u} 及透過旅行時間函數反映出來的理想旅行時間 $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ 將隨之改變，並可能產生多重解 (multiple solutions) 的現象，因此本模型並非單純為交通量指派問題，而更像是路網設計 (network design) 問題。

5. 本研究在每個時區的路段估計旅行時間可直接求得，此資訊可應用在路段旅行時間預測，例如都市交通運輸規劃與控制，車輛路線選擇規劃或在時窗限制下車隊營運問題等。

在此本研究針對額外限制式的最佳化條件進行推導與說明，當式 (8) 之變分不等式之路網，固定在各路段之估計旅行時間 $\{\tau_{a(t)}\}$ 所形成的時空路網上時，此時，固定各時空路段之交互影響 (cross effect)，則式 (8) 之變分不等式模型可轉化為以下最佳化模型。

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{u}) = & \sum_r \sum_i \sum_k \int_0^{u_{r^i k}} v_{r^i k}(\mathbf{u} \setminus u_{r^i k}, \omega) d\omega \\ & + \sum_a \sum_t \int_0^{u_{a(t)}} c_a(\mathbf{u} \setminus u_{a(t)}, \omega) d\omega \end{aligned} \quad (23)$$

S.t. 式 (9)~式 (22)

上述最佳化模型中將式 (9)、式 (21) 及式 (22) 分別乘上拉氏乘數 $\{\hat{\pi}_k^{r^i s}\}$ 、 $\{\beta_{1a(j)}\}$ 及 $\{\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}\}$ 後鬆弛加入至目標式 (23)，則可得下式 (24) 拉氏函數：

$$\begin{aligned} L(\mathbf{h}, \hat{\pi}, \beta_{1a}, \beta_{2a}) = & \sum_r \sum_i \sum_k \int_0^{u_{r^i k}} v_{r^i k}(\mathbf{u} \setminus u_{r^i k}, \omega) d\omega \\ & + \sum_a \sum_t \int_0^{u_{a(t)}} c_a(\mathbf{u} \setminus u_{a(t)}, \omega) d\omega \\ & + \sum_{rs} \sum_i \sum_k \hat{\pi}_k^{r^i s} \left[\bar{q}^{r^i s} - \sum_k \sum_{\hat{p}} h_{\hat{p}k}^{r^i s} \right] \\ & + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \left[\sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} u_{a(j)} - CAP_a \right] \\ & + \sum_a \sum_t \sum_{\Delta t=1}^{T-t} \beta_{2a(t)(t+\Delta t)} \left[c_{a(t)} - c_{a(t+\Delta t)} - \Delta t \right] \end{aligned} \quad (24)$$

將上式分別對旅次鏈路徑流量 $\{h_{\hat{p}k}^{r^i s}\}$ 、拉氏乘數 $\{\hat{\pi}_k^{r^i s}\}$ 、 $\{\beta_{1a(j)}\}$ 與 $\{\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}\}$ 一階偏微，可得最佳化條件如下：

$$h_{\hat{p}k}^{r^i s} \left[\bar{c}_{\hat{p}k}^{r^i s} - \hat{\pi}_k^{r^i s} \right] = 0 \quad \forall r, s, i, \hat{p}, k \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{\hat{p}k}^{r^i s} = & v_{r^i k} + c_{\hat{p}k}^{r^i s} + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \delta_{\hat{p}ka(j)}^{r^i s} + \sum_a \sum_t \beta_{2a(t)} \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s} \\ & \forall r, s, i, \hat{p}, k \end{aligned} \quad (26)$$

$$k = \left(i + v_{r^i k}^* \right) + NINT \left(\begin{aligned} & \left(\sum_a \sum_t c_{a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s*} + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \delta_{\hat{p}ka(j)}^{r^i s} \right) \\ & + \sum_a \sum_t \beta_{2a(t)}^* \delta_{\hat{p}ka(t)}^{r^i s*} \end{aligned} \right) \quad (27)$$

$$\bar{c}_{\hat{p}k}^{r^i s} - \hat{\pi}_k^{r^i s} \geq 0 \quad \forall r, s, i, \hat{p}, k \quad (28)$$

$$\sum_{\hat{p}} \sum_k h_{\hat{p}k}^{r's} = \bar{q}^{r's} \quad \forall r, s, i, k \quad (29)$$

$$h_{\hat{p}k}^{r's} \geq 0 \quad \forall r, s, i, \hat{p}, k \quad (30)$$

$$\beta_{1a(j)} \left[\sum_{j=t}^{t+\bar{c}_a(t)} u_{a(j)} - CAP_a \right] = 0 \quad \forall a, j \quad (31)$$

$$\sum_{j=t}^{t+\bar{c}_a(t)} u_{a(j)} = v_{a(t+\bar{c}_a(t))} \leq CAP_a \quad \forall a, t \quad (32)$$

$$\beta_{1a(j)} \geq 0 \quad \forall a, j \quad (33)$$

$$\beta_{2a(t)(t+\Delta t)} [c_{a(t)} - c_{a(t+\Delta t)} - \Delta t] = 0 \quad (34)$$

$$\forall a, t, \Delta t = 1, \dots, T-t, u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0$$

$$c_{a(t)} \leq c_{a(t+\Delta t)} + \Delta t \quad \forall a, t, \Delta t = 1, \dots, T-t, u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0 \quad (35)$$

$$\beta_{2a(t)(t+\Delta t)} \geq 0 \quad \forall a, t, \Delta t = 1, 2, \dots, T-t \quad (36)$$

式 (25)~(28) 表示旅次鏈路徑選擇上的互補鬆弛性關係，表示起迄對 (r, s) 自時窗 i 中 k 時區出發，第 \hat{p} 條旅次鏈路徑被使用到時，其一般化旅次鏈路徑理想旅行時間必等於該起迄對間的最小一般化旅次鏈路徑理想旅行時間，否則該旅次鏈路徑流量則為 0。式 (29)~(30) 分別為依時性流量守恒及流量非負限制。式 (31)~(33) 表示額外等候延滯成本 $\{\beta_{1a(j)}\}$ 與路段流出率容量差的互補鬆弛性關係，表示當路段上額外等候延滯成本為 0 時，其流出率將小於路口流出率的容量(即符合路段流出率容量限制)；否則路段上額外等候延滯成本大於 0。式 (34)~(36) 示額外延滯成本 $\{\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}\}$ 與路段旅行時間差的互補鬆弛性關係，當稍早進入路段的車流較稍後進入路段的車流先離開此路段(即符合 FIFO 原則)時，則路段上額外等候延滯成本為 0；否則路段上額外等候延滯成本大於 0。當路網上各估計旅行時間固定在 $\{\tau_{a(t)}^*\}$ 時，上述最佳化條件則可滿足式 (1) 之依時性旅次鏈用路人最佳化原則。

三、求解演算法

在求解方法上，本研究設計一迴圈式 (iterative scheme) 演算法來求解雙層規劃模型，迴圈式演算法可區分兩個步驟。第一步驟為求解上層問題，本研究使用下式 (37) 更新每個時區的路段估計旅行時間，其中 θ 為介於 0 至 1 之間的權重參數。當給定不同的權重參數時，則雙層規劃模型的解可能產生不一致的多重解現象。

$$\tau_{a(t)}^m = (1 - \bar{\lambda})\tau_{a(t)}^{m-1} + \bar{\lambda}c_{a(t)}^m \quad \forall a, t, 0 < \bar{\lambda} < 1 \quad (37)$$

第二步驟為利用估計的路段旅行時間 建立時空路網，其中估計的路段旅行時間 τ 為第一步驟之結果，在建構出時空路網結構 Ω_τ 後，本研究參考 Chen 與 Wang^[29] 以拉氏法求解路段容量限制依時性交通量指派模型的作法，將額外限制式鬆弛至目標函數，使原本二次規劃問題變成不具額外限制式的最佳化問題，再結合拉氏法與路徑基礎式梯度投影法，求解依時性用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇問題，並求得在每個時區的路段理想旅行時間。當路段理想旅行時間與估計旅行時間之差異收斂至可接受的範圍內，可獲得在時區的路段估計旅行時間，可用以預測在不同時區下路段旅行時間。

利用拉氏法求解依時性用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇問題，即是反覆對於拉氏函數 ($\min L(z(\mathbf{u}), \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$) 求解原始變數 \mathbf{u} 以及對偶變數 $\boldsymbol{\beta}$ ：

1. 拉氏函數求解原始變數之最佳化問題：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} L(z(\mathbf{u}), \bar{\boldsymbol{\beta}}_1, \bar{\boldsymbol{\beta}}_2) &= z(\mathbf{u}) + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \bar{\beta}_{1a(j)} \left[\sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} u_{a(j)} - CAP_a \right] \\ &+ \sum_a \sum_t \sum_{\Delta t=1}^{T-t} \bar{\beta}_{2a(t)(t+\Delta t)} [c_{a(t)} - c_{a(t+\Delta t)} - \Delta t] \\ &\forall \mathbf{u} \in \Omega_\tau \end{aligned} \quad (38)$$

其中 Ω_τ 為由式 (9)~式 (22) 等限制條件所構成的可行解區域。

2. 拉氏函數求解對偶變數之最佳化問題：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2} L(z(\bar{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) &= z(\bar{\mathbf{u}}) + \sum_a \sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} \beta_{1a(j)} \left[\sum_{j=t}^{t+\bar{c}_{a(t)}} u_{a(j)} - CAP_a \right] \\ &+ \sum_a \sum_t \sum_{\Delta t=1}^{T-t} \beta_{2a(t)(t+\Delta t)} [c_{a(t)} - c_{a(t+\Delta t)} - \Delta t] \end{aligned} \quad (39)$$

S.t.

$$\beta_{1a(j)} \geq 0 \quad \forall a, j \quad (40)$$

$$\beta_{2a(t)(t+\Delta t)} \geq 0 \quad \forall a, t, \Delta t = 1, 2, \dots, T-t \quad (41)$$

由求解過程中可發現求解式 (38) 原始問題，即為求解依時性用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇模型，可利用路徑式梯度投影法進行求解；至於式 (39)~(41) 對偶問題求解，以下式 (42)~(43) 更新每回合的對偶變數，直至符合收斂條件。

$$\beta_{1a(j)}^{l+1} \left\{ \begin{array}{l} = \beta_{1a(j)}^l + \rho \left[c_a^l(\mathbf{u}) - c_a^l(\mathbf{u} \setminus u_{a(t+c_a(t)}), CAP_a) \right] \\ \quad \text{if } \sum_{j=t}^{t+c_a(t)} u_{a(j)} = v_{a(t+c_a(t))} > CAP_a \\ = \beta_{1a(j)}^l - \rho \left[c_a^l(\mathbf{u}) - c_a^l(\mathbf{u} \setminus u_{a(t+c_a(t)}), CAP_a) \right] \\ \quad \text{if } \sum_{j=t}^{t+c_a(t)} u_{a(j)} = v_{a(t+c_a(t))} < CAP_a \\ = \beta_{1a(j)}^l \quad \text{if } \sum_{j=t}^{t+c_a(t)} u_{a(j)} = v_{a(t+c_a(t))} = CAP_a \end{array} \right. \quad \forall a, t \quad (42)$$

$$\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}^{l+1} \left\{ \begin{array}{l} = \beta_{2a(t)(t+\Delta t)}^l + \rho \left[c_a^l(\mathbf{u}) - c_a^l(\mathbf{u} \setminus u_{a(t)}, u_{a(t+\Delta t)}) - \Delta t \right] \\ \quad \text{if } c_{a(t)} > c_{a(t+\Delta t)} + \Delta t \\ = \beta_{2a(t)(t+\Delta t)}^l - \rho \left[c_a^l(\mathbf{u}) - c_a^l(\mathbf{u} \setminus u_{a(t)}, u_{a(t+\Delta t)}) - \Delta t \right] \\ \quad \text{if } c_{a(t)} < c_{a(t+\Delta t)} + \Delta t \\ = \beta_{2a(t)(t+\Delta t)}^l \quad \text{if } c_{a(t)} = c_{a(t+\Delta t)} + \Delta t \end{array} \right. \quad (43)$$

$\forall a, t, \Delta t = 1, \dots, T-t, u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0$

其中步幅調整參數 ρ 為一介於 0~1 的常數，避免因步幅跨步過大而導致結果發散。利用拉氏法求解詳細演算步驟說明如下：

步驟 0：演算法之初始化

步驟 0.1：第一層迴圈運算

初始化上層問題，令 $m=0$ ，初始路段估計旅行時間 $\tau_{a(t)}^m = NINT \left[c_{a_0(t)} \right]$ ， $\forall a, t$ 建立初始時空路網。

步驟 0.2：第二層迴圈運算

令 $w=0$ ，使 $c_{a(t)}^w = c_{a_0(t)}$ ， $\forall a, t$ ，並在估計路段旅行時間 τ 下，固定時空路網上其他時空路網流入率之影響。

步驟 0.3：第三層迴圈運算

令 $l=0$ ，設定拉氏乘數的起始值為零， $\beta_{1a(j)}^l = 0 \forall a, j$ 、 $\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}^l = 0 \forall a, t, \Delta t = 1, \dots, T-t, u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0$ 。

步驟 0.4：第四層迴圈運算

在步驟 0.1 所建立的時空路網中，以梯度投影法求解依時性用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇最佳化問題，其中有關梯度投影法詳細求解步驟，請參考 Wang 與 Chen^[40] 之研究內容。

步驟 0.5：第三層迴圈收斂性檢定

$$\text{若 } \max_{a,j} \left\{ \sum_{j=t}^{t+\tilde{c}_{a(t)}} u_{a(j)} - CAP_a \right\} < \varepsilon_{\beta_1}, \text{ 且 } \max_{\substack{a,t,\Delta t=1,\dots,T-t, \\ u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0}} \left\{ c_{a(t)}^l - c_{a(t+\Delta t)}^l - \Delta t \right\} < \varepsilon_{\beta_2},$$

則設定 $\tilde{c}_{a(t)}^{w+1} = \tilde{c}_{a(t)}^l \forall a, t$ 、 $\tilde{\beta}_{1a(j)}^{w+1} = \tilde{\beta}_{1a(j)}^l \forall a, j$ 及 $\tilde{\beta}_{2a(t)(t+\Delta t)}^{w+1} = \tilde{\beta}_{2a(t)(t+\Delta t)}^l \forall a, t, \Delta t = 1, \dots, T-t, u_{a(t)} > 0, u_{a(t+\Delta t)} > 0$ ，並執行步驟 1；否則即違反額外限制條件，並以式 (42)~(43) 更新拉氏乘數 $\{\beta_{1a(j)}^{l+1}\}$ 、 $\{\beta_{2a(t)(t+\Delta t)}^{l+1}\}$ ，更新後，令 $l = l + 1$ ，返回步驟 0.4。

步驟 0.6：第二層迴圈收斂性檢定

若前後兩回合的路段流入率符合收斂條件：

$$\max_{a,t} \left| \frac{u_{a(t)}^{w+1} - u_{a(t)}^w}{u_{a(t)}^{w+1}} \right| \leq \varepsilon_u, \forall a, t, \text{ 則執行步驟 1；否則令 } w = w + 1, \text{ 並返回步驟 0.3。}$$

步驟 1：求解上層問題

步驟 1.1：第一層迴圈運算

令 $m = m + 1$ ，以下式 (44) 更新路段估計旅行時間 τ_{at}^m ：

$$\tau_{a(t)}^m = NINT \left\{ (1 - \bar{\lambda}) \tau_{a(t)}^{m-1} + \bar{\lambda} \left[\tilde{c}_{a(t)}^w \right] \right\} \quad \forall a, t \quad (44)$$

其中 $0 < \bar{\lambda} \leq 1$ ，並根據路段估計旅行時間 $\{\tau_{a(t)}^m\}$ 建立時空路網。

步驟 2：求解下層問題

同前述步驟 0.2~步驟 0.6 求解下層問題。

步驟 3：第一層迴圈收斂性檢定

比較本回合理想路段旅行時間與估計旅行時間之差的百分比小於預先設定標準 $\max_{a,t} \left| \frac{\tau_{a(t)}^m - \tilde{c}_{a(t)}^{w+1}}{\tau_{a(t)}^m} \right| < \varepsilon_\tau$ ，其中 τ^m 為最佳路段估計旅行時間，若滿足則收斂，否則令 $w = w + 1$ ，返回步驟 1。

四、數值範例分析

為能展現本研究所發展模型的特性，以下利用測試路網進行數值分析，以驗證求解演算法之正確性及模型特性。

本研究以一個 10 個節點與 19 條節線的測試路網 (如圖 2) 為基礎，並基於巨觀模型角度將由流量轉化為小汽車當量，設計 4 對旅次鏈依時性起迄對的運輸需求進行測試，各旅次鏈依時性起迄對詳細資料及運輸需求如表 1 所示。

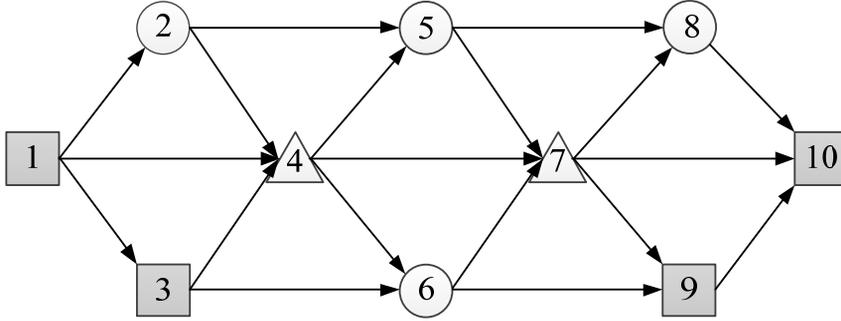


圖 2 測試路網

表 1 測試路網各旅次鏈依時性起迄對運輸需求

起迄對	出發時區	活動點	需求量 (pcu/time interval)
(1,10)	1	-	10
(1,10)	2	4,7	10
(3,9)	1	-	25.5
(3,9)	2	7	10

依時性各路段成本函數修正 Chen^[16] 之依時性路段成本函數如下式 (45) 所示，其中， $u_{a(t)}$ 代表在時區 t 路段 a 的流入量， $x_{a(t)}$ 為時區 t 路段 a 的車輛數。本研究以 Borland C++ 5.02 版編輯器撰寫程式，並在中央處理器為 Intel core 2.8Gb Hz 的個人電腦進行測試與分析。

$$c_{a(t)} = 1 + 0.01(u_{a(t)})^2 + 0.001(x_{a(t)})^2 \quad \forall a, t \quad (45)$$

利用本研究所發展之求解演算法，求解依時性用路人出發時間選擇旅次鏈基礎交通量指派模型，結果如表 2 及表 3 所示。

由表 2 為含額外限制條件之依時性時空路網型態，可發現路段流出率容量限制及先進先出限制條件均已被滿足。其中，由於流出率是由不同時區的流入率加總所組成，路段 3→6 在第 2~4 時區的流入率，因路段流出率容量限制條件而分別產生不同的對偶變數 (延滯成

表 2 含額外限制式之依時性旅次鏈時空路網型態

路段	進入時間	時區	FIFO延滯成本	流出率 容量限制 延滯成本	理想路 段旅行 時間	一般化理 想路段旅 行時間c	一般化估 計路段旅 行時間τ	流入率	車輛數	流出率	道路容 量上限	離開時 間分區
1→2	1		0	0	1.12	1.12	1.12	3.53	0	0	-	2
	2		0	0	1.01	1.01	1.01	0.14	3.53	3.53	-	3
	3		0	0	1	1	1	0	0.14	0.14	-	4
1→4	1		0	0	1.42	1.42	1.42	6.47	0	0	-	2
	2		0	0	2.01	2.01	2.01	9.86	6.47	6.47	-	4
	3		0	0	1.1	1.1	1.1	0	9.86	0	-	4
	4		0	0	1.1	1.1	1.1	0	9.86	9.86	-	5
2→4	2		0	0	1.01	1.01	1.01	1.06	0	0	-	3
	3		0	0	1	1	1	0.14	1.06	1.06	-	4
	4		0	0	1	1	1	0	0.14	0.14	-	5
2→5	2		0	0	1.06	1.06	1.06	2.47	0	0	-	3
	3		0	0	1.01	1.01	1.01	0	2.47	2.47	-	4
3→4	1		0	0	2.52	2.52	2.52	12.32	0	0	-	4
	2		0	0	1.86	1.86	1.86	8.43	12.32	0	-	4
	3		0	0	1.86	1.86	1.86	6.57	20.75	0	-	5
	4		0	0	1.75	1.75	1.75	0	27.32	20.75	-	6
	5		0	0	1.04	1.04	1.04	0	6.57	6.57	-	6
3→6	2		0	2.24	1.49	3.73	3.73	7	0	0	-	6
	3		0	3.22	1.05	4.27	4.27	0	7	0	-	7
	4		0.04	1.27	1.43	2.73	2.73	6.18	7	0	7	7
	5		0	0	1.17	1.17	1.17	0	13.18	0	7	6
	6		0	0	1.17	1.17	1.17	0	13.18	7	7	7
	7		0	0	1.04	1.04	1.04	0	6.18	6.18	7	8
	4		0	0	1.4	1.4	1.4	6.32	0	0	-	5
4→5	5		0	0	1.04	1.04	1.04	0	6.32	0	-	6
	6		0	0	1.04	1.04	1.04	0	6.32	6.32	-	7
	4		0	0	2.21	2.21	2.21	11.02	0	0	-	6
4→6	5		0	0	1.12	1.12	1.12	0	11.02	0	-	6
	6		0	0	1.12	1.12	1.12	0	11.02	11.02	-	7
	2		0	0	1.42	1.42	1.42	6.47	0	0	-	3
4→7	3		0	0	1.05	1.05	1.05	1.06	6.47	6.47	-	4
	4		0	0	2.8	2.8	2.8	13.41	1.06	1.06	-	7
	5		0.19	0	1.61	1.8	1.8	6.57	13.41	0	-	7
	6		0	0	1.4	1.4	1.4	0	19.99	0	-	7
	7		0	0	1.4	1.4	1.4	0	19.99	19.99	-	8
5→7	3		0	0	1	1	1	0.57	0	0	-	4
	4		0	0	1	1	1	0	0.57	0.57	-	5
	6		0	0	1.4	1.4	1.4	6.32	0	0	-	7
	7		0	0	1.04	1.04	1.04	0	6.32	6.32	-	8
5→8	3		0	0	1.04	1.04	1.04	1.9	0	0	-	4
	4		0	0	1	1	1	0	1.9	1.9	-	5
6→9	6		0	0	4.25	4.25	4.25	18.02	0	0	-	10
	7		1.54	0	1.71	3.24	3.24	6.18	18.02	0	-	10
	8		0	0	1.59	1.59	1.59	0	24.19	0	-	10
	9		0	0	1.59	1.59	1.59	0	24.19	0	-	11
	10		0	0	1.59	1.59	1.59	0	24.19	24.19	-	12
7→9	7		0	0	3.66	3.66	3.66	16.31	0	0	-	11
	8		0	0	1.27	2.25	2.25	0	16.31	0	-	10
	9		0	0	1.27	1.27	1.27	0	16.31	0	-	10
	10		0	0	1.27	1.27	1.27	0	16.31	16.31	-	11
7→10	3		0	0	1.42	1.42	1.42	6.47	0	0	-	4
	4		0	0	1.07	1.07	1.07	1.63	6.47	6.47	-	5
	5		0	0	1	1	1	0	1.63	1.63	-	6
	7		0	0	2	2	2	10	0	0	-	9
	8		0	0	1.1	1.1	1.1	0	10	0	-	9
8→10	9		0	0	1.1	1.1	1.1	0	10	10	-	10
	4		0	0	1.04	1.04	1.04	1.9	0	0	-	5
	5		0	0	1	1	1	0	1.9	1.9	-	6

表 3 含額外限制式之依時性旅次鏈路徑資訊

起迄對	活動點	許可出發時間分區	出發時間分區選擇	路徑選擇	到達時間分區	路徑流量	理想路徑旅行時間 c	估計路徑旅行時間 τ
(1,10)	-	1	1	1(1)→4→7→10(4)	4	6.47	4.26	4.26
		1	1	1(1)→2→5→7→10(5)	5	0.57		
		1	1	1(1)→2→5→8→10(5)	5	1.90		
		1	1	1(1)→2→4→7→10(5)	5	1.06		
(1,10)	4,7	2	2	1(2)→4(4)→7(7)→10(9)	9	6.61	6.81	6.81
		2	2	1(2)→2→4(4)→7(7)→10(9)	9	0.11		
		2	2	1(2)→4(4)→5→7(7)→10(9)	9	3.25		
		2	2	1(2)→2→4(4)→5→7(7)→10(9)	9	0.03		
(3,9)	-	1	<u>4</u>	<u>3(4)</u> →6→9(10)	10	6.17	<u>5.98</u>	<u>5.98</u>
		1	1	3(1)→4→7→9(10)	10	0.63	8.98	8.98
		1	1	3(1)→4→6→9(10)	10	11.02		
		1	1	3(1)→4→5→7→9(10)	10	0.68		
		1	<u>2</u>	<u>3(2)</u> →6→9(10)	10	7.00	<u>7.98</u>	<u>7.98</u>
(3,9)	7	2	2	3(2)→4→7(7)→9(10)	10	6.07	8.32	8.32
		2	<u>3</u>	<u>3(3)</u> →4→7(7)→9(10)	10	6.57	<u>7.32</u>	<u>7.32</u>
		2	2	3(2)→4→5→7(7)→9(10)	10	2.36	8.32	8.32

本) 2.24、3.22 及 1.27，使得其流出率符合路段容量限制條件。而路段 6→9 中，第 6 時區與第 7 時區的流入率分別為 18.02 及 6.18，因必須先進先出限制條件而產生延滯成本 1.54，藉由加總理想旅行時間與延滯時間所反映出該路段的一般化路徑旅行成本，使得第 6 時區與第 7 時區分別進入的流入率，均由第 10 時區離開該路段。由此可發現測試路網發生先進後出的不合理現象時，藉由額外限制式的對偶變數（延滯成本）與該路段理想旅行時間加總所反映出一般化路段旅行成本，可使所求得之解答滿足了 FIFO 的限制條件。

由表 3 可發現，第 3 對起迄對中路段 3→9 原許可出發時間均為第 1 個時區，但由於用路人為避開路段上的交通壅塞，選擇於最適的第 4 及第 2 個時區出發，相較壅塞路段使用 8.98 個時間分區，用路人選擇較晚出發則使用 5.98 及 7.98 個時間分區，可減少旅運中的交通延滯時間，並均於第 10 個時間分區抵達迄點；而第 4 對起迄對中亦發生用路人出發時間選擇現象。由此可知，用路人將因不同出發時間所反映出來的旅運成本進行出發時間選擇決策，避開路段交通壅塞，縮短用路人旅行時間。

根據模型分析的結果，在任一對旅次鏈依時性起迄對下，用路人會因活動點所產生的

需求而改變所選擇的旅次鏈依時性路徑。因此，各起迄對間在同一個時區出發所有被使用到的路徑均能滿足必須經過活動點之限制，且同一起迄對從相同時間出發，各路徑旅行成本均相等；此外，在各起迄對間在同一個時區出發未被使用到的路徑，並無法找到一條經過活動點且旅行成本小於所有被使用的路徑，即符合本研究所推導在旅次鏈旅運行為下之依時性用路人最佳化原則。

由表 2 及表 3 之結果可知，透過本研究模型，各路段在不同時段的旅行時間均可估計，且估計路段旅行時間與理想路段旅行時間均為一致，即上層模型最小平方的目標式函數為最小且等於零，因此可利用估計路段旅行時間預測路網上各路段在不同時間的理想旅行時間；另外，模型結果尚可獲得路徑流量及各路段依時性流入率、流出率與車輛數等資訊，可以提供不同需求的依時性運輸管理工作使用。

基於前述小型路網測試，成功驗證所構建之模型及求解演算法的正確性，為更進一步分析模型收斂情形與效率，本研究以 42 個節點與 124 條節線的 U-Town 路網為基礎，並設計 6 對依時性起迄對運輸需求進行驗證。

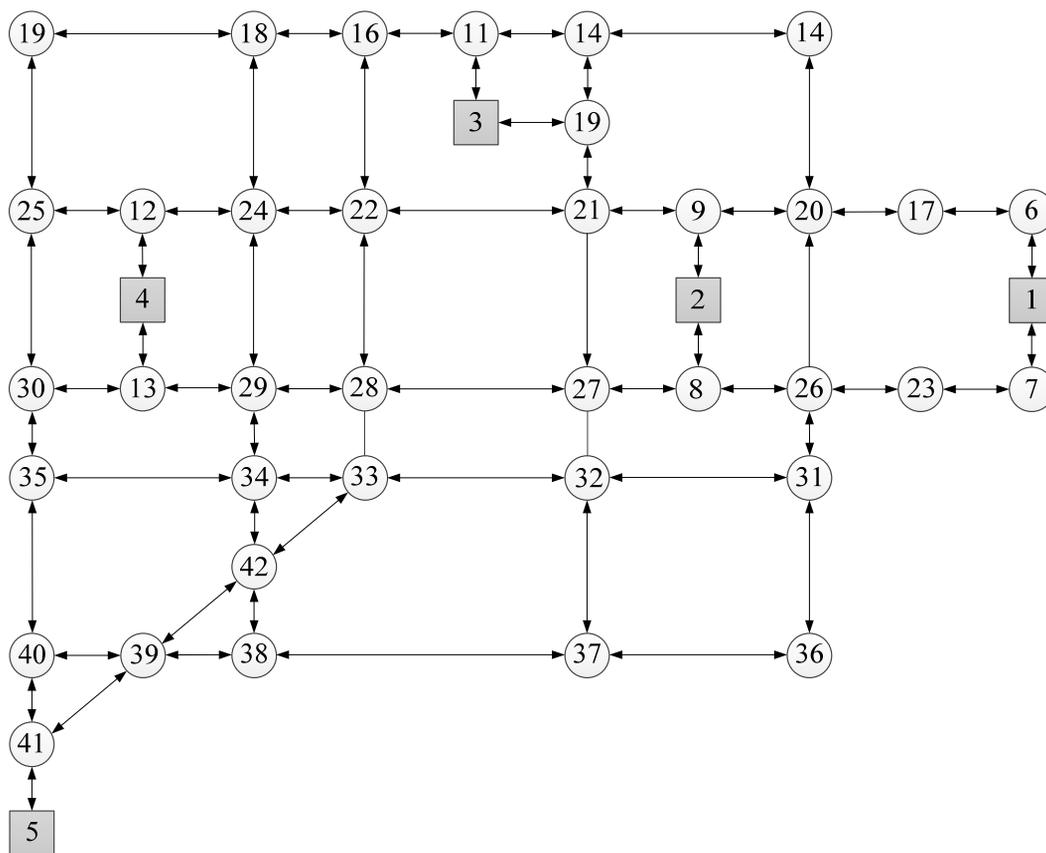


圖 3 U-Town 測試路網圖 (U.S. Department of Transportation^[44])

表 4 測試路網各旅次鏈依時性起迄對運輸需求

起迄對	出發時區	活動點	需求量 (pcu/time interval)
(1,5)	1	-	5.5
(1,5)	2	2,4	10
(1,5)	3	2,3,4	5
(2,4)	2	-	15.5
(2,4)	3	-	10.5
(2,4)	4	5	5.5

利用本研究所發展之求解演算法，求解依時性用路人出發時間選擇旅次鏈基礎交通量指派模型，所有限制式，包含流量守恆、流量傳導、非負及旅次鏈定義限制式均能滿足，且符合依時性旅次鏈用路人最佳化原則，以下本研究測試上層模型收斂標準值 ε_r 分別為 0.01、0.1 及 1 時的收斂情形與效率。當估計路段旅行時間收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.01$ 時需運算 43 回合數 (如圖 4 所示)；當收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.1$ 時需運算 16 回合數，相較於較精確 $\varepsilon_r = 0.01$ 時的整體運算回合數縮減 62.8 倍 $((43-16)/43 \cong 0.628)$ ；而當收斂標準值 $\varepsilon_r = 1$ 時僅需運算 2 回合數，整體運算回合數縮減 95.3 倍 $((43-2)/43 \cong 0.953)$ 。

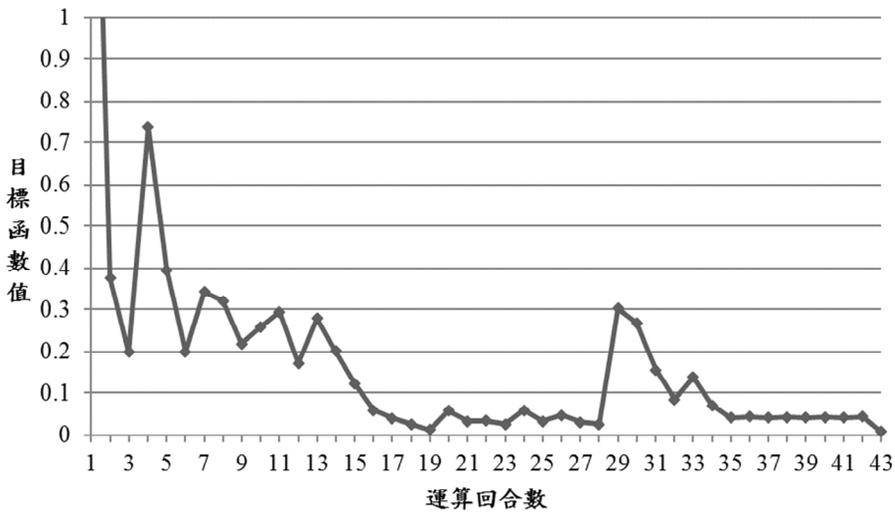


圖 4 U-Town 測試路網上層模型目標函數值收斂狀態

由於求解含額外限制式的依時性網路問題需耗費大量運算時間，為了解在不同收斂標準值下模型的運算績效，本研究將運算績效以圖 5 進行說明。其中，圖縱軸為運算時間 (分鐘)，橫軸為不同估計路段旅行時間收斂標準值，長條圖上方數值表示為運算所需時間。透

過圖 5 可發現，上層模型估計旅行時間收斂標準值 ε_r 的不同對於整體運算績效存在關鍵的影響因素，當收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.01$ 時的運算時間為 554.33 分鐘；收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.1$ 時的運算時間為 115.42 分鐘 $((554.33-115.42)/554.33 \cong 0.792)$ ，整體運算績效提升 79.2%；當收斂標準值 $\varepsilon_r = 1$ 時的運算時間為 1.02 分鐘 $(554.33-1.02)/554.33 \cong 0.998)$ ，相較於收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.01$ 時整體運算績效提高 99.8%。

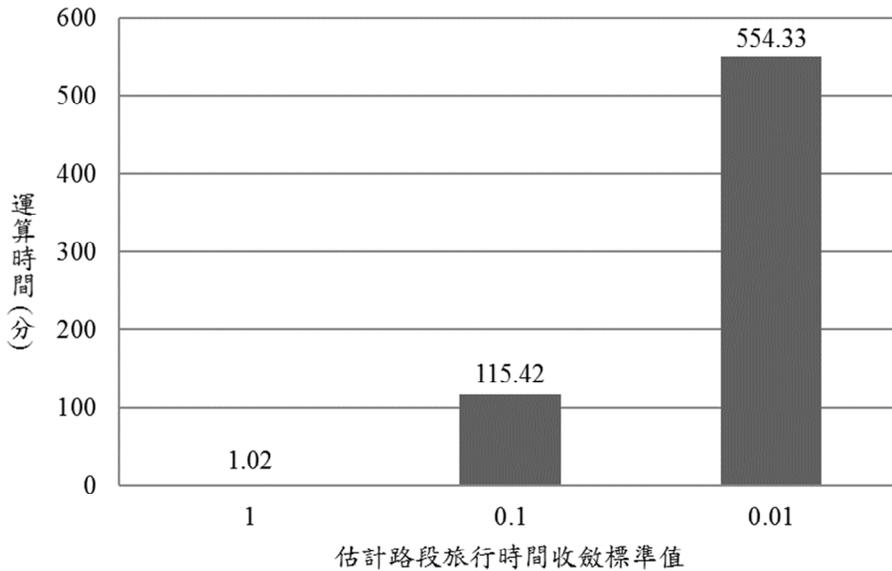


圖 5 雙層規劃模型運算績效圖

為能瞭解在上層模型不同估計旅行時間收斂標準值下模型的特性，以下分就各收斂標準值 ε_r 平均理想與估計旅行時間預測之差異進行分析比較，彙整如表 5 所示。

本研究為驗證所發展之依時性路段旅行時間推估模型的正確性，採用較精準的估計路段旅行時間收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.01$ 時，各路段估計與理想旅行時間誤差為 0%，整體路網平均估計旅行時間 99.18 個時區，可精準預測路網上各路段在不同時間的旅行時間。然而，就現實交通應用上分析，當收斂標準值 $\varepsilon_r = 0.1$ 時，相較 $\varepsilon_r = 0.01$ 時之估計旅行時間最大差異為 0.05 個時區（誤差約為 4.67%），整體路網平均估計旅行時間 99.43 個時區（誤差約為 0.25%），但運算績效卻相差 438.91 分鐘（約 79.18 倍）；而當收斂標準值 $\varepsilon_r = 1$ 時，相較 $\varepsilon_r = 0.01$ 時之估計旅行時間最大差異為 0.22 個時區（誤差約為 15.82%），整體路網平均估計旅行時間 98.83 個時區（誤差約為 0.35%），但運算績效卻相差 553.31 分鐘（99.82 倍）。因此，在實際應用上收斂標準不須限定太過嚴格，即使推估結果路段誤差 0.22 個時區，整體路網平均估計旅行時間誤差約 0.35 個時區，對整體所提供的預測性旅行時間與交通路網資訊，仍可充分導引用路人充分利用替代道路避開壅塞路段、降低旅行時間不確定感，並避免擁擠、事故發生，增進整體路網運輸效率。

表 5 不同收斂標準值對路段旅行時間影響比較表

各路段理想與估計 旅行時間差異	估計旅行時間收斂標準值 ε_t		
	$\varepsilon_t = 0.01$	$\varepsilon_t = 0.1$	$\varepsilon_t = 1$
相較 $\varepsilon_t = 0.01$ 時之 估計旅行時間最大差異	0 (0%)	0.05 (4.67%)	0.22 (15.82%)
相較 $\varepsilon_t = 0.01$ 時之 估計旅行時間最小差異	0 (0%)	0%	0%
整體路網 平均估計旅行時間 (相較 $\varepsilon_t = 0.01$ 平均差異)	99.18 (0%)	99.43 (0.25%)	98.83 (0.35%)
運算回合數	43	16	2
運算時間 (分)	554.33	115.42	1.02

五、結論與建議

5.1 結論

本研究的進行，對於如何以路網的觀點，考量用路人出發時間／旅次鏈活動在時間及空間上的路徑選擇行為，並兼顧巨觀模型下，滿足路段流量先進先出原則及路段流出容量限制的考量，建立模型及發展求解演算法，評估用路人的旅運需求，不論在理論上發展及未來實務議題應用的潛力，均有重要的貢獻。經由本研究的進行，可以得到以下結論：

本研究的進行，對於如何以路網的觀點，考量用路人出發時間／旅次鏈活動在時間及空間上的路徑選擇行為，並兼顧巨觀模型下，滿足路段流量先進先出原則及路段流出容量限制的考量，建立模型及發展求解演算法，評估用路人的旅運需求，不論在理論上發展及未來實務議題應用的潛力，均有重要的貢獻。經由本研究的進行，可以得到以下結論：

1. 由研究的結果可以發現，利用本研究所建立的模型及求解演算法，用路人可以透過出發時間的選擇，可獲得適切的旅運路線規劃及旅行時間管理。
2. 基於用路人旅次鏈上各活動點與路徑選擇行為的關係，本研究建立依時性旅次鏈路徑定義限制式，透過活動點／路徑指示變數 $\gamma_{pkn(t)}$ ，明確表達在起迄對間一般路徑與旅次鏈路徑的關係，且無論活動點經過順序是否固定，均可由定義限制式表達。
3. 本研究進一步闡釋在不同時空交互作用及考量符合路段流出容量限制與先進先出原則下 Wardrop 使用者最佳化原則，而建立出依時性旅次鏈基礎使用者最佳化原則。
4. 就路網的觀點分析，本研究建立用路人出發時間／旅次鏈路徑選擇行為下之時空路網結

構，當估計路段旅行時間 τ 在時間上固定時，可考量在時空路網中交通流量傳導過程之路段流入量、流出量及車輛數間狀態變化。

5. 本研究以額外限制式確保模型，無論旅行時間函數型態均能在最佳化條件下符合先進先出原則，雖然增加求解困難度，但運算結果均能保證模型的合理性。此外，路段出口處流量大於容量的過飽和現象受到限制，使得模型更為合理，其分析結果更能詮釋真實世界交通狀況，增加模型應用於實務規劃問題的適用性。
6. 本研究建構雙層規劃模型，當上層模型所推估的路段旅行時間 τ 與下層模型所產生的理想旅行時間均一致時，即滿足差異的最小平方目標函數，因此估路計段旅行時間可用來預測在依時性旅次鏈用路人最佳化原則下的理想路段旅行時間。
7. 本研究所建立的雙層規劃模型，其下層變分不等式問題的解在時空路網固定於 Ω_r 的子集合時為凸集合，存在求解依時性旅次鏈用路人路徑選擇限制條件的有利數學性質；而對上層問題而言，此雙層規劃模型始終存在可行解，故即使路段估計旅行時間與理想路段旅行時間不一致，亦可保證有解。
8. 除考量旅次鏈旅運行為外，本模型納入用路人出發時間選擇的行為特性，並由時空路網上路徑的旅行時間決定用路人選擇其他時間出發時間的旅運決策，符合現實世界為避免交通壅擠問題而選擇延遲或提早出發時間的用路人特性。因此，本研究所建立的模型更具一般化及彈性，且更能適切反映出依時性的旅運行為。
9. 由於雙層規劃模型的解會受到由不同的估計旅行時間 τ 所構建的時空路網結構 Ω_r 所影響，當上層模型的決策變數 τ 改變時，其下層模型的決策變數 \mathbf{u} 及透過旅行時間函數反映出來的理想旅行時間 $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ 將隨之改變，並可能產生多重解的現象，因此本模型並非單純為交通量指派問題，而更像是路網設計問題。

5.2 貢獻與限制

本研究所建立的模型，為基於假設用路人基於再擁有完整的路網資訊，以及依時性運輸需求已知等兩項，藉由分析多樣性用路人旅運行為，反映出路網上各路段在不同時間的旅行時間，其結果可提供用路人預測的交通資訊，選擇最佳出發時間及旅運路線導引，避免擁擠與事故發生，增進運輸效率。綜上所述，本研究的貢獻歸納如下：

1. 本模型納入用路人出發時間選擇的行為特性，並由時空路網上路徑的旅行時間決定用路人所延遲出發時間的旅運決策，符合現實世界用路人為避免交通壅擠問題而選擇延遲或提早出發時間的特性；而用路人在出發時間選擇上，若出發時間固定亦可視為求解用路人路徑選擇模型的個案，因此本研究建立更一般化且具彈性的模型，以詮釋用路人不同的行為模式。
2. 由於本研究為一個含額外限制條件的依時性網路問題，其複雜度高且求解不易，因此本研究發展出相對應的求解演算法，以提升模型的實用性。
3. 相較 Luo 等人^[26]所建立的依時性旅次鏈基礎路段旅行時間推估模型，本研究分析多

元用路人的行為特性，將出發時間納入模型中考量，並加入路段流出率容量限制，可適切反映過飽和流量所造成的壅塞延滯現象，使得模型更加嚴格及更具合理性。

4. 本研究發展出迴圈式演算法，結合拉氏法與梯度投影法求解交通量指派模型，並以測試路網進行數值範例分析驗證其正確性；另本研究驗證出當上層模型的估計與理想旅行時間誤差越小時，則估計的路段旅行時間越準確，但卻須耗費更多的運算成本。但就實際應用上，若採用較不精準的收斂標準值，可大幅提升其運算績效，且運算結果與用路人最佳化原則無顯著誤差，將可使得模型更具實務應用價值。
5. 經由本研究求解結果，不僅可滿足在最佳化條件下的用路人出發時間／路徑選擇決策，亦可估算路網上不同時段的理想路段旅行時間，具備提供商務、物流車輛及緊急救援車輛在規劃路徑時使用的潛力。

5.3 建議

除上述研究結論外，基於依時性用路人出發時間選擇交通量指派模型的探討，仍有許多發展空間有待後續研究繼續努力，在此分述如下：

1. 為求適切運用於運輸規劃實務應用，未來在旅次資料的收集方面，應進一步的蒐集用路人旅次鏈活動點資訊，如利用信令技術蒐集及分析用路人起訖及活動點需求，或次要活動點變動需求的旅次鏈問題，將可使模型更加符合真實世界用路人旅運型態。
2. 基於運輸規劃上的需求，未來可以本研究所發展之旅次鏈為基礎依時性路段旅行時間推估模型為基礎，進一步發展考量多車種與旅次鏈路徑選擇之依時性路段旅行時間推估模型，以期能更適切的描述用路人的路徑選擇行為。
3. 本研究為基於用路人擁有完整的路網資訊，以及依時性運輸需求已知等預測型態的模型假設。在實務應用上，若其中一項或兩項假設條件都不成立的情況之下，則可進一步發展為反應型的模型，即隨著交通資訊的改變，用路人可在行程中改變旅運型態，因此相關依時隨機性交通量指派問題、或整合旅次產生、旅次分配的彈性或變動需求交通量指派模型，可進行系統性的深入研究。
4. 本研究著重於探討主要旅次起點的出發時間選擇行為，並未考慮用路人到達次要活動點的時窗限制及出發時間選擇，後續可將上述假設納入模型考量，以期更完整分析用路人出發時間選擇決策。

參考文獻

1. Janson, B. N., "Dynamic Traffic Assignment for Urban Road Networks," *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 25, No. 2, 1991, pp. 143-161.
2. Ran, B., Hall, R. W., & Boyce, D. E., "A Link-Based Variational Inequality Model for Dynamic Departure Time/Route Choice", *Transportation Research Part B: Methodological*,

- Vol.30, No. 1, 1996, pp. 31-46.
3. Friesz, T. L., Bernstein, D., Smith, T. E., Tobin, R. L., and Wie, B., "A Variational Inequality Formulation of The Dynamic Network User Equilibrium Problem," *Operations Research*, Vol. 41, No. 1, 1993, pp.179-191.
 4. Friesz, T. L., Kim, T., Kwon, C., and Rigdon, M. A., "Approximate Network Loading and Dual-Time-Scale Dynamic User Equilibrium", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 1, 2011, pp.176-207.
 5. Friesz, T. L., Han, K., Neto, P. A., Meimand, A., & Yao, T. , "Dynamic User Equilibrium Based on A Hydrodynamic Model." *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 47, No.1, 2013, pp.102-126.
 6. Chen, H. K., & Hsueh, C. F., "Discrete-Time Dynamic User-Optimal Departure Time/Route Choice Model", *Journal of Transportation Engineering*, Vol. 124, No. 3, 1988, pp. 246-254.
 7. Chen, H. K., & Chang, M. S., "Dynamic User-Optimal Departure Time/Route Choice Problem with Time-Window." *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Vol. 23, No. 1, 2000, pp. 71-81.
 8. Chen, H. K., Chang, M. S., & Wang, C. Y., "Dynamic Capacitated User-Optimal Departure Time/Route Choice Problem with Time-Window", *European Journal of Operational Research*, Vol. 132, No. 3, 2001, pp. 603-618.
 9. Carey, M., "A Constraint Qualification for A Dynamic Traffic Assignment Model," *Transportation Science*, Vol. 20, No. 1, 1986, pp. 55-58.
 10. Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L., "A Model and An Algorithm For the Dynamic Traffic Assignment Problems", *Transportation Science*, Vol. 12, No. 3, 1978, pp.183-199.
 11. Friesz, T. L., Luque, J., Tobin, R. L., and Wie, B. W., "Dynamic Network Traffic Assignment Considered As a Continuous Time Optimal Control Problem," *Operations Research*, Vol. 37, No. 6, 1989, pp.893-901.
 12. Matsui H., "A Model of Dynamic Traffic Assignment", *Text of Infrastructure Planning Lectures*, JSCE, 18, 1987, pp.84-96.
 13. Ran, B. and Boyce, D. E., "Dynamic Urban Transportation Network Models: Theory and Implications for Intelligent Vehicle Highway Systems", *Economics and Mathematical Systems 417*, Springer-Verlag, New York, 1994.
 14. Ran, B. and Shimazaki, T., "A General Model and Algorithm For the Dynamic Traffic Assignment Problems", *Proceedings of Fifth World Conference on Transport Research*, Yokohama, Japan, pp. 463-477, 1989.
 15. Ran, B. and Shimazaki, T., "Dynamic User Equilibrium Traffic Assignment for Congested Transportation Networks," *Proceedings of Fifth World Conference on Transport Research*, Yokohama, Japan, 1989.
 16. Chen, H. K., *Dynamic travel choice models: A variational inequality approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
 17. Friesz, T. L. and Mookherjee, R., "Solving the Dynamic Network user Equilibrium Problem With State-Dependent Time Shifts," *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 40, No. 3, 2006, pp.207-229.

18. Han, K., Friesz, T. L., and Yao, T., "Existence of Simultaneous Route and Departure Choice Dynamic User Equilibrium," *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 53, 2013, pp.17-30.
19. Astarita, V., "A Continuous Time Link Model for Dynamic Network Loading Based on Travel Time Function", Lesort, J.-B. (Ed.) *Transportation and Traffic Theory: Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory (ISTTT)*, Pergamon/Elsevier, 1996, pp.79-103.
20. Carey, M., Humphreys, P., McHugh, M., and McIvor, R., "Extending Travel-Time Based Models for Dynamic Network Loading and Assignment, to Achieve Adherence to First-in-First-Out and Link Capacities", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 65, No. 7, 2014, pp.90-104.
21. Nie, X. and Zhang, H. M., "A Comparative Study of Some Macroscopic Link Models Used in Dynamic Traffic Assignment", *Networks and Spatial Economics*, Vol. 5, No. 1, 2005, pp.89-115.
22. Ran, B. and Boyce, D. E., "A Link-Based Variational Inequality Formulation of Ideal Dynamic Optimal Route Choice Problem", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 4, No.1, 1996, pp.1-12.
23. Wu, J. H., Chen, Y., & Florian, M., "The Continuous Dynamic Network Loading Problem: A Mathematical Formulation and Solution Method", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.32, No.3, 1998, 173-187.
24. Xu, Y. W., Wu, J. H., Florian, M., Marcotte, P., and Zhu, D. L., "Advances in the Continuous Dynamic Network Loading Problem," *Transportation Science*, Vol. 33 No. 4, 1999, pp. 341-353.
25. Zhu, D. and Marcotte, P., "On the Existence of Solutions to The Dynamic User Equilibrium Problem", *Transportation Science*, Vol. 34, No. 4, 2000, pp. 402-414.
26. Luo, S. S., Wang, C. Y., & Sung, Y. W., "Time-Dependent Trip-Chain Link Travel Time Estimation Model with The First-In-First-Out Constraint." *European Journal of Operational Research*, Vol. 267, No. 2, 2018, pp. 415-427.
27. Chen, H. K., & Hsueh, C. F. , "A Model and An Algorithm For the Dynamic User-Optimal Route Choice Problem", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 32, No. 3, 1998, pp. 219-234.
28. Patriksson, M. *The Traffic Assignment Problem : Models and Methods*. Utrecht, The Netherlands: VSP,1994.
29. Chen, H. K. and Wang, C. Y., "Dynamic Capacitated User-Optimal Route Choice Problem," *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 1667, No. 1, 1999, pp.16-24.
30. 王中允、宋奕緯，「考量先進先出原則及路段流出率容量限制條件之依時性旅次鏈路段旅行時間推估模型之研究」，中華民國運輸學會第二十四屆學術論文研討會論文集，民國 105 年。
31. Hägerstrand, T., "What About People in Regional Science?", *Papers in regional science*, Vol. 24, No. 1, 1970, pp.7-24.
32. Currie, G. and Delbosc, A., "Exploring the Trip Chaining Behaviour of Public Transport

- Users in Melbourne”, *Transport Policy*, Vol. 18, No. 1, 2011, pp. 204-210.
33. Hensher, D. A. and Reyes, A. J., “Trip Chaining As a Barrier To the Propensity to Use Public Transport,” *Transportation*, Vol. 27, No. 4, 2000, pp.341-361.
34. Holzapfel, H., *Trip Relationships in Urban Areas*, England, Aldershot: Gower, 1986.
35. McGuckin, N., Zmud, J., and Nakamoto, Y., “Trip-Chaining Trends In the United States: Understanding Travel Behavior for Policy Making”, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 1917, No. 1, 2005, pp.199-204.
36. Stopher, P. R., Hartgen, D. T., and Li, Y. (1996), “SMART: simulation model for activities, resources and travel,” *Transportation*, Vol. 23, No. 3, pp.293-312.
37. Thill, J. C. and Thomas, I., “Toward Conceptualizing Trip-Chaining Behavior: A Review,” *Geographical Analysis*, Vol. 19, No. 1, 1987, pp.1-17.
38. Maruyama, T. and Harata, N., “Incorporating Trip-Chaining Behavior into Network Equilibrium Analysis,” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 1921, No. 1, 2005, pp.11-18.
39. Maruyama, T. and Harata, N., “Difference Between Area-Based and Cordon-Based Congestion Pricing: Investigation by Trip-Chain-Based Network Equilibrium Model with Nonadditive Path Costs,” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 1964, No. 1, 2006, pp.1-8.
40. Wang, C. Y. and Chen, H. W., “A Trip-Chain Based User Equilibrium Traffic Assignment Model with Flexible Activities Scheduling Order,” *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, Vol.4, No.1, 2016, pp.1-10.
41. Lam, W. H. K. and Yin, Y., “An Activity-Based Time-Dependent Traffic Assignment Model”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 35, No. 6, 2001, pp.549-574.
42. 王中允、陳相武，「旅次鏈基礎路網均衡模型之研究」，*運輸學刊*，第 27 卷，第 3 期，民國 104 年，頁 439-470。
43. Wang, C. Y., Hu, S. R., & Chu, C. P., “A Combined Activity Nodes Choice and Trip-chain Based User Equilibrium Traffic Assignment Model”, *Transportation Research Procedia*, Vol. 25, 2017, pp. 2461-2472.
44. U.S. Department of Transportation. 1986. UTPS Utown Case Study. Washington, D.C.: U.S. Department of Transportation.