

座位更換最小化之鐵路座位指派模式

RAILWAY SEAT ASSIGNMENT MODELING TOWARDS MINIMUM SEAT CHANGES

李東哲 Tung-Che Li¹
邱裕鈞 Yu-Chiun Chiou²
王詮勳 Chuan-Hsun Wang³

(108 年 10 月 9 日收稿, 109 年 3 月 24 日第一次修正, 109 年 11 月 16 日第二次修正,
110 年 1 月 29 日第三次修正, 110 年 11 月 26 日定稿)

摘 要

鐵路運輸如座位指派不當會使得列車座位未能有效利用, 導致座位利用率、服務乘客總數, 以及票箱收入之降低。因此, 適度將預訂座位中途換座, 或可提高座位利用率。基此, 本研究以裝箱問題模式為基礎, 依據歷史列車售票資料, 建立靜態座位指派模式。本模式先將所有訂位需求, 均切割成各站均換座之單一格位高度 (即一筆訂票 1 站), 而使座位利用率最高, 再透過單一格位的重組 (裝箱), 來使座位分開及座位更換之總次數最小化。為驗證本模式之可應用性, 本文以小規模的一個 6 個車站 20 個座位的列車做為簡例驗證。結果顯示, 若容許中途換座, 則座位利用率可由 92% 提升至 98%、訂單接受率由 85% 提升至 100%, 且只有一筆 2 張座位之訂單必須中途換座, 顯示本模式確具有可應用性。

關鍵詞： 鐵路運輸、座位指派、中途換座、裝箱問題。

-
1. 國立陽明交通大學運輸與物流管理學系交通運輸碩士班碩士。
 2. 國立陽明交通大學運輸與物流管理學系教授 (聯絡地址: 臺北市中正區忠孝西路一段 118 號 4 樓, 電話: 02-23494940, E-mail: ycchiou@mail.nctu.edu.tw)。
 3. 國立陽明交通大學運輸與物流管理學系博士候選人。

ABSTRACT

Inappropriate railway seat assignment may decrease its load factor, number of passengers, and farebox revenue. Consequently, seat changes allowed in booking system may increase the load factor. To do so, based on bin-packing model and historical sales data, this study firstly breaks multi-stop seats into "unit seats" (a seat for a stop; i.e., a unit bin). All passengers have to change seat at every stop (for multi-stop ticket) so as to maximize the load factor. This study proposes a static seat assignment model by switching the assigned seats among passengers to minimize the total number of seat changes. To investigate the applicability of the proposed model, an exemplified case study with 6 train stations and 20 seats is conducted. The results show that the proposed model can increase the load factor from 92% (no seat change) to 98% (seat change allowed) and the booking acceptance rate from 85% (no seat change) to 100% (seat change allowed) at the expense of one booking order with two seats has to change their seats once. The applicability of the proposed model has been proved.

Key Words : Rail transportation, Seat assignment, Seat change, Bin packing.

一、前言

座位指派涵蓋的領域非常廣泛，不管是旅遊產業、娛樂產業或是運輸產業都相當重要，例如：旅館的房間配置、機艙內的旅客座位指派、校車座位指派，以及鐵路的座位指派。其中，航空器的旅客座位指派為運輸產業中最常見的問題，許多研究都致力於解決航空器的旅客座位指派問題，然而在鐵路的旅客座位指派上則相對較少有人投入心力。相較於航空座位指派，鐵路列車的旅客座位指派問題原則上追求的目標略同，例如，考慮同行旅客座位是否相鄰、旅客選擇走道或是靠窗座位，或是喜愛位於機艙（或列車）的前段或後段等…。但是，鐵路列車座位指派，因其不像航空座位僅有單一起迄對（OD Pairs）而使其座位指派更為複雜。

單一起迄對的座位指派，僅需將航空器容量內的座位數，考量價格、艙等等條件，安排數量，於指定期間售出並追求訂定之目標，而在該班機出發當天，再依報到條件指定座位予旅客，即為航空單一起迄座位指派的課題。本研究所探討的鐵路座位指派課題，不限於僅有單一起迄對，而是鐵路列車在起站與終點站間，有若干中途停靠站，使得起迄對呈現 $2n-1$ 比例增加（ n 為列車停靠站），增加問題的複雜度。Clausen 等人^[1] 雖已探討不同起迄對與座位配置的課題，將不同起迄對座位數設定為單一控制變數，就不同目標於列車容量下，求取最佳化指派結果。但此一最佳化作法會因不同起迄對的需求差異，使得部分區間座位無法應用。實務上，此些無法應用座位，會提供短區間旅客使用，或是由長區間乘客分段自行銜接應用，補足無法直接訂取所需之長區間座位。舉例而言，若 A 至 C 地區

共有航空及鐵路兩種運具，航空座位容量為 100 座位，鐵路列車容量為 400 座位，且鐵路列車需中途停靠 B 站。在座位配置時，航空可在起飛前售出 100 座位，並在旅客報到後安排座位；但鐵路列車，需考慮除 A 站至 C 站的發售數量外，仍要考慮 A 站至 B 站還有 B 站到 C 站的發售數量，同時要考量旅客相鄰、座位位置等問題，其複雜度比航空座位配置複雜。

在同時考量不同起迄對需求、旅客滿意度以及鐵路業者營運目標的情況下，本研究有別於過往研究，先將所有起迄對依據列車行駛區間拆解成停靠區間對進行座位配置，再就座位相鄰及同行人數等旅客購票特性整併成所屬起迄對，以增加短區間的座位使用，並探討這樣的配置方法與過去配置方法之差異。舉例而言，某列車有三個座位編號分別為 1、2、3，列車依序停靠 A、B、C 三個車站，若採起迄對座位指派方式，則有可能在第一、二筆訂單納入配置時，因第三筆訂單希望購買從 A 站前往 C 站時，系統將會因無單一座位提供此旅客自 A 站乘坐到 C 站，而拒絕訂單需求。此時，若採用本研究座位配置方法，即可發現第三筆訂單所需之區間仍有空位，因此，再將第 2 筆訂票訂單，由 2 號及 3 號座位指派到 1 號座位及 2 號座位，空出 3 號座位自 A 站至 C 站區間，即可滿足第三筆訂票訂單需求（如圖 1）。由圖知，長區間旅客會因無法直接購買所需車票而分段購買，如上述簡例的第三筆訂票訂單，當旅客無法直接購買自 A 站至 C 站車票時，則分別購買一張由 A 站到 B 站車票及由 B 站 C 站車票，前者分配至 2 號座位後者分配至 1 號座位，旅客最終可完成該旅次。為達列車最大利用率並反映各起迄對之需求，本研究將各起迄對拆解成各行駛區間，也就是將 A 站到 C 站需求拆解成 A-B 及 B-C 區間，在最大利用率的目標下進行座位配置，再將旅客特性相同的訂單合併，探討座位使用及旅客換座的關係，進而了解其產生之成本與效益。

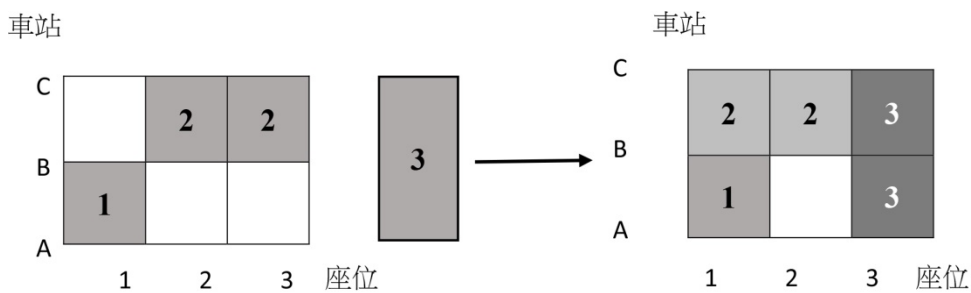


圖 1 本研究座位配置概念示意圖

由於探討鐵路系統座位指派之研究中對於容許中途換座對提升座位利用率者相對較少，故本研究旨在探討不同起迄對旅客訂單需求之座位指派最佳化課題，並檢視容許中途換座機制對提升座位利用率的影響。尤其，本研究所提出的創新作法是先將所有旅客訂單拆解成最小單元，再將針對所有接受訂位的指派座位加以重新組合，以便同時求解座位利用率最大化及中途換座次數最小化之座位指派結果。

基此，本研究先回顧相關文獻，對於座位庫存管理、座位指派及裝箱問題等文獻進行彙析，以界定本研究探討目的、範圍、所採用的研究方法等。建立模式部分，本研究建立鐵路座位配置靜態模式，以進行靜態座位指派。其一為基本靜態鐵路座位指派模式、另一為起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派模式，以比較將訂票資料拆解再重新組合後之作法，驗證透過旅客中途換位機制提高座位利用率及訂單接受率之效果，並以小規模簡例進行簡例驗證，以檢視其成效。最後，依據研究成果提出結論與建議。

二、文獻回顧

本研究所提出之研究概念，涉及座位庫存管理、座位指派問題以及空間配置之裝箱問題，故針對座位配置與指派的相關研究先行彙整，了解座位配置與指派之相關方法，再就裝箱問題的相關研究加以彙析，據以作為本研究模式發展之基礎。

2.1 座位庫存管理及座位指派問題

Boyar^[2] 探討如果讓旅客在搭乘火車時，在起迄站間更換座位對於整部列車的載客率的影響。研究將此問題分為兩類，一類為所有車票價錢均為相同，另一類則會隨著搭乘距離的比例變動價錢的車票。接著，利用 competitive ratio 以及被接受的訂位序列的 competitive ratio 來分析這個問題，並且將火車行駛的整個路段分成 $s+1$ 個小路段，其中 s 代表換座位的次數，這 $s+1$ 個小路段為各個訂位所達成的路段，路段會有重疊的部分，當有重疊的部分就重新安排位子，但是當需要換位子時仍然會經過旅客的同意。透過這種方法該研究發現在票價均相同的情況下，相較於靜態模式中所接受的訂位量的 $(s+1)/(s+2)$ 倍的訂位量可以被接受；而在票價依路段比例訂定時，被接受的訂位序列的 competitive ratio 的下界為 $\Omega(s/k)$ 。

Clausen 等人^[1] 將團體訂票的座位指派問題分為二維度背包 (two-dimensional knapsack) 問題及二維度裝箱 (two-dimensional bin packing) 問題。該研究假設一列車只有單一排座位，如圖 2，只要座位號碼連續即代表座位相鄰。首先二維度背包問題是在知道訂票需求的情況下，設法讓所有座位在各個區間都有人使用，以達到最大效用以及最大收益，在解決二維度背包問題中將各個訂票假設為矩形，縱軸為車站橫軸為訂票的座位數，使用 branch and bound 方法將各個訂票分為接受訂票及不接受訂票，接著再透過 interval graph 去檢測各個訂票被放入列車座位的相對位置及可行性，其中在 interval graph 中，各個訂票矩陣之間的放入關係不能有循環關係。而二維度裝箱問題則是在接受了所有訂票需求後，設法最小化需要使用的列車數量。在求解二維度背包問題及二維度裝箱問題時，都分別以數學規劃求得精確解，同時以 CPLEX 套裝軟體內鍵演算法處理，最後，該研究也發現其所提出的精確演算法可以求解出 CPLEX 中內鍵演算法無法求解的問題，並且求解結果也較快速且穩定。

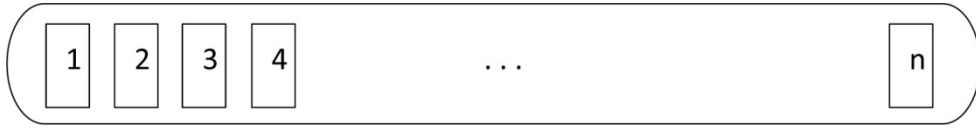


圖 2 單一排座位之配置

王泓達^[3]探討台灣高鐵對於團體旅客訂位的座位指派問題，該研究認為在分配旅客的座位時應該優先指派團體旅客，因為團體旅客會期望坐在同一個車廂，且盡量指派在同一個水平的座位，而單人旅客則是希望鄰座可以沒有其他乘客或是車廂內座位看起來不要過於擁擠。為達到上述的要求，該研究將團體旅客都優先安排在車廂的前方，而單人旅客都安排在車廂後方。在方法方面，該研究以兩個階層來進行座位指派，第一階層利用裝箱問題的方式將各個訂位指派到適當的車廂中，第二階層是利用集合覆蓋 (set covering) 問題的方式將分配到車廂內的訂位指派到適當的座位，這個階段結合規則式系統方法 (Rule based system, RBS) 來處理實務狀況及旅客滿意度，該研究將各個座位所屬車廂位置離車站站台出入口之距離作為座位成本，故以選擇指派成本最低策略者為最佳解為最後結果。

2.2 裝箱問題

裝箱問題 (bin packing problem) 在探討如何將包裝成小箱子的貨品裝入大箱子 (bin) 中，在實際的問題應用上常被運用在處理倉庫的貨品存放問題、鋼條和玻璃原料的切割問題以及排班問題等。裝箱問題依據問題採用之排列特性分為一維、二維以及多維裝箱問題，且所採用之特性具有其連續特性無法或難以切割，例如：裝箱時，大箱子的箱體裁積是固定且連續，具有固定規格的長、寬、高，且無法任意拆離分裝，故如何將貨品裝入特定規格的大箱子中，再依各問題所訂定之目標，找出最佳的排列組合結果，便是裝箱問題的求解程序。

二維裝箱問題為平面最佳化模式，此問題將會具有一組矩形貨品共 n 個，其中 $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ ，此些矩形貨品的寬度以及高度分別以 w_j 及 h_j 表示，共有最多 n 種大小矩形不同的貨品 (亦有貨品規格相同的可能)；接著，將此些矩形貨品裝到給定寬度 (W) 及高度 (H) 的平面大箱子中。二維裝箱問題的目的是要將一組矩形貨品 J 全部裝入大箱子中，並且希望讓被使用的大箱子數量越少越好，並且各個矩形貨品在被裝入大箱子時不能被 90 度的旋轉，僅能以原有的角度被裝入。

鐵路座位配置問題就是乘客訂購的各筆訂單，該訂單中包含所需的座位數，以及此筆訂單是從何站開始 (起站) 搭到何站 (迄站)；各訂單座位數與起迄站對，為二維裝箱問題中的貨品，而業者所提供的車廂為二維裝箱問題中的大箱子 (bin)，而車廂中的座位編號及該座位可售出的起迄站對，各別代表大箱子中的寬度與長度，且業者必須針對不同訂單中之需求座位數量及起迄站對，將車廂中供給給塞滿，鑑此，鐵路列車座位配置問題與二維裝箱問題，可作為同一問題進行求解。

就裝箱問題部分，Lodi 等人^[4]彙析二維裝箱問題 (two-dimensional bin packing problem, 2BP) 相關文獻，彙整靜態裝箱問題的相關演算法，及其分析後的成效比較；研究將過去的裝箱問題的演算法歸納為兩大類，一類為 one phase algorithm，在這類的驗算法方面是直接指派矩形裝入一個有長寬限制的大箱子中；第二類為 two phase algorithm，這類方法是先將進行 strip packing，即把矩形裝入一個有寬度限制但是沒有高度限制的長條大箱子中，然後目標是讓大箱子的高度最小化，在第二階段則是將上一個階段 strip packing 獲得的結果來建立一個裝箱模式，將所有矩形裝入數個高度有限制的大箱子中。而上述兩類演算法中常常利用階層裝箱策略 (level packing strategy) 的方式進行，其分為 Next-Fit Decreasing Height (NFDH) 策略、First-Fit Decreasing Height (FFDH) 策略以及 Best-Fit Decreasing Height (BFDH) 策略來處理裝箱問題，其各別不同的裝箱方法，可視不同的問題選用合適的策略進行裝箱。Martello 與 Vigo^[5]提出求解裝箱問題的演算法，以 outer branch-decision tree 及 inner branch-decision tree 組成，outer branch-decision tree 階段是在各個節點上將矩形指派到適當的大箱子，而在 inner branch-decision tree 則是列舉各種矩形可以被指派到大箱子的種類。Lodi 等人^[6]利用 Tabu search 將矩形指派到目標箱子，並且將箱子填滿，在指派矩形到目標大箱子的同時，因為有矩形已經離開要被裝入大箱子的矩形組合 S ，所以會調整要被裝入大箱子的矩形組合，以上述方法不斷重複進行，最後該研究發現透過 Tabu search 方法所得到的結果變異量較小。

Parreño 等人^[7]以一個新的 GRASP 方法 (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) 來處理三維的裝箱問題，而這個方法也可以沿用到二維的裝箱問題中，並且該研究假設所有要被裝箱的小箱子的方向都是不能變的，這個新的 GRASP 方法是以兩個階段組成，分別為 constructive phase 以及 improvement phase，如果小箱子 j 的體積加上要被放入大箱子中的其他小箱子的總體積小於大箱子的體積，則執行 constructive phase 的動作。在 constructive phase 階段，先假設 $S=\{E\}$ 為最大空著的空間的集合， $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 是要被裝入的小箱子的集合，而整個大箱子是一開始最大空著的空間，所以將第一個小箱子放入大箱子的左下角，將會產生新的 S ，接著再選其他的小箱子放入新產生的 S ，持續進行上述步驟直到小箱子都被裝箱入大箱子，其中在選擇放入大箱子的小箱子的方法分為 Best-Volume 及 Best-Fit，Best-Volume 是選擇能佔據最大空間的小箱子，而 Best-Fit 是以小箱子的邊與最大空著的空間的邊的距離遞增的方式為小箱子放入的順序，並且在 constructive phase 需要決定全部的小箱子的多少比例要被裝入大箱子才會得到最佳結果，此外在每個遞迴所需要的大箱子都要比上一個遞迴少。在 improvement phase 部分是提出四個策略去改善在 constructive phase 得到的結果，第一個是將 $k\%$ 的小箱子從大箱子中拿出，然後再將一開始無法被放入大箱子中的小箱子一併執行 constructive phase 的方法裝入大箱子；第二是將空間填滿率低於平均的大箱子中 $k\%$ 的小箱子拿出，然後重新執行 constructive phase 的方法將小箱子重新裝入未填滿的大箱子；第三個是將填滿率低於平均的大箱子做切割，隨機選出被切割的部分將小箱子取出，再重新執行 constructive phase 的方法將小箱子重新裝入；第四個方法是將其中兩個大箱子中的小箱子取出，然後將剛剛未被放入的小

箱子第一個被放入兩個空的大箱子，接著再找出放入其他被取出的小箱子的 local solution。該研究認為這個方法改善了原本的 GRASP 的複雜程度，並且也有效的提升運算速度，此外在 improvement phase 的部分也可以將策略進行結合提升裝箱改善的程度及效率。

Ana 與 Andrea^[8] 以兩階層裝箱問題的研究去解決葡萄牙貿易公司每天遇到的貨物配送問題。第一層是將裝有貨品的箱子裝上貨盤，利用常見的 GRASP 方法中一個稱作 CHMO 的 local 尋優方法，並且經過多次的 CHMO 方法來處理此問題，得到將來自同一位客人的某一種類的所有箱子裝載到貨盤的最佳方法；第二階層則是將貨盤裝上一輛或是多輛貨車，其利用 tree search 演算法來解決各個貨盤裝入貨車的順序以及如何將貨車堆滿，其最終目標是有效的利用貨車上的裝載空間已達到使用最少貨車數。其中兩層裝箱問題有幾項重要的限制式，第一是各個貨盤只會裝載一位客人的貨物，且裝載貨物的箱子都是相同規格的；第二是箱子必須完全的放在貨盤上，不可以超出貨盤範圍；第三是貨盤的裝載高度定義為從貨盤底部到裝載的箱子的最高處；第四是各個箱子堆疊在其他箱子上時，下方必須完整與下方箱子接觸，不可超出下方箱子範圍；第四是貨盤上的堆疊高度不可以超過貨車可裝載的高度；第五是貨物在運送的過程中不可以被拿出又放回，所以必須遵從最後放入的貨品先送達的運則 (LIFO, last in first out)。最後該研究分別利用 C 以及 CPLEX 套裝軟體去計算此迭代問題，發現在計算上均不用一分鐘即可得到最佳解。

綜觀文獻中裝箱問題的採用策略以及最佳化的演算法，係針對探討的問題本質，先訂定所採用合適的裝箱策略，在透過最佳化的演算法，找出最佳解；本研究所探討之鐵路配位問題，需考慮各個訂票需求放入配位系統的順序以及位置，進行最佳化的配置，將每筆訂單的起迄站橫跨區間及張數視為矩形貨品，再將列車空間中的座位及起迄站視為大箱子 (bin)，即與裝箱問題十分貼切，故本研究利用後進先出 (LIFO) 的裝箱策略作為限制式，再透過 tree search 演算法進行最佳化作業，預期能得到貨盤裝載順序及讓貨車裝載量達到最大化。裝箱問題中貨品及大箱子的元素，與鐵路系統訂單與車輛之關係十分類似，為二元裝箱問題之雛型，排列的策略與鐵路配位問題十分相關，另經回顧相關文獻，尚未透過裝箱問題進行鐵路配位最佳化之研議，故本研究將應用裝箱問題最佳化的過程應用於鐵路配位的問題，並針對最佳化執行過程與結果進行討論，並提供鐵路系統營運業者參考之用。

三、模式建構

本研究採用不同以往的座位指派方式，也就是以列車行駛起迄點間，兩相鄰停靠站為單一區間，進行最佳化配置，再檢視訂票資料每筆訂單的特性，將特性相同的訂單合併，再找出座位利用率最高的結果，以符合各區間座位均需被利用的目標。本研究的模式設計，可同時考量同筆訂單座位相鄰之問題，除了訂單所列區間以全程有座位為優先考量外，2 人以上之旅客訂單，仍以座位相鄰為優先安排，因此，就單一系列車所有停靠站所組

成的停靠站對，在利用率最高的目標下，能否達到旅客提出之訂單需求，為以往研究未探討之課題。對於這樣的研究設計，屬於二維裝箱問題 (two dimension bin packing problem)，亦即本研究透過二維裝箱問題模型作為鐵路座位指派的基本模型，並建立基本鐵路靜態座位指派模式。

鐵路靜態座位指派模式須探討兩項議題：(1) 乘客不允許中途更換座位的限制下，列車座位指派情形；(2) 允許乘客中途更換座位時，列車座位指派情形。兩項議題主要探討，比較配置短區間座位，能否能讓座位利用率提升，意即驗證「旅客中途換座是否能增加座位利用率及訂單接受率」；接著再進一步探討長途乘客於中途更換座位的接受度，而在探討允許乘客更換座位時，即以換位次數為最後討論指標，也就是對於乘客的換位單位成本均一致之前提下進行模式最佳化。本研究模式建構所採用之參數及變數整理如表 1 所示，此外，為便於模式構建，本研究對於鐵路座位指派模式進行以下假設：

1. 假設以整班列車為單一空間建構考量，不將同一列車分為不同車廂之空間間隔。
2. 假設在已知訂票需求的情況下進行座位指派。
3. 假設不考慮發售站票之情況。

表 1 參數與變數定義與說明

變(參)數	變數名稱	數值	說明
W	列車總容量	已知參數	—
H	列車總行駛車站數	已知參數	—
w_j	訂位座位需求數	已知參數	訂位需求 j 座位使用數。
y_j	旅客的起站	已知參數	訂位需求 j 起始車站。
y_j^k	旅客的起站	已知參數	訂位需求 j 在 k 站的起始車站，即 k 站。
x_j	旅客的座位號碼	整數變數	訂位需求 j 的座位位置。
x_j^k	旅客的座位號碼	整數變數	訂位需求 j 在 k 站的座位位置。
l_{ij}	旅客的座位相對位置	0, 1 變數	表示訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的左側，1 代表是。
m_{ij}	旅客搭乘區間的前後順序	0, 1 變數	表示訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的前面，1 代表是。
f_j	旅客是否有座位	0, 1 變數	訂位需求 j 是否被接受，1 代表是。
z_i^k	旅客是否需要換座位	0, 1 變數	訂位需求 i 在 k 站是否換位子，1 代表是。
l_{ij}^k	旅客的座位相對位置	0, 1 變數	表示在 k 站的時候訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的左側，1 代表是。
m_{ij}^k	旅客搭乘區間的前後順序	0, 1 變數	表示在 k 站的時候訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的前面，1 代表是。

3.1 鐵路靜態座位指派模式：中途不換座

基本鐵路靜態座位指派是在已知該列車當日的訂票需求的條件下，進行座位指派，然而採用的指派資料，即為各筆訂票資料所登載的起迄對。但模式中並無考慮每位旅客的訂票順序，故首筆訂票需求若無空間可供指派，也可能無法配得座位，故在座位指派的過程中，不考慮旅客在起迄站之間進行換座位之情形。

3.1.1 鐵路靜態座位指派模式（中途不換座）之數學定式

本模式主要目的是最大化列車的座位利用率，此問題與裝箱問題類似，故模式以二維裝箱問題模式為基礎，再依據鐵路座位指派問題特性調整，建構本研究基本靜態鐵路座位指派模式。

二維裝箱是一個 NP-Hard 的問題，目標為將多個小箱子裝入大箱子中，並且使用最少數量的大箱子裝載。二維裝箱問題中會有一組二維的小箱子 n 個並以 j 編號表示，且每個小箱子具有不同的長度 (w_j) 及寬度 (h_j)；而裝載小箱子的大箱子寬度及高度分別以 W 及 H 表示。故此類問題即是將一組小箱子 J 全部裝入大箱子中，並且希望讓被使用的大箱子數量越少越好，在裝箱過程中，各個小箱子僅能以原有的角度被裝入。

在鐵路的座位指派問題中，可將一輛列車所擁有的座位數比擬為大箱子的寬，也就是座標軸的橫軸，座位的號碼依序排列在大箱子的橫軸上。列車所停靠的車站同等於大箱子的高，也就是座標軸的縱軸，若列車停靠站數越多、大箱子的高度越高，且依站序排列在縱軸上。每筆訂票需求皆會有所代表的起迄點以及需要座位數，故需求的起迄點即等同於小箱子的高、座位數代表小箱子的寬，因此，鐵路座位指派問題即是將這些訂位需求（小箱子）排入列車的座位數及停靠站序（大箱子）中，這樣的問題形式與二維裝箱問題十分類似。因此，本研究將訂位需求 j 的起迄點的區間長度以 h_j 表示，訂位需要的座位數以 w_j ，而列車行駛總行駛距離則以 H 表示，總座位數 W 表示。

在二維裝箱問題中的目標為以最少的大箱子數容納所有的小箱子，而大箱子的寬度及高度是有限制的，不過本研究中所考慮的狀況與二維包裝問題仍有些不同，本研究採用的列車的總車輛數是固定的，因此，本研究目標並非追求使用的車輛數最少，而是追求容納最多的訂位需求。本研究利用二維裝箱模式為基礎建立之基本靜態鐵路座位指派模式，其基本參數如下：

- 有 n 筆需求，以集合 N 表示， $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。
- 訂位需求 j 的寬度為 w_j ，代表需要的座位數，長度為 h_j ，代表訂位需求之起迄站橫跨站間。
- 列車的總座位：即容量，以 W 表示。
- 列車的行駛站間（停靠車站數）：以 H 表示。

➤ Y_j ：代表訂位需求 j 呈現的小矩形底部的座標，即訂位需求 j 的起始站。

根據鐵路座位指派問題特性，本研究除了定義上述的基本參數外，也定義了以下於建構本研究問題模式將會使用到的變數，進行以下說明：

- 旅客座位相對位置判斷變數 (l_{ij})：屬二元變數，當數值等於 1，代表訂位需求 i 乘坐的座位號碼小於訂位需求 j 乘坐的座位號碼；當數值等於 0，代表訂位需求 i 乘坐的座位號碼大於訂位需求 j 乘坐的號碼，或是訂位需求 i 及 j 並沒有都獲得座位。
- 旅客搭乘區間前後關係判斷變數 (m_{ij})：屬二元變數，當數值等於 1，代表訂位需求 i 的搭乘區間在訂位需求 j 的前方且不重複。當數值等於 0，代表訂位需求 i 的搭乘區間與訂位需求 j 的搭乘區間相同，或是訂位需求 i 及 j 並沒有都獲得座位。
- 是否採用之訂位需求 (f_j)：屬二元變數，當數值等於 1，代表訂位需求 j 被接受放入列車中。

➤ x_j ：代表訂位需求 j 呈現的小矩形左側的邊的座標，即訂位需求 j 的起始座位。

$$\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j, \quad (1)$$

$$l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} + m_{ji} + (1 - f_i) + (1 - f_j) \geq 1, \quad (2)$$

$$x_i - x_j + W l_{ij} \leq W - w_i, \quad i, j \in N \quad (3)$$

$$y_i - y_j + H m_{ij} \leq H - h_i, \quad i, j \in N \quad (4)$$

$$0 \leq x_j \leq W - w_j, \quad j \in N \quad (5)$$

$$0 \leq y_j \leq H - h_j, \quad j \in N \quad (6)$$

$$l_{ij}, m_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N \quad (7)$$

$$f_j \in \{0, 1\} \quad j \in N \quad (8)$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j \in N \quad (9)$$

式 (1) $\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j$ ，代表的意義為最大化列車的座位利用率，其中二元變數 f_j 表示訂位需求 j 是否被接受， w_j 及 h_j 分別為訂位需求 j 所需要的座位數以及搭乘距離，因此，其相乘代表訂位需求 j 所代表的小矩形的面積，目標為此些需求加總能夠接近列車容量。

式 (2) $l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} + m_{ji} + (1 - f_i) + (1 - f_j) \geq 1$ 代表的意義為避免兩個不同的訂位需求有重疊的情況產生，當訂位需求 i 及訂位需求 j 同時被接受的情況下，限制是會讓訂位需求 i 位於訂位需求 j 的左側或右側，使其座位不重疊，或是位於上方或下方，使其搭乘區間不重疊。

式 (3) $x_i - x_j + W l_{ij} \leq W - w_i$ ，當 $l_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 的左側，此時式 (3) 會變成 $x_i + w_i \leq x_j$ ，即代表訂位需求 i 所使用的第一個座位加上其所需要的座位數後，會小於等於訂位需求 j 所使用的第一個座位，所

以以此限制式代表兩個訂位需求在座標軸上的相對關係。

式 (4) $y_i - y_j + Hm_{ij} \leq H - h_i$ ，當 $m_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 的下方，此時式 (4) 會變成 $y_i + h_i \leq y_j$ ，代表訂位需求 i 的起始車站加上其搭乘的距離後，會小於等於訂位需求 j 搭乘的起始車站，所以以此式子代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

式 (5) $0 \leq x_j \leq W - w_j$ 及式 (6) $0 \leq y_j \leq H - h_j$ 分別表示所有的訂位需求所需要的座位數都需要可以被列車容納。此外，所有的訂位需求的搭乘區間都在列車行駛的起迄點之內。

式 (7) 為上述兩訂位需求在座標軸中用以表示其相對位置之二元變數，式 (8) 為表示訂位需求是否被接受之二元變數，

3.1.2 鐵路靜態座位指派（中途不換座）之求解方式

在 3.1.1 節中，本研究以二維裝箱模式為基礎加入鐵路座位指派特性調整模式，建構本研究所採用之鐵路座位指派模式。基本靜態鐵路座位指派模式屬於二維裝箱模式，目標求出最大列車座位利用率，並符合訂票需求，但二維裝箱模式為一種 NP-Hard 的數學規劃問題，所以在問題規模大時，不易由上述的模式求得到最佳解，故通常以啟發式解法來求得區域最佳解，例如，greedy algorithm、Metaheuristics 或是 Tree search 等。因此，本研究所建構之基本鐵路座位指派的模式，將在 Visual Studio 環境下編寫 C++ 語法，並且選擇利用最佳化套裝軟體 Gurobi 求得精確解。

3.2 鐵路靜態座位指派模式：中途可換座

起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派，同樣在該班列車訂票需求已知的情況下，進行最佳化的座位指派，而為達到指派最佳化結果，研究設計將部分旅客起迄對先拆成該列車停靠站區間再重新組合，這樣的最佳化設計，以利用率最大為目標，故會導致部分旅客可能需要換座位。

3.2.1 鐵路靜態座位指派模式（中途可換座）之數學定式

起迄站之間可換座位的研究設計，用意在於提高整體座位利用率，因此，座位指派的原則即將基本座位指派模型進行修正與調整，使每位旅客在每到達一個車站即重新指派座位。但這樣的實驗設計，可能會使得乘客不斷換座，造成乘客困擾。對此，此模式中加入第二個目標：最小化旅客換座位次數，以避免乘客因不斷換座而造成的不便，基本靜態鐵路座位指派模式與起迄站之間可換座位靜態鐵路座位指派模式之概念示意，如圖 3 所示。

基本模式如圖 3(a)，若有一列車共有 5 個座位，停靠 5 個車站，且有 5 筆訂票，則第 5 筆訂單會因為無符合其起迄空位，而拒絕該需求；然而，起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派模式，如圖 3(b)所示，如同前例，每一筆訂票代表的矩形均被切割成各站均換

座之單一格位高度的小矩形，接著盡可能裝入最多的這些單一格位高度的小矩形到列車座位及車站代表的大矩形中，最後再進行座位的調整以最小化旅客換座次數。

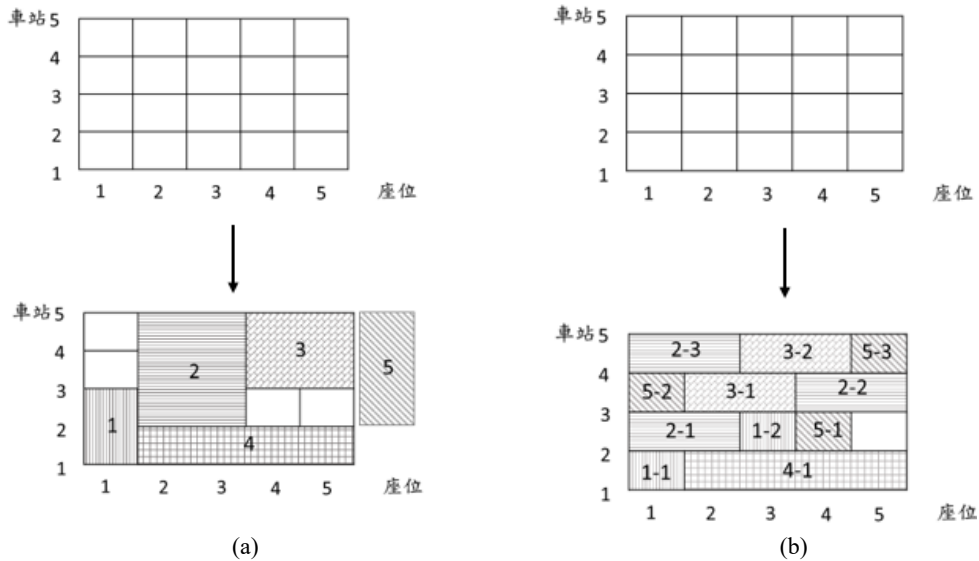


圖 3 中途不換座與可換座之鐵路座位指派概念比較

在圖 4 為採用起迄站之間可換座位模式之結果，結果顯示，最後僅 5 號訂票的旅客需要換座位 1 次，可增加座位利用率，避免因沒有乘客所需的起迄對座位，而拒絕乘客購買該班次車票。若採用基本靜態鐵路座位指派模式，當後續無乘客購買車票，也會造成座位無人使用，降低整體座位利用率。

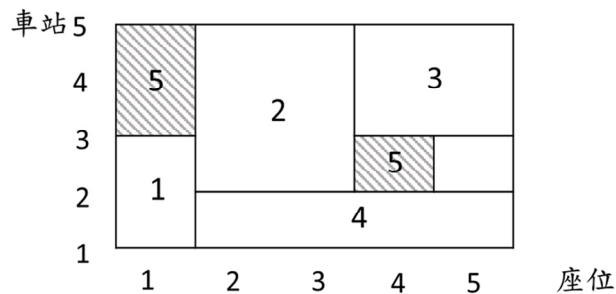


圖 4 中途可換座之鐵路座位指派結果

中途可換座之鐵路座位指派模式所採用之變數說明如下：

- 有 n 筆需求，以集合 N 表示， $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。
- 訂位需求 j 的寬度為 w_j ，代表需要的座位數，長度為 h_j ，代表訂位需求之起迄站橫跨站間。

- 列車的總座位：即容量，以 W 表示。
- 列車的行駛站間 (停靠車站數)：以 H 表示。
- y_j^k ：代表訂位需求 j 在其搭乘區間中在 k 站最下側的縱軸座標，即訂位需求 j 在其搭乘區間中 k 站代表的座標。

另外，除上述的基本參數外，以下還有部分參數是在鐵路座位指派問題會使用的變數：

- 旅客座位相對位置的判斷變數 (l_{ij}^k)：屬二元變數，當數值等於 1，代表在第 k 站訂位需求 i 乘坐的座位號碼小於訂位需求 j 乘坐的座位號碼；當數值等於 0，代表在第 k 站訂位需求 i 乘坐的座位號碼大於訂位需求 j 乘坐的號碼，或是訂位需求 i 及 j 並沒有都獲得座位。
- 旅客搭乘區間前後關係判斷變數 (m_{ij}^k)：屬二元變數，當數值等於 1，代表在第 k 站訂位需求 i 的搭乘區間在訂位需求 j 的前方且不重複。當數值等於 0，代表在第 k 站訂位需求 i 的搭乘區間與訂位需求 j 的搭乘區間相同，或是訂位需求 i 及 j 並沒有都獲得座位。
- 是否採用之訂位需求 (f_j)：屬二元變數，當其數值等於 1，代表訂位需求 j 被接受放入列車中。
- x_j^k ：代表訂位需求 j 在其搭乘區間中在 k 站最左側的橫軸座標，即訂位需求 j 在 k 站的座位。
- 更換座位判斷變數 (z_i^k)：為 0,1 變數，代表第 i 個訂位需求在 k 站是否換位子，有換位子則其值是 1，沒換位子 0。

$$\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j, \quad (10)$$

$$\text{Min } \sum_{k \in K} z_i^k, k \in H \quad (11)$$

$$l_{ij}^k + l_{ji}^k + m_{ij}^k + m_{ji}^k + (1 - f_i^k) + (1 - f_j^k) \geq 1, \quad (12)$$

$$x_i^k - x_j^k + W l_{ij} \leq W - w_i, i, j \in N, k \in H, \quad (13)$$

$$y_i^k - y_j^k + H m_{ij}^k \leq H - h_i, i, j \in N, k \in H \quad (14)$$

$$0 \leq x_i^k \leq W - w_j, i, j \in N, k \in H \quad (15)$$

$$0 \leq y_j^k \leq H - 1, i, j \in N, k \in H \quad (16)$$

$$(x_i^k - x_i^{k+1})^2 \leq M z_i^k, i, j \in N, k \in H \quad (17)$$

$$l_{ij}, m_{ij} \in \{0, 1\} i, j \in N \quad (18)$$

$$f_j \in \{0, 1\} j \in N \quad (19)$$

$$x_j^k, y_j^k \geq 0, j \in N, k \in H \quad (20)$$

$$z_i^k \in \{0, 1\}, k \in H \quad (21)$$

本模式有兩個目標式，式 (10) $\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j$ ，二元變數 f_j 表示訂位需求 j 被接受， w_j 及 h_j 分別為訂位需求 j 所需要的座位數以及搭乘距離，其相乘代表訂位需求 j 所代表的小矩形的面積，所以該目標式代表的意義為最大化列車的座位利用率；式 (11) $\text{Min } \sum_{k \in K} z_i^k$ ，因為模式會讓旅客在各站重新指派座位，造成旅客會換座位，此目標式目的為最小化旅客換座位的次數。

式 (12) $l_{ij}^k + l_{ji}^k + m_{ij}^k + m_{ji}^k + (1 - f_i^k) + (1 - f_j^k) \geq 1$ 代表的意義為避免兩個不同的訂位需求有重疊的情況產生，當訂位需求 i 以及訂位需求 j 同時被接受的情況下，本限制式會使訂位需求 i 位於訂位需求的左側或右側使其座位不重疊。

式 (13) $x_i^k - x_j^k + W l_{ij} \leq W - w_i$ ，當 $l_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在 k 站的座位在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 在 k 站的座位的左側，此時式 (13) 會變成 $x_i^k + w_i \leq x_j^k$ ，即代表訂位需求 i 在 k 站所使用的第一個座位加上其所需要的座位數後，會小於等於訂位需求 j 在 k 站所使用的第一個座位，所以以此限制式代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

式 (14) $y_i^k - y_j^k + H m_{ij} \leq H - h_i$ ，當 $m_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在 k 站的起始站在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 在第 k 站的起始站的下方，此時式 (14) 會變成 $y_i^k + h_i \leq y_j^k$ ，表訂位需求 i 在 k 站的起始車站加上其搭乘的距離後，會小於等於訂位需求 j 在 k 站搭乘的起始車站，所以以此限制式代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

式 (15) $0 \leq x_j^k \leq W - w_j$ 及式 (16) $0 \leq y_j^k \leq H - 1$ 分別表示所有的訂位需求所需要的座位數都需要可以被列車容納，此外所有的訂位需求的搭乘區間都在列車行駛的起迄點之內。

式 (17) $(x_i^k - x_i^{k+1})^2 \leq M z_i^k$ 為檢測訂位需求 i 在搭乘的過程中的任兩個區間是否有換座位，若有換座位則 z_i^k 為 1，沒有換座位則是 0，以此知道訂位需求 i 在搭乘列車的過程中換了幾次座位。

式 (18) 為上述兩訂位需求在座標軸中表示其相對位置所代表的二元變數，式 (19) 為表示訂位需求是否被接受的二元變數，式 (20) 代表各個訂位需求所使用的座位數以及搭乘距離均大於等於 0。最後，式 (21) 代表換位與否的二元變數。

然而，在探討容許乘客中途換座時，即以換座次數為最後討論指標，也就是對於乘客的換位單位成本均一致之前提下進行模式最佳化。

3.2.2 鐵路靜態座位指派模式（中途可換座）之求解方式

在求解可在起迄站之間換座位之靜態鐵路座位指派模式之邏輯整理如下：

步驟一：匯入列車停靠車站數及座位總量。

步驟二：隨機產生訂單，訂單資訊包含起站、迄站及人數。

步驟三：為進行最佳化作業，先將各訂單拆解成多組單一區間的訂單。

步驟四：以座位利用率與旅客換座位次數之權重進行最佳化作業。

步驟五：模式會先將所有被拆解的訂單進行座位利用率最佳化作業，接著再依據座位利用率及旅客換座位之權重整合同屬性訂單。

步驟六：計算座位利用率及訂單接受率，挑出指標最佳者。

步驟七：輸出結果

在進行最佳化作業上，本研究先將上述之數學模式進行些許調整，由於該數學模式為多目標問題，為了解多目標問題，本研究將兩條目標式以簡單加權法加以合併。本研究共有兩個最佳化目標：座位利用率最大及旅客換座位次數最小，透過權重的設定，可表示在多目標最佳化的過程中，對於兩目標的重視程度，若座位利用率最大為主要目標者，其權重越高，最高者為 5；若以旅客換座位次數最小為主要目標者，其權重設定越低，最低者為 1，再將調整後的數學模式在 Microsoft Visual Studio 環境下編寫 C++ 語法。最後因為此數學模型為一 NP-Hard 模式，在求解上規模較大且複雜，因此本研究選擇使用現在能求解的規模較大的最佳化求解軟體 Gurobi 進行求解。

四、求解結果

本研究所建立之模式原擬透過實際訂票資料進行檢驗，確認是否能將列車的座位利用率最大之目標。然而，鐵路的座位指派問題屬於 NP-Hard 的問題，不容易在多項式時間內求得最佳解，若直接以鐵路機構資料進行驗證，會因為資料量過於龐大難以在資源與時間限制下完成求解，因此，本章透過設計一小規模的簡例以進行驗證。

4.1 鐵路靜態座位指派模式（中途不換座）之驗證

基本鐵路靜態座位指派模式屬於 NP-hard 的問題，難在多項式時間內求得最佳解，因此在處理規模大的問題較為困難。例如，本文曾嘗試以普悠瑪/太魯閣每列車 372 個座位進行測試，難於有限時間內求得模式收斂解。基此，為驗證基本座位指派模式且能夠加以清楚解釋模式求解結果之合理性，乃設計一個較小規模的簡例（案例 A）進行模式驗證及比較分析。

本簡例（案例 A）係假設一班列車有 20 個座位，座位編號從 1 號到 20 號，從 1 號站出發沿途停靠五個車站，分別為 2 號、3 號、4 號、5 號及 6 號站，而該班車接收到的訂票筆數為 13 筆，各筆訂單需求、起迄站以及每筆訂單所需之座位數，如表 2 所示。

本研究先將基本鐵路座位指派模式寫入 C++，並將簡例資料以 Gurobi 求解。由於本模式的設計，為每一筆訂單需求均能符合空位條件，才能完成指派，因此，指派結果只能得到：接受及拒絕兩個結果，故基本模式求解結果，如表 3 所示。

表 2 基本指派模式之簡例 (案例 A) 訂票資料

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
起點	1	2	3	4	5	1	1	2	1	2	1	2	1
迄點	6	6	6	6	6	2	3	3	4	4	5	5	2
座位數	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2	6

表 3 基本指派模式之簡例 (案例 A) 指派結果

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
是否接受	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
座位號碼	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2	X

由表 3 顯示，訂單編號 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 被接受，代表這些訂單內之旅客，能夠依據其起迄需求乘車。研究結果顯示，在完成指派後亦可達到列車座位的利用率最高的目標，其訂票被接受的總旅客座位數乘上搭乘車站數達到 34，而座位利用率也達到 92%，惟拒絕 1 筆訂單，訂單接受率為 92.3%，此外，旅客訂票成功比例為 85%，基本模式座位分布如圖 5 所示。

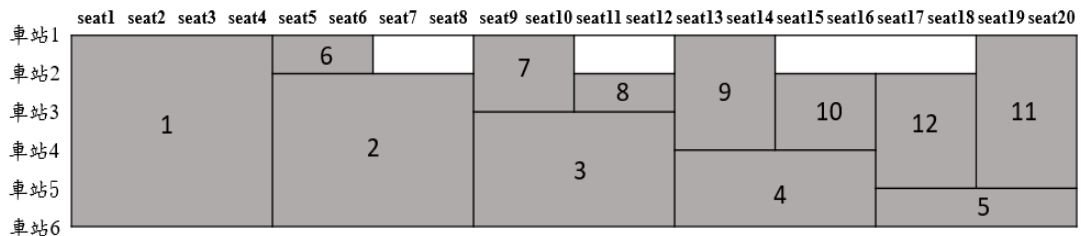


圖 5 基本模式之 (案例 A) 座位指派結果

4.2 鐵路靜態座位指派模式 (中途可換座) 之驗證

本研究建立另一個模式為起迄站之間換座位之鐵路靜態座位指派模式，此模式的設計概念係為驗證起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式是否能在列車座位利用率達到最高的狀況下，最小化旅客換座位次數的目標，故本模式同樣透過前述簡例 (如表 2) 進行模式的驗證，並與基本模式進行比較。

簡例同樣假設該班列車有 20 個座位並且行駛 6 個車站，依序為站 1 到站 6。就中途換座座位指派模式設計，將該列車於各站間拆解成小方格，再視訂單需求特性指派及合併，故簡例所設計之班車依訂單順序接收到的訂票筆數為 13 筆，每一筆訂票的座位需求數及

起迄站都不完全相同，當座位需求數等於 1 代表是單人旅客，當座位需求數大於 1 代表是多人旅客，旅客被指派的座位可能在各站間會不同，這表示該旅客在起迄站之間需要換座位，但仍可以完成座位指派事宜。本模式仍透過 C++ 建模，再將簡例透過 Gurobi 求解，得到表 5 之結果。

表 5 鐵路靜態座位指派模式（中途可換座）之指派結果

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
是否接受	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
站 1 座位	1-4	X	X	X	X	5-6	9-10	11-12	11-12	X	19-20	X	13-18
站 2 座位	1-4	5-8	X	X	X	X	9-10	11-12	13-14	15-16	19-20	17-18	X
站 3 座位	1-4	5-8	9-12	X	X	X	X	X	13-14	15-16	19-20	17-18	X
站 4 座位	1-4	5-8	9-12	13-16	X	X	X	X	X	X	19-20	17-18	X
站 5 座位	1-4	5-8	9-12	13-16	17-20	X	X	X	X	X	X	X	X

此外，為了解最大座位利用率及最少換座次數兩者間之重視程度，本研究也設定權重了解求解對結果之影響，結果如表 6 所示。其中，情境 1 較偏重「不換座次數」（權重為座位利用率：換座次數=1:5），係指不換座位次數目標的權重為座位利用率最大化目標的 5 倍。求解結果顯示，換座座位次數為 0，座位利用率為 94.17%；反之，情境 5 較偏重「座位利用率」（座位利用率：換座次數=5:1），係指座位利用率最大化目標的權重為不換座位次數目標的 5 倍。求解結果顯示，座位利用率可提升至 98.00%，但乘客需要換座次次數總計為 2 次。此一敏感度分析結果顯示，座位利用率及換座次數間確實具有權衡替代關係，決策者可依其需要來設定權重。

表 6 不同權重組合下鐵路靜態座位指派模式（中途可換座）之指派結果

情境	權重比	座位利用率	換座訂單數	換座次數	訂單接受率
1	1:5	94.17%	0	0	92.31%
2	2:4	94.17%	0	0	92.31%
3	3:3	94.17%	0	0	92.31%
4	4:2	94.17%	0	0	92.31%
5	5:1	98.00%	1	2	100.00%

備註：目標權重 1:5 為換座次數最小化目標比重最高；目標權重 5:1 為座位利用率最大化目標比重最高。

本模式指派結果，如圖 6 所示，其座位利用率為 98%，且每筆訂單均被接受，訂單接受率為 100%，旅客訂票成功率為 100%。不過，其中，共有 9 號訂單的 2 名旅客，需要換 1 次座位。此例若不提供中途換位，雖然對於 9 號訂單的 2 位旅客可在座位不被拆開的情況下接受訂購，但 13 號訂單因座位無法相鄰，使得拒絕 13 號訂單的請求，無法獲得該訂單票價收入外，亦可能獲得 6 位乘客負面評價；而在提供中途換座的作法後，在 9 號訂單旅客同意下，可確保行程中 2 名旅客座位均相鄰，亦可接受 6 位旅客均相鄰的 13 號訂單，增加營收、座位利用率及旅客滿意度，因此，營運機構僅需考量 9 號訂單的補償辦法，於 13 號訂單的利潤與補償金額間進行取捨。

圖 6 鐵路靜態指派模式（中途可換座）之指派分布結果

在以基本鐵路靜態座位指派模式(中途不換座)的模式指派下，座位利用率僅能達到 98.18%，被接受的訂單只有 20 筆，訂單接受率為 80%。而以鐵路靜態指派模式(中途可換座)進行座位指派，座位利用率可以達 99.09%，被接受的訂單有 21 筆，訂單接受率為 84%，其中 7 號訂單需進行一次座位更換。結果如圖 7。

檢視本研究所採用之兩項簡例，案例 A 採用 6 個車站 20 座位之求解時間為 50 秒，另本研究曾嘗試以普悠瑪/太魯閣每列車 372 個座位進行測試，結果難在有限時間內求得模式收斂解，因此改增列另一簡例 (案例 B) 進行分析，案例 B 規模為 8 站、20 站及 50 筆訂單，其求解時間大幅增加至約 2400 秒，故另以此能求解的最大規模案例進行分析，並就其訂單接受率、座位利用率進行模擬，比較座位利用率及不換座位間不同權考量下之分析結果。

表 7 列車有 30 個座位，行駛 12 個車站簡例 (案例 B) 之 25 筆訂單之資訊

訂單編號	起站-迄站	座位數	訂單編號	起站-迄站	座位數
1	1-4	4	14	2-4	2
2	4-12	3	15	1-7	3
3	7-12	2	16	9-12	1
4	5-12	4	17	1-3	2
5	1-12	4	18	7-12	2
6	11-12	2	19	1-4	3
7	5-9	1	20	5-12	2
8	1-12	4	21	1-3	1
9	9-12	2	22	1-8	2
10	3-12	3	23	1-5	2
11	1-3	4	24	1-12	2
12	4-7	1	25	5-12	1
13	1-5	2			

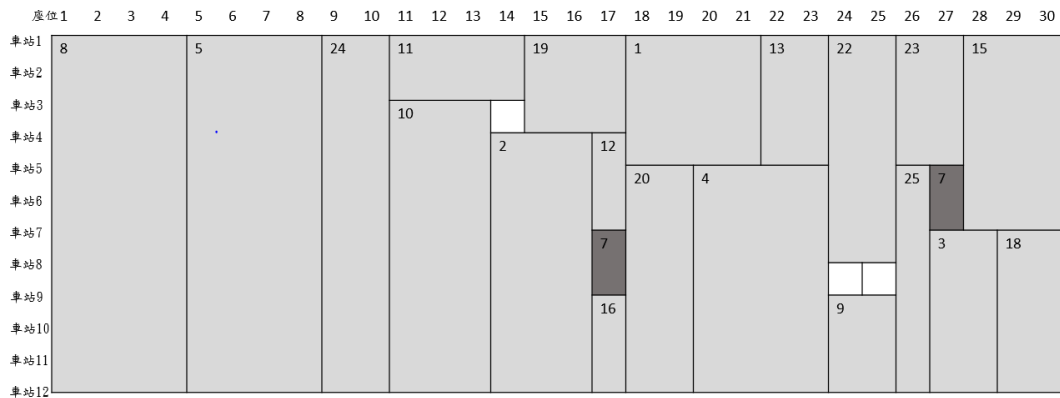


圖 7 25 筆訂單 (案例 B) 之鐵路靜態指派 (中途可換座) 之分布結果

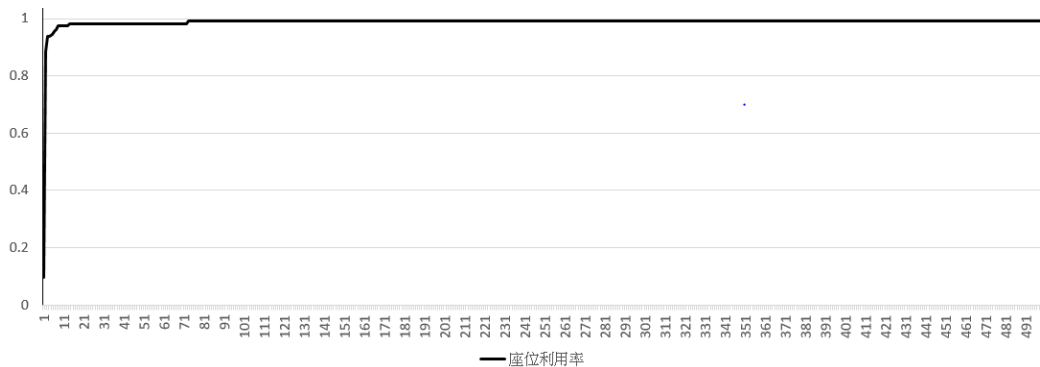


圖 8 Gurobi 求解之最佳解的變化曲線

4.3 討論

中途可換座位之鐵路靜態模式之原理，是因短搭乘區間（三個車站區間）進行座位組合相較於長搭乘區間更具彈性，也因而使座位利用率能有機會提升，考量實務執行座位配置時，會依據各起迄對歷史資料彙整之佔比進行配置，即配置作業各起迄訂單非固定筆數，配置過程則會拒絕無法排入之訂單，故本研究選定討論簡例時，在確定停靠站及座位數量外，則隨機產生訂單進行案例分析，以符合實際座位配置作業並可延伸作為更大規模應用。

本研究如以表 8 為簡例（案例 B），假設該班列車有 20 個座位並且行駛 8 個車站，隨機產生 50 組訂單。以不可換座位之鐵路靜態座位指派模式進行座位指派，得到結果如圖 9 所示。由圖知，被接收的訂單大多數皆為短搭乘區間之訂單，而長區間之訂單僅有一筆被接受。由此可發現，若接受的訂單其搭乘區間較短，在進行座位指派時較容易使座位利用率提升。

此外，透過設計之簡例（案例 B）進行兩模式之座位指派之結果，可以發現中途不可換座及可換座之鐵路靜態座位指派模式有不同結果，比較如圖 10 所示。由圖知，中途不可換座之座位指派模式要求空位提供必須符合訂單需求，才能完成指派。因此，簡例（案例 A）中的 13 號訂單共有 6 位旅客無法完成指派，也使得模式整體的座位利用率為 92%、訂單接受率為 92.3%，旅客訂購成功率為 85%；然而，起迄站之間換座位之靜態座位指派模式係拆解成各站間座位，使得 13 號訂單的 6 位旅客亦可完成指派作業，但其中 9 號訂單的 2 位旅客需要更換座位。因此，模式的座位利用率為 98%，而訂單成功率及旅客訂購成功率為 100%，此三項指標均獲得提升。

此項建立模式之驗證結果，可以發現在本研究所設計的簡例（案例 A）中，旅客在中途換座位的設計下，能夠提升座位利用率，並且同時提升訂單接受及旅客訂票成功率，對於鐵路營運機構的營運及營收均有正面效益，但也因為本模式需要旅客能夠接受在中間停靠站更換座位，造成旅客旅途上的不便。因此，可將旅客換座位之動作轉換成營運者的懲罰成本，並綜合考量旅客與營運者的願付成本及獲得效益，應可投入更多資源進行實例驗證，並從中找出旅客換座位與營運者配位間之關係模式，是值得未來再深入探討或更進行實例應用之研究課題。

本研究所提出之概念與做法，能夠對於座位管理或對於訂價策略具實務上意義。我國城際軌道系統以臺鐵及台灣高鐵為主，而臺鐵受限於國營事業體制限制，僅能尋求高效率的座位管理做法，然目前臺鐵靜態配座位未考量中途換座之情境，但就本研究所提出之中途換座方式，除可提升客座利用率亦可提高訂單接受率，一方面可提升臺鐵營收外，可增加第一次訂購成功的訂單數，除可減緩第一時間訂票系統網路流量負擔外，亦可提升旅客服務滿意度；對於台灣高鐵而言，因具價格訂定彈性，可在本研究架構下於靜態配座時納入中途換座之作法，配合訂價策略讓中、長途旅客在願意中途換座的前提下，提早確認搭乘班次，以增加自由座座位數，供時間彈性低的旅客，於當日使用搭乘，進而提升客座利用率。

表 8 隨機產生 50 組之訂票資料

訂單編號	起站	迄站	座位數	是否接受	訂單編號	起站	迄站	座位數	是否接受
1	2	4	2	O	26	2	8	2	X
2	3	6	2	X	27	6	8	1	O
3	5	8	1	X	28	1	1	1	O
4	1	3	1	O	29	4	7	1	O
5	3	5	1	O	30	4	6	1	O
6	4	8	3	X	31	1	6	3	X
7	5	7	2	O	32	1	3	1	O
8	6	8	3	O	33	5	7	1	O
9	7	8	3	O	34	2	5	1	X
10	1	3	2	O	35	3	6	1	O
11	3	8	2	X	36	4	6	1	O
12	4	6	1	O	37	6	8	2	O
13	5	6	2	O	38	2	4	2	O
14	1	2	3	O	39	5	8	2	O
15	2	7	2	X	40	3	8	3	X
16	1	2	3	O	41	7	8	3	O
17	1	8	3	X	42	2	4	2	O
18	1	1	1	O	43	2	4	1	O
19	2	5	2	O	44	2	5	4	O
20	7	8	3	O	45	1	4	2	O
21	1	2	3	O	46	2	7	1	O
22	3	6	1	O	47	3	7	3	O
23	4	6	3	O	48	5	7	1	O
24	2	5	1	X	49	3	5	1	O
25	1	2	3	O	50	4	6	2	O

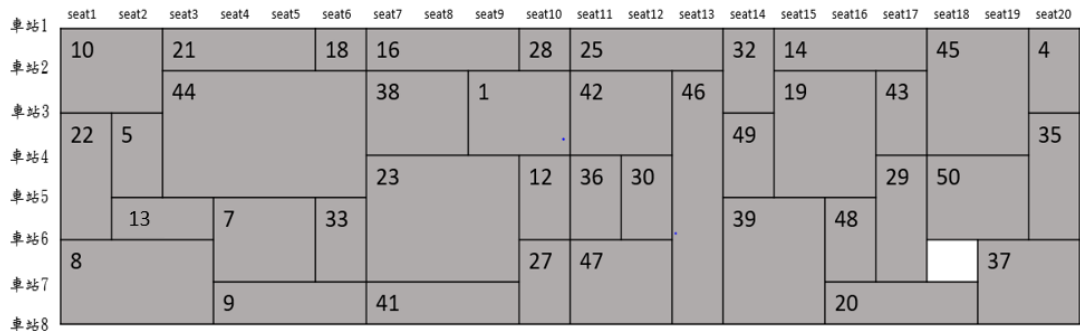
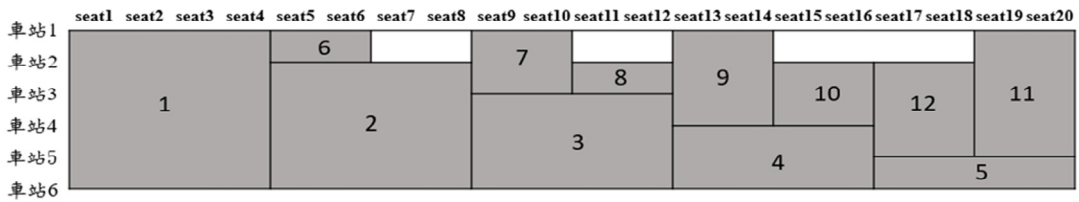
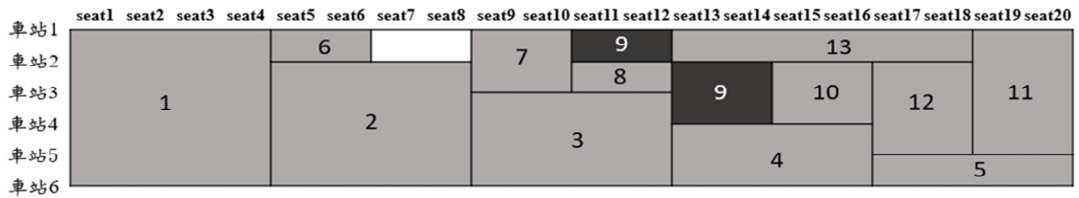


圖 9 對隨機 50 組訂票進行鐵路靜態指派 (中途不可換座) 之分布結果



(a)基本靜態座位指派模式



(b)起迄站之間換座位靜態座位指派模式

圖 10 模式指派結果(案例 A)之比較

五、結論與建議

為解決鐵路列車短區間零星座位未被利用情形，本研究建立鐵路座位指派模式加以探討，然而，透過過去文獻彙析結果，鐵路靜態座位指派模式與裝箱問題相似，其訂單可視為不同長寬的矩形、車廂及列車空間為大箱子 (bin)，可透過求解二維裝箱問題方式進行本課題探討。Clausen 等人^[1]透過裝箱問題進行鐵路座位指派，處理各訂單接受與否及各區間座位配置之可行性，且透過精確演算法，利用 CPLEX 套裝軟體求解，在最小化使用列車數量下求解此最佳化問題。王泓達^[3]探討台灣高鐵對於團體旅客訂位的座位指派問題，同樣採用二維裝箱的策略，透過規則式系統方法，分兩階段進行座位配置，並且已指派成本最小化之目標，將旅客指派到適當的車廂中，並兼顧旅客滿意度。將鐵路座位指派問題轉以裝箱問題求解文獻有限，上述文獻均對本研究課題有十足貢獻，鑒於實務上問題，多數乘客以需求區間全程有座及 2 人以上座位相鄰為基本優先考量。因此，本研究就單一列車所有停靠站所組成的停靠站對，在座位利用率最高的目標下，進行座位指派作業，以探討在中途換座與不換座的情形下之座位利用率變化情形。

基於，本研究透過裝箱問題之概念做為基礎，建立 2 個靜態鐵路座位指派模式：其一為基本靜態鐵路座位指派模式，另一為起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式。前者為目前所採用之座位指派模式，也就是系統中現存空位，須符合旅客訂單內之起迄點及座位數，才能完成指派，否則拒絕該筆訂單，為本研究所採用之對照組模式；後者為本研究所設計之座位指派模式，將旅客的搭乘起迄區間拆成由多個兩個相鄰車站區間的組合，即單一格位，這使旅客在每一個車站都會被重新指派座位。由此種指派方式能最大化列車中的

座位利用率，但也會使得旅客在旅途中換座位的情形出現，為避免旅客在旅途中換座位次數過於頻繁，因此在該模式也加入旅客的換座位次數最小化之目標式，為本研究之實驗組模式。

兩模式均透過數學規劃直接求得收斂解，並透過本研究設計的簡例進行驗證。驗證結果，基本鐵路靜態座位指派模式整體利用率為 92%、訂單接受率為 92.3%，旅客訂購成功率為 85%；起迄站之間換座位之靜態座位指派模式座位利用率為 98%，訂單成功率及旅客訂購成功率各為 100%，此三項指標均獲得提升。但是，座位指派的結果，其中 1 筆訂票的 2 位旅客需要在起迄站之間換 1 次座位。

本研究建立鐵路靜態座位指派模式提升列車座位的利用率，並且同時以允許換位的方式，提升訂單成功率及旅客訂購成功率。然而在本研究仍具部份資源及時間限制。當問題規模大時，仍無法於有限時間內求得收斂解，顯示模式及求解演算法仍可進一步優化之必要。其次，對於結果於後續應用部份，仍可持續進行探討，故本研究提出後續研究建議如下：

1. 本問題為二維裝箱之整數規劃問題，屬 NP-Hard，問題規模大時，難於有限時間內求得最佳解，故本文未能以臺鐵實際列車之座位數作為應用實例。建議後續研究可以本文為基礎，進一步研提有效率之啟發式求解演算法，方能將本模式進行實際應用。
2. 本研究在進行座位指派時，並沒有考慮到列車車廂以及車廂內走道所造成的座位的阻隔，僅以座位號碼連續及視為座位相鄰，這在單人旅客上影響並不大，然而鐵路旅客中有很大部分的團體旅客，團體旅客較注重座位同團旅客座位鄰近，因此，未來研究可以將這部分的因素考慮到鐵路座位指派問題中。
3. 本研究僅考慮旅客在起迄站之間換座位有助於列車座位利用率的提升，然而若讓團體旅客原本相鄰的座位被拆開成不相鄰的，也有可能有助於提升列車的座位利用率，本研究認為這是未來能夠考慮提升列車座位利用率的另一個鐵路座位指派模式。
4. 對於旅客必須更換座位之作法，後續可將旅客換座位之行為轉換成營運者的懲罰成本，並綜合考量旅客與營運者的願付成本及獲得效益，並投入更多資源進行實例驗證，並從中找出旅客換座位與營運者配位之間之關係模式進行討論，以提升模式的可行性。

參考文獻

1. Clausen, T., Hjorth, A. N., Nielsen, M., & Pisinger, D. "The Off-line Group Seat Reservation Problem", *European Journal of Operational Research*, Vol.207, No.3, 2010, pp.1244-1253.
2. Boyar, J., Krarup, S., & Nielsen, M. N. "Seat Reservation Allowing Seat Changes", *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol.50, No.1, 2001, pp.24-38.
3. 王泓達，「台灣高鐵團體旅客車廂與座位配置之研究」，成功大學交通管理科學研究所碩士論文，民國 102 年。

4. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. "Recent Advances on Two-dimensional Bin Packing Problems", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 123, No. 1, 2002, pp.379-396.
5. Martello, S., & Vigo, D. "Exact Solution of the Two-Dimensional Finite Bin Packing Problem", *Management Science*, Vol. 44, No. 3, 1998, pp.388-399.
6. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. "Approximation Algorithms for the Oriented Two-Dimensional Bin Packing Problem", *European Journal of Operational Research*, Vol.112, No.1, 1999, pp.158-166.
7. Parreño, F., Alvarez-Valdes, R., Oliveira, J. F., & Tamarit, J. M. "A Hybrid GRASP/VND Algorithm for Two-and Three-Dimensional Bin Packing", *Annals of Operations Research*, Vol.179, No.1, 2010, pp.203-220.
8. Ana, M., & Andreas, B. "A Two-stage Packing Problem Procedure", *International Transactions in Operational Research*, Vol.24, No.1-2, 2017, pp.43-58.