

國立交通大學
運輸與物流管理學系

碩士論文

座位分散配置與起迄座位更換最小化下之鐵路座位
指派模式

Railway Seat Assignment Modeling Towards Minimum Seat
Separation and Seat Change



研究生：李東哲
指導教授：邱裕鈞

中華民國一〇八年七月

座位分散配置與起迄座位更換最小化下之鐵路座位指派模式
Railway Seat Assignment Modeling Towards Minimum Seat Separation
and Seat Change

研 究 生：李東哲

Student：Tung-Che Li

指導教授：邱裕鈞

Advisor：Yu-Chiun Chiou



July 2019

Taipei, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇八年七月

座位分散配置與起迄座位更換最小化下之鐵路 座位指派模式

研究生:李東哲

指導教授:邱裕鈞 博士

摘要

在運輸業的訂票系統中座位置派及座位配置是非常重要的，座位指派不當會導致運具的裝載率及票箱收入的減少。特別是在多區間的鐵路運輸系統中，座位指派顯得格外重要。適當的將團體旅客的座位進行拆散及讓旅客在途中換座，能導致列車的座位利用率提升。即使讓旅客在旅途中換作位會提升座位利用率，若沒有適當的模式將導致因為換座位造成的不便。因此，本研究基於上述概念，建立一個靜態鐵路座位指派模式以及一個動態鐵路座位指派模式，以同時最大化列車的座位利用率及最小化旅客換座位的次數。

過去許多文獻建立了靜態座位指派模式及動態座位指派模式，其中部分文獻採用過去訂票歷史資料並且以裝箱問題為基礎建立靜態鐵路座位指派模式。基於上述概念，本研究以多目標數學規劃建立新的靜態鐵路座位指派模式，此模式首先讓旅客在每站都換座位，以將長區間的訂票轉換為短區間的訂票，接著再將各旅客在各區間的座位進行互換，以減少旅客換座位的次數，並且同時最大化列車的座位利用率。

在動態鐵路座位指派模式部分，本研究建立模糊邏輯控制模式來處理實際及時訂票給位的問題，此模式以列車當前的座位利用率及訂票旅客的搭乘區間長度控制旅客是否需要在途中換座。接著，分別建立以主觀設定模糊邏輯規則的模式以及以基因演算法優化模糊邏輯規則的模式，並且進行比較。

在一個有 6 個車站及 6 個座位的簡例當中，可以看出以起迄站間換作位的靜態鐵路座位指派模式較不換座位的靜態鐵路座位指派模式提升 6.7% 的座位利用率，且僅需要一位旅客換座位。在另一個有 8 個車站及 10 個座位的簡例當中，可以得到動態的以主觀設定模糊邏輯規則的模式以及以基因演算法優化模糊邏輯規則的模式皆可以最大化座位利用率，但以主觀設定模糊邏輯規則的模式的換座位次數較多，有 5 筆訂位旅客換座位，而以基因演算法優化模糊邏輯規則的模

式僅有 3 筆訂定位旅客換座位。接著，本研究以普悠瑪 218 次，行駛樹林到花蓮的列車進行實例驗證。結果得到本研究提出的兩個鐵路動態座位指派模式的指派結果與過去台鐵的座位指派結果相比皆提升 0.1% 座位利用率。但是，以主觀設定模糊邏輯規則的模式產生過多筆訂票的旅客換座位(共 79 筆)；然而，以基因演算法優化模糊邏輯規則的模式僅總共產生 4 筆訂票旅客換座位，因此有較高的可能被應用。

關鍵字：鐵路運輸、座位指派、換座位、裝箱問題、模糊邏輯控制、基因演算法



Railway Seat Assignment Modeling Towards Minimum Seat Separation and Seat Change

Student: Tung-Che Li

Advisor: Dr. Yu-Chiun Chiou

Institute of Traffic and Transportation
National Chiao Tung University

Abstract

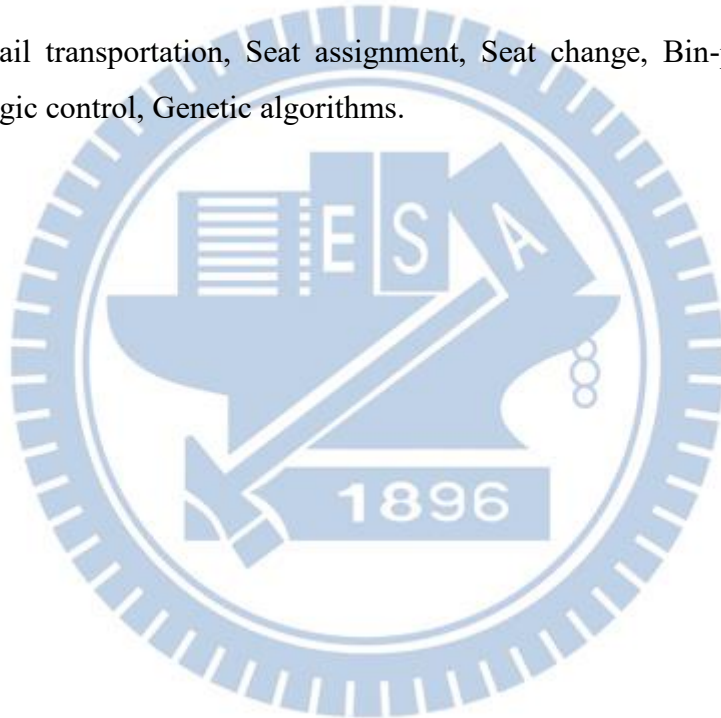
Seat allocation and assignment is essential for reserved seat transportation systems. Poor seat allocation and assignment would reduce load factor and seat sale revenue. Especially, for the multi-stop train systems, proper ticket splits for group ticket bookings or seat changes during trips, may help to increase load factor. However, without a proper model, arbitrary seat change and seat split cause passengers inconvenience, but fails to increase load factor. Based on this, this study aims to develop a static seat allocation model and a dynamic seat change control model to simultaneously maximize the load factor and minimize the number of seat changes.

Numerous studies regarding static seat allocation and dynamic seat control (assignment) have been developed. Some of them were developed based on historical seat bookings data and adopted the bin-packing algorithm to modeling static seat allocation. Following the same vein, this study proposes a novel bi-objective static seat allocation model towards the maximization of load factor and the minimization of number of seat changes by firstly assuming all passengers have to change seats at every train stations which breaks long length booking seat into a series of the smallest length seats (i.e., the standardized bin). Afterwards, the model attempts to switch seats among passengers so as to minimize the number of seat changes and maximize the load factor simultaneously.

As to the dynamic seat control model, this study develops a fuzzy logic control model to real-time determine the incoming booking ticket whether has to be seat changed or not depending upon the current load factor and length of the booking ticket. A subjectively determined combination of logic rules (SFLC) and a genetic algorithms (GFLC) optimized combination of logic rules are developed and compared.

A simplified case study with 6 train stations and 6 seats shows that the proposed static can increase the load factor by 6.7% at the expense of only one seat change comparing to the model without seat change allowed. Another simplified case study with 8 train stations and 10 seats shows and the proposed dynamic FLC and GFLC models can reach the same load factor, but have slightly higher numbers of seat changes, five seat changes and three seat changes, respectively. A field case study on the Puyuma train #218 from Shulin to Hualien shows that the both proposed dynamic seat control models can increase load factor comparing to the historical one by 0.1% and 0.1%, respectively, but the FLC model tends to generate too many seat changes (a total of 79); meanwhile, the GFLC model has only 4 seat changes, suggesting its high applicability.

Keywords: Rail transportation, Seat assignment, Seat change, Bin-packing, Fuzzy logic control, Genetic algorithms.



誌謝

時光飛逝，回首在研究所的兩年裡充滿著歡笑及汗水，感受到自己不僅在知識方面收穫滿滿，也獲得滿滿的回憶，對於這兩年的求學過程充滿著感激。

本論文得以順利完成，承蒙諸位師友的協助與鼓勵。首先就是在論文的進行過程中，最辛苦的指導教授 邱裕鈞老師讓我在學術知識以及個人發展都獲得許多充實與成長，若是沒有老師對論文苦心的指導、在觀念上的充實、分析上的教導以及精神上的鼓勵，將不會有這一篇論文的產生。此外在待人處事及人生的哲理上，老師也透過自己的言行來傳達，讓我受益良多，在此向老師致上最深的敬意。論文口試期間承蒙口試委員李宇欣老師與許書耕組長百忙之中撥空審閱此論文，並於口試時提供許多寶貴的意見，使得本論文得以更加嚴謹及完整，在此致上最深的謝意。

感謝北交所上所有的師長，不僅在課堂中傳授專業且豐富的學術知識，在課堂以外的時間也不吝幫我們解惑以及給予我們關心，也感謝柳姐與何姐，對於研究所的大小事務總是盡力給予我們協助以及關心，讓我們能夠無後顧之憂的學習，另外也感謝何姐讓我有機會在在職專班擔任助教，讓我有機會從中學習到學術以外的知識。在研究所的兩年間，要特別感謝 詮勳學長，從課程的問題、鐵路相關問題及程式方面等大小事總是熱心地給予協助及關心，學長的待人處事態度也對我影響甚多。此外，感謝大學好友 李珏亨，協助我論文中程式方面的問題，並且常常犧牲時間與我討論到清晨。另外還要感謝在職專班的學長姊 文正、復華、小隆、君豪、玄凱、家維及家寧，不僅教導我待人處事之道，也給予我許多人生上的協助及關心。最後，感謝研究室夥伴 以恆、佑星、竹涵、衣芸，在這些日子的互相激勵與幫助，也感謝在學期間所有好友，不管是在課堂中的合作報告或是課堂外的活動又或是彼此之間的閒話家常及互相吐苦水，皆豐富了我的研究所生活。

此外，要感謝我親愛的家人，因為有你們細心的栽培與鼓勵，讓我無後顧之憂的完成學業，朝目標挑戰。

最後，謹以此篇論文獻給我的師長、家人、朋友及所有關心我的人。

李東哲 謹誌於

國立交通大學運輸與物流管理研究所

中華民國一〇八年七月

目錄

摘要	i
目錄	vi
圖目錄	vii
表目錄	ix
第一章 緒論	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的.....	3
1.3 研究內容與流程.....	3
第二章 文獻回顧	6
2.1 座位庫存管理及座位指派問題.....	6
2.2 裝箱問題.....	11
第三章 資料分析	18
3.1 每日個人及團體旅客之分布.....	18
3.2 平日與假日各區間之旅客數分布.....	20
第四章 模式建立	22
4.1 基本鐵路靜態座位指派.....	23
4.1.1 基本鐵路靜態座位指派之數學模式.....	23
4.1.2 基本鐵路靜態座位指派之求解方式.....	25
4.2 起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派.....	26
4.2.1 起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派數學模式.....	26
4.2.2 起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派模式之求解方式.....	29
4.3 動態鐵路座位指派模式.....	30
第五章 簡例驗證	38
5.1 基本鐵路靜態座位指派模式之驗證.....	38
5.2 起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式之驗證.....	40
5.3 動態鐵路座位指派模式之檢測.....	42
第六章 實例應用	49
6.1 動態鐵路座位指派模式之實例情境比較.....	49
6.2 動態鐵路座位指派模式之實例驗證.....	63
第七章 結論與建議	72
7.1 結論.....	72
7.2 建議.....	73
參考文獻	75

圖目錄

圖 1 - 1 研究流程圖.....	5
圖 2 - 1 訂位區間的分類及重組.....	7
圖 2 - 2 binary tree 中一訂位需求的產生而增加密度的節點(車站).....	8
圖 2 - 3 單一排座位之配置.....	9
圖 2 - 4 矩形之水平及垂直堆疊方式.....	11
圖 2 - 5 分層切割方式.....	13
圖 3 - 1 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票數量.....	19
圖 3 - 2 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票平均搭乘公里數.....	20
圖 3 - 3 2016 年 3 月第一週星期一各個起迄站的訂票量.....	21
圖 3 - 4 2016 年 3 月第一週星期日各個起迄站的訂票量.....	21
圖 4 - 1 起迄站之間可換座位鐵路座位指派之靜態數學模式知識意圖.....	27
圖 4 - 2 隨機決定換座位之車站.....	32
圖 4 - 3 座位利用率的隸屬函數.....	34
圖 4 - 4 訂票旅客搭乘區間的隸屬函數.....	35
圖 4 - 5 是否需要換座位的隸屬函數.....	35
圖 4 - 6 旅客訂票及座位指派流程.....	37
圖 5 - 1 基本模式簡例之指派分布.....	39
圖 5 - 2 起迄站間換座位之靜態鐵路指派模式之指派分布.....	41
圖 5 - 3 動態鐵路座位指派模式情境一之指派分布.....	43
圖 5 - 4 動態鐵路座位指派模式情境二之指派分布.....	43
圖 5 - 5 動態鐵路座位指派模式情境三之指派分布.....	44
圖 5 - 6 動態鐵路座位指派模式情境四之指派分布.....	45
圖 5 - 7 動態鐵路座位指派模式情境五之指派分布.....	45
圖 5 - 8 動態鐵路座位指派模式情境六之指派分布.....	46
圖 5 - 9 動態鐵路座位指派模式情境七之指派分布.....	46
圖 5 - 10 動態鐵路座位指派模式情境八之指派分布.....	47
圖 6 - 1 情境一座位指派結果.....	51
圖 6 - 2 情境二之座位指派結果.....	52
圖 6 - 3 情境三之座位指派結果.....	56
圖 6 - 4 情境三旅客換座位之情況.....	56
圖 6 - 5 情境四座位指派結果.....	58
圖 6 - 6 情境五之座位指派結果.....	60
圖 6 - 7 情境六座位指派結果.....	62
圖 6 - 8 情境六換座位情況.....	63
圖 6 - 9 2016 年 3 月 16 日以類似台鐵現行指派模式之指派結果.....	65

圖 6 - 10 2016 年 3 月 16 日以類似台鐵現行指派模式之指派結果之換座位情況.....	65
圖 6 - 11 2016 年 3 月 16 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之指派結果.....	66
圖 6 - 12 2016 年 3 月 16 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之換座位情況...	66
圖 6 - 13 2016 年 3 月 13 日以類似台鐵現行指派模式之指派結果.....	68
圖 6 - 14 2016 年 3 月 16 日以類似台鐵現行指派模式之指派結果之換座位情況.....	68
圖 6 - 15 2016 年 3 月 13 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之指派結果.....	69
圖 6 - 16 2016 年 3 月 13 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之換座位情況...	71



表目錄

表 2-1 座位庫存管理及座位指派問題文獻彙整	10
表 2-2 切割及裝箱問題文獻彙整	16
表 3-1 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票數量	18
表 3-2 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票平均搭乘距離	19
表 4-1 變數說明	22
表 5-1 基本指派模式之簡例訂票資料	38
表 5-2 基本指派模式之簡例指派結果	38
表 5-3 起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式之簡例訂票資料	40
表 5-4 起迄站間換座位之靜態鐵路指派模式之簡例指派結果	40
表 5-5 動態鐵路座位指派模式之簡例訂票資料	42
表 5-6 簡例之主觀制定之模糊邏輯規則	46
表 5-7 簡例之以基因演算法優化表 5-7 之模糊邏輯規則	47
表 6-1 情境二主觀制定的模糊邏輯控制規則	51
表 6-2 情境二旅客換座位情況	52
表 6-3 情境三透過基因演算法優化的模糊邏輯控制規則	54
表 6-4 情境五主觀制定的模糊邏輯控制規則	58
表 6-5 情境五旅客換作位情況	60
表 6-6 情境六透過基因演算法優化的模糊邏輯控制規則	61

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

座位指派涵蓋的領域非常廣泛，不管是旅遊產業、娛樂產業或是運輸產業皆隨處可見，最常見的相關問題即旅館的房間配置、機艙內的旅客座位指派、校車座位指派以及鐵路的座位指派，其中飛機的旅客座位指派為運輸產業中最常見的問題，許多研究都致力於解決飛機的旅客座位指派問題，然而在鐵路的旅客座位指派上卻鮮少有人注入心力。鐵路的旅客座位指派問題雖然相較於飛機的旅客座位指派問題更為複雜，但是在某些層面上卻也追求相同的目標，其相似處包含考慮旅客是否跟同伴坐在附近、旅客乘坐在走道以及靠窗座位的偏好或是位於機艙以及列車的前段或後段的偏好。

在僅有一個起迄點的航空產業在旅客座位指派問題上主要考旅客對座位指派的滿意度以及產生的成本，在起迄點方面所有旅客均相同，所以不需要考慮不同起點會進入運具以及離開運具的旅客，然而鐵路產業在路線不會只有一個起迄點，整條路線是由多個起迄點組成，這樣會導致旅客的座位指派與列車能容納的訂票需求有很大的影響，例如有一班列車有三個座位編號分別為 1、2、3，然後總共有三個車站依序為 A、B、C，如果第一個訂票需求訂了一張車票從車站 A 前往車站 B，訂票系統將這個旅客指派到 1 號座位，接著第二個訂票需求訂了兩張車票從 B 車站前往 C 車站，並且訂票系統將這兩位客人指派到 2 號座位及 3 號座位，在這個時候第三個訂票需求希望買一張車票從 A 車站前往 C 車站，但是訂票系統會顯示無法滿足這位旅客的訂票需求，因為並沒有一個座位可以讓這位旅客從 A 車站一直坐到 C 車站，然而如果將前面兩個訂票需求的座位指派做一些調整把第二個訂票需求的兩位旅客的座位由 2 號及 3 號座位指派到 1 號座位及 2 號座位，這個時候在車站 A 到 C 的區間中的 3 號座位就空出來了，並且可以滿足第三個訂票需求的旅客。

由於上述鐵路座位指派狀況的發生，許多乘客會將起迄點進行分段在購票，以上例子為例，第三個訂票需求希望購買一張車票從 A 車站前往 C 車站，但是因為前面兩個訂票需求造成沒有同一個座位從 A 到 C 車站的車票，所以第三個訂票需求的旅客會先購買一張由 A 到 B 車站的車票且座位為 2 號座位，然後再購買一張由 B 到 C 車站的車票座位是 1 號座位，這樣即使無法買到一張從 A 車站到 C 車站的車票也能夠從 A 車站搭乘列車前往 C 車站。此外也會有些鐵路業

者進行分段售票，先釋出短區間的車票供旅客購買，最後再釋出長區間的車票，透過這樣的方式也能減少上述因為鐵路座位指派的特性造成的潛在旅客流失狀況。

鐵路運輸中單人旅客較期望能鄰近沒有其他旅客或是不受旁邊的旅客上下車干擾，而面臨團體訂票時，鐵路業者須要考慮如何讓團體旅客的座位都位在鄰近的區域，並且以何種形式的座位指派最能讓團體旅客感覺到與同行者的相處是便利且滿意度最高，此外還必須考慮旅客的起迄點為何來決定配置的座位，此類團體訂票的問題與團體客人在旅館定一間以上的房間且希望這些房間都在相鄰的位置的問題相似；又或是倉庫問題，當存貨被預訂在何時被運送到倉庫存放並且存放多久且存貨的大小也知道，倉庫業者便需要設法將同個買家的存貨放在一起，並且管理個存貨放入的時間、存放的時間長短以及存貨的大小以讓倉庫能存放最多的東西但不會容納不下存貨。

在面臨上述總總複雜的情況下，不管是為了提升單人旅客的滿意度、團體旅客的滿意度又或是考量鐵路業者本身的營運利益，從各種角度所產生的旅客座位指派模式不斷產生，但是鐵路業者還在不斷追求更合適的鐵路座位模式以讓上述各個相關人士的利益達到平衡。

1.2 研究目的

鐵路的鐵路座位指派在過去大多是以鐵路業者的角度出發去進行座位的指派，不過也有部分的研究也將旅客的滿意度納入座位指派考慮的因素，因此本研究希望能夠權衡旅客對座位指派的滿意度以及鐵路業者的營收利益來進行鐵路座位指派：

1. 建立靜態的鐵路座位指派模式讓旅客在起迄站之間的車站進行重新指派座位的動作，以最大化列車的座位利用率。
2. 以模糊邏輯控制來建立動態旅客座位指派模式，並應用到實際的資料中進行座位管理。

1.3 研究內容與流程

本研究目的為擬定一個鐵路的旅客座位指派模式，以讓部分旅客在起迄站間更換座位，將旅客原本的起迄區間拆成多個區間的組合，來同時滿足鐵路業者追求的更高的座位利用率以及不管是單人旅客或是團體旅客的滿意度，並且以簡例及實例去驗證模式，最後提出相關的討論及建議，本研究之內容如下：

(一) 研究動機與研究範圍之界定

依據本研究背景及動機，依現行各鐵路業者的訂票系統及座位指派系統的現況，提出可以進行修正以及改善的部分，並且透過學術研究方式確立研究目的及範圍。

(二) 文獻回顧

為了達到本研究目的以及建立更嚴謹的模式，本研究之相關文獻將分為兩類，其一為座位庫存管理及座位指派相關問題，其二為裝箱問題，本研究想透過第一類的相關文獻找出過去靜態座位指派模式及動態座位指派模式的所考慮的因素的差異，以及在進行座位指派時會影響旅客滿意度的因素，本研究回顧第二類文獻探討裝箱問題以了解裝箱問題的基本模式，以便將其應用到鐵路座位指派問題。

(三) 建立靜態座位指派模式

本研究將過去之靜態鐵路座位指派模式做部分的修正以及改善，建立起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派模式，將旅客的起迄站區間拆解成多個區間的組合以利列車可以容納更多訂位需求。

(四) 簡例驗證

設計一個旅客訂票的簡例，並且利用本研究選定之方法進行驗證，以及評估其得到之結果，以結果做後續的研究分析。

(五) 建立動態座位指派模式

以模糊邏輯控制建立可在起迄點中間進行座位更換的動態座位指派模式。

(六) 動態模式實例應用

以台鐵過去歷史資料套入動態座位指派模式應用。

(七) 應用結果之討論

對於動態座位指派模式應用到台鐵資料後所得到的結果進行評估，並且與過去台鐵所進行的座位指派方式所得到的結果進行比較及討論。

(八) 結論與建議

對於研究結果進行討論，並且提出未來研究發展的建議。



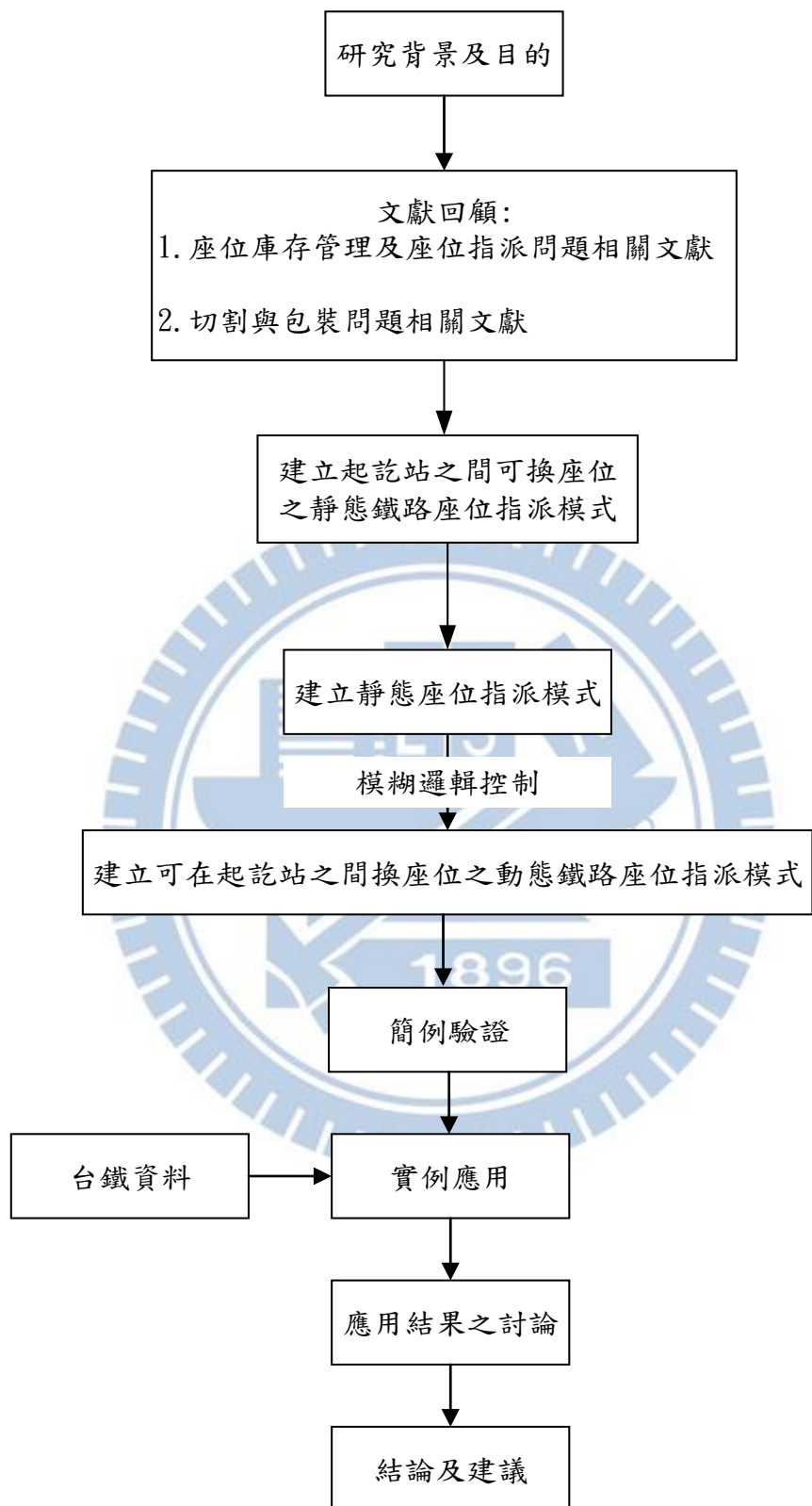


圖 1 - 1 研究流程圖

第二章 文獻回顧

本研究之文獻回顧分成兩個部分，第一個部分為探討航空或是鐵路的座位庫存管理以及座位指派問題相關之文獻，以了解航空及鐵路在管理座位的庫存及指派時需要考慮的因素，第二部分探討裝箱問題相關之文獻，了解如何將裝箱問題應用在鐵路座位指派問題以及如何求解裝箱問題。本研究文獻彙整如下：

2.1 座位庫存管理及座位指派問題

鐵路的座位指派問題與列車座位的利用率息息相關，當旅客被指派到適當的座位則能夠有效提升一班列車的座位利用率，這與鐵路業者的營收息息相關，除此之外座位的指派也關係到旅客上下車的方便性以及在車內的乘坐感受，若將同一車站上車或下車的旅客都集中在同一個車廂會造成上下車的擁擠，導致列車在靠站時間需要增加，此外如果靠窗旅客及靠走道的旅客在上下車時有交錯的產生也會對旅客在搭乘列車的舒適度有所影響，所以鐵路座位指派問題受很多子問題影響。

Wong et al. (1993)對於航空公司在飛行路網中，航班中隨機產生的訂位需求的座位配置問題提出了新的解決方案。過去在處理路網座位庫存管理都是以 full assignment 方法或是 bucket control 方法來處理，full assignment 方法是將各個座位直接分配到單個 leg(區間)或是多個區間；而 bucket control 則是將座位分配到一組飛航行程中，然而該研究將兩種方法進行結合提出了彈性座位配置方式以處理單一費率的路網座位庫存管理，將部分座位以 full assignment 方法配置其庫存，剩下的座位則以 bucket control 方式處理其庫存，並且提出規則將兩種方法進行彈性分配以達到座位庫存管理最佳化。

長野裕 et al. (1999)認為未來可以利用 IC 卡進行火車的訂位，但是在訂位的當下只告知旅客是否有位子而先不告知座位編號，在訂位期限截止後再將所有的訂位進行座位指派。該研究希望以這樣的訂位系統能夠達到三個目標，第一是希望各個座位可以達到利用率的最大化，因此不能讓各個起迄點不連續的需求都指派到同一個位子，以防止該座位剩下未被利用的區間很零碎而造成不好再指派需求使用該座位；第二個目標是讓團體訂位的旅客都盡量坐在一起，所以應該要優先指派團體訂位的座位，因為其自由度較低，單人旅客應最後指派；最後一個目標是讓旅客的上下車與旁邊旅客沒有交錯，這代表靠窗旅客在上下車的車站時靠走道的座位都是沒有乘客的。為了進行上述的指派座位模式，該研究認為要先將

各個訂位進行分類及比對起迄站後再進行組合，主要分為區間長及區間短兩類，以方便進行重組，如圖 2-1 所示，雖然這個模式該研究在內容並沒有實際的數學模式表示，但是該研究在實際執行後其結果顯示新的座位指派模式相較過去傳統的顯著提升，不管是在指派所有需求後剩下未被利用的座位、團體旅客的座位相鄰性以及旅客上下車交錯的次數上都有明顯的改善。

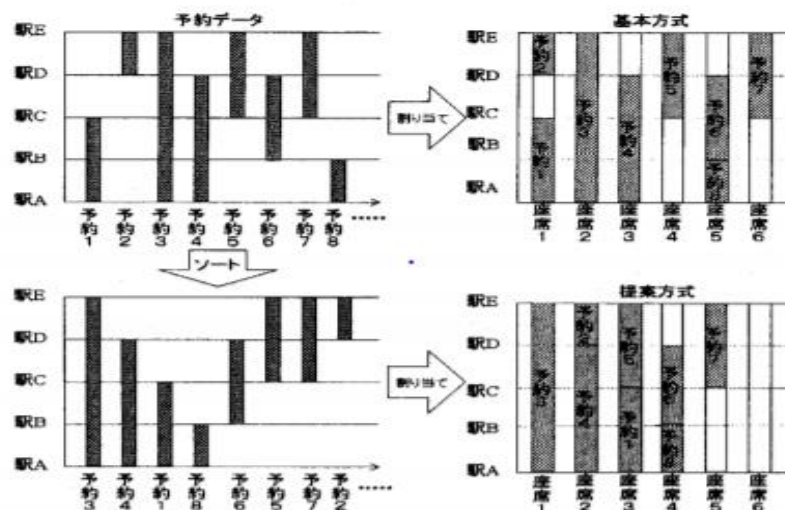


圖 1 座席割り当て方式

圖 2-1 訂位區間的分類及重組

資料來源: IC カードを用いた旅客情報サービスシステムの構想：座席確定を猶予する列車予約方式の評価

Boyar 和 Larsen(1999)在探討動態的鐵路訂位問題時將問題分為兩類，一類為所有車票價錢均為相同另一類為會隨著搭乘距離的比例變動價錢的車票，希望了解不同的鐵路票價訂定方式對於列車的容量的影響。接著分別探討公平配位演算法在 accommodating ratio 的上界以及下界在所有車票均一價及依搭乘距離比例定價兩種定價方式下的不同，其中公平配位演算法中包含了 First-fit 及 Best-fit 方法，而 accommodating ratio 是比較動態的鐵路座位指派所發放的车票量與靜態情況下發放的车票量的比率。該研究最重要的結果為在當票價均為同一價格時任何公平配位演算法的下界都至少式 $1/2 - \text{acommodating}$ 。

Boyar(2001)探討如果讓旅客在搭乘火車時在起迄站間更換座位對於整部列車的載客率的影響。該研究將這個問題分為兩類，一類為所有車票價錢均為相同以及一類為會隨著搭乘距離的比例變動價錢的車票，接著利用 competitive ratio 以及被接受的訂位序列的 competitive ratio 來分析這個問題，並且將火車行駛的整個路段分成 $s+1$ 個小路段，其中 s 代表換座位的次數，這 $s+1$ 個小路段為各個

訂位所達成的路段，路段會有重疊的部分，當有重疊的部分就重新安排位子，但是當需要換位子時仍然會經過旅客的同意。透過這種方法該研究發現在票價均相同的情況下，相較於靜態模式中所接受的訂位量的 $(s + 1)/(s + 2)$ 倍的訂位量可以被接受；而在票價依路段比例訂定時，被接受的訂位序列的 competitive ratio 的下界為 $\Omega(s/k)$ 。

Kohrt & Larsen (2004)從靜態的觀點探討動態的火車訂票問題，該研究認為未來人們的行動裝置會越來越先進且越來越方便，因此希望建立一個系統在旅客訂票的時候僅先告知其是否有座位但是不指派座位，在列車即將到站前才以行動裝置告知旅客其座位號碼，以此方式便不會因為在訂票的同時先給予座位造成未來的訂票需求明明列車內由足夠的座位卻因為需要在旅途中換座位而無法從系統中訂票。靜態的火車訂票問題是給予一個訂票需求的序列，要盡可能地接受最多的訂票需求，而該研究認為以上述方式動態的火車訂票問題就能轉換成類似靜態的火車訂票問題。在訂票需求產生時為了考慮列車是否能容納這個訂票需求，該研究利用 tree search 方法將每個訂票需求區間會放入 binary tree 中代表其起迄點的葉子(即車站)中，接著計算了各個區間的搭乘人數即密度，在 binary tree 中個個節點或是葉子的部分都會以 Δk 代表密度，當有新的訂票需求進入時，相關節點的 Δk 就會增加，如圖 2-2 所示：

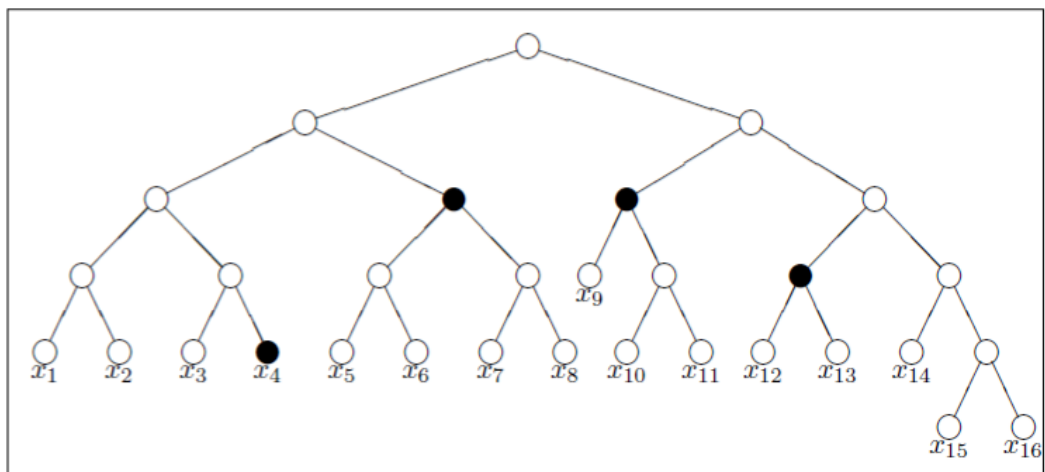


Fig. 1. An example of where Δk -values are incremented. This is done at all the filled nodes. The inserted interval is $[x_4, x_{14}]$. Notice that for any leaf x_i where $4 \leq i < 14$, the Δk -value is incremented at exactly one node from the root of the tree to x_i . For all other x_i , all nodes from the root of the tree to x_i keep their Δk -values.

圖 2-2 binary tree 中一訂位需求的產生而增加密度的節點(車站)

資料來源: On-line seat reservations via off-line seating arrangements.

而每個訂票需求區間會用不同的顏色代表，而顏色的數量等於列車內座位的數量 N ，因此如果不同的訂票需求區間之間有區間重疊會用不同的顏色表示，所以當顏色被使用完即代表這個訂票需求不能再被接受。

Clausen et al. (2010)將團體訂票的座位指派問題分為 two-dimensional knapsack 問題以及 two-dimensional bin packing 問題，假設一列車的座位是只有單一排，如圖 2 - 3，只要座位號碼連續即代表座位相鄰。首先 two-dimensional knapsack 問題是在知道訂票需求的情況下設法讓所有座位在各個區間都有人使用以達到最大效用以及最大收益，在解決 two-dimensional knapsack 問題中將各個訂票假設為矩形，縱軸為車站橫軸為訂票的座位數，使用 branch and bound 方法將各個訂票分為接受訂票及不接受訂票，接著再透過 interval graph 去檢測各個訂票被放入列車座位的相對位置及可行性，其中在 interval graph 中，各個訂票矩陣之間的放入關係不能有循環關係。而 two-dimensional bin packing 問題則是在接受了所有訂票需求後，設法最小化需要使用的列車數量。在求解 two-dimensional knapsack 問題及 two-dimensional bin packing 問題時都分別以數學規劃求得精確解以及 CPLEX 套裝軟體處理，最後該研究發現以精確演算法能求解出 CPLEX 無法求解的問題，並且求解速度也要快較穩定。

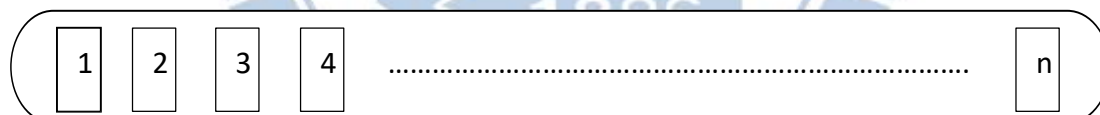


圖 2 - 3 單一排座位之配置

王泓達(2013)的論文中探討台灣高鐵對於團體旅客訂位的座位指派問題，該研究認為在分配旅客的座位時應該優先指派團體旅客，因為團體旅客會期望坐在同一個車廂且盡量指派在同一個水平的座位，而單人旅客則是希望鄰座可以沒有人或是車廂內座位看起來不要過於擁擠。為了達到上述的要求，該研究將團體旅客都優先安排在車廂的前方，而單人旅客都安排在車廂後方。在方法方面，該研究以兩個階層來進行座位指派，第一階層利用 bin packing 問題的方式將各個訂位指派到適當的車廂中，第二階層是利用 set covering 問題的方式將分配到車廂內的訂位指派到適當的座位，這個階段結合規則式系統方法(Rule Based System, RBS)來處理實務狀況及旅客滿意度，因為各個座位指派方式皆有指派成本，最後選擇指派成本最低者為最佳解。

表2-1為座位指派相關文獻資之彙整，過去文獻多探討靜態之座位指派模式，並且提出精確解的文獻並不多，大部分過去都是以First Fit以及Best Fit居多，然而Clausen et al. (2010)為第一位提出求得精確解模式的，並且將模式完整的呈現，其唯一缺點為將列車的座位排數設為一排，較不符合實際應用，然而王泓達(2013)利用Clausen et al. (2010)提出的模式再加上規則式系統方法執行座位配置，將其應用在台灣高鐵上，此外沒有將列車座位排數設定為一排，與實務更為貼近，為更完整的鐵路座位指派模式。

表 2 - 1 座位庫存管理及座位指派問題文獻彙整

作者	模式	考慮因素	分析方法
Wong et al. (1993)	動態	● 單一費率	● full assignment ● bucket control
長野裕 et al. (1999)	靜態	● 先接受訂票但不立即指派座位 ● 以旅客搭乘區間長短做分類，以此為考量進行座位指派	● 指派原則
Boyar & Larsen(1999)	動態	● 考慮票價相同及以行駛距離之比例之訂價對列車可容納的旅客量的影響	● First Fit ● Best Fit
Boyar et al. (2001)	動態	● 旅客可在起迄站間換座位 ● 每一站接重新指派座位	● First Fit
Kohrt & Larsen(2004)	靜態	● 先接受訂票但不立即指派座位	● Tree search
Clausen et al. (2010)	靜態	● 一列車的只有單列座位，只要座位號碼連續即相鄰 ● 以 graph theoretic 方法決定訂票的可行性及座位	● Knapsack ● Bin packing ● Decision tree ● Cplex
王泓達 (2013)	動態	● 考量車廂會讓列車部分連續號碼的座位產生區隔 ● 考量團體旅客即單人旅客的喜好所產生的成本	● Bin packing ● Set covering ● 規則式系統方法

2.2 裝箱問題

裝箱問題(bin packing problem)在探討如何將包裝成小箱子的貨品裝入大箱子(bin)中，在實際問題應用上常被運用在處理倉庫的貨品存放問題、鋼條和玻璃原料的切割問題以及排班問題等。裝箱問題又分為一維、二維以及多維裝箱問題，在這裡本研究主要討論二維裝箱問題。在二維裝箱問題中會擁有一組矩形 n 個，其中 $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ ，在組合中的 n 個矩形可能大小相同或是不同，所以矩形的寬度以及高度分別以 w_j 及 h_j 表示，此外還會有給定寬度及高度的平面大箱子，平面大箱子的寬度則以 W 表示而高度以 H 表示。二維裝箱問題的目的是將一組矩形 J 全部裝入大箱子中，並且希望讓被使用的大箱子數量越少越好，並且各個矩形在被裝入大箱子時不能被 90 度的旋轉，僅能以原有的角度被裝入。

Wang (1983)以一個組合式的演算法來探討如何將各個矩形以水平或是垂直得堆疊入大箱子中並使浪費的空間最小化。該研究首先會取出兩個不同的矩形分別以水平及垂直堆放，接著將堆放好的兩個矩形沿著其周圍以 guillotine cut 的方式切個出最小的大矩形，並且比較這兩種堆疊方式所切出 guillotine 矩形所浪費的空間是否在該研究設定的兩個上界之內，如果是則比較何者所浪費的空間較小而選擇該堆疊方式，如圖 2-4。

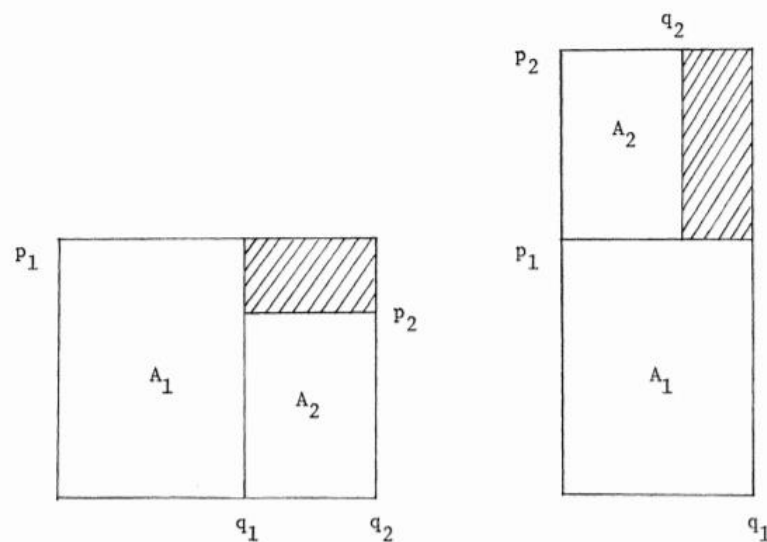


圖 2-4 矩形之水平及垂直堆疊方式

資料來源: Two Algorithms for Constrained Two-Dimensional Cutting Stock Problems

Martello & Vigo(1998)以求得精確解的模式來解決二維的裝箱問題並且對二維裝箱問題建立新的 lower bound，這個模式採用 nested branching 的構想並由

outer branch-decision tree 以及 inner branch-decision tree 組成，透過 outer branch-decision tree 在各個節點以 depth-first 尋優方法將矩形指派到適當被存放的大箱子，並且透過 lower bound 去檢視大箱子是否已經被關閉，若大箱子已經無法再裝載矩形代表關閉，當大箱子已經被關閉接著在每一個節點透過啟發式解法去找出矩形在大箱子中可行的指派位置，啟發式解法中採用了過去文獻中最有效率的兩種演算法，Finite First-Fit 方法以及 Finite Best Fit 方法，Finite First-Fit 是將所有矩形重新以寬度做排序，由寬度最寬的排列到最短的做為放入大箱子的順序；Finite Best-Fit 方法是將所有矩形重新以高度做排序，從高排到低做為放入大箱子的順序，並且拆成兩個階段，第一階段先以 best-fit algorithm 進行條狀帶裝箱問題(strip packing)，第二階段再將堆疊好的條狀帶裝入大箱子中。最後若在啟發式解法中無法找出可行解，則利用 inner branch-decision tree 檢視矩形被指派到大箱子中擺放位置是否可行。

Lodi et al. (2002)對 Bin packing problem 進行文獻回顧，在第一部分該研究回顧了過去對於靜態裝箱問題的演算法，並且將過去的裝箱問題的演算法歸納為兩大類，一類為 one phase algorithm，在這類的驗算法是直接指派矩形裝入一個有長寬限制的大箱子中；第二類為 two phase algorithm，這類方法是先將進行 strip packing，即把矩形裝入一個有寬度限制但是沒有高度限制的長條大箱子中，然後目標是讓大箱子的高度最小化，在第二階段是將上一個階段 strip packing 獲得的結果來建立一個裝箱模式將所有矩形裝入數個高度有限制的大箱子中。在上述兩類演算法中常常利用階層裝箱策略(level packing strategy)的方式進行，其中包含 Next-Fit Decreasing Height (NFDH)策略、First-Fit Decreasing Height (FFDH) 策略以及 Best-Fit Decreasing Height (BFDH) 策略來處理裝箱問題。Martello& Vigo (1998)提出了求得裝箱問題精確解之方法以 outer branch-decision tree 及 inner branch-decision tree 組成，outer branch-decision tree 階段是在各個節點上是將矩形指派到適當的大箱子，而在 inner branch-decision tree 則是列舉各種矩形可以被指派到大箱子的種類。Lodi et al. (1999) 利用 Tabu search 將矩形指派到目標箱子，並且將箱子填滿，在指派矩形到目標大箱子的同時因為有矩形已經離開要預備被裝入大箱子的矩形組合 S，所以會調整預備裝入大箱子的矩形組合，以上述方法不斷重複進行，最後該研究發現透過 tabu search 方法所得到的結果變異量較小。

Pisinger(2002)利用 Wall building approach 來解決貨物裝櫃問題，其利用 Branch and bound 選出最適合的分層寬度將貨櫃進行分層，接著再利用一次

Branch and bound 將前一個步驟的分層切成適當寬度的條狀帶，藉由上述步驟將貨櫃裝載問題(container loading problem)簡化成條狀帶裝箱問題(strip packing problem)，如圖 2-5，當處理帶狀裝箱問題時只需要用對放的高度以及寬度來衡量其容納程度。三維的裝箱問題與單列車的鐵路座位指派的性質有些不同，但是若是考慮到不同列車之間的座位指派問題則與三維裝箱問題相似。

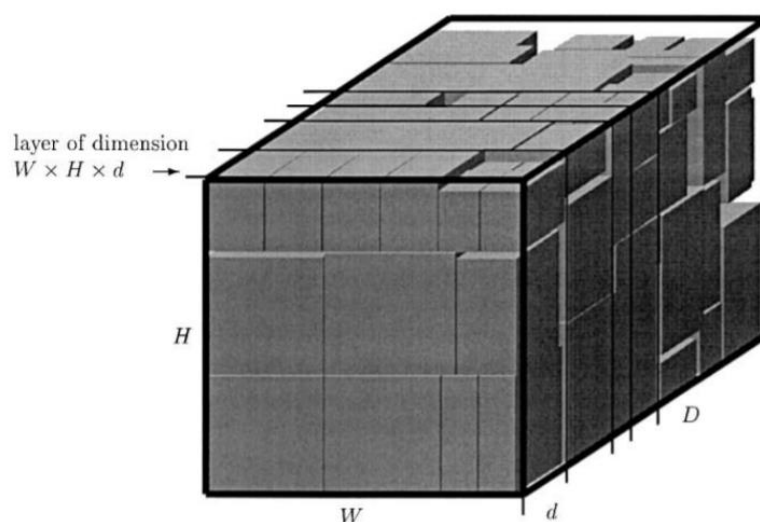


圖 2-5 分層切割方式

資料來源: Heuristics for the container loading problem

Lodi et al. (2004)為了解決裝箱問題建立了一個階層裝箱(level packing)求解模式。階層裝箱主要分為三類，分別為 Next-Fit Decreasing Height (NFDH)策略、First-Fit Decreasing Height (FFDH) 策略以及 Best-Fit Decreasing Height (BFDH) 策略，這三種策略都需要先將被裝箱的矩形以高度分類排序，從高排序到低再依序放入大箱子。Next-Fit Decreasing Height (NFDH)策略是將最高的矩形放入大箱子的左下方，接著下一個矩形如果能夠擺在前一個矩形旁邊則放在同一個矩形旁邊，否則必須將矩形放在前一個矩形的上方，並且同時以兩塊矩形的水平交線做為分層線打開第二階層，接著不斷重複上述動作；First-Fit Decreasing Height (FFDH) 策略與 Next-Fit Decreasing Height (NFDH)策略相似，但是如果要放入的矩形可以被位在於下方的階層容納則優先放入下方的階層；Best-Fit Decreasing Height (BFDH) 策略同樣將第一個矩形放入大箱子的最左下方開起第一個階層，接著放入的矩形要選擇跟各階層上界高度最接近的階層放入，若沒有可以放入的階層則在放到目前最高階層的矩形上方並且同時開啟新的階層。除了上述三種階層裝箱策略外還有一類稱作 Floor-Ceiling(FC)策略，其方法是 Best-Fit Decreasing Height (BFDH) 策略的延伸，將矩形擺放在各階層的頂部，由右側向左側堆放，

同樣追求各個矩形擺放後該階層所剩下的垂直高度最低。而在不分層裝箱的部分，過去都以 Bottom-Left (BL)方法最常見，這個方法是將要被指派的一組矩形都依序往大箱子的左下方擺放，但是如過這個方法未將矩形進行分類會造成裝箱結果非常不理想，但是如果有將矩形以寬度由長到短分類並排序在進行 Bottom-Left (BL)方法的裝箱指派，其上下界會較為收斂。

Fekete 和 Schepers (2004)在探討正交多維裝箱問題時認為其實際的應用層面非常廣，從裝箱、切割到排班問題都適用。過去的文獻在正交裝箱問題上所提出的模式都無法避免在多維正交裝箱問題上會產生的結構問題，因此本篇研究該利用 graph-theoretical 的性質來產生新的演算方式，在這個新的驗算法中該研究利用 interval graph 的性質來檢視正交裝箱問題的可行性，並且並非一次僅能檢視一種裝箱方式的可行性而是可以同時檢視多種類的裝箱方式的可行性，此外也能知道一組物品在可以被裝箱入容器的情況下能夠產生幾種裝箱情況。其中該研究對裝箱問題提出幾個重要的限制，第一是在各個座標軸上被裝箱入之物品不能超過容器的長寬，否則無法將物品裝箱進容器內，第二是在決定放入的順序所使用的 interval graph 中不能有循環的產生，該 interval graph 為一個 direct graph，因為 interval graph 中箭頭的指向代表放入的順序以及相對位置，被指派放入的物品會直接指派到容器中最靠左側的部分，箭頭指向的物品要放在前一個放入物品的左側，若產生循環性將會產生矛盾。如果將這個方式應用到鐵路座位指派問題上可以檢視各種座位指派種類的可行性，由於鐵路的座位指派問題在旅客搭乘區間的這個座標軸上是固定的，因此僅需要檢視車位數量座標軸的可行性，此外 interval graph 中不能有循環的產生這個條件也是必須要滿足的，否則無法產生各個訂位的座位位置。

Pisinger 和 Sigurd (2007)利用分解方式以及數學規劃來解決二維的 Bin-Packing Problem。該研究以 Dantzig-Wolfe decomposition 為基礎建立了一個模式，將問題分為主問題及子問題。主問題以線性規劃求解，該研究先將 Bin-Packing 問題以簡單線性規劃建立模型求得裝入單一個大箱子的可行裝箱解的集合，再以這個集合建立了 Set-Covering Model，然而可行裝箱解集合可能非常大，所以該研究利用 Delayed Column-Generation 來求解 LP-relaxed set-covering model。子問題的部分則以 CSP(constraint-satisfaction problem)處理，以求得最負的 reduce cost 的欄位再將其套回主問題，這種方式又稱為 pricing problem，透過這樣的方法找出最合適的裝箱方式。

Parreño et al. (2010)以一個新的 GRASP 方法(Greedy Randomized Adaptive Search Procedure)來處理三維的裝箱問題，這個方法也可以沿用到二維的裝箱問題中，該研究假設所有要被裝箱的小箱子的方向都是不能變的，這個新的 GRASP 方法是以兩個階段組成，分別為 constructive phase 以及 improvement phase，如果小箱子 j 的體積加上要被放入大箱子中的其他小箱子的總體積小於大箱子的體積，則執行 constructive phase 的動作，在 constructive phase 階段，先假設 $S=\{E\}$ 為最大空著的空間的集合， $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 是要被裝入的小箱子的集合，而整個大箱子是一開始為完全空著的空間，所以將第一個小箱子放入大箱子的左下角落，產生了新的 S ，接著再選其他的小箱子放入新產生的 S ，持續進行上述步驟直到小箱子都被裝箱入大箱子，其中在選擇放入大箱子的小箱子的方法分為 Best-Volume 及 Best-Fit，Best-Volume 是選擇能佔據最大空間的小箱子，而 Best-Fit 是選擇放入的小箱子的邊與最大空著的空間的邊的距離遞增的方式為小箱子放入的順序，並且在 constructive phase 需要決定全部的小箱子的多少比例要被裝入大箱子才會得到最佳結果，此外在每個遞迴所需要的大箱子都要比上一個遞迴少。在 improvement phase 部分是提出四個策略去改善在 constructive phase 得到的結果，第一個是將 $k\%$ 的小箱子從大箱子中拿出，然後再將一開始無法被放入大箱子中的小箱子一併執行 constructive phase 的方法裝入大箱子；第二是將空間填滿率低於平均的大箱子中 $k\%$ 的小箱子拿出，然後重新執行 constructive phase 的方法將小箱子重新裝入未填滿的大箱子；第三個是將填滿率低於平均的大箱子做切割，隨機選出被切割的部分將小箱子取出再重新執行 constructive phase 的方法將小箱子重新裝入；第四個方法是將其中兩個大箱子中的小箱子取出，然後將剛剛未被放入的小箱子第一個被放入兩個空的大箱子，接著再找出放入其他被取出的小箱子的 local solution。該研究認為這個方法改善了原本的 GRASP 的複雜程度並且也有效的提升運算速度，此外在 improvement phase 的部分也可以將策略進行結合提升裝箱改善的程度及效率。

Ana 和 Andreas (2017)以兩階層裝箱問題的研究去解決葡萄牙貿易公司每天遇到的貨物配送問題。第一層是將裝有貨品的箱子裝上貨盤，利用常見的 GRASP 方法中一個稱作 CHMO 的區域尋優方法，並且經過多次的 CHMO 方法來處理此問題得到來自同一位客人的某一種類的所有箱子裝載到貨盤的最佳方法；第二階層則是將貨盤裝上一輛或是多輛貨車，利用 tree search 演算法來解決各個貨盤裝入貨車的順序以及如何將貨車堆滿，其最終目標是有效的利用貨車上的裝載空間已達到使用最少貨車數。其中兩層裝箱問題有幾項重要的限制，第一是各個貨盤

只會裝載一位客人的貨物，且裝載貨物的箱子都是相同規格的；第二是箱子必須完全的放在貨盤上，不可以超出貨盤範圍；第三是貨盤的裝載高度定義為從貨盤底部到裝載的箱子的最高處；第四是各個箱子堆疊在其他箱子上時下方必須完整與下方箱子接觸，不可超出下方箱子範圍；第五是貨盤上的堆疊高度不可以超過貨車可裝載的高度；第六是貨物在運送的過程中不可以被拿出又放回，因此必須遵從最後放入的貨品先送達的運則(LIFO, last in first out)。最後該研究分別利用 C 以及 CPLEX 套裝軟體去計算此迭代問題，發現在計算上均不用一分鐘即可得到最佳解。鐵路座位指派問題需考慮各個訂票需求放入座位指派系統的順序以及位置，該研究提到的 LIFO 的限制式、利用 tree search 演算法得到貨盤裝載順序及讓貨車裝載量達到最大化這兩個部分與鐵路座位指派問題十分相關，這個部分可以與鐵路座位指派的問題做應用與結合。

表 2-2 切割及裝箱問題文獻彙整

作者	維度	階層	分析方法
Wang (1983)	二維	單階層	Cutting stock
Martello 和 Vigo(1998)	二維	兩階層	採用 nested branching 的構想並由 outer branch-decision tree 以及 inner branch-decision tree 組成
Lodi et al. (2002)	二維	單階層	Tabu search
Pisinger(2002)	三維	兩階層	Wall building approach 及 Branch and bound
Fekete 和 Schepers(2004)	二維	單階層	graph-theoretical
Lodi et al. (2004)	二維	兩階層	Level packing

Pisinger(2007)	二維	兩階層	Dantzig-Wolfe decomposition
Parreño et al. (2010)	三維	兩階層	GRASP
Ana 和 Andreas(2017)	三維	兩階層	GRASP 方法中的 CHMO 方法

表 2 - 2 為裝箱問題方面的文獻整理，裝箱問題跟鐵路的座位指派問題十分相似，兩者皆是將小矩形裝入固定大小的大矩形中，其中 Lodi *et al.* (2004) 提出的 level packing 的部分類似執行將各個訂票需求的旅行區間進行長短的分類，這對於把各個訂票需求放入座位指派系統有有效的幫助，另外 Martello 和 Vigo(1998)所提出利用 nested branching 方法將小矩形指派到可容納的大矩形後再以啟發式解法將小矩形指派到大矩形中適當的位子，這個方法可以應用到先將各個旅客指派到可容納的車廂，接著在將旅客指派到車廂中適當的座位。Fekete 和 Schepers(2004)所使用的 graph-theoretical 考慮了小矩形放入大矩形的順序以及相對位置對大矩形可否容納小矩形的影響，因此在考慮鐵路座位指派問題時也可以以這個方式去解出適當的座位指派方式以讓列車容納更多的旅客。

第三章 資料分析

在建立靜態鐵路座位指派模式之前，為了能建立更有效且更周全的座位指派模式，因此本章將對列車的訂位旅客進行初步的統計資料分析，以了解單人旅客以及團體旅客搭乘的數量以及特性，這對於未來建立鐵路座位指派模式有很大的影響。王泓達(2013)曾提到在進行座位指派時因為團體旅客所需考慮的因素較多，例如團體旅客傾向於成坐於相鄰的座位，以方便同團旅客交談與接觸，因此會優先指派團體旅客，由此可知團體旅客的數量非常重要。以下本研究將會著重於分析單人旅客及團體旅客在一周之間的數量分布情形，除此之外還將對於單人旅客以及團體旅客的搭乘距離進行初步的分析及比較。

3.1 每日個人及團體旅客之分布

本研究以 2016 年 3 月台鐵的 218 次列車之訂票資料進行初步的統計分析，首先將 3 月的總單人訂票人數以一周七天的方式呈現，可以由表 3 - 1 及圖 3 - 1 得知這班列車雖然在周一到周日的訂票人數都相當高，然而還是可以看出些許的差異，在周一到周四期間搭乘列車的單人旅客訂票人數較多，假日方面則較低一些。團體旅客的訂票在總數量上明顯多於單人旅客的訂票，其分布情形也與單人旅客的訂票特性有些許的不同，團體旅客的訂票數在平日期間相對較少，雖然沒有很顯著的差異很大，但是從圖 3 - 1 中可看出在平日單人旅客的訂票比例較高，而假日則是團體旅客訂票的比例較高。

表 3 - 1 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票數量

Day	個人	團體
Mon	172	229
Tue	151	258
Wed	145	182
Thu	139	207
Fri	94	204
Sat	91	248
Sun	83	250

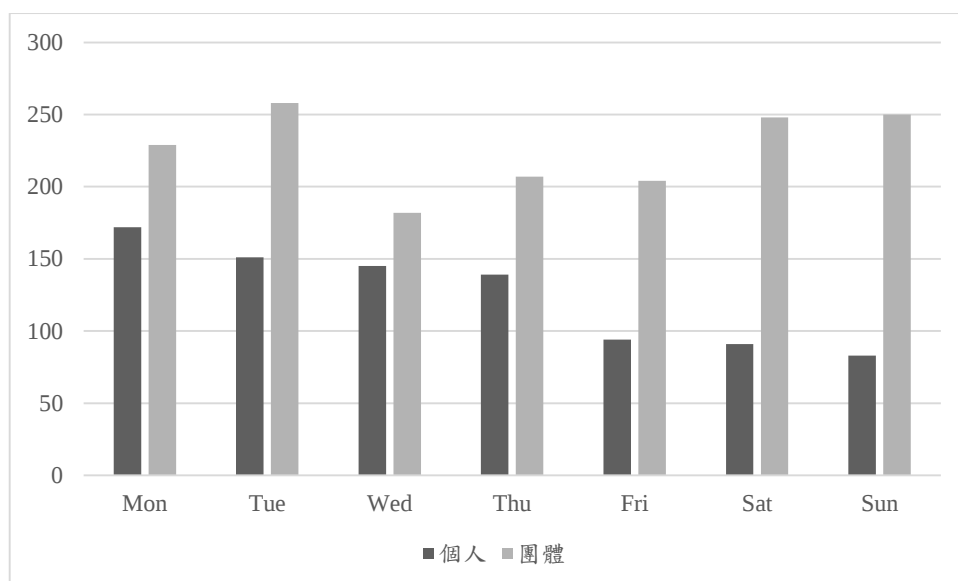


圖 3 - 1 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票數量

在旅行距離方面，由表 3 - 2 及圖 3 - 2 可以看出單人旅客訂票的平均搭乘距離在周二到周六期間明顯較長，周日及周一則較短，而團體旅客訂票的平均搭乘距離方面，可以看出只有在周五的明顯的較長。但是比較單人旅客訂票的平均搭乘距離以及團體旅客訂票的平均搭乘距離有以下發現，團體旅客整週加總的平均搭乘距離明顯的大於單人旅客整週加總的平均搭乘距離，並且不管在星期幾團體旅客的平均搭乘距離皆大於單人旅客的平均搭乘距離。

表 3 - 2 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票平均搭乘距離

Day	個人旅行距離	團體旅行距離
Mon	163 km	194 km
Tue	169 km	191 km
Wed	172 km	194 km
Thu	169 km	194 km
Fri	169 km	207 km
Sat	171 km	187 km
Sun	161 km	192 km

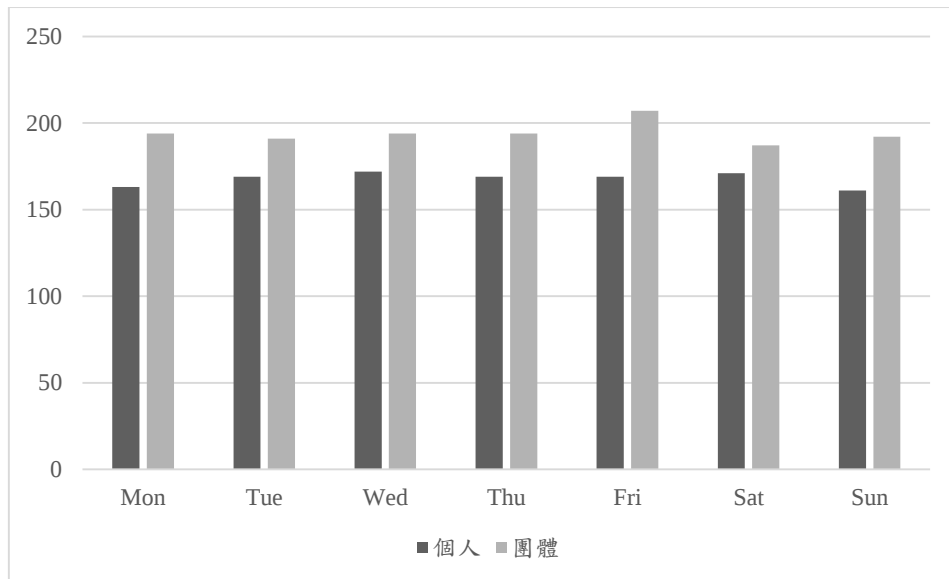


圖 3 - 2 2016 年 3 月第一週單人及團體訂票平均搭乘公里數

3.2 平日與假日各區間之旅客數分布

接著本研究以 2016 年 3 月台鐵的 218 次列車之訂票資料進行更詳細的統計分析，希望了解平日與假日旅客在各個區間之分布情況是否有明顯的差異，因為這對於未來進行座位指派時是否需要因為平日與假日的不同而有不同的指派模式。

圖 3 - 3 以及圖 3 - 4 分別為 2016 年 3 月第一周的星期一以及星期日的各區間旅客分布圖。平日以星期一為例，個人旅客很明顯的在台北-花蓮、松山-花蓮、板橋-花蓮、樹林-花蓮以及羅東-花蓮這幾個區間分布較多，在團體旅客分布方面，其人數較多的區間分布情形與單人旅客相似，但是數量明顯較少；而假日方面則是以星期日為例，個人旅客很明顯的在台北-花蓮、松山-花蓮、板橋-花蓮以及羅東-花蓮這幾個區間的分布較多，然而其他區間的人數比例相較於平日時高，在團體旅客分布方面與個人旅客在各區間分布的比例相似，然而團體旅客的比例很明顯的較平日時高出許多。

因此可以從分析結果得到，旅客在各區間的分佈比例不管平日或是假日是非常相似的，然而在個人旅客以及團體旅客上的比例卻有很顯著的不同，平日的團體旅客比例較低，而假日的團體旅客明顯比例較高。

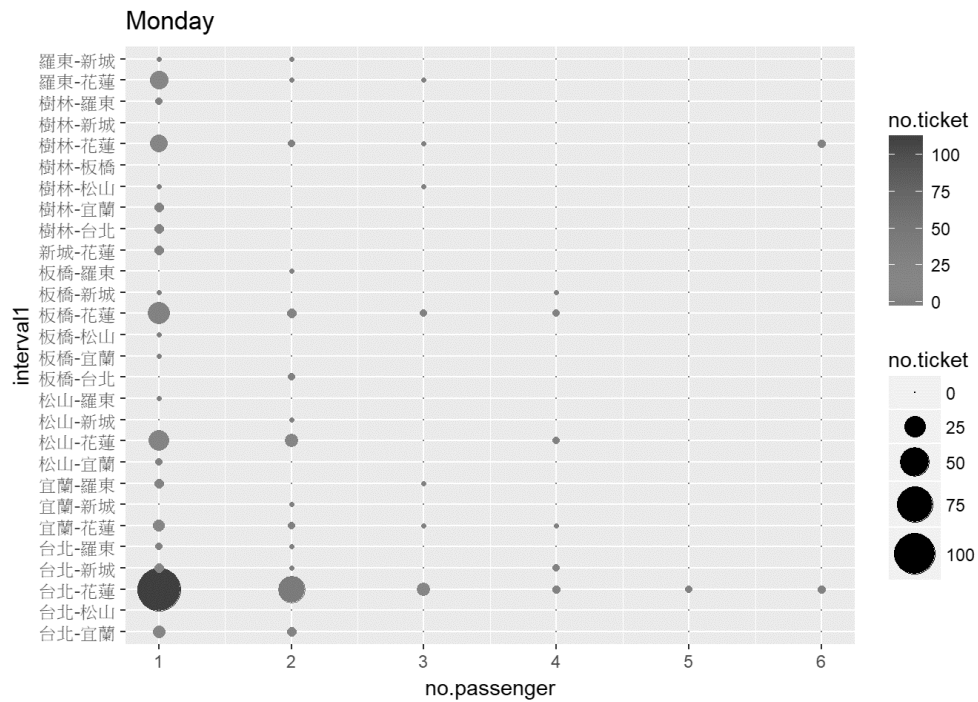


圖 3 - 3 2016 年 3 月第一週星期一各個起迄站的訂票量

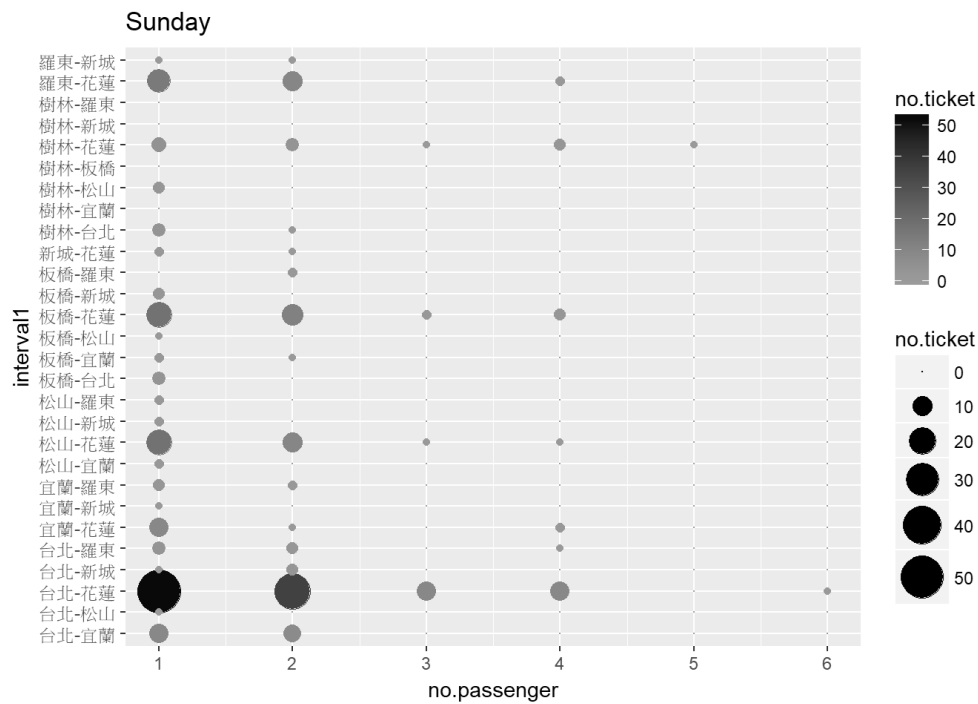


圖 3 - 4 2016 年 3 月第一週星期日各個起迄站的訂票量

第四章 模式建立

參考本研究之研究動機及流程，確立本研究未來的發展及目的，本章將更詳細的介紹本研究所採用的方法，本研究將透過二維裝箱問題(two dimension bin packing problem)的模式作為鐵路旅客座位指派的基本模式，因此在這裡會針對二維裝箱的模式進行介紹，以便了解二維裝箱問題的模式推導過程及與鐵路座位指派的相關性。最後在介紹過去解決二維裝箱問題及鐵路的旅客座位指派模型所使用的模式及套裝軟體。

此外本研究也與實際鐵路座位指派問題有些許不同，因此本研究對於鐵路座位指派模式有以下假設：

1. 假設整班列車為一車廂，不考慮列車車廂及走道造成座位的間隔。
2. 在靜態模式中假設訂票需求為已知的情況下進行座位指派。

此外關於本章模式出現之參數以及變數，以下

表 4 - 1 說明：

表 4 - 1 變數說明

W	已知參數	列車總容量
H	已知參數	列車總行駛車站數
w_j	已知參數	訂位需求 j 座位使用數
y_j	已知參數	訂位需求 j 起始車站
l_{ij}	0,1 變數	表示訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的左側
m_{ij}	0,1 變數	表示訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的前面
f_j	0,1 變數	訂位需求 j 是否被接受
x_j	未知變數	訂位需求 j 的座位位置
y_j^k	已知參數	訂位需求 j 在 k 站的起始車站，即 k 站
x_j^k	未知變數	訂位需求 j 在 k 站的座位位置
z_i^k	0,1 變數	訂位需求 i 在 k 站是否換位子

l_{ij}^k	0,1 變數	表示在 k 站的時候訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的左側
m_{ij}^k	0,1 變數	表示在 k 站的時候訂位需求 i 是否位於訂位需求 j 的前面

4.1 基本鐵路靜態座位指派

基本鐵路靜態座位指派指的是在知道所有這班列車的訂票需求後，再進行座位指派的動作，因此並沒有考慮每位旅客的訂票順序，第一位訂票的旅客也有可能沒有座位。另外，基本的座位指派並不會考慮讓旅客在起迄站之間有換座位的動作。

4.1.1 基本鐵路靜態座位指派之數學模式

本研究之模式之主要目的是最大化列車的座位利用率，這個問題與裝箱問題 (Bin packing problem) 類似，所以在模式的部分會以二維裝箱問題的模式為基礎進行符和鐵路座位指派模式的改善及修正。

二維裝箱是一個 NP-Hard 的問題，目標為將多個小箱子裝入大箱子中，並且使用最少的大箱子容納所有的小箱子。所以在二維裝箱問題中會有一組二維的小箱子 n 個，以 J 表示， $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，在組合中的 n 個小箱子的長度及寬度可能不一致，所以小箱子的寬度以及高度分別以 w_j 及 h_j 表示，此外還會有給定寬度及高度的大箱子，大箱子的寬度則以 W 表示而高度以 H 表示。二維裝箱問題的目的是要將一組小箱子 J 全部裝入大箱子中，並且希望讓被使用的大箱子數量越少越好，並且各個小箱子在被裝入大箱子時不能做 90 度的旋轉，僅能以原有的角度被裝入。

在鐵路的座位指派模式中，一輛列車所擁有的座位數同等於大箱子的寬，也就是座標軸的橫軸，座位的號碼依序排列在大箱子的橫軸上，即大箱子的寬度。一列車所行駛的車站同等於大箱子的高，也就是座標軸的縱軸，行駛的車站數越多則高的單位越多，並且依照車站的順序排列在縱軸上。每個訂票需求皆會有搭乘的起迄點以及需要的座位數，搭乘的起迄點即同等於小箱子的高，而需要的座位數即代表小箱子的寬，因此將這些訂位需求所代表的小箱子放入列車的座位數以及行駛距離所代表的大箱子中就與上述的二維裝箱問題十分類似。因此本研究將訂位需求 j 的起迄點的區間長度以 h_j 表示，訂位需要的座位數以 w_j ，而列車行駛總行駛距離則以 H 表示，總座位數 W 表示。

在二維裝箱問題中的目標為以最少的大箱子數容納所有的小箱子，而大箱子的寬度及高度是有限制的，然而在本研究中所考慮的狀況與二維包裝問題有些許不同，因為列車的總車輛數是固定的，所以目標並不是追求被使用的車輛數最少，而是追求容納最多的訂位需求。

利用二維裝箱模式為基礎建立之模式，其參數如下：

- 有 n 個需求，以集合 N 表示， $N = \{ 1, 2, \dots, n \}$ 。
- 訂位需求 j 的寬度為 w_j ，代表需要的座位數，長度為 h_j ，代表訂位需求之行駛距離。
- 列車的總座為容量以 W 表示。
- 列車的總行駛距離(車站數)以 H 表示。
- y_j ：代表訂位需求 j 在最下側的縱軸座標，即訂位需求 j 的起始車站。

另外除了上述的基本參數外，以下部分是在鐵路座位指派問題會使用到的變數：

- 二元變數 l_{ij} ：當數值等於 1 代表訂位需求 i 所乘坐的座位號碼在鐵路座位指派的大箱子中位於訂位需求 j 的左側，在列車中意義為訂位需求 i 乘坐的座位號碼小於訂位需求 j 乘坐的座位號碼。
- 二元變數 m_{ij} ：當數值等於 1 代表訂位需求 i 在代表鐵路座位指派的這個大箱子中所位於的位置在訂位需求 j 的下方，在列車中的意義為訂位需求 i 的搭乘區間在訂位需求 j 的前方且不重複。
- 二元變數 f_j ：當數值等於 1 代表訂位需求 j 被接受放入列車中。
- x_j ：代表訂位需求 j 在最左側的橫軸座標，即訂位需求 j 的起始座位。

$$\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j, \quad (4-1)$$

$$l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} + m_{ji} + (1 - f_i) + (1 - f_j) \geq 1, \quad (4-2)$$

$$x_i - x_j + W l_{ij} \leq W - w_i, \quad i, j \in N \quad (4-3)$$

$$y_i - y_j + H m_{ij} \leq H - h_i, \quad i, j \in N \quad (4-4)$$

$$0 \leq x_j \leq W - w_j, \quad j \in N \quad (4-5)$$

$$0 \leq y_j \leq H - h_j, \quad j \in N \quad (4-6)$$

$$l_{ij}, m_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N \quad (4-7)$$

$$f_j \in \{0, 1\} \quad j \in N \quad (4-8)$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j \in N \quad (4-9)$$

目標式(4-1) $\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j$ ，二元變數 f_j 表示訂位需求 j 被接受， w_j 及 h_j 分別為訂位需求 j 所需要的座位數以及搭乘距離，其相乘代表訂位需求 j 所代表的小矩形的面積，所以該目標式代表的意義為最大化列車的座位利用率。

限制式(4-2) $l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} + m_{ji} + (1 - f_i) + (1 - f_j) \geq 1$ 代表的意義為避免兩個不同的訂位需求有重疊的情況產生，當訂位需求 i 即訂位需求 j 同時被接受的情況下，限制是會讓訂位需求 i 位於訂位需求的左側或右側使其座位不重疊，或是位於上方或下方使其搭乘區間不重疊。

限制式(4-3) $x_i - x_j + W l_{ij} \leq W - w_i$ ，當 $l_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 的左側，此時限制式(4-3)會變成 $x_i + w_i \leq x_j$ ，即代表訂位需求 i 所使用的第一個座位加上其所需要的座位數後會小於等於訂位需求 j 所使用的第一個座位，所以以此式子代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

限制式(4-4) $y_i - y_j + H m_{ij} \leq H - h_i$ ，當 $m_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 的下方，此時限制式(4-4)會變成 $y_i + h_i \leq y_j$ ，表訂位需求 i 的起始車站加上其搭乘的距離後會小於等於訂位需求 j 搭乘的起始車站，所以以此式子代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

限制式(4-5) $0 \leq x_j \leq W - w_j$ 及限制式(4-6) $0 \leq y_j \leq H - h_j$ 分別表示所有的訂位需求所需要的座位數都需要可以被列車容納，此外所有的訂位需求的搭乘區間都在列車行駛的起迄點之內。

限制式(4-7)為上述兩訂位需求在座標軸中表示其相對位置所代表的二元變數，限制式(4-8)為表示訂位需求是否被接受的二元變數，最後限制式(4-9)代表各個訂位需求所使用的座位數以及搭乘距離均大於等於 0。

4.1.2 基本鐵路靜態座位指派之求解方式

在上一節中本研究以二維包裝模式為基礎進行修正及改善完成了符合鐵路座位指派的模式，由於二維包裝模式為一種 NP-Hard 的數學問題，所以不容易直

接由上數的限制式經過簡單運算得到最佳解，通常需要透過套裝軟體協助求解或是數學規劃方面的演算法來求得最佳解，又或是區域最佳解，例如 greedy algorithm、Meta heuristic 或是 Tree search 等演算法。最後本研究將上一節中的基本鐵路座位指派的數學模式在 Microsoft Visual Studio 環境下編寫 C++ 語法，並且選擇利用最佳化套裝軟體 GUROBI 來對該模式求得精確解。

4.2 起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派

起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派指的是在已經知道該班列車所有訂票需求的情況下，對這些訂票進行最佳化的座位指派，此外為了達到最佳化的結果，部分旅客原本訂票的起迄點會被拆成多個起迄點的組合組成，這也會導致這些旅客可能會要在起迄站間換座位。

4.2.1 起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派數學模式

從前述的基本座位指派模型可以充分的了解到如何將旅客的訂位需求指派到列車中適當的座位，並且讓旅客在旅途中坐在同一個座位的前提下達到最大的座位利用率，然而本研究認為透過部分旅客在旅途中間進行座位更換的動作可以提高座位的利用率，因此以基本的座位指派模型作為基礎，作出部分修正以及改良，使每位旅客在每到達一個車站即重新指派座位，其意義即將每位旅客的訂位拆成每一個區間(leg)即一個訂位，而一個區間是由兩個連續的車站組成，例如一個旅客從第一站搭乘到第四站，則將會被拆成三個區間，所以該旅客會分別在第一、第二及第三站被進行座位指派，如下圖 4-1，若有八筆訂票之情況。

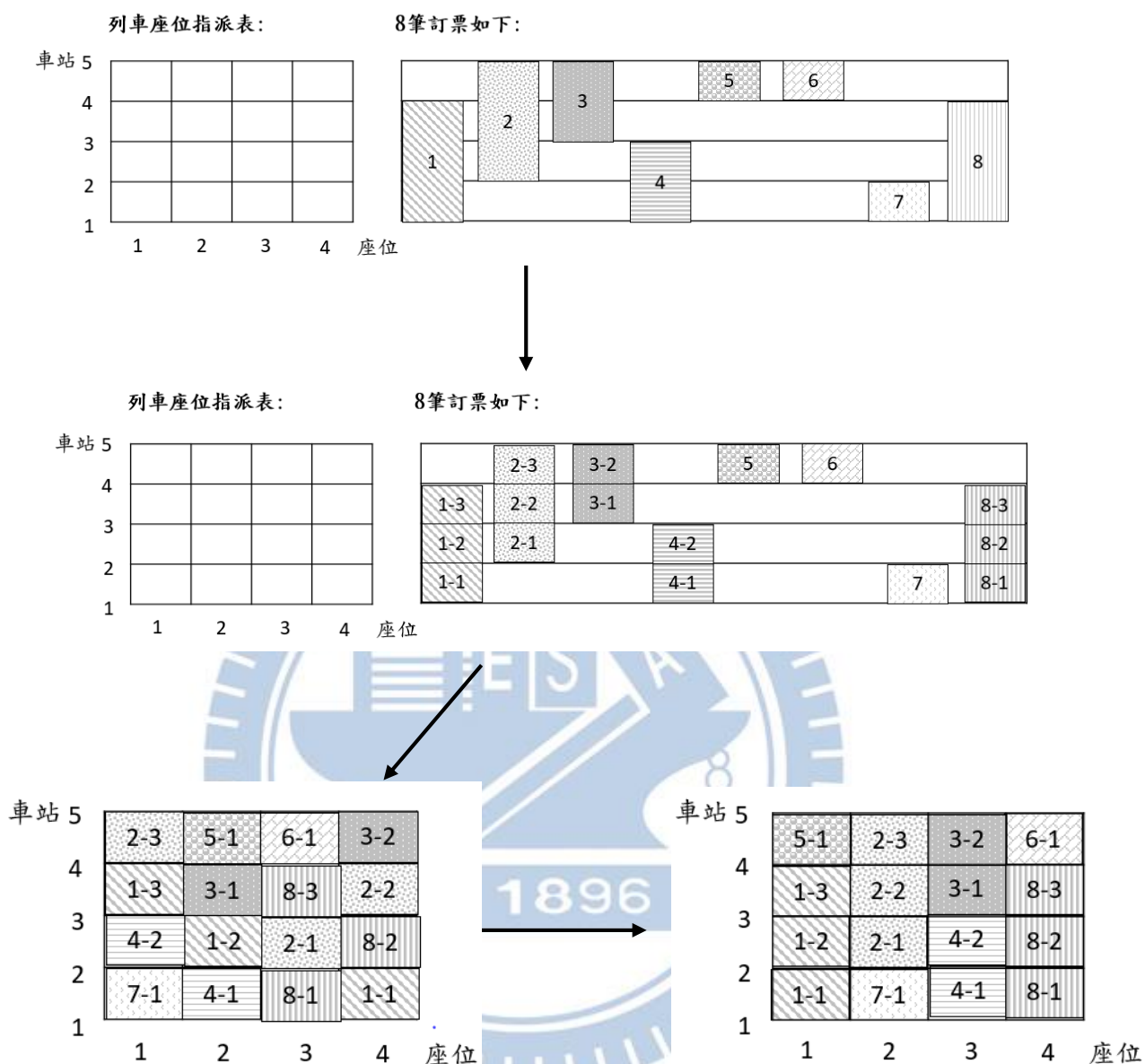


圖 4-1 起迄站之間可換座位鐵路座位指派之靜態數學模式知識意圖

可在起訖站之間換座位之靜態鐵路座位指派模式如下：

- 有 n 個需求，以集合 N 表示， $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。
- 訂位需求 j 的寬度為 w_j ，代表需要的座位數，長度為 h_j ，代表訂位需求之行駛距離。
- 列車的總座為容量以 W 表示。
- 列車的總行駛距離(車站數)以 H 表示。
- y_j^k ：代表訂位需求 j 在搭乘區間中在 k 站最下側的縱軸座標，即訂位需求 j

在其搭乘區間中 k 站代表的座標。

另外除了上述的基本參數外，以下還有部分參數是在鐵路座位指派問題會使用到的變數：

- 二元變數 l_{ji}^k ：當數值等於 1 代表在第 k 站訂位需求 i 所乘坐的座位號碼在鐵路座位指派的這個大箱子中位於訂位需求 j 的左側，在列車中其意義為訂位需求 i 乘坐的座位號碼小於訂位需求 j 乘坐的座位號碼。
- 二元變數 m_{ij}^k ：當數值等於 1 代表在第 k 站訂位需求 i 在代表鐵路座位指派的這個大箱子中所位於的位置在訂位需求 j 的下方，在列車中的意義為訂位需求 i 的搭乘區間在訂位需求 j 的前方且不重複。
- 二元變數 f_j ：當數值等於 1 代表訂位需求 j 被接受放入列車中。
- x_j^k ：代表訂位需求 j 在 k 站最左側的橫軸座標，即訂位需求 j 在 k 站的座位。
- 二元變數 z_i^k ：為 0,1 變數，代表第 i 個訂位需求在 k 站是否換位子，有換位子則其值是 1，沒換位子是 0。

$$\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j, \quad (4-10)$$

$$\text{Min } \sum_{k \in K} z_i^k, \quad k \in H \quad (4-11)$$

$$l_{ij}^k + l_{ji}^k + (1 - f_i^k) + (1 - f_j^k) \geq 1, \quad (4-12)$$

$$x_i^k - x_j^k + W l_{ij} \leq W - w_i, \quad i, j \in N, k \in H, \quad (4-13)$$

$$y_i^k - y_j^k + H m_{ij}^k \leq H - h_i, \quad i, j \in N, k \in H \quad (4-14)$$

$$0 \leq x_i^k \leq W - w_j, \quad i, j \in N, k \in H \quad (4-15)$$

$$0 \leq y_j^k \leq H - 1, \quad i, j \in N, k \in H \quad (4-16)$$

$$(x_i^k - x_i^{k+1})^2 \leq M z_i^k, \quad i, j \in N, k \in H \quad (4-17)$$

$$l_{ij}, m_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N \quad (4-18)$$

$$f_j \in \{0, 1\} \quad j \in N \quad (4-19)$$

$$x_j^k, y_j^k \geq 0, \quad j \in N, k \in H \quad (4-20)$$

$$z_i^k \in \{0, 1\} \quad k \in H \quad (4-21)$$

目標式(4-10) $\text{Max } \sum_{j \in N} w_j h_j f_j$ ，二元變數 f_j 表示訂位需求 j 被接受， w_j 及 h_j 分別為訂位需求 j 所需要的座位數以及搭乘距離，其相乘代表訂位需求 j 所代表的小矩形的面積，所以該目標式代表的意義為最大化列車的座位利用率。

目標式(4-11) $\text{Min } z_i^k$ ，因為模式會讓旅客在各站重新指派座位，造成旅客會換座位，此目標式目的為最小化旅客換座位的次數。

限制式(4-12) $l_{ij}^k + l_{ji}^k + (1 - f_i^k) + (1 - f_j^k) \geq 1$ 代表的意義為避免兩個不同的訂位需求有重疊的情況產生，當訂位需求 i 以及訂位需求 j 同時被接受的情況下，限制式會使訂位需求 i 位於訂位需求的左側或右側使其座位不重疊。

限制式(4-13) $x_i^k - x_j^k + W l_{ij} \leq W - w_i$ ，當 $l_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在 k 站的座位在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 在 k 站的座位的左側，此時限制式(4-13)會變成 $x_i^k + w_i \leq x_j^k$ ，即代表訂位需求 i 在 k 站所使用的第一個座位加上其所需要的座位數後會小於等於訂位需求 j 在 k 個站所使用的第一個座位，所以以此式子代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

限制式(4-14) $y_i^k - y_j^k + H m_{ij} \leq H - h_i$ ，當 $m_{ij}=1$ 時，代表訂位需求 i 在 k 站的起始站在列車容量所表示的座標軸中位於訂位需求 j 在第 k 站的起始站的下方，此時限制式(4-14)會變成 $y_i^k + h_i \leq y_j^k$ ，表訂位需求 i 在 k 站的起始車站加上其搭乘的距離後會小於等於訂位需求 j 在 k 站搭乘的起始車站，所以以此式子代表兩個訂位需求在座標軸上的關係。

限制式(4-15) $0 \leq x_j^k \leq W - w_j$ 及限制式(4-16) $0 \leq y_j^k \leq H - 1$ 分別表示所有的訂位需求所需要的座位數都需要可以被列車容納，此外所有的訂位需求的搭乘區間都在列車行駛的起迄點之內。

限制式(4-17) $(x_i^k - x_i^{k+1})^2 \leq M z_i^k$ 為檢測訂位需求 i 在搭乘的過程中的任兩個區間是否有換座位，若有換座位則 z_i^k 為 1，沒有換座位則是 0，以此知道訂位需求 i 在搭乘列車的過程中換了幾次座位。

限制式(4-18)為上述兩訂位需求在座標軸中表示其相對位置所代表的二元變數，限制式(4-19)為表示訂位需求是否被接受的二元變數，限制式(4-20)代表各個訂位需求所使用的座位數以及搭乘距離均大於等於 0，最後限制式(4-21)代表換位子與否的二元變數。

4.2.2 起迄站之間可換座位之靜態鐵路座位指派模式之求解方式

在求解可在起迄站之間換座位之靜態鐵路座位指派模式方面，本研究先將上述之數學模式進行些許調整，由於該數學模式為多目標問題，為了求解多目標問題，本研究將兩條目標式放入權重求解。由於讓列車的座位利用率最大化是較為重要的目標，本研究將該目標權重設的較重為 5，而最小化會座位次數的目標的權重設為 1。接著將調整後的數學模式在 Microsoft Visual Studio 環境下編寫 C++ 語法，並且以最佳化求解軟體 GUROBI 進行求解。本研究希望透過求解的結果得到在起迄站之間可換座位之指派模式中的指派規則，例如搭乘常區間的旅客以及搭乘短區間的旅客的座位該被指派到何種座位，以及換位子應該要在旅客搭乘區間中的哪個車站換座位等規則，並將這些規則應用到動態座位指派模式中。

4.3 動態鐵路座位指派模式

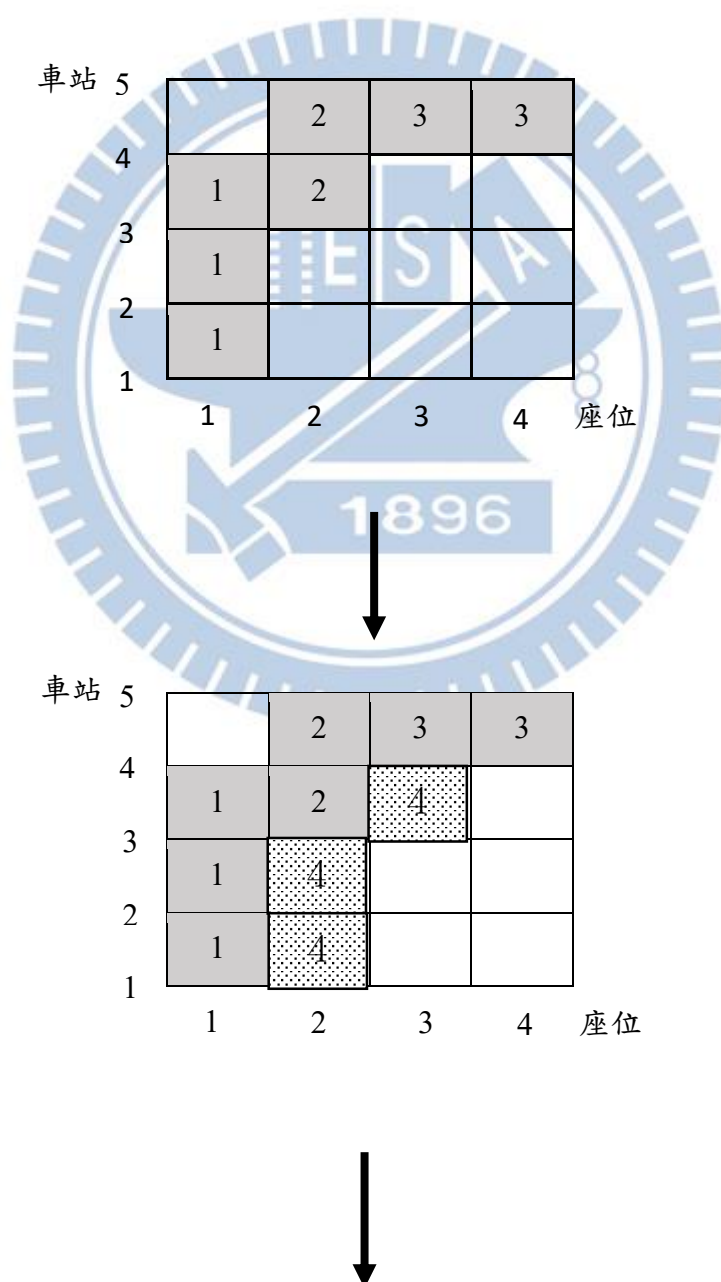
前面幾節是以靜態的模式進行鐵路的座位指派，是在知道所有訂票的旅客的需求後，才將所有訂票進行座位指派，然而這在實際鐵路訂票模式中不太可行，現實中，當旅客訂票的當下就必須告知旅客被指派到的座位，否則還要透過在票證上顯示座位以外的方式另行通知旅客座位，這將會造成旅客的不便以及額外的成本。因此在這一節將會以更接近的實際鐵路售票模式進行座位指派，也就是動態鐵路座位指派模式。

動態鐵路座位指派模式指的是當旅客訂票時即馬上指派座位給旅客，因此並不能項靜態模式中得到所有旅客的訂票需求後再進行指派，這也使得動態模式較靜態模式更難達到最佳化的指派結果，所以動態模式在進行座位指派時也更為複雜且困難。

在這一節本研究首先要檢測動態座位指派模式，透過檢測找尋動態座位指派的規則。檢測時會模擬一個動態座位指派的模式，一開始會以較簡單的方式進行指派，將接收到的旅客訂票需求從最小的座位號碼開始指派，也就是將旅客訂票所代表的小箱子從列車的座位以及車站所代表的大箱子的最左側開始指派，當第一位旅客訂票後將會被指派到列車的座位以及車站所代表的大箱子的最左側，也就是列車中目前所有空位中號碼最小的座位 1 號座位，當第二位旅客訂票後會先判斷其搭乘的區間是否與第一位旅客有重疊，如果沒有的話，將會指派第二位旅客到 1 號座位，如果搭乘區間與第一位旅客有重疊，則將指派第二位旅客到 2 號座位，以此類推，將旅客依序指派進到列車的各個區間及座位中。

此外在動態座位指派的檢測中有設定規則讓旅客需要再搭乘區間之間進行

換座位的動作，其中換座位的方式是將訂票旅客的起迄站拆成由兩組區間組合，然後分別進行指派，這會使旅客有可能需要在原本的起迄站之間換座位，另外拆成兩組區間的部分會以隨機選擇的方式，如圖 4 - 2 所示，第四筆訂票的旅客的起點是 1 站迄點是 4 站，這筆訂票可能會被拆成一筆由 1 站到 3 站及一筆由 3 站到 4 站的兩筆訂票，或是一筆由 1 站到 2 站及一筆由 2 站到 4 站的兩筆訂票。而讓旅客在起迄站之間換座位的目的在於讓原本無法得到座位的潛在旅客因為在不同區間指派到不同座位而獲得座位來從起點搭到目的地，也因為讓一些原本得到座位的潛在旅客可以得到座位已抵達目的地使得列車的座位利用率提高，此外透過換座位也讓後續時間點訂票的旅客更有機會有座位以及能更有彈性的指派。



車站 5		2	3	3
4	1	2	4	
3	1		4	
2	1	4		
1				
	1	2	3	4 座位

圖 4-2 隨機決定換座位之車站

在動態座位指派中，針對旅客需要進行上述換座位動作的規則方面，本研究將以模糊邏輯控制（Fuzzy Logic Control, FLC）中的邏輯控制規則來決定。模糊邏輯控制指的是不以精確的條件去進行精確的控制，而是以較接近人類的思維及判斷去進行控制，就像一般人常說這棟房子很大、這幅畫很美麗、這頓飯很好吃，又或是這杯水很熱，這些都沒有以一個精確的數值去定義大、美麗、好吃以及熱，而純粹是人類的判斷，所以在以模糊的方式去判斷這棟房子很大或是這幅畫很美麗時，不能以一個判別函數去判斷，而是以隸屬函數來判斷這棟房子屬於大這個集合的程度或是這幅畫屬於美麗這個集合的程度，而部分學者認為這樣更為細膩及彈性。為了讓動態座位指派模式更接近人的邏輯判斷及思維，本研究將模糊邏輯控制的規則加入了動態座位指派模式中來控制旅客換座位的行為，其中會以目前列車的座位利用率的程度以及當前訂票旅客的搭乘區間的長短條件來決定該旅客是否需要換座位，由於加入了模糊控制理論，所以不會以精確的數值或是指示表示列車目前的座位利用率、當前訂票旅客的搭乘區間的長短以及是否需要換座位，而是會將目前列車的座位利用率分為極小、小、中、高、極高，當前訂票旅客的搭乘區間的長短分為極短、短、中、長、極長，而是否需要換座位則是分為極不需要、可能不需要、可以換可以不換、可能需要、極需要，這些判別將以隸屬函數表示。

在進行模糊邏輯控制時本研究將以下列步驟進行：

步驟(一)邏輯規則庫之選擇：

透過上述定義的語意等級本研究歸納出下列潛在規則庫：

If 座位利用率	極低	and 旅客搭乘區間	極短	then	極不需要換座位
	低		短		可能不需要換座位
	中		中		可以換可以不換
	高		高		可能需要換座位
	極高		極高		極需要換座位

依據上面的規則可以歸納出 5 乘 5 乘 5 總共 125 條潛在規則，本研究將從這 125 條規則中挑出幾個適用且重要的規則放入模糊邏輯控制中的規則庫中。

在規則挑選方面，本研究利用基因演算法進行尋優以挑選出最佳的規則組合，由上述潛在規則庫中可得出本模式中狀態變數為 2 個，控制變數為 1 個，分別各有五個語意等級，其染色體之長度為 $5 \times 5 = 25$ 個基因，每個基因值為 0~5，分別以 0 代表該條規則未被入選，以 1~5 代表該規則獲選外，亦代表其控制變數之語意值。假設有一條染色體 0000100020004000050003000，這代表有 5 條邏輯規則被選入，規則如下：

規則 1：If 座位利用率 極低 and 旅客搭乘區間 極長 then 極不需要換座位

規則 2：If 座位利用率 低 and 旅客搭乘區間 高 then 可能不需要換座位

規則 3：If 座位利用率 中 and 旅客搭乘區間 中 then 可能需要換座位

規則 4：If 座位利用率 高 and 旅客搭乘區間 中 then 極需要換座位

規則 5：If 座位利用率 極低 and 旅客搭乘區間 短 then 可以換可以不換

在基因演算法的運作方面，本研究採用 Max-min-arithmetical 交配方式，由此交配方式在每次進行交配運作時，將由 2 個母代染色體產生 4 個子代色體，再依據染色體的適合度挑選出最佳的 2 個染色體至回族群中，其餘 2 個則刪除。Max-min-arithmetical 交配方式如下，其中 $G_w^t = \{g_{w1}^t, \dots, g_{wk}^t, \dots, g_{wK}^t\}$ 及 $G_v^t = \{g_{v1}^t, \dots, g_{vk}^t, \dots, g_{vK}^t\}$ 分別代表兩條母代染色體，t 代表世代數， g_{wk}^t 及 g_{vk}^t 代表兩條染色體中的各個基因， α 為一個 0 到 1 的參數，在本研究設定為 0.6。經過交配後將產生以下 4 個子代：

$$(1) \quad G_1^{t+1} = \alpha G_w^t + (1 - \alpha) G_v^t$$

$$(2) \quad G_2^{t+1} = (1 - \alpha) G_w^t + \alpha G_v^t$$

$$(3) \quad G_3^{t+1} \text{ with } g_{3k}^{t+1} = \min\{g_{wk}^t, g_{vk}^t\}$$

$$(4) \quad G_4^{t+1} \text{ with } g_{4k}^{t+1} = \max\{g_{wk}^t, g_{vk}^t\}$$

在突變方面本研究採單點突變的方式，從染色體中隨機選擇一基因，以 5 減去該基因值作為突變後的基因。而適合度方面為基因演算法所追求的目標，也就是尋優的方向，其目標與起迄站之間換座位之靜態鐵路座位指派模式相同，為一個多目標問題，第一是最大化列車的座位利用率，以最大化業者的營收，第二是最小化旅客換座位總次數，以降低旅客的不便性，接著正規化兩個目標並且分別加入權重將問題轉為單目標。由於第一個目標為最大化座位利用率，座位利用率為 0 到 1 的數值，第二個目標為最小化旅客換座位次數，換座位次數為大於 0 的整數，其最大值可能到整個列車的搭乘人數，因此本研究將以正規化的方式將第二個目標換座位次數的值轉為 0 到 1 的數值，並且以數值越大代表越接近目標，正規化方式如下：

$$\text{正規化之目標值} = \frac{\text{列車搭乘總人數} - \text{換座位人數}}{\text{列車搭乘總人數}}$$

在權重的部分分別將最大化列車座位利用率的部分設為 0.9，最小化旅客換座位的次數設為 0.1。

步驟(二)隸屬函數之建立：

本研究分別針對上述的各個語意變數，建立該變數各語意等級的模糊數，再依據該模糊數的型態建立隸屬函數，如圖 4-3、圖 4-4 及圖 4-5 所示：

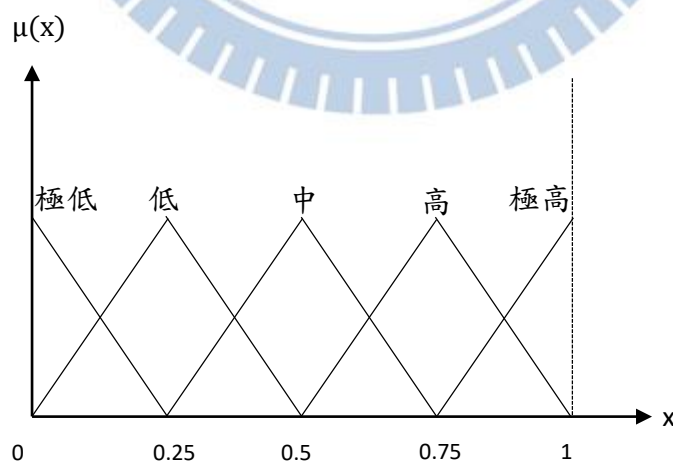


圖 4-3 座位利用率的隸屬函數

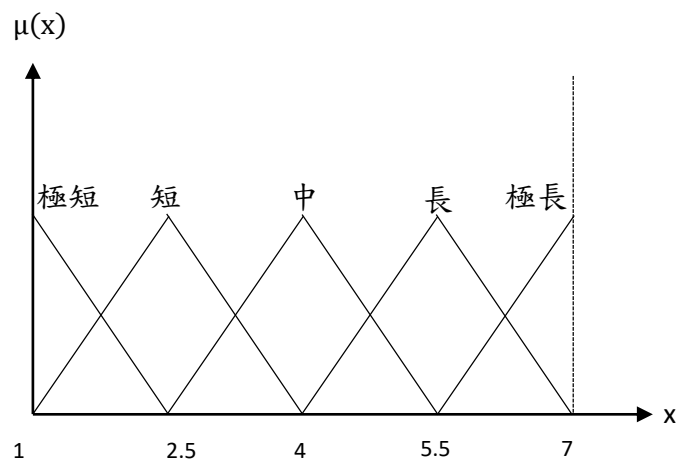


圖 4-4 訂票旅客搭乘區間的隸屬函數



圖 4-5 是否需要換座位的隸屬函數

步驟(三)解模糊化：

在透過建立隸屬函數讓模糊認知數量化後，需要進行解模糊化的動作，解模糊化指的就是將推論完成的模糊輸出值轉換為明確數值，這樣才能依據此控制系統。在解模糊化的方法有非常多種，例如：最大隸屬度法、加權平均法、重心法、面積法等，最大隸屬度法是以所有觸動規則中，觸動程度最大者（即隸屬度最高者）的規則，其輸出模糊結果之中心值作為輸出結果；加權平均法是以所有觸動規則的觸動程度（隸屬度）進行各規則輸出結果的加權，其計算方式如下：

$$Z_{AVG} = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i C_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \quad (4-22)$$

其中， z_{AVG} 為模糊邏輯控制經平均加權法解模糊化後的明確輸出結果。 μ_i 為第 i

條規則的推論隸屬度；面積法是針對各觸動規則，分別計算其面積及重心，再以面積加權求解並綜整後的重心位置。其計算方式如下：

$$z_A = \frac{\sum_{i=1}^m A_i c_i}{\sum_{i=1}^m A_i} \quad (4-23)$$

其中， z_A 為模糊邏輯控制經面積法解模糊化後的明確輸出結果；重心法是求推論結果陰影面積的重心，並以其對應的元素為輸出結果，其計算方式如下：

$$z_G = \frac{\int c_i \mu_i(y_i) dy_i}{\int \mu_i(y_i) dy_i} \quad (4-24)$$

其中， z_G 為 FLC 經重心法解模糊化後的明確輸出結果。重心法是最常被採用之解模糊化方法，但其計算較為繁雜。其與面積法之不同在於重心法不考慮上圖兩梯形重疊面積的影響，但面積法是分別以面積加權，故有重複考量其重疊面積之影響。本研究將會從這幾種方法中挑選出適合的解模糊化方法進行測試。

最後本研究以 PYTHON 軟體編寫上述動態座位指派模式，並且加入模糊邏輯控制以最佳的邏輯控制規則進行動態的座位指派，整個座位指派流程如圖 4 - 6。

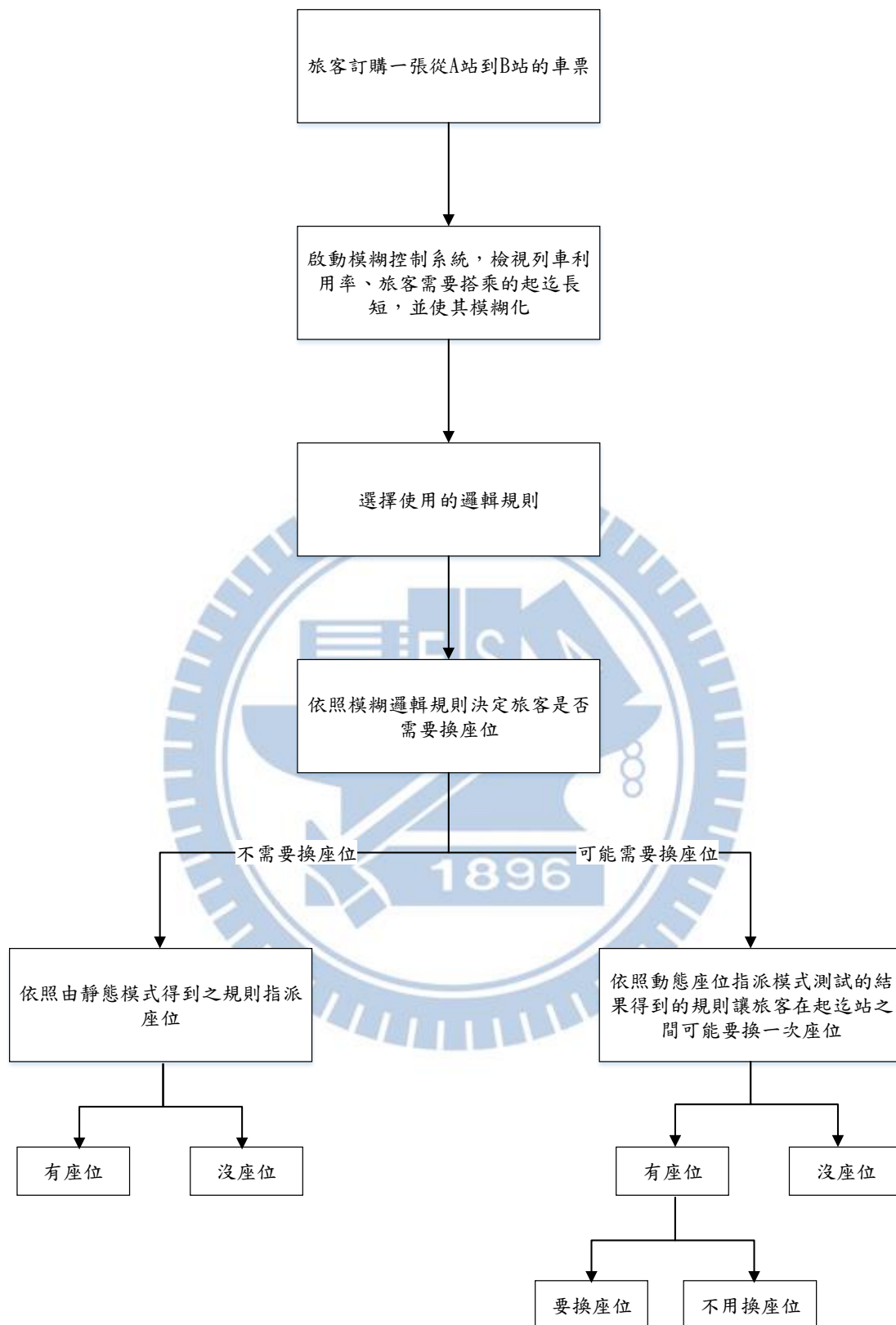


圖 4 - 6 旅客訂票及座位指派流程

第五章 簡例驗證

為了驗證上一章所建立之數學模式，本研究必須將訂票資料放入模式中去檢驗數學模式是否能將旅客指派到適當的座位且使列車的座位利用達到最大。然而，鐵路的座位指派問題屬於 NP-HARD 的問題，不容易在多項式時間內求得最佳解，若是直接以台鐵資料來做驗證，會因為資料量過於龐大導致在求解上較為困難，因此將透過製作小規模的簡歷來驗證上一章建立之數學模式。

5.1 基本鐵路靜態座位指派模式之驗證

在上一章在基本不換座位的鐵路座位指派方面，本研究希望能夠求得精確解，所以建立了可以求得精確解的基本座位指派的數學規劃模式。因為基本鐵路座位指派模式屬於 NP-HARD 的問題，較難在多項式時間內求得最佳解，因此在處理資料量大的問題較為困難，所以為了驗證基本座位指派的數學模式是否可行，並且能夠確實在旅客不換座位的情況下指派適當的座位使列車的座位利用率最大，本研究以一個較小規模的簡歷來進行模式的驗證，表 5-1 為簡例的訂票資料：

表 5-1 基本指派模式之簡例訂票資料

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
起點	1	1	1	4	4	3	3	2	2	5
迄點	4	3	2	6	5	6	5	6	5	6
座位數	2	2	2	1	1	1	1	1	1	3

本研究假設一班列車有 6 個座位，座位編號從 1 號到 5 號，從 1 號站出發沿途停靠五個車站，分別為 2 號、3 號、4 號、5 號及 6 號站，而該班車接收到的訂票筆數為 12 筆，每一筆訂單皆只需要一個座位。本研究將基本鐵路座位指派模式寫入 C++ 後將表 5-1 的資料放入模式中以 GUROBI 求解，得到表 5-2 之結果：

表 5-2 基本指派模式之簡例指派結果

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
是否接受	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
座位號碼	1	3	5	1	2	3	4	5	6	X

由表 5-2 可得到訂單編號 1、2、3、4、5、6、7、8、9 有被接受，代表這些訂單編號的旅客是可以有票搭乘列車的，而這接受這些訂單編號的旅客後並且指派到其適當的座位後可以達到列車座位的利用率最高，其訂票被接受的總旅客座

位數乘上搭乘車站數達到 28，而座位利用率也達到 0.933，其座位分布如圖 5 - 1：

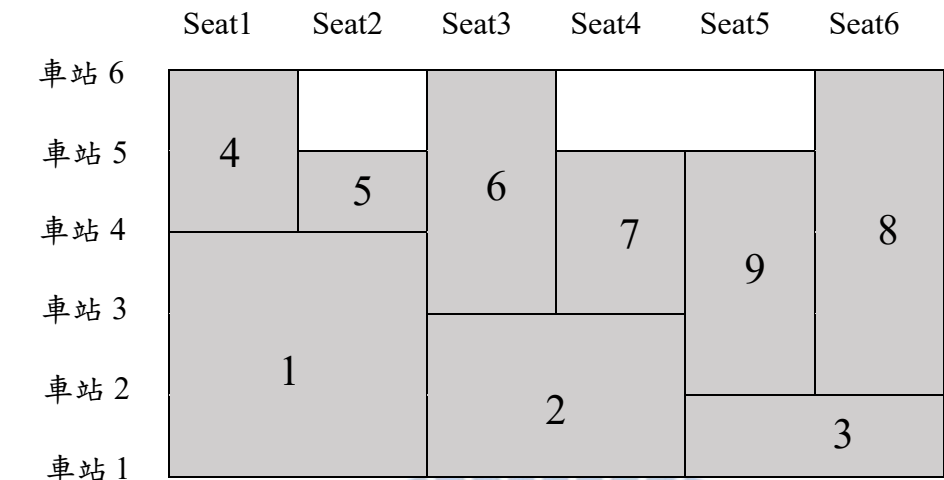


圖 5 - 1 基本模式簡例之指派分布



5.2 起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式之驗證

於上一章本研究建立了起迄站之間換座位之靜態鐵路指派的數學模式，且希望透過數學模式求得精確解，而起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式也屬於 NP-HARD 的數學問題，不容易在多項式時間內求得最佳解。為了驗證起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式是否可行，能達成兩個設定的目標，列車中的座位利用率達到最高以及旅客換座位次數最少，本節使用與上一節相同的小規模的簡例來進行模式的驗證，以比較兩模式結果之不同，簡例的訂票資料如表 5 - 3 所示：

表 5 - 3 起迄站之間換座位之靜態鐵路指派模式之簡例訂票資料

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
起點	1	1	1	4	4	3	3	2	2	5
迄點	4	3	2	6	5	6	5	6	5	6
座位數	2	2	2	1	1	1	1	1	1	3

本研究假設一班列車有 6 個座位並且行駛 6 個車站，依序為 1 號站到 8 號站，而該班車接收到的訂票筆數為 10 筆，每一筆訂票的座位需求數都不完全相同，當座位需求數等於 1 代表是單人旅客，當座位需求數大於 1 代表是多人旅客。旅客被指派的座位可能在各站會不同，這表示該旅客在起迄站之間需要換座位。本研究將基本鐵路座位指派模式寫入 C++ 後將表 5 - 3 的資料放入模式中以 GUROBI 求解，得到表 5 - 4 之結果：

表 5 - 4 起迄站間換座位之靜態鐵路指派模式之簡例指派結果

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
是否接受	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
1 號站座位號碼	1	3	5	X	X	X	X	X	X	X
2 號站座位號碼	1	3	X	X	X	X	X	6	5	X
3 號站座位號碼	1	X	X	X	X	3	4	6	5	X
4 號站座位號碼	X	X	X	1	2	3	4	6	5	X
5 號站座位號碼	X	X	X	1	X	2	X	6	5	3

由表 5 - 4 可以得到所有訂票皆有被接受，其座位指派結果分布圖如下圖 5 - 2，其中僅有 2 號訂票的旅客要換座位，最後從座位指派分布圖可以得到其座位利用率為 100%，較上一節所使用的不換座位的靜態座位指派模式之指派結果的座位利用率更高。

	Seat1	Seat2	Seat3	Seat4	Seat5	Seat6
車站 6						
車站 5	4	10			6	8
車站 4		5	9	7		
車站 3	1			9	2	
車站 2			3			
車站 1			2		3	

圖 5 - 2 起迄站間換座位之靜態鐵路指派模式之指派分布



5.3 動態鐵路座位指派模式之檢測

在上一章本研究設定了一些動態指派模式中的指派規則，在這一節將先利用上一章尚未加入模糊邏輯控制時設定的規則來指派座位，並且透過設定不同情境來進行指派，以比較各個不同情境下對指派結果造成的影響。在規則方面，將依照上一章介紹座位指派模式的部分所介紹的依照訂票的先後順序指派，並且以較簡單的方式將最先訂票的旅客放到座位指派表中的最左側座位，也就是號碼最小的座位，依循這種方式指派。本研究會先設定兩種情境，情境一為依照訂票編號 1 到 30 號的順序作為旅客訂票的順序，情境二為依照訂票編號 30 到 1 號的順序作為旅客訂票的順序，簡例的訂票資料如表 5-5，這班列車總共有 10 個座位，8 個車站，依序為 1 號站到 8 號站。

表 5-5 動態鐵路座位指派模式之簡例訂票資料

訂單編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
起點	2	5	1	2	6	1	3	5	4	2
迄點	8	7	3	6	8	4	7	6	6	5
座位數	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1
訂單編號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
起點	1	1	4	1	1	4	6	7	1	2
迄點	8	2	6	5	4	8	8	8	4	6
座位數	1	2	1	1	3	1	1	1	1	2
訂單編號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
起點	6	6	6	3	4	6	6	6	7	7
迄點	8	8	8	8	6	7	8	8	8	8
座位數	1	1	1	2	1	1	1	4	1	1

本研究將上述規則寫入 PYTHON 後進行動態鐵路座位指派模式的檢測，在情境一本研究將訂票順序依照訂票編號 1 到 30 排列，其指派結果如下圖 5-3 所示，格子內部沒有數字標號的代表沒被利用到的座位，而有數字的代表是用該座位的訂票編號。其中訂票編號 14,15,16,20,24,25,27,28 因為無法被列車容納所以是沒被接受的，而指派結果列車的座位利用率為 0.85。

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1			3		6	6	12	12	19		11
2		1	3	4	6	6			19	10	11
3		1		4	6	6	7		19	10	11
4		1		4		13	7	9	9	10	11
5		1	2	4	8	13	7	9	9		11
6		1	2	5	17	21	7	22	23	26	11
7		1	18	5	17	21	29	22	23	30	11
8											

圖 5 - 3 動態鐵路座位指派模式情境一之指派分布

在情境二，本研究將訂票順序依照訂票編號 30 到編號 1 號排列，其指派結果如下圖所示，其中編號 22,21,17,16,11,7,6,5,4,2,1 是無法被列車容納所以沒被接受的，而列車的座位利用率為 0.93。由此可以看出圖 5 - 3 及圖 5 - 4 的指派結果分布並不同，座位利用率也不同，因此相同的訂票資料，但是改變了所有旅客的訂票先後順序後會使座位利用率不同。

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1		19	12	12	15	15	15	14	3		
2		19	20	20	15	15	15	14	3		10
3		19	20	20	15	15	15	14	24	24	10
4		25	20	20	13	9	9	14	24	24	10
5		25	20	20	13	9	9	8	24	24	
6		26		28	28	28	28	27	24	24	23
7		30	29	28	28	28	28	27	24	24	23
8											

圖 5 - 4 動態鐵路座位指派模式情境二之指派分布

在前面進行的檢測中，本研究僅簡單得將旅客的訂票依照順序指派到列車中，並沒有讓旅客有換座位的動作，接著本研究將會把換座位的規則加入動態座位指派模式中，換座位的車站將為以隨機選擇的方式決定，在這個部份本研究也會分為三種情境來進行檢測，分別為情境三、情境四以及情境五。情境三為先進行不換座位的指派將訂票依照訂票編號 1 到 30 的順序指派，當指派到當列車的座位利用率達到 6 成的時候，後續訂票編號的旅客會被要求在起迄站之間隨機選擇一站換座位，也就是迄點就會隨機被拆為兩組起迄點的組合分別進行座位指派，而指派的結果如果兩組起迄點的座位不同就代表該訂票編號的旅客需要換座位；情

情境四如同情境三的模式依照訂票編號 1 到 30 的順序先進行不換座位的指派，當指派到座位利用率達到 7 成的時候，後續訂票編號的旅客會被要求在起迄站之間隨機選擇一站換座位；情境五也如同情境三跟情境四的模式，但是改為在座位利用率達到 8 成的時候後續訂票編號的旅客會被要求在起迄站之間隨機選一站換座位。

情境三的座位指派結果如下圖 5-5 所示，可以看出訂票編號 12 的旅客被指派座位後列車的座位利用率就達到 6 成了，從這之後的訂票編號的旅客的訂票起迄都會被拆成兩組區間點的組合分開進行座位指派，也就是灰色的格子的部分，這些會需要換座位的旅客總共的換座位距離為 13、換座位的次數為 6，距離指的是同一位旅客換座位前及換座位後的座位編號差，在座位利用率的部分為 0.9：

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1			3		6	6	12	12	14		11
2	1	3	4	6	6				14	10	11
3	1		4	6	6	7			14	10	11
4	1	13	4	14	16	7	9	9	10	11	
5	1	2	4	8	13	7	9	9	16	11	
6	1	2	5	17	21	7	22	23	16	11	
7	1	17	5	18	21	22	23	29	16	11	
8											

圖 5-5 動態鐵路座位指派模式情境三之指派分布

情境四的座位指派結果如下圖 5-6 所示，可以看出訂票編號 19 的旅客被指派座位後列車的座位利用率達到 7 成，從這之後的訂票編號的旅客的訂票起迄都會被拆成兩組區間的組合分開進行座位指派，將會以有顏色的格子表示，這些會需要換座位的旅客總共的換座位距離為 19、換座位的次數為 3，在座位利用率為 0.89：

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1											
2			3		6	6	12	12	19		11
3	1	3	4	6	6				19	10	11
4	1		4	6	6	7			19	10	11
5	1	25	4		13	7	9	9	10	11	
6	1	2	4	8	13	7	9	9	25	11	
7	1	2	5	17	21	7	22	23	26	11	
8	1	18	5	17	21	22	23	29	30	11	

圖 5 - 6 動態鐵路座位指派模式情境四之指派分布

情境五的座位指派結果如下圖 5 - 7 所示，可以看出訂票編號 23 的旅客被指派座位後列車的座位利用率達到 8 成，從這之後的訂票編號的旅客的訂票起迄都會被拆成兩組區間的組合分開進行座位指派，將會用有顏色的格子表示，而這些會需要換座位的旅客總共的換座位距離為 5、換座位的次數為 1，另外在座位利用率為 0.89：

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1											
2			3		6	6	12	12	19		11
3	1	3	4	6	6				19	10	11
4	1		4	6	6	7			19	10	11
5	1	25	4		13	7	9	9	10	11	
6	1	2	4	8	13	7	9	9	25	11	
7	1	2	5	17	21	7	22	23	26	11	
8	1	18	5	17	21	29	22	23	30	11	

圖 5 - 7 動態鐵路座位指派模式情境五之指派分布

在情境六本研究將不以上述三個規則進行動態座位指派，先以不換座位的方式進行動態座位指派，當面臨有旅客在不換座位的情況下沒有座位搭乘列車的情況下，檢視是否可以讓旅客在起迄站間換一次座位而能滿足原本的旅行需求，如果可以即讓旅客在起迄站間換一次座位，以此方式進行指派的結果由下圖 5 - 8 所示，總共有三位旅客需要在起迄站之間換座位，列車的座位利用率為 0.94。

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1		19	3		6	6	12	12	14		11
2		1	3	4	6	6		19	14	10	11
3		1		4	6	6	7	19	14	10	11
4		1	16	4	14	13	7	9	9	10	11
5		1	2	4	8	13	7	9	9	16	11
6		1	2	5	17	21	7	22	23	16	11
7		1	18	5	17	21	29	22	23	16	11
8											

圖 5 - 8 動態鐵路座位指派模式情境六之指派分布

情境七不同於前述明確的以座位利用率做為旅客是否需要換座位的規則，本研究將模糊邏輯控制加入動態座位指派檢測中，其規則如下：

表 5 - 6 簡例之主觀制定之模糊邏輯規則

	利用率極低	利用率低	利用率中	利用率高	利用率極高
搭乘區間極短	1	1	2	2	3
搭乘區間短	1	2	2	3	4
搭乘區間中	2	2	3	4	4
搭乘區間長	2	3	4	4	5
搭乘區間極長	3	4	4	5	5

依照訂票編號 1 到 30 的順序先進行座位指派，透過模糊邏輯控制中較細膩的規則去決定每筆訂票是否需要換座位，換座位的車站仍然以隨機選擇的方式決定。其指派結果如圖 5 - 9。

車站	1	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
1		19	3		6	6	12	12	14		11
2		1	3	4	6	6		19	14	10	11
3		1		4	6	6	7	19	14	10	11
4		1	14	4	16	13	7	9	9	10	11
5		1	2	4	8	13	7	9	9	16	11
6		1	2	5	17	21	7	22	23	16	11
7		1	17	5	18	21	23	22	29	16	11
8											

圖 5 - 9 動態鐵路座位指派模式情境七之指派分布

由結果可以看出某些旅客因為模糊邏輯控制中的規則的影響而需要換座位，且不

同於情境三、情境四及情境五先指派不需換座位的訂票直到列車座位利用率達到一個門檻值，而是依據當前列車中座位利用率的情況以及該訂票所搭乘區間的長短來做是否換座位的控制，所以某些旅客在座位利用率低的情況可能也需要換座位，這使的列車座位利用率達到 0.94。

儘管情境七以模糊邏輯規則指派的結果中座位利用率達到最高，然而換座位次數卻也多達 5 次，為了改善指派結果，情境八以基因演算法優化模糊邏輯控制中的規則，本研究將模糊邏輯控制加入動態座位指派檢測中，其規則如：

表 5 - 7 簡例之以基因演算法優化表 5 - 7 之模糊邏輯規則

	利用率極低	利用率低	利用率中	利用率高	利用率極高
搭乘區間極短	1	0	0	1	1
搭乘區間短	1	0	0	1	0
搭乘區間中	1	1	3	5	0
搭乘區間長	0	2	0	1	0
搭乘區間極長	1	0	0	1	0

指派的結果由下圖 5 - 10 所示，有三位旅客需要在起迄站之間換座位，列車的座位利用率為 0.94。

	seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10
19	3		6	6	12	12	14		11	
1	3	4	6	6	19	14	10	11		
1		4	6	6	7	19	14	10	11	
1	16	4	14	13	7	9	9	10	11	
1	2	4	8	13	7	9	9	16	11	
1	2	5	17	21	7	22	23	16	11	
1	18	5	17	21	29	22	23	16	11	

圖 5 - 10 動態鐵路座位指派模式情境八之指派分布

由情境三、情境四及情境五可以看出進行不換座位的動態座位指派到達不同的座位利用率後才開始將後續訂票的旅客進行可以換座位的指派會造成最後列車座位利用率的不同，並且情境三最後的座位利用率高於情境四及情境五，而情境四及情境五最後的座位利用率則相同，所以本研究發現越早開始進行可以換座位的指派其最後列車的座位利用率越高。情境六為接近現行台鐵的訂票方式，先進行不換座位的旅客座位指派，若當旅客遇到需要在起迄站之間換座位否則無法前往目的地的情況是讓旅客在起迄站之間換座位，以此種方法的座位利用率較情

境三提升 4%，換座位次數也較低。而將模糊邏輯控制加入動態座位指派的情境七，透過主觀設定的模糊邏輯規則控制旅客是否需要換座位，因為模糊邏輯控制更貼近人性且更為細膩的控制，讓動態座位指派更符合列車當前容量情況及旅客搭乘區間長短去做旅客換座位控制，這也使得某些旅客可能比情境三、情境四及情境五設定的門檻值更早就需要換座位，讓列車最後的座位利用率較情境三、情境四及情境五更高，然而換座位次數卻較情境六的換座位次數高。因此本研究在情境八將基因演算法加入模糊邏輯控制，指派結果得到與情境六跟情境七相同的座位利用率，但換座位次數比情境七少，與情境六的換座位次數相同。



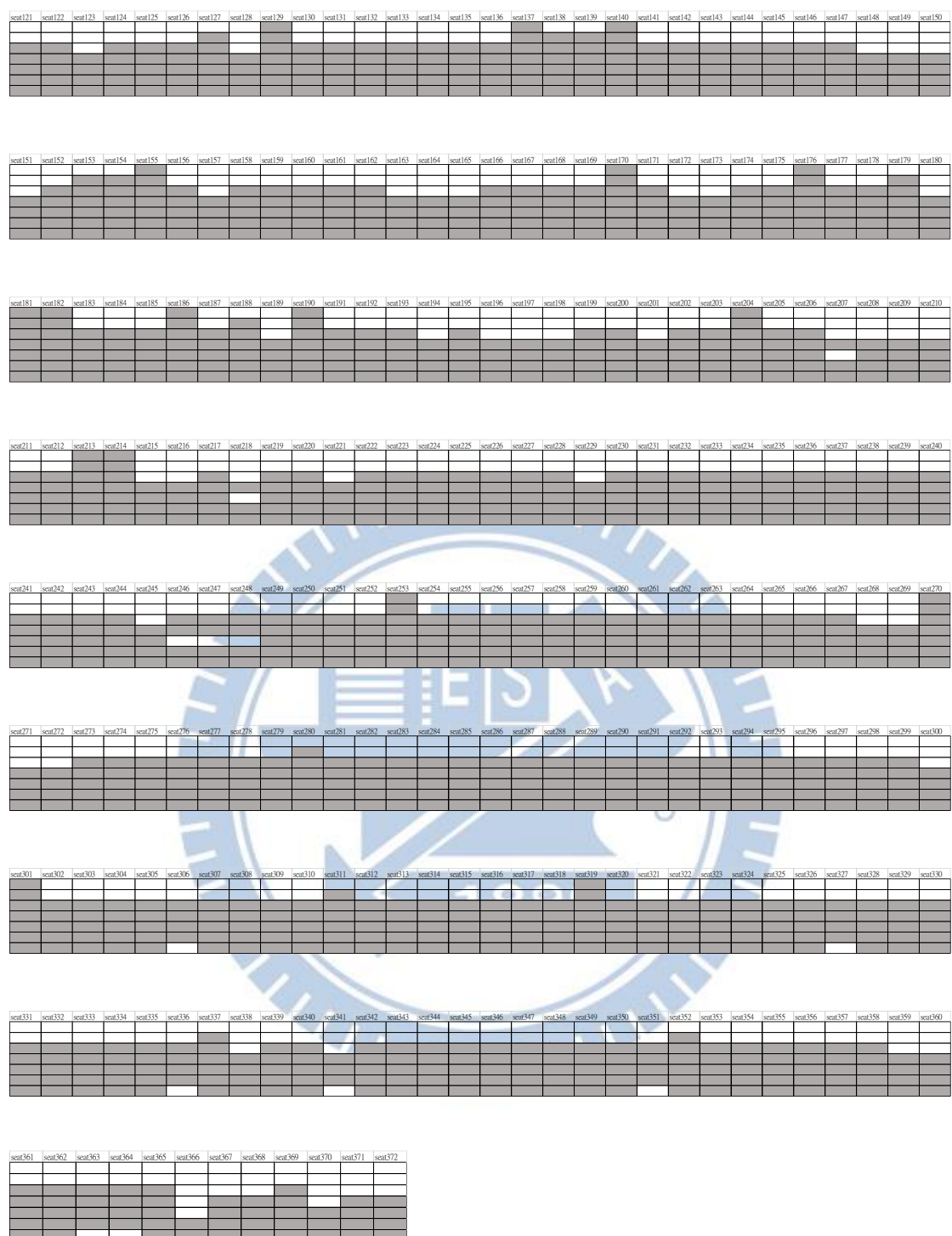


圖 6-2 情境二之座位指派結果

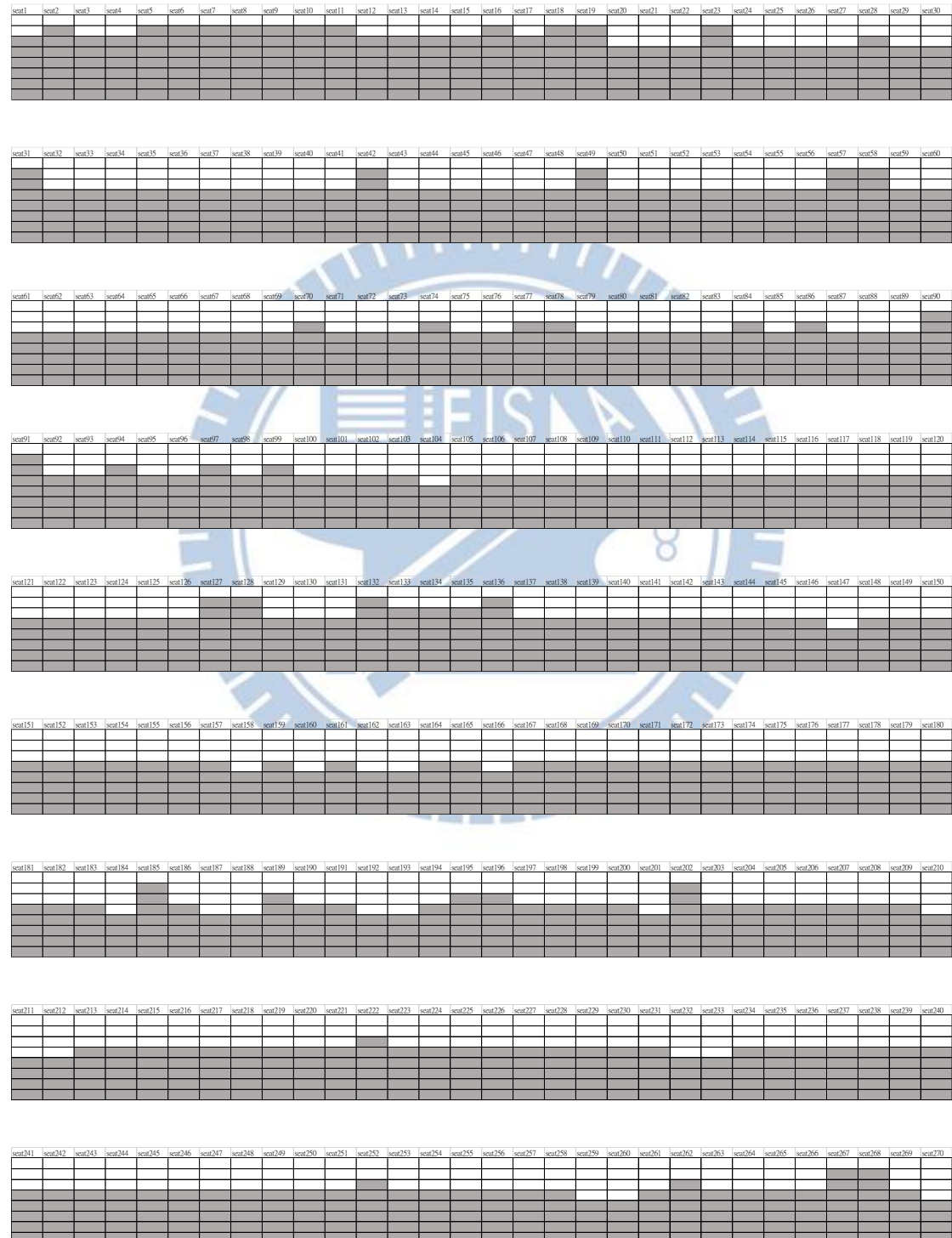
其換座位的旅客如表 6-2，其中旅客代號為依照旅客訂票順序給定的編號，換座位距離則為換座位前與換座位後的座位號碼的差。

表 6-2 情境二旅客換座位情況

旅客代號	換座位距離
13	19

22	31
27	35
84	44
85	2
88	4
90	114
92	113
93	10
98	105
99	116
102	109
104	121
116	135
124	63
125	17
127	154
153	25
161	173
162	38
185	172
279	74
282	73
284	90
285	19
286	2
287	24
288	98
290	302
292	28
293	301
294	9
295	2
296	2
297	71
298	30
301	58
302	53

座位指派模式中本研究將旅客從列車中座位號碼最小的開始指派，可以得到指派結果之座位利用率 0.711，其旅客座位指派分布結果如圖 6-5，其中圖中的縱軸由上而下的每一個格子分別代表樹林-板橋、板橋-台北、台北-松山、松山-宜蘭、宜蘭-羅東、羅東-新城及新城-花蓮 7 個區間，橫軸的格子為列車的座位號碼，依序為 1 號到 372 號：



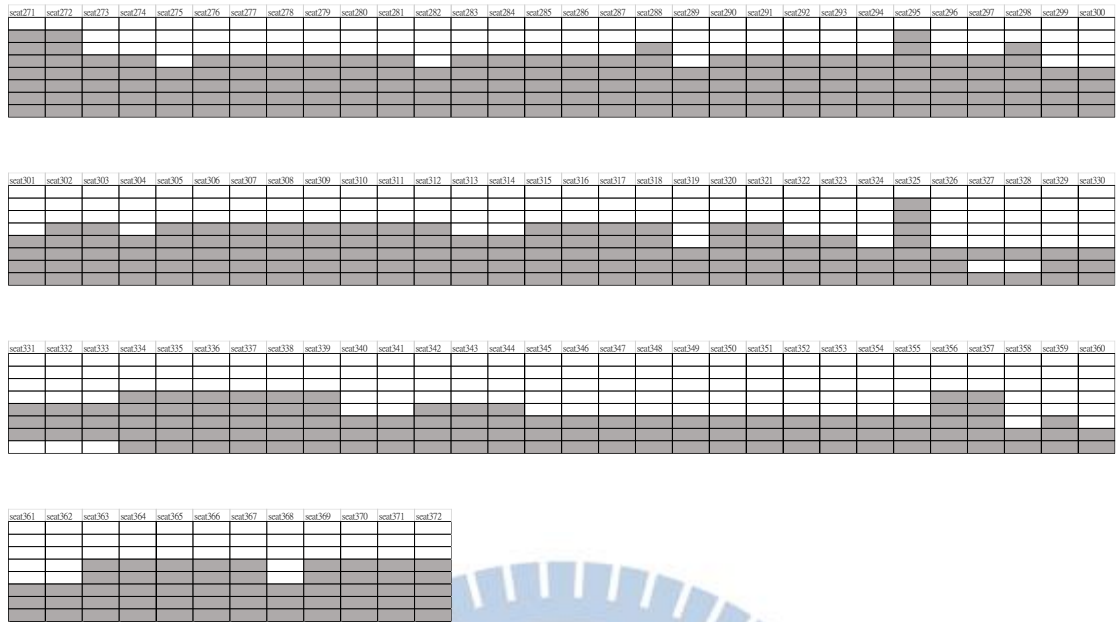


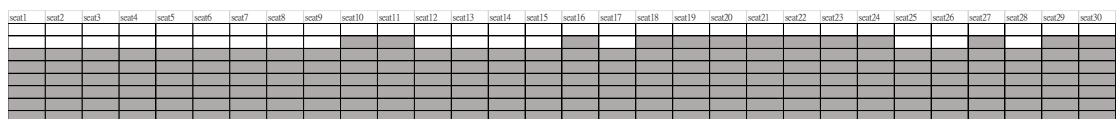
圖 6-5 情境四座位指派結果

情境五的部分本研究加入模糊邏輯控制至動態鐵路座位指派模式中以控制每位訂票的旅客是否需要起迄站之間換座位。在模糊邏輯控制中的規則方面本研究在這個情境中以主觀的想法去制定，其規則如表 6-4：

表 6-4 情境五主觀制定的模糊邏輯控制規則

	利用率極低	利用率低	利用率中	利用率高	利用率極高
搭乘區間極短	1	1	1	1	1
搭乘區間短	1	1	2	3	3
搭乘區間中	1	2	3	3	4
搭乘區間長	2	3	3	4	5
搭乘區間極長	3	3	4	5	5

依據表 6-4 之規則之座位指派結果該車次列車之座位利用率為 0.711，需要換座位的旅客數為 30 人，旅客的座位指派分布結果如圖 6-6 所示，圖中的縱軸由上而下的每一個格子分別代表樹林-板橋、板橋-台北、台北-松山、松山-宜蘭、宜蘭-羅東、羅東-新城及新城-花蓮 7 個區間，橫軸的格子為列車的座位號碼，依序為 1 號到 372 號，灰色個子部分為被利用的座位：



seat31	seat32	seat33	seat34	seat35	seat36	seat37	seat38	seat39	seat40	seat41	seat42	seat43	seat44	seat45	seat46	seat47	seat48	seat49	seat50	seat51	seat52	seat53	seat54	seat55	seat56	seat57	seat58	seat59	seat60

seat61	seat62	seat63	seat64	seat65	seat66	seat67	seat68	seat69	seat70	seat71	seat72	seat73	seat74	seat75	seat76	seat77	seat78	seat79	seat80	seat81	seat82	seat83	seat84	seat85	seat86	seat87	seat88	seat89	seat90

seat91	seat92	seat93	seat94	seat95	seat96	seat97	seat98	seat99	seat100	seat101	seat102	seat103	seat104	seat105	seat106	seat107	seat108	seat109	seat110	seat111	seat112	seat113	seat114	seat115	seat116	seat117	seat118	seat119	seat120

seat121	seat122	seat123	seat124	seat125	seat126	seat127	seat128	seat129	seat130	seat131	seat132	seat133	seat134	seat135	seat136	seat137	seat138	seat139	seat140	seat141	seat142	seat143	seat144	seat145	seat146	seat147	seat148	seat149	seat150

seat151	seat152	seat153	seat154	seat155	seat156	seat157	seat158	seat159	seat160	seat161	seat162	seat163	seat164	seat165	seat166	seat167	seat168	seat169	seat170	seat171	seat172	seat173	seat174	seat175	seat176	seat177	seat178	seat179	seat180

seat181	seat182	seat183	seat184	seat185	seat186	seat187	seat188	seat189	seat190	seat191	seat192	seat193	seat194	seat195	seat196	seat197	seat198	seat199	seat200	seat201	seat202	seat203	seat204	seat205	seat206	seat207	seat208	seat209	seat210

seat211	seat212	seat213	seat214	seat215	seat216	seat217	seat218	seat219	seat220	seat221	seat222	seat223	seat224	seat225	seat226	seat227	seat228	seat229	seat230	seat231	seat232	seat233	seat234	seat235	seat236	seat237	seat238	seat239	seat240

seat241	seat242	seat243	seat244	seat245	seat246	seat247	seat248	seat249	seat250	seat251	seat252	seat253	seat254	seat255	seat256	seat257	seat258	seat259	seat260	seat261	seat262	seat263	seat264	seat265	seat266	seat267	seat268	seat269	seat270

seat271	seat272	seat273	seat274	seat275	seat276	seat277	seat278	seat279	seat280	seat281	seat282	seat283	seat284	seat285	seat286	seat287	seat288	seat289	seat290	seat291	seat292	seat293	seat294	seat295	seat296	seat297	seat298	seat299	seat300

seat301	seat302	seat303	seat304	seat305	seat306	seat307	seat308	seat309	seat310	seat311	seat312	seat313	seat314	seat315	seat316	seat317	seat318	seat319	seat320	seat321	seat322	seat323	seat324	seat325	seat326	seat327	seat328	seat329	seat330

seat331	seat332	seat333	seat334	seat335	seat336	seat337	seat338	seat339	seat340	seat341	seat342	seat343	seat344	seat345	seat346	seat347	seat348	seat349	seat350	seat351	seat352	seat353	seat354	seat355	seat356	seat357	seat358	seat359	seat360

332	5
333	35
334	214
335	35
336	27
337	31
338	160

接著本研究將 2016 年 3 月 20 日星期日 218 次列車的訂票資料應用到模式中的基因演算法自動學習模糊邏輯控制中的規則，優化的規則作為假日動態座位指派中的模糊邏輯控制規則，以得到最佳的座位指派結果，得到的規則如表 6-6 所示：

表 6-6 情境六透過基因演算法優化的模糊邏輯控制規則

	利用率極低	利用率低	利用率中	利用率高	利用率極高
搭乘區間極短	1	1	0	0	0
搭乘區間短	0	1	1	4	4
搭乘區間中	2	0	1	3	3
搭乘區間長	0	2	2	0	1
搭乘區間極長	0	2	0	3	0

座位指派結果如圖 6-7 所示，圖中的縱軸由上而下的每一個格子分別代表樹林-板橋、板橋-台北、台北-松山、松山-宜蘭、宜蘭-羅東、羅東-新城及新城-花蓮 7 個區間，橫軸的格子為列車的座位號碼，依序為 1 號到 372 號，灰色個子部分為被利用的座位：

seat1	seat2	seat3	seat4	seat5	seat6	seat7	seat8	seat9	seat10	seat11	seat12	seat13	seat14	seat15	seat16	seat17	seat18	seat19	seat20	seat21	seat22	seat23	seat24	seat25	seat26	seat27	seat28	seat29	seat30

seat31	seat32	seat33	seat34	seat35	seat36	seat37	seat38	seat39	seat40	seat41	seat42	seat43	seat44	seat45	seat46	seat47	seat48	seat49	seat50	seat51	seat52	seat53	seat54	seat55	seat56	seat57	seat58	seat59	seat60

seat61	seat62	seat63	seat64	seat65	seat66	seat67	seat68	seat69	seat70	seat71	seat72	seat73	seat74	seat75	seat76	seat77	seat78	seat79	seat80	seat81	seat82	seat83	seat84	seat85	seat86	seat87	seat88	seat89	seat90

由應用結果可以得到該班列車的座位利用率達到 0.713，其中只有一位旅客需要在起迄站之間進行換座位的動作，如圖 6 - 8 所示，第 451 號旅客從羅東站上車前往新城站，在羅東站上車後被指派到 327 號座位，然而到了新城站後必須換座位到 331 號座位。

	seat327	seat328	seat329	seat330	seat331
樹林-板橋					
板橋-台北					
台北-松山					
松山-宜蘭					287
宜蘭-羅東	277	289	289	324	287
羅東-新城	451		278	285	287
新城-花蓮	273	273	278	285	451

圖 6 - 8 情境六換座位情況

由上述六個情境可以得到在動態座位指派模式中如果加入模糊邏輯控制來控制旅客是否需要在起迄站之間換座位有可能會提高列車的座位利用率，然而並不一定完全如此，例如在情境二及情境五雖然都在動態座位指派模式中加入以主觀制定規則的模糊邏輯控制系統，在情境二中部分旅客需要在起迄站之間換座位而列車的座位利用率較不換座位的指派模式提高了，但是在情境五中讓部分旅客在起迄站之間換座位卻沒有使列車座位利用率提高。然而從情境三及情境六可以得知若透過基因演算法優化模糊邏輯控制中的規則組合後，可以依照該班列車的訂票情況去最佳化旅客可換座位的情形以及列車座位利用率，也就是同時達到換座位的旅客人數最少以及列車座位利用率最大。

6.2 動態鐵路座位指派模式之實例驗證

最後為了驗證由情境三及情境六分別得到的平日及假日以基因演算法優化的模糊邏輯控制規則是否適用於其他平日以及假日，本研究將情境三的模糊邏輯規則應用到 2016 年 3 月 16 日星期二的該班列車，以及將情境六的模糊邏輯規則應用到 2016 年 3 月 19 日星期六的該班列車，以驗證兩個情境的規則所指派的結果優於不換座位之動態座位指派模式及類似台鐵現行之指派模式，台鐵現行之指派模式指的是先以不換座位的方式進行動態座位指派，當面臨有旅客在不換座位的情況下沒有座位搭乘列車的情況下，檢視是否可以讓旅客在起迄站間換座位後能滿足原本的旅行需求，在本研究中為了公平比較，限制換座位次數為一次。

首先在 2016 年 3 月 16 日以不換座位的模式進行座位指派，指派結果座位利用率為 0.720，以類似台鐵現行指派模式之指派結果座位利用率為 0.721，較不換

[illegible]

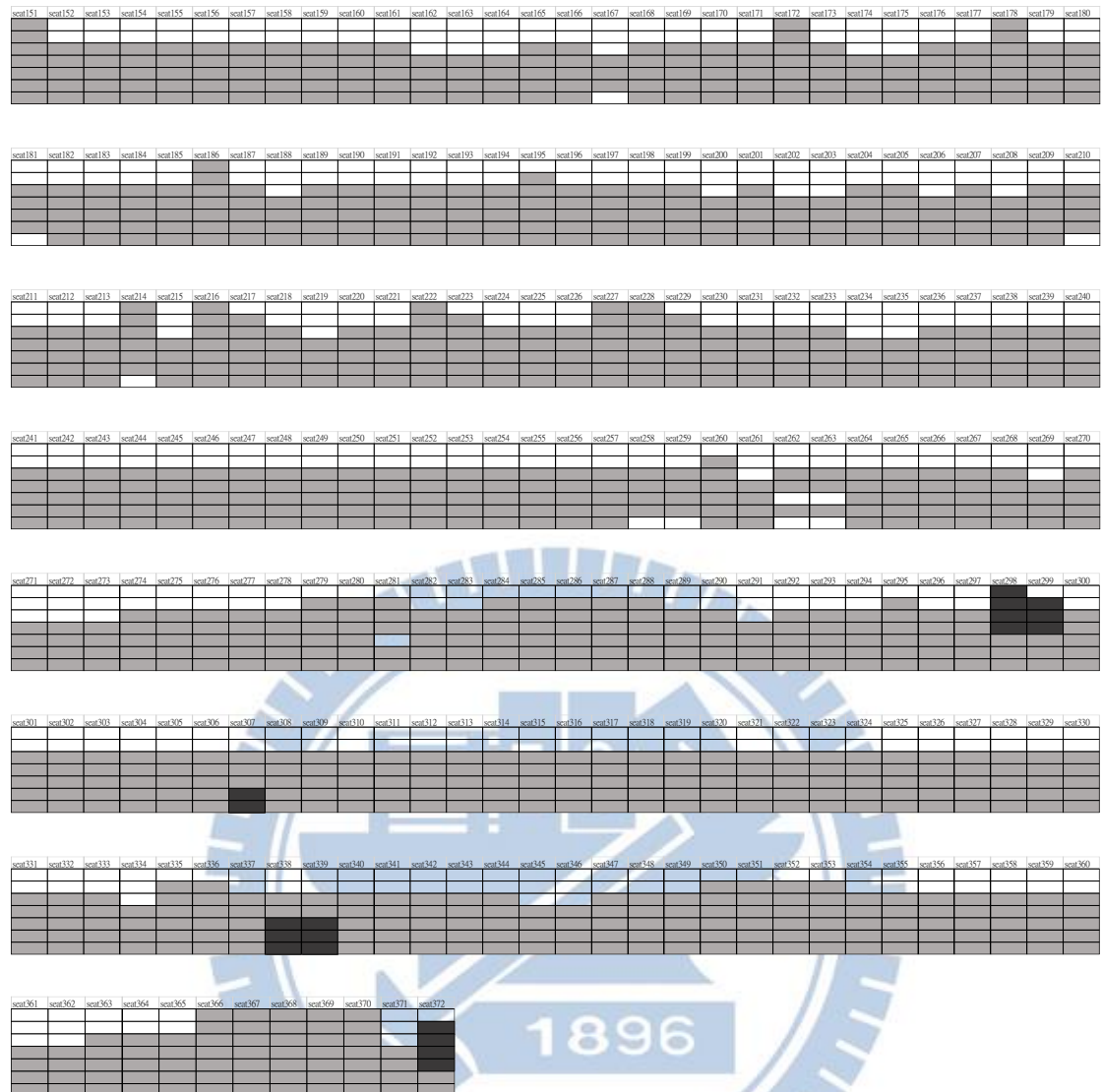


圖 6 - 11 2016 年 3 月 16 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之指派結果
需要換座位的旅客數為 3 位，換座位情況如圖 6 - 12。

	seat297	seat298	seat299		seat338	seat339	seat340
樹林-板橋		282		→	樹林-板橋		
板橋-台北		282	287		板橋-台北		
台北-松山		282	287		台北-松山		
松山-宜蘭		282	287		松山-宜蘭		
宜蘭-羅東					宜蘭-羅東	282	287
羅東-新城					羅東-新城	282	287
新城-花蓮					新城-花蓮	282	287

	seat306	seat307	seat308		seat370	seat371	seat372
樹林-板橋				→	樹林-板橋		
板橋-台北					板橋-台北		279
台北-松山					台北-松山		279
松山-宜蘭					松山-宜蘭		279
宜蘭-羅東					宜蘭-羅東		279
羅東-新城		279			羅東-新城		
新城-花蓮		279			新城-花蓮		

圖 6 - 12 2016 年 3 月 16 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之換座位情況

[illegible][illegible][illegible][illegible]

圖 6-13 2016 年 3 月 13 日以類似台鐵現行指派模式之指派結果

其中換座位的旅客僅一位，換座位情況如下圖圖 6-14。

	seat218	seat219	seat220			seat227	seat228	seat229
樹林-板橋				→	樹林-板橋			
板橋-台北	161				板橋-台北			
台北-松山	161	162	163		台北-松山	169	17	171
松山-宜蘭	161	162	163		松山-宜蘭	169	17	171
宜蘭-羅東	161	299	163		宜蘭-羅東	169	17	171
羅東-新城	161	191	163		羅東-新城	169	299	171
新城-花蓮	161	191	163		新城-花蓮	169	299	171

圖 6-14 2016 年 3 月 13 日以類似台鐵現行指派模式之指派結果之換座位情況

最後以 2016 年 3 月 20 日的訂票資料進行基因演算法優化的假日的模糊邏輯規則套入 2016 年 3 月 13 日進行驗證得到座位利用率為 0.762，有 8 位旅客需要換座位，指派結果如圖 6-15。

[illegible][illegible][illegible]

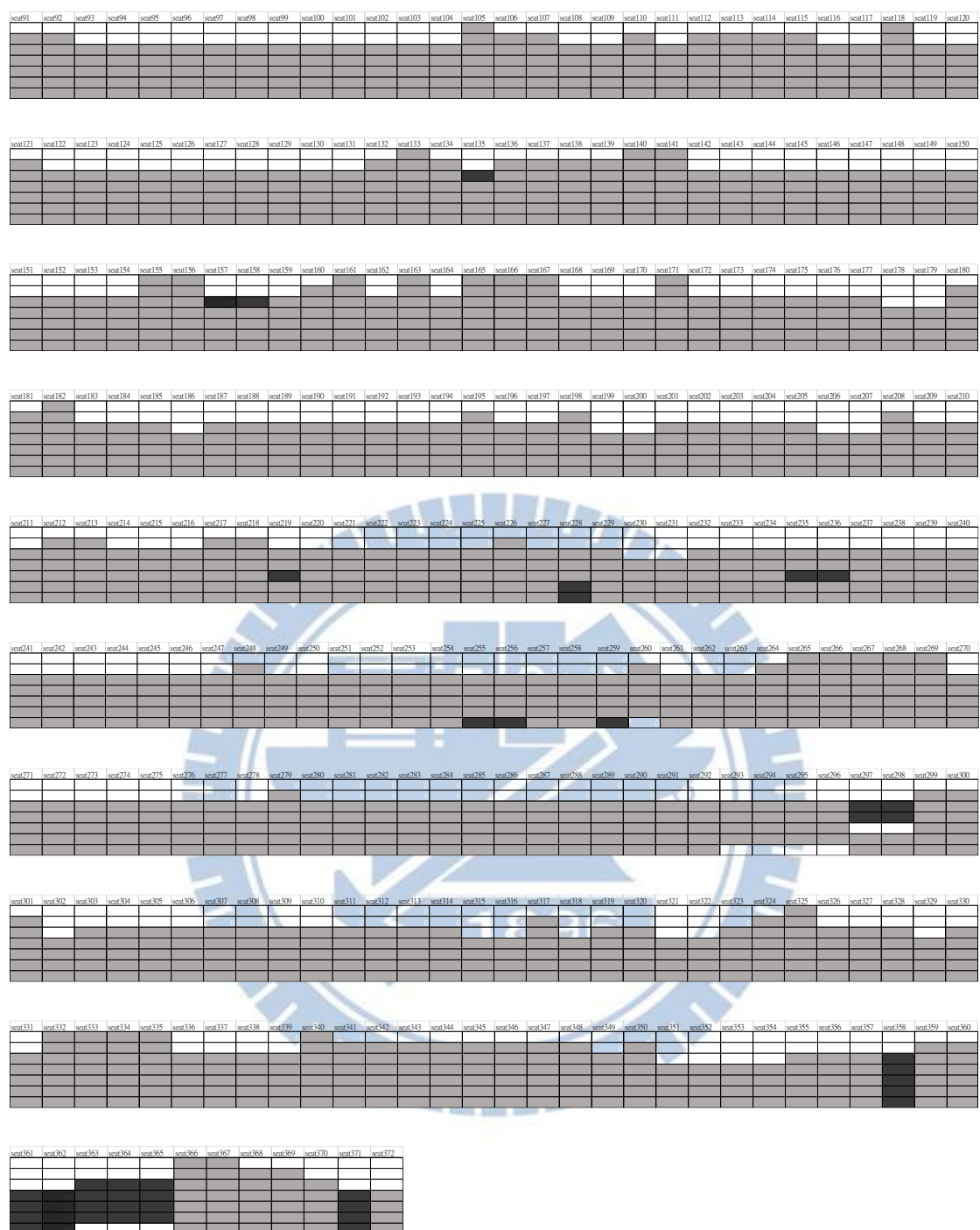
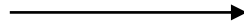


圖 6 - 15 2016 年 3 月 13 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之指派結果
其中換座位的旅客有 8 位，換座位情況如下圖 6 - 16：

	seat296	seat297	seat298
樹林-板橋			
板橋-台北			
台北-松山	222	261	261
松山-宜蘭	222	261	261
宜蘭-羅東	222		
羅東-新城	222	224	224
新城-花蓮		224	224



	seat234	seat235	seat236
樹林-板橋			
板橋-台北			
台北-松山	175	176	176
松山-宜蘭	175	176	176
宜蘭-羅東	175	261	261
羅東-新城	175	200	200
新城-花蓮	175	200	200

	seat357	seat358	seat359
樹林-板橋			
板橋-台北			263
台北-松山	260	262	263
松山-宜蘭	260	262	263
宜蘭-羅東	260	262	263
羅東-新城	260	300	263
新城-花蓮	260	300	263



	seat227	seat228	seat229
樹林-板橋			
板橋-台北			
台北-松山	169	170	171
松山-宜蘭	169	170	171
宜蘭-羅東	169	170	171
羅東-新城	169	262	171
新城-花蓮	169	262	171

	seat134	seat135	seat136
樹林-板橋			
板橋-台北	68		70
台北-松山	68	264	70
松山-宜蘭	68	69	70
宜蘭-羅東	68	69	70
羅東-新城	68	179	70
新城-花蓮	68	179	70



	seat360	seat361	seat362
樹林-板橋			
板橋-台北	263		
台北-松山	263		
松山-宜蘭	263	264	265
宜蘭-羅東	263	264	265
羅東-新城	263	264	265
新城-花蓮	263	264	265

	seat156	seat157	seat158
樹林-板橋	90		
板橋-台北	90		
台北-松山	90	265	271
松山-宜蘭	90	91	91
宜蘭-羅東	90	91	91
羅東-新城	90	91	91
新城-花蓮	90	91	91



	seat360	seat361	seat362
樹林-板橋			
板橋-台北	263		
台北-松山	263		
松山-宜蘭	263	264	265
宜蘭-羅東	263	264	265
羅東-新城	263	264	265
新城-花蓮	263	264	265

	seat363	seat364	seat365
樹林-板橋			
板橋-台北			
台北-松山	266	266	267
松山-宜蘭	266	266	267
宜蘭-羅東	266	266	267
羅東-新城	266	266	267
新城-花蓮			



	seat254	seat255	seat256
樹林-板橋			
板橋-台北			
台北-松山	198	199	199
松山-宜蘭	198	199	199
宜蘭-羅東	198	199	199
羅東-新城	198	199	199
新城-花蓮	198	266	266

	seat363	seat364	seat365
樹林-板橋			
板橋-台北			
台北-松山	266	266	267
松山-宜蘭	266	266	267
宜蘭-羅東	266	266	267
羅東-新城	266	266	267
新城-花蓮			



	seat258	seat259	seat260
樹林-板橋			
板橋-台北			203
台北-松山	201	202	203
松山-宜蘭	201	202	203
宜蘭-羅東	201	202	203
羅東-新城	201	202	203
新城-花蓮	201	267	

	seat156	seat157	seat158		seat370	seat371	seat372
樹林-板橋	90				樹林-板橋		
板橋-台北	90				板橋-台北		
台北-松山	90	265	271		台北-松山	270	
松山-宜蘭	90	91	91		松山-宜蘭	270	271 272
宜蘭-羅東	90	91	91		宜蘭-羅東	270	271 272
羅東-新城	90	91	91		羅東-新城	270	271 272
新城-花蓮	90	91	91		新城-花蓮	270	271 272

	seat218	seat219	seat220		seat357	seat358	seat359
樹林-板橋					樹林-板橋		
板橋-台北	161				板橋-台北		263
台北-松山	161	162	163		台北-松山	260	262 263
松山-宜蘭	161	162	163		松山-宜蘭	260	262 263
宜蘭-羅東	161	300	163		宜蘭-羅東	260	262 263
羅東-新城	161	191	163		羅東-新城	260	300 263
新城-花蓮	161	191	163		新城-花蓮	260	300 263

圖 6 - 16 2016 年 3 月 13 日以基因演算法優化模糊邏輯規則之換座位情況

由上述 2016 年 3 月 16 日以及 2016 年 3 月 13 日應用結果可以得到以基因演算法優化之模糊邏輯規則的動態座位指派模式在平日與假日皆可以使列車的座位利用率較不換座位的動態座位指派結果的座位利用率高。在與類似台鐵現行座位指派模式相比方面，在 2016 年 3 月 16 日的應用結果中，儘管以基因演算法優化之模糊邏輯規則的動態座位指派模式中換座位旅客數較類似台鐵現行座位指派模式指派結果的換座位旅客數多 1 次，然而座位利用率卻提升了 0.001。在 2016 年 3 月 13 日的應用結果方面，雖然以基因演算法優化之模糊邏輯規則的動態座位指派模式指派結果的座位利用率與類似台鐵現行座位指派模式指派結果的座位利用率相同，但是換座位次數卻多了 7 次。因此以基因演算法優化之模糊邏輯規則的動態座位指派模式在平日的應用結果良好，但是在假日的應用結果與類似台鐵現行座位指派模式相比仍顯不足。

第七章 結論與建議

本研究的發想是由於鐵路業者在訂票及旅客座位指派所面臨之問題相較於航空業者更為複雜，在航空業中的座位指派僅需要考慮單一起迄點，然而在鐵路業中卻要考慮多種起迄點的組合，因此，如何將旅客指派到適當的座位將會對列車中的座位利用率有很大的影響，所以本研究參照過去文獻對於鐵路訂票以及旅客座位指派改善的方式，提出了讓旅客在起迄站之間換座位的座位指派模式。

7.1 結論

在建立的基本靜態鐵路座位指派模式中，可以得出在不讓旅客換座位的情況下有相較於基本動態鐵路座位指派更加的結果，此外該模式可以以數學規劃直接求得精確解。接著本研究以基本靜態鐵路座位指派模式做為基礎建立了起迄站之間可換座位之靜態鐵路模式，該模式透過將旅客的搭乘起迄區間拆成由多個兩個相鄰車站區間的組合，這使旅客在每一個車站都會被重新指派座位，由此種指派方式能確保列車中的座位利用率達到最大，然而可能會有旅客因為過於頻繁的換座位造成不便，因此在該模式也追求最小化旅客的換座位次數。

但是靜態模式由於需要先獲得所有訂票旅客的訂票資料才能進行座位指派，在現實中較不易執行，儘管在過去文獻中有提到以此方式指派座位能夠最有效的利用列車中的座位。因此本研究透過在兩個靜態的鐵路座位指派模式指派座位的情況以及概念建立了動態的鐵路座位指派模式，在動態座位指派模式中，本研究先以檢測及模擬的方式了解到動態的鐵路座位指派其列車座位利用率會較靜態的鐵路座位指派低，接著本研究將相同的訂票資料更改訂票的先後順序，以動態的鐵路座位指派後得到不同的座位利用率，因此了解在動態的鐵路座位指派模式中旅客的訂票先後順序會嚴重影響到列車中的座位利用率。

然而在現實中旅客的訂票先後順序是不可控制的，因此為了提高列車的座位利用率將靜態鐵路座位指派模式中的換座位的概念加入動態鐵路座位指派模式中，以旅客訂票當前列車的座位利用率情況做為旅客是否需要在起迄站之間換座位的條件，本研究分為三個情境進行檢測，分別是當列車座位利用率達到 6 成後訂票的旅客都需要在起迄站之間換座位、當列車座位利用率達到 7 成後訂票的旅客都需要在起迄站之間換座位及當列車座位利用率達到 8 成後訂票的旅客都需要在起迄站之間換座位，結果可以得到當列車座位利用率達到 6 成後訂票的旅客都需要在起迄站之間換座位的座位利用率最高，由此可知在座位利用率越低的情

況下開始讓旅客在起迄站之間換座位會使列車最終的座位利用率越高。

雖然由前述得知在座位利用率越低的情況下開始讓旅客在其搭乘起迄站之間換座位會使列車最終的座位利用率越高，本研究仍然尋求是否有別的控制系統可進行旅客在起迄站之間換座位的動作，因此本研究加入了模糊邏輯控制到動態的鐵路座位指派模式中，並以簡例驗證得到指派結果不管在座位利用率或是旅客換座位次數皆優於前述的三個情境。但是在本研究模擬類似台鐵現行座位指派模式並以相同的簡例檢測後發現，加入了模糊邏輯控制的動態鐵路座位指派模式之指派結果雖然座位利用率一樣高，但是換座位次數卻較多，因此本研究接著且以基因演算法優化模糊邏輯控制中的規則，得到其指派結果與類似台鐵現行座位指派模式結果相同。

最後在應用台鐵實際的訂票資料中本研究先選出一個平日與一個假日的訂票資料分別作以基因演算法做模糊邏輯控制規則的訓練，並且確認訓練後的模糊邏輯規則進行的動態鐵路座位指派結果優於不換座位的動態鐵路座位指派模式以及以主觀設定的模糊邏輯控制規則的動態鐵路座位指派結果。接著以透過基因演算法訓練過後的模糊邏輯規則應用到其他平日與假日進行驗證，得到在平日的指派結果中儘管需要換座位的旅客數多了一位，但是較類似台鐵現行座位指派模式的指派結果的座位利用率提升 0.001；在假日部分指派結果與類似台鐵現行座位指派模式的指派結果的座位利用率相同，但是換座位的旅客數卻多 7 位，因此在假日部分的指派模式仍顯不足。

7.2 建議

1. 本研究在進行座位指派時並沒有考慮到列車車廂以及車廂內走道所造成的座位的阻隔，僅以座位號碼連續及視為座位相鄰，這在單人旅客上影響並不大，然而鐵路旅客中有很大部分的團體旅客，團體旅客較注重座位同團旅客座位鄰近，因此未來研究可以將這部分的因素考慮到鐵路座位指派問題中。
2. 現在部分鐵路業者進行鐵路座位指派時往往還會考慮旅客的舒適性及方便性，例如旅客上下車時旁邊座位是否有旅客乘坐而造成的干擾，又或是旅客上下車若過於集中在同一個車廂造成的壅擠，以及本研究所提出的模式中所需要進行的在起迄站之間換座位的動作，使部分旅客需要換到較遠的座位而造成的不方便，本研究認為這些是未來也可以加入鐵路座位指派的考慮因素中。

3. 本研究僅考慮旅客在起迄站之間換座位有助於列車座位利用率的提升，然而若讓團體旅客原本相鄰的座位被拆開成不相鄰的，也有可能有助於提升列車的座位利用率，本研究認為這是未來能夠考慮提升列車座位利用率的另一個鐵路座位指派模式。
4. 由於本研究在動態鐵路座位指派模式中是利用基因演算法優化模糊邏輯控制中的規則以最佳化列車的座位利用率以及最小化要換座位的旅客數，若能夠以數學規劃對動態鐵路座位指派求得精確解相信會是未來相當有趣的研究方向。
5. 本研究中利用基因演算法優化模糊邏輯控制規則的動態座位指派模式在假日的實例應用結果方面仍然有明顯的不足，希望未來能有學者針對這部分在進行更進一步的研究。



參考文獻

1. 王泓達 (2013), 「台灣高鐵團體旅客車廂與座位配置之研究」, 成功大學交通管理科學研究所碩士班, 碩士論文。
2. 長野裕., 江口俊., 浜田ち, & 佐々木敏. (1999). A Conception of Passenger Information Service System Using Smart Card : Evaluation of Train Reservation Method allowing the Extension of Time for Seat Allocation. *全国大会講演論文集*, 59, 205-206.
3. Ana, M., & Andreas, B. (2017). A two-stage packing problem procedure. *International Transactions in Operational Research*, 24(1-2), 43-58.
4. Boyar, J., Krarup, S., & Nielsen, M. N. (2001). Seat reservation allowing seat changes. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 50(1), 24-38.
5. Boyar, J., & Larsen, K. S. (1999). The seat reservation problem. *Algorithmica*, 25(4), 403-417.
6. Clausen, T., Hjorth, A. N., Nielsen, M., & Pisinger, D. (2010). The off-line group seat reservation problem. *European Journal of Operational Research*, 207(3), 1244-1253.
7. Fekete, S. P., & Schepers, J. (2004). A combinatorial characterization of higher-dimensional orthogonal packing. *Mathematics of Operations Research*, 29(2), 353-368.
8. Kohrt, J. S., & Larsen, K. S. (2005). On-line seat reservations via off-line seating arrangements. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 16(02), 381-397.
9. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. (1999). Approximation algorithms for the oriented two-dimensional bin packing problem. *European Journal of Operational Research*, 112(1), 158-166.
10. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. (2002). Recent advances on two-dimensional bin packing problems. *Discrete Applied Mathematics*, 123(1), 379-396.

11. Lodi, A., Martello, S., & Vigo, D. (2004). Models and bounds for two-dimensional level packing problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 8(3), 363-379.
12. Martello, S., & Vigo, D. (1998). Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. *Management Science*, 44(3), 388-399.
13. Parreño, F., Alvarez-Valdes, R., Oliveira, J. F., & Tamarit, J. M. (2010). A hybrid GRASP/VND algorithm for two- and three-dimensional bin packing. *Annals of Operations Research*, 179(1), 203-220.
14. Pisinger, D. (2002). Heuristics for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 141(2), 382-392.
15. Pisinger, D., & Sigurd, M. (2007). Using decomposition techniques and constraint programming for solving the two-dimensional bin-packing problem. *INFORMS Journal on Computing*, 19(1), 36-51.
16. Wang, P. Y. (1983). Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems. *Operations Research*, 31(3), 573-586.
17. Wong, J.-T., Koppelman, F. S., & Daskin, M. S. (1993). Flexible assignment approach to itinerary seat allocation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 27(1), 33-48.