

國立交通大學
運輸與物流管理學系

碩士論文

路網設計求解演算法之探討
The Solution Algorithm for Network Design

研究生：許哲瑋

指導教授：卓訓榮

中華民國一零七年七月

路網設計求解演算法之探討

The Solution Algorithm for Network Design

研究生：許哲瑋

Student：Che-Wei Hsu

指導教授：卓訓榮

Advisor：Hsun-Jung Cho

國立交通大學

運輸與物流管理學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Transportation and Logistics Management

College of Management

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master

In

Traffic and Transportation

June 2018

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一零七年七月

路網設計求解演算法之探討

學生：許哲瑋

指導教授：卓訓榮

國立交通大學運輸與物流管理學系碩士班

摘要

雙層路網設計問題可利用變分不等式為限制式的數學規劃問題來模式化，是一種以均衡為限制式的數學規劃問題，其屬於領導與跟隨的 Stackelberg 賽局，求解過程須有跟隨者對領導者的反應函數，並將其帶入目標式求解，但路網中無法求得用路人的反應函數，Cho(1988)利用一階泰勒展開式來近似反應函數，其係數值是透過路網敏感度分析求得。路網敏感度分析是由 Tobin 和 Friesz(1988)放鬆 Tobin(1986)變分不等式敏感度分析中解須滿足唯一性條件，其利用線性規劃求出一組非退化路徑流量解，使變分不等式敏感度分析可應用在均衡路網，但其非退化條件過於嚴苛一般路網無法直接應用，Cho 等人(2000)提出路網減縮法放鬆了非退化解之假設，該方法將路徑流量解集合轉換到路段流量解集合避開了路徑流量不具唯一性之情形。本研究探討 Tobin(1986)、Tobin 和 Friesz(1988)與 Cho 等人(2000)之三種敏感度分析方法之限制條件、應用 Tobin 和 Friesz(1988)方法進行敏感度分析但不滿足其條件之例子，並順利將 Cho (1988)(2000)之方法應用於這些不可用於 Tobin 和 Friesz 的例子。

本研究敏感度資訊應用於雙層路網設計問題上，過去文獻求解路網設計問題以 Tobin 與 Friesz(1988)之方法，但被限制在小路網上，Friesz 等人(1990)指出路網數較大時可能遭遇 Jacobian 為奇異矩陣，使得初始解可能為不可微分點，本研究依 Cho(1988)利用一階泰勒展開式來近似反應函數，並以 Cho 等人(2000)敏感度分析求得反應函數係數值則避開大型路網可能無法求得敏感度資訊之問題，並引述 Friesz 等人(1990)路網設計文獻中不同例子及其使用方法求得之解，本研究加入線性近似法求解觀察解之差異，發現線性近似法求得之解於路段數增加時均較其他方法佳，最後，本研究將線性近似法應用於求解 76 個路段與 552 個 OD 組合之大型路網，在求解敏感度資訊的過程未受到路網較大而無法微分之情形，並以線性近似法求得之解亦優於文獻中之例子。

關鍵字：變分不等式、敏感度分析、路網設計、線性近似

The Solution Algorithm for Network Design

Student: Che-Wei Hsu

Advisor: Hsun-Jung Cho

Department of Transportation and Logistics Management

National Chiao Tung University

Abstract

Bi-level network design problem can be formulated as a nonlinear optimization problems with variational inequality (VI) constraints. It's a mathematical programming problem with equilibrium constraints, which belongs to the Stackelberg game. The solution process must have reaction function of follower to the leader. But, it's difficult to find the reaction function in the network. Cho (1988) used a first-order Taylor expansion to approximate the reaction function. The coefficient value was obtained by network sensitivity analysis. Tobin and Friesz (1988) relaxed Tobin (1986) VI sensitivity analysis condition. The solution must be unique. They used linear programming to solve a non-degenerate path flow solution such that sensitivity analysis can be applied to the network, but the non-degenerate conditions are too stringent. The general network can't be directly applied. Cho et al. (2000) proposed the reduction method and relaxed non-degenerate condition. The method converts path-flow solution set to link-flow solution set and avoid the situation that the path-flow was not unique. This study discusses the limitations of the three sensitivity analysis methods by Tobin (1986), Tobin and Friesz (1988) and Cho et al.(2000), and the sensitivity analysis used the Tobin and Friesz (1988) method but doesn't meet the conditions of the example. We apply the method of Cho (1988)(2000) to these examples that are not available for Tobin and Friesz.

The sensitivity information of this study is applied to bi-level network design problem. In the past, network design problem was solved by using Tobin and Friesz (1988) sensitivity analysis, but it was limited to the small network. Friesz et al. (1990) pointed out that Jacobian maybe encountered as a singular matrix while the network is large, so that the initial solution maybe an non-differentiable point. In this study, the first-order Taylor expansion equation is used to approximate the reaction function according to Cho (1988), and it is obtained by the sensitivity analysis of Cho et al. (2000). The reaction function coefficient avoids non-differentiable problem that the large network may not be able to obtain the sensitivity information, and quotes the different examples in the network design literature of Friesz et al. (1990), as well as the solution to the method of its use. This study adds a linear approximation method and observes difference solutions. We find the solution obtained by the linear approximation method is better than other methods when the number of link increases. Finally, this study applies the linear approximation method to a large network with 76 link and 552 OD. The process of solving the sensitivity information cannot encounter non-differentiate problem, and the solution obtained by LA is better than other method in the literature.

Keyword: variantional inequality, sensitivity analysis, network design, linear approximation

誌謝

兩年的碩士班過得很快，能順利完成此篇論文，首先要感謝指導教授卓訓榮老師耐心且循序漸進地指導我對於交通的相關模型以及思考問題，並給予我許多不同面向的想法，在兩年來無論是實驗室的研究計畫或是論文的指導都幫助我成長許多，其中實驗室的研究計畫讓我學習到了許多東西，包含研究報告撰寫、實務上問題解決方法等。除了研究之餘，老師也非常關心平常的生活狀況，並不時提醒在外騎車要注意安全等。

在實驗室的研究計畫中也感謝曾明德學長、林貴璽老師以及已畢業學長姐對於計畫上的指導，讓我們可以順利完成每一年的計畫。另外也感謝實驗室中的成員奕中，在研究過程一起努力彼此互相協助，並分擔了許多研究室計畫上的行政作業、計畫或研究外的雜事。

此外，也要感謝碩士班的所有同學們，在碩一、碩二這兩年的生活中，於課業上互相協助、課餘及研究生活外的休息時間一起聊天、每週三固定晚上的開趴以及假日的時間一起出遊等。最後，在交大的日子受了許多人的幫助，感謝在這兩年當中幫助過我的人，祝福大家未來可以順利。

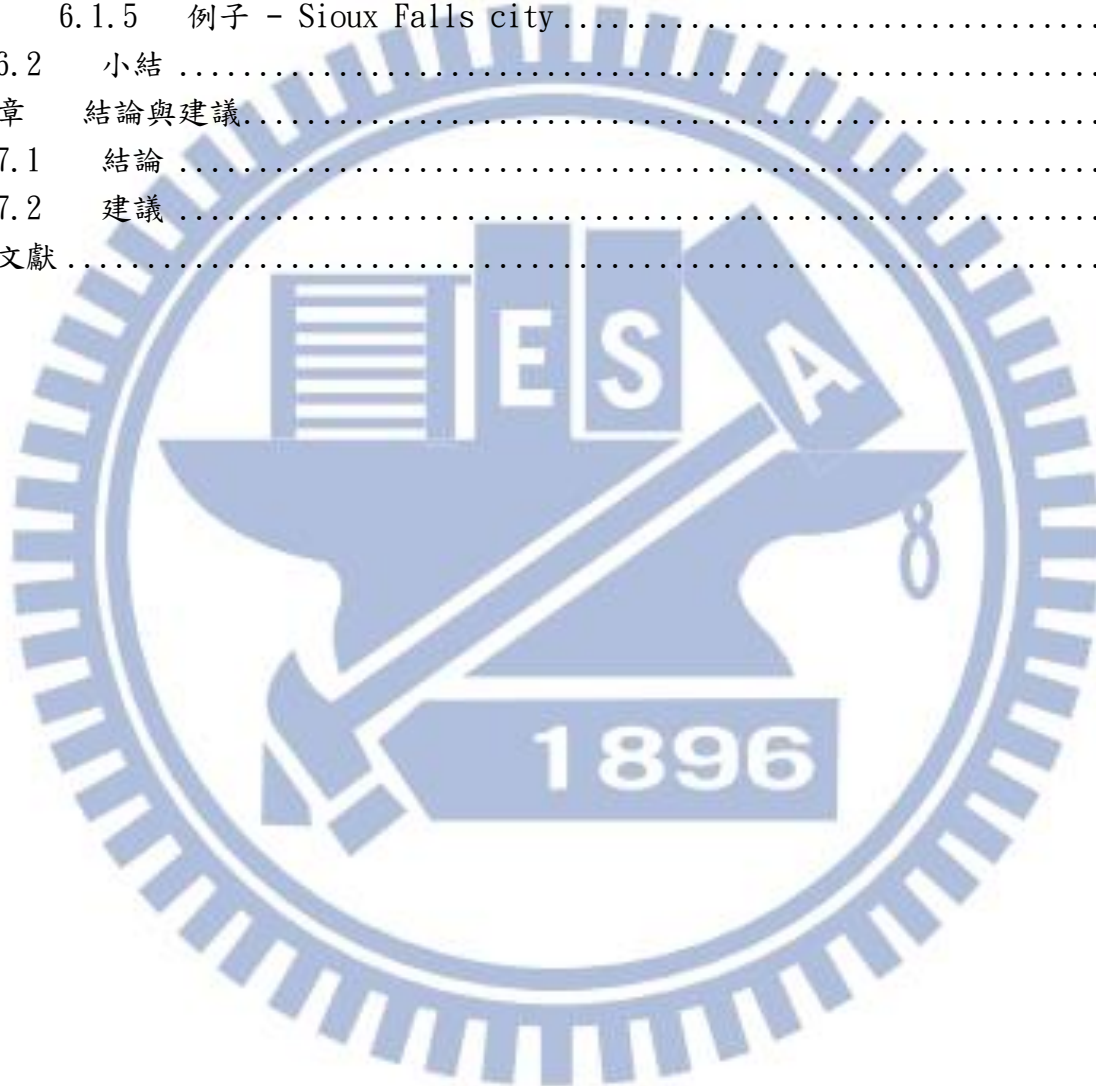
許哲瑋 謹誌

2018 年 8 月

目錄

摘要	I
Abstract	II
誌謝	III
目錄	IV
圖目錄	VI
表目錄	VII
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究方法	3
1.3.1 路網敏感度分析	3
1.3.2 Stackelberg 賽局	3
1.3.3 雙層路網設計問題	4
1.4 研究流程	5
第二章 文獻回顧	6
2.1 路網均衡模式與變分不等式	8
2.2 變分不等式之敏感度分析	9
2.3 均衡路網流量模式之敏感度分析	13
2.4 路網縮減法	15
2.5 高階敏感度分析	17
第三章 路網均衡區間敏感度分析之路網縮減法	18
3.1 微擾系統	18
3.2 縮減法	21
3.3 區間正規微擾系統	26
3.4 區間均衡路段流量敏感度分析函數	28
3.4.1 區間平滑微擾系統	28
3.4.2 可微的均衡路段流量函數	30
第四章 文獻中應用敏感度分析的檢視	32
4.1 敏感度分析方法之比較	32
4.2 應用 TF 法之文獻	33
4.3 應用 CSF 法求解	37
4.4 小結	40
第五章 敏感度分析應用於路網設計問題	41
5.1 賽局觀點	41
5.2 雙層路網設計問題	42
5.3 雙層路網設計問題線性近似求解	45
5.4 Armijo-like rule	46

5.5	最陡下降法	48
5.6	應用 Armijo-like rule 求解線性近似演算法	50
第六章	數值例子.....	52
6.1	數值例子	53
6.1.1	例子 - Fisk(1984).....	53
6.1.2	例子 - Suwansirikul (1987).....	55
6.1.3	例子 - Tan et al.(1979).....	57
6.1.4	例子 - Harker 與 Friesz(1984).....	58
6.1.5	例子 - Sioux Falls city.....	62
6.2	小結	65
第七章	結論與建議.....	66
7.1	結論	66
7.2	建議	66
參考文獻		67

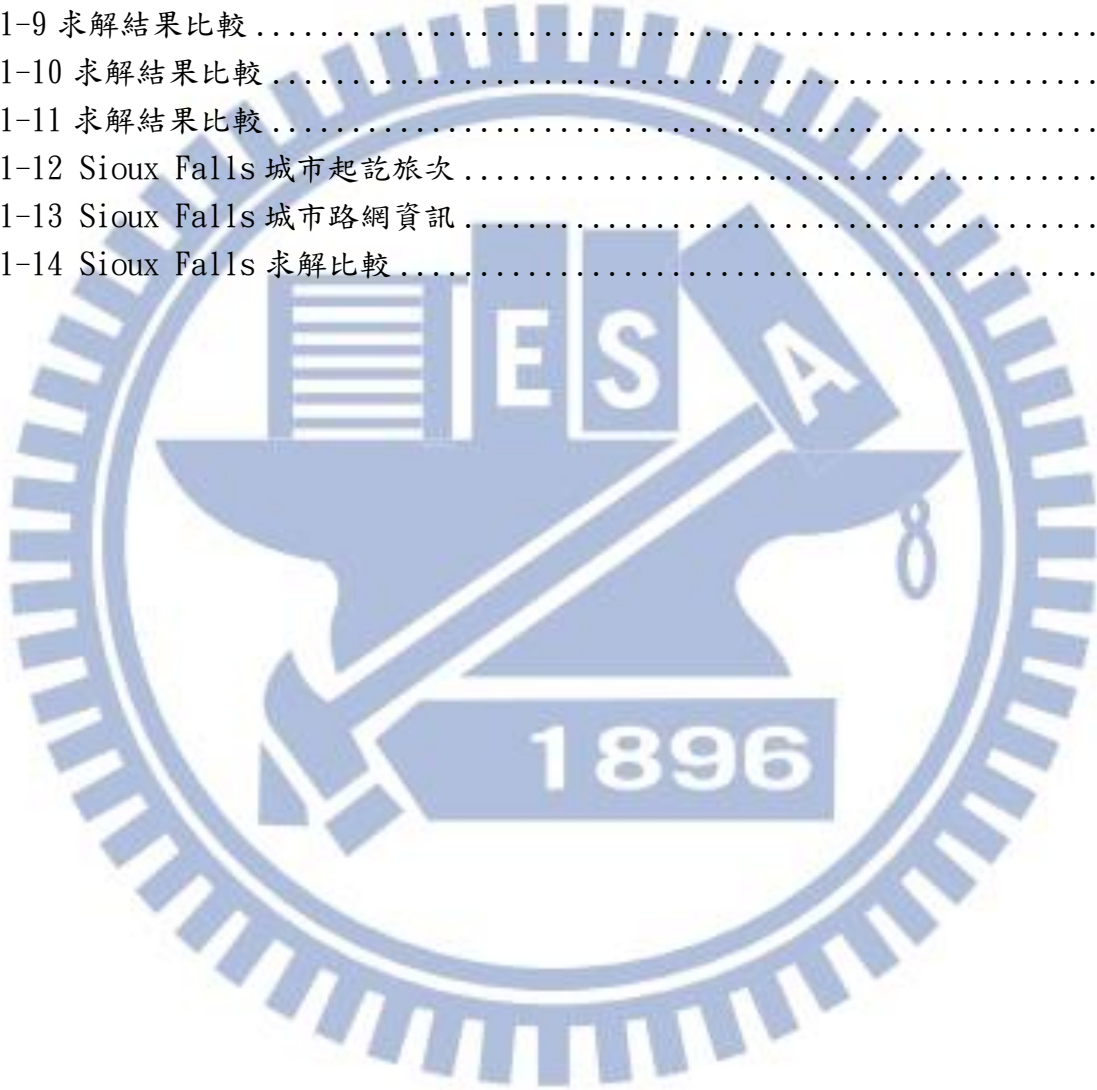


圖目錄

圖 1.4-1 研究流程圖.....	5
圖 3.1-1 變分不等式解集合之區間唯一性.....	19
圖 3.1-2 微擾路段流量之連續性.....	20
圖 3.2-1 函數嚴格單調性.....	21
圖 3.3-1 均衡解集合恆正示意圖.....	26
圖 3.3-2 路段流量解可行解集合.....	27
圖 4.2-1 路網示意圖.....	34
圖 4.2-2 路網示意圖.....	35
圖 4.2-2 路網示意圖.....	35
圖 5.2-1 IOA 求解流程圖	44
圖 5.4-1 Armijo-like rule.....	47
圖 5.5-1 最陡下降法流程圖.....	48
圖 5.5-2 最陡下降法求解雙層路網流程圖.....	49
圖 5.6-1 應用 Armijo-like rule 求解線性近似演算法流程圖	51
圖 6.1-1 Fisk 路網幾何圖	53
圖 6.1-4 路網圖	55
圖 6.1-5 路網圖	57
圖 6.1-6 路網圖	58
圖 6.1-7 Sioux Falls 城市路網圖	62

表目錄

表 6.1-3 不同演算法間之結果比較表.....	54
表 6.1-4 路網資訊.....	55
表 6.1-5 求解結果.....	55
表 6.1-6 求解結果.....	56
表 6.1-7 求解結果比較.....	57
表 6.1-8 路網資訊.....	58
表 6.1-9 求解結果比較.....	59
表 6.1-10 求解結果比較.....	60
表 6.1-11 求解結果比較.....	61
表 6.1-12 Sioux Falls 城市起訖旅次.....	63
表 6.1-13 Sioux Falls 城市路網資訊.....	63
表 6.1-14 Sioux Falls 求解比較.....	64



第一章 緒論

1.1 研究背景

在運輸路網設計中，路網的敏感度分析，是指運輸路網上之均衡路徑流量在的路網容量改變、旅次起迄需求量的略微改變，對整個路網上均衡流量的影響程度。另一方面來說，敏感度分析可以視為道路使用者受到外在決策變數之改變進而導致其產生不同之行為反應，使其選擇不同之路徑，讓整個路網的均衡流量產生改變；而路網設計問題，其目的在改善路網系統的效能。因為系統的改善會使用路人重新選擇其行駛路徑，對路網會造成新的衝擊，又會造成路網改善設計問題，故用路人選擇路徑的行為必須被納入路網改善的過程中。以號誌系統改善為例，均衡路網號誌控制問題，即為在用路人的路網行為達到均衡時之最佳的控制設計。

Friesz(1985)曾指出這是一個很有趣的研究問題，沒有處理好路網設計的問題會產生布雷斯悖論(Braess' Paradox)(1970)，Braess(1968)在其研究中發現路網加入新的路段，當均衡時每個使用者之成本卻增加。為了避免悖論的發生，可以在設計完成後，進行檢驗其結果是否會發生悖論，Richard & Willard(1983)以新舊路網中路段被使用情形之矩陣透過 Cramer's rule 檢驗，Dafermos & Nagurney(1984)依新路網幾何改變建立測試矩陣，判斷其之半正定性用以檢定是否會有悖論的情形發生，Richard & Willard(1988)考慮線性互補問題(LCP)之唯一解透過解參數的改變，觀察新舊路網使用情形檢驗是否發生悖論，雖可避免悖論發生，但卻要設計完再檢驗是否發生悖論，更有效率的方法即在設計時就避開了悖論的發生。因此，很多學者將此問題以雙層數學規劃方式來表示。Fisk(1984)指出雙層路網設計問題，可分為 Nash 賽局和 Stackelberg 賽局問題，若是以直接迭代方式求解雙層路網設計問題將收斂到 Nash 賽局的結果。但是路網設計問題是由政府主導，用路人依據建設好之路網選取其最佳路徑，故此兩層在系統裡表達出領導者(Leader)與跟隨者(Follower)的性質，不應直接用迭代方式求解。又因為雙層路網問題的解集合為非凸集合(Nonconvex set)，使得求解更加困難。

對於領導-跟隨模型的標準求解應該將跟隨者對領導者的決策反應代入領導者的決策模型裡同時求解，但是在實務上就是無法求得跟隨者對領導者的反應函數。對於未知的函數，我們可以用泰勒展開式來近似之，透過雙層迭代方式來逼近 Stackelberg 賽局的解，然而上述問題雖解決了反應函數之問題，但仍需在每次路網條件改變後重新進行求解，且泰勒展開式須取多少接近似尚無法得知，在運輸的路網設計或規劃（道路興建、拓寬或號誌計畫等）當中，若出現許多不同方式，在透過路網敏感度分析的方法，可以避免每次都需要重新進行路

網均衡，就直接得到分析之結果。

Tobin 和 Friesz(1988)提出路網的敏感度分析方法（為了表示方便，本研究以 TF 法簡稱之）使得此近似反應函數和 Stackelberg 迭代逼近成為可行。但是基於 Tobin 和 Friesz 對於敏感度分析應用路網的非退化條件(Nondegenerate)，使得一般路網無法應用。Cho 等(2000) 提出減縮式的路網敏感度分析方法，放鬆了非退化條件，使得一般路網皆可以透過敏感度方法近似反應函數和 Stackelberg 迭代逼近。

於此，本研究在第二章回顧過去 Tobin(1986)變分不等式(Variational inequality, VI)的敏感度分析、Tobin 和 Friesz(1988)路網敏感度分析應用於運輸路網以及雙層路網設計問題之相關文獻，在第三章完整回顧 Cho (1988)(2000)提出路網縮減法之敏感度分析方法（為了表示方便，本研究以 CSF 法簡稱之），其中包含此方法使用之相關定理以及其所需滿足之條件，接著第五章透過第三章之敏感度資訊應用於雙層路網設計上。

1.2 研究目的

運輸路網設計的目標是要改善交通路網的績效，可透過交通控制的方式來改善，用路人可以透過敏感度方法近似其敏感度，可以了解用路人對於交通控制手段改變後交通路網設計的影響程度。

本研究首先回顧過去應用 TF 法相關路網敏感度分析文獻，了解至目前發展的狀況及其應用，並比較各種方法假設條件之限制及應用論文之狀態。路網敏感度分析最早是由 Tobin 和 Friesz(1988)改良 Tobin(1986)變分不等式(Variational inequality, VI)的敏感度分析應用於路網，他們建議利用線性規劃方法，從路段均衡解中求出一組非退化的路徑流量解，使得變分不等式的敏感度分析方法可以被應用在均衡路網的敏感度分析上。在過去許多學者提出 Tobin 與 Friezs 建立的敏感度分析應用相關之文章，如 Patriksson(2004)、Yang 和 Bell(2007)、Josefsson 和 Patriksson(2007)，但是過去許多的研究都忽略 Tobin 和 Friesz 方法之限制，故本研究在文獻回顧之部分會進行探討過去忽略 TF 法限制之例子。雖然 Tobin 和 Friesz 提出新的方式，但由於路徑流量非退化的限制使得可應用的路網限縮的很小。卓訓榮(1991)提出廣義反矩陣的方法來放鬆小路網之限制，但也受限於路徑正流量之限制，無法保證流量為正，直到 Cho 等(2000)提出路網減縮方法，放鬆了非退化條件，才使得一般路網皆可以被應用。

回顧路網敏感度分析後，將會利用敏感度資訊應用於路網設計問題，用於近似用路人的反應函數，使得領導與跟隨者的 Stackelberg 模式跟隨者之函數可以被近似得知，進而使 Stackelberg 模式求解可行，並討論與 Nash 解之差異。另外也可以獲得重要之性質，即近似解

之迭代方法的收斂性，目前多數相關文獻未討論路網迭代解之收斂性，可能會造成求解方向有誤而產生無法收斂之情況。因此，本研究對於收斂性之討論也是探討目的。最後，本研究將會引述 Friesz 等人(1990) 路網設計文獻中不同例子及其使用方法求得之解，並加入線性近似迭代法求解進行解之比較。

1.3 研究方法

本研究主題中將會使用到路網敏感度分析、雙層路網設計問題、Stackelberg 賽局最佳解及迭代求解等三部分：

1.3.1 路網敏感度分析

路網敏感度分析之研究方法將由 Tobin 對變分不等式(Varitional inequality, VI)的敏感度分析討論，因為路徑流量非唯一性不能應用在路網均衡之敏感度。Tobin 和 Friesz 又提出可以用於路網均衡之敏感度分析；但因對路網的限制，只能在很小路網進行敏感度分析，限制了其應用性。Cho 等人提出縮減方法放鬆到一般路網皆可進行路網敏感度分析，故本研究仔細討論其方法並探討其限制。

1.3.2 Stackelberg 賽局

Fisk(1984)提及將路網設計之觀念模式最早是把 Wardrop 第一原則(Wardrop, 1952)應用到運輸路徑的選擇行為上，並考慮每一個用路人都視為是 Nash 非合作賽局中的一個參賽者。Zukhovitshii 等人(1973)證明了 N 個參賽者在 Nash 非合作賽局的均衡狀態即與兩位參賽者的零和賽局相同，故可以改採用變分不等式(VI)的形式表示(Smith, 1979; Dafermos, 1980)。根據 Fisk(1984)的研究，可將 Nash 非合作賽局和 Stackelberg 賽局說明如下：

經濟學上 Cournot 假設兩家廠商皆設其對手產量永遠維持在目前水準，在 Nash 非合作賽局中，假設每一參賽者*i*都在事先不知道賽局中另一參賽者反應函數之情況下，最小化他們自己的績效函數 $P_i(x_1, x_2)$ ，其中 x_i 是第*i*位參賽者之決策變數向量，當每一位參賽者都無法由單獨改變決策來改善各自的績效目標時，就視為達到均衡狀態。因此，如果 (x_1^*, x_2^*) 是達到均衡時的最佳解，則

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2^*) &\geq P_1(x_1^*, x_2^*) \\ P_2(x_1^*, x_2) &\geq P_2(x_1^*, x_2^*) \end{aligned} \quad (1.3-1)$$

若已知其他參賽者的策略，則參賽者*i*的最佳策略可由求解下式而得：

$$\text{Min}_{x_1} P_i(x_1, x_2) \quad (1.3-2)$$

當有一解可同時滿足上式中參賽者 $i=1、2$ 的最佳狀態時，它就是均衡解。

在 Stackelberg 賽局中，以第 1 位參賽者（主導者）預知第 2 位參賽者（追隨者）對每一種策略的反應函數為前提，如果第一位參賽者知道第二位參賽者的反應函數，那麼他便能選擇一個可較 Nash 賽局績效值 P_1 為低的 Stackelberg 策略解，這是因為在最佳解之狀態下， $x_2 = R(x_1)$ 可同時滿足 Stackelberg 賽局中雙方策略之故。而對任一 x_1 而言，追隨者的最佳反應 $R(x_1)$ 可以由下式求得：

$$\min_{x_2} P_i(x_1, x_2) \quad (1.3-3)$$

1.3.3 雙層路網設計問題

雙層路網設計問題是以均衡為限制式的數學規劃問題，對於 Stackelberg 賽局之求解無法求得用路人對路網改善的反應函數，本研究利用路網敏感度資訊採用一階泰勒展開式來近似反應函數，再利用反應函數帶入領導者的目標式利用迭代法來逼近 Stackelberg 賽局解。同時證明迭代的收斂性。其線性近似迭代演算法如下所示：

Step 0 給定 $\varepsilon > 0$ 、 $k = 0$ 並初始化 $g^{(0)}$ 之值

Step 1 求解雙層路網設計問題，代入 $g^{(k)}$ 並產生 $f^{(k)}$ 值

Step 2 利用 Cho 等之路網敏感度方法計算敏感度資訊 $\nabla_g f^{(k)}$

Step 3 使用 $\nabla_g f^{(k)}$ 、泰勒展開式生成線性近似之 $f^{(k+1)}$ 可得下式

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \nabla_g f^{(k)}(g^{(k+1)} - g^{(k)})$$

由於 $f^{(k)}$ 、 $g^{(k)}$ 和 $\nabla_g f^{(k)}$ ，故我們可以寫成 $f^{(k+1)} = A + Bg^{(k+1)}$

Step 4 重新整理得系統目標示得

$$\min_g \sum_a t_a(A + Bg^{(k+1)}, g)(A + Bg^{(k+1)}, g) \\ \text{s.t } g \geq 0$$

Step 5 求解 Step 4 得最佳解 $g^{(k+1)}$ 。若 $|g^{(k+1)} - g^{(k)}| \leq \varepsilon$ ，則停止迭代。反之，令 $k = k + 1$ 並返回 Step 1 繼續迭代過程。

1.4 研究流程

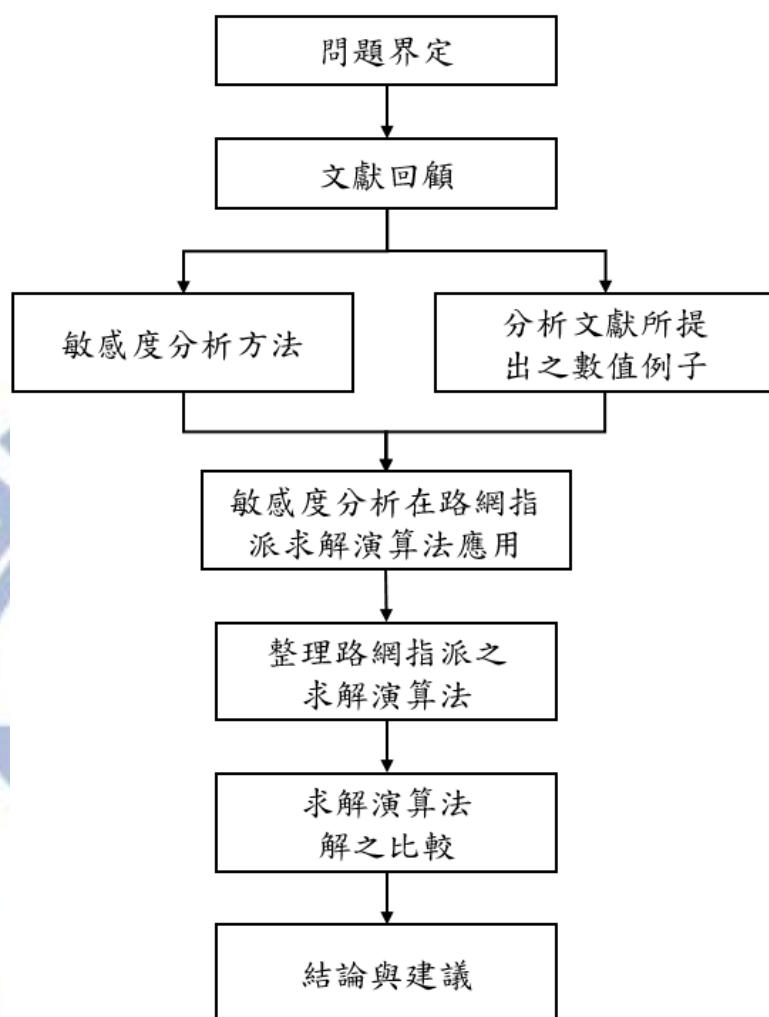


圖 1.4-1 研究流程圖

第二章 文獻回顧

由賽局觀點來看，很多運輸路網設計或運作模式大都是以 Stackelberg 賽局架構 (Stackelberg, 1934) 或 Nash 非合作賽局 (Nash, 1951) 為依據，Fisk (1984) 提到此理論觀念模式最早是把 Wardrop 第一準則 (Wardrop, 1952) 應用到運輸路徑的選擇行為上，並將每一個用路人都視為是 Nash 非合作賽局中的一個參賽者。但是路網設計問題是由政府主導，用路人依據建設好之路網選取其最佳路徑，故此兩層在系統裡表達出領導者 (Leader) 與跟隨者 (Follower) 的性質，不應直接用迭代方式求解。又因為雙層路網問題的解集合為非凸集合 (Nonconvex set)，使得求解更加困難。

對於領導-跟隨模型的標準求解應該將跟隨者對領導者的決策反應代入領導者的決策模型裡同時求解，但是在實務上無法求得反應函數，使得此問題成為一研究問題。對於未知的函數，我們都可以用泰勒展開式來近似之，只是要取多少階的展開式才可以近似到真正的反應函數無法知曉。故可以取用最簡單的一階泰勒展開式作為近似的反應函數，透過雙層迭代方式來逼近 Stackelberg 賽局的解。

LeBlanc (1975) 將路網設計模式視為混合整數規劃問題，整數變數作為考慮增加路網路段之集合，此問題為一個最大所有空間組合，其為 NP-Hard 的問題，這個可行解集合非常巨大，儘管目前求解的過程已經有很大改善，但搜尋解的過程仍然相當暴力。Abdulaal 與 LeBlanc (1979) 將路網設計變為連續變數而非整數變數，其包含了使用者均衡之限制式，他們使用 Hook 與 Jeeves 演算法進行求解。Marcotte (1981) 使用路網設計之限制能夠建立變分不等式問題，提出限制累積演算法 (Constraint Accumulation Algorithm, CAA)，然而，這個方法仍然非常困難被應用，即使當少數的限制式為正，Friesz 與 Harker (1985) 使用迭代最佳設計演算法 (Iterative-Optimization Design) 求解相同問題。

Tobin (1986) 提出了變分不等式之敏感度分析，在其建立敏感度分析模式的理論過程，對於函數解需具有唯一性的條件，但在交通路網的應用中路網的路段流量是由路徑流量相加而成，而且在一般的均衡路網當中，路段之流量是唯一的，路徑的流量並非唯一，又敏感度分析是分析路徑變動之影響程度，也就是說均衡路網問題之路徑流量並不滿足敏感度分析方法之唯一性條件，故無法直接將變分不等式路網均衡模式進行敏感度分析。Tobin 和 Friesz (1988) 提出一方法滿足唯一性之條件，他們建議利用線性規劃方法，從路段均衡解中求出一組非退化的路徑流量解，使得變分不等式的敏感度分析方法可以被應用在均衡路網的敏感度分析上。雖然 Tobin 和 Friesz 對於敏感度分析應用路網的非退化條件 (Nondegenerate) 過於嚴苛，使得一般路網無法應用，但他們提出路網的敏感度分析方法使得此近似反應函數和 Stackelberg 迭代

逼近成為可行。

卓訓榮等(1991)透過廣義反矩陣方法將可行解空間由路徑轉換為路段，再以路段的可行解空間進行敏感度分析問題，避免了唯一性的困擾。在轉換的過程中，此方法雖假設存在一組 k 值，使得該組路徑解全為正值，但是卻沒有求 k 值的方法。卓訓榮和羅仕京(1998)提出求得 k 值的方法，提出一套演算法補足無法求得 k 值的不足。而在1991年卓訓榮等亦提出最短距離方法，假設已知一組路徑正流量解及微擾程度並不大下進行可行解集合的轉換。而為了要克服Tobin和Friesz方法之限制，Cho、Smith和Friesz(2000)三位學者提出路網減縮法放鬆了非退化流量解之假設，該方法假設路段成本函數為嚴格單調，其結果已被應用於求解路網設計上。本文將引述卓訓榮(1994)對於道路使用者行為、路網敏感度分析相關文獻中所使用變數的數學符號進行定義，接著引用Tobin和Friesz(1988)、Cho、Smith和Friesz(2000)的文獻作為本研究之基礎。

以下為本研究將會使用到之數學符號：

- i, j : 表示路網節點(node) i 或節點(node) j
- p : 表示路網中的路徑 p
- p_{ij} : 表示路網中以 i 為起點， j 為迄點之所有路徑(path)的集合
- a : 表示路網中的路段 a
- f_a : 表示路網中路段 a 的交通流量
- f : $(f_1, f_2, \dots, f_a, \dots)$ 表示路網中所有路段交通流量的向量
- h_p : 表示路網中第 p 條路徑的交通流量
- h : $(h_1, h_2, \dots, h_p, \dots)$ 表示路網中所有路徑交通流量的向量
- T_{ij} : 表示路網中以 i 為起點， j 為迄點的需求量
- δ_{ap} : 路徑與路段指標變數，當路網中的路段 a 屬於路徑 p 時為1，否則為0
- Λ : 起迄點與路徑投引矩陣，當路網中的路徑屬於某一起迄點則為1，否則為0
- Δ : $(\dots, \delta_{ap}, \dots)$ 路徑與路段指標矩陣

2.1 路網均衡模式與變分不等式

本小節引述 Cho 等人(2000)建立一個路網，路網當中非負路徑流量 $h = (h_p: p \in P) \in R_+^P$ 與旅次需求向量 T 一致，若且為若 $\Delta h = T$ ，非負路段流量 $f = (f_a: a \in A) \in R_+^A$ 與旅次需求向量 T 一致，若且為若 $\Delta h = f$ 對於路徑流量向量與旅次需求向量 T 一致。

定義路徑流量的集合 H 可由路段流量 f 、需求量 T 的集合式(2.1-1)所組成

$$H(f, T) = \{h \in R_+^P: \Delta h = f, \Delta h = T\} \quad (2.1-1)$$

定義函數 $c: R_+^A \rightarrow R_+^A$ 為路段成本函數，其中 $c(f) = (c_a(f): a \in A)$ ，對於路徑流量則為所通過路段成本之和，如下式所示

$$c_p(f) = \Delta_p^T c(f) \quad (2.1-2)$$

對於每一個 $f \in R_+^A$ 與 $w \in W$ ，定義起訖路徑 P_w 之最小成本為

$$c_w(f) = \min\{c_p(f): p \in P_w\} \quad (2.1-3)$$

將相關之關係式定義完成後，則考慮使用者均衡，其中均衡時路徑流量 h^* 滿足使用者均衡若且為若對於所有路徑 $p \in P_w$ 與起訖旅次 $w \in W$

$$h_p^* > 0 \quad \Rightarrow \quad c_p(\Delta h^*) = c_w(\Delta h^*) \quad (2.1-4)$$

故均衡路段流量為 $f^* = \Delta h^*$ 。使用者均衡(User Equilibrium)係指對任一起訖點而言，當路網達到使用者均衡時，所有被使用的路徑，其旅行成本皆相同，而且最小或等於其他未被使用路徑的旅行成本。

回顧 Dafermos(1980)文章中之例子，可以透過變分不等式的解證明路段流量向量的集合；為了方便這個問題表示方式定義以下符號。對於任一非空集合 $S \subseteq X \subseteq R^n$ 與函數 $\varphi: X \rightarrow R^n$ ，則變分不等式的解集合定義如下：

$$VI(\varphi, S) = \{x \in S: \varphi(x)^T(y - x) \geq 0, \forall y \in S\} \quad (2.1-5)$$

若對於任一旅次需求向量 T ，所有與 T 一致之路段流量向量之旅次需求可行解集合為：

$$\Omega(T) = \{f \in R_+^A: H(f, T) \neq \emptyset\} \quad (2.1-6)$$

2.2 變分不等式之敏感度分析

本小節將討論對變分不等式參數微擾 (parameters perturbation) 的充分條件。以下為引述 Tobin(1986)及 Tobin 和 Friesz(1988)所得到的結果。

給定 $F: R^n \rightarrow R^n$ 是連續的、 $g: R^n \rightarrow R^m$ 是可微的、 $h: R^n \rightarrow R^p$ 是線性的並且定義集合 $K = \{x \in R^n | g(x) \geq 0, h(x) = 0\}$ 。若一向量 $x^* \in K$ 使得 $F(x^*)(x - x^*) \geq 0, \forall x \in K$ 成立，則 x^* 可稱為變分不等式在 K 的一組解。

定理 2.2.1 (變分不等式有解之必要條件)

若向量 $x^* \in K$ 對變分不等式是一組解而且在 $g_i(x^*) = 0$ 的梯度 $\nabla g_i(x^*)$ 和梯度 $\nabla h_i(x^*)$ 是線性獨立，其中 $i = 1, \dots, p$ ，則存在 $\lambda \in R^m$ 、 $\mu \in R^p$ 使得下列各式成立：

$$F(x^*) - \nabla g(x^*)^T \lambda - \nabla h(x^*)^T \mu = 0 \quad (2.2-1)$$

$$\lambda^T g(x^*) = 0, \lambda \geq 0 \quad (2.2-2)$$

定理 2.2.2 (變分不等式有解之充分條件)

若 $g_i(x)$ 是凸函數而且 $x^* \in K$ 、 $\lambda \in R^m$ 及 $\mu \in R^p$ 滿足變分不等式，則 x^* 是變分不等式的一組解，其中 $i = 1, \dots, m$ 。

定理 2.2.3 (區間唯一解的充分條件)

若滿足定理 2.2.1 之充分條件、 F 是一可微函數且 $y^T \nabla F(x^*) y > 0$ ，對於所有 $y \neq 0$ 使得下列各式成立：

$$\nabla g_i(x^*) y \geq 0 \text{ 對於使得 } g_i(x^*) = 0 \text{ 的所有 } i \quad (2.2-3)$$

$$\nabla g_i(x^*) y = 0 \text{ 對於使得 } \lambda_i > 0 \text{ 的所有 } i \quad (2.2-4)$$

$$\nabla h_i(x^*) y = 0, i = 1, \dots, p \quad (2.2-5)$$

則 x^* 對變分不等式是區間唯一解。本定理已在 Tobin(1986)之定理 2.3 證明。

給定 $F: R^n \times R^q \rightarrow R^n$ 在 (x, ε) 上是一次連續可微、 $g: R^n \times R^q \rightarrow R^m$ 在 x 上是凸函數且在 (x, ε) 上為兩階連續可微以及 $h: R^n \times R^q \rightarrow R^p$ 在 x 上為線性的且對 ε 是一次連續可微的。考慮變分不等式 $VI(\varepsilon)$ ，求 $x^* \in K(\varepsilon)$ 使得下式成立：

$$F(x^*, \varepsilon)(x - x^*) \geq 0, \forall x \in K(\varepsilon) \quad (2.2-6)$$

其中， $K(\varepsilon) = \{x | g(x, \varepsilon) \geq 0, h(x, \varepsilon) = 0\}$

本文以 Tobin(1986)將敏感度分析應用在變分不等式之文章當中之數值例子來說明區間唯一解的充分條件，給定一可微分之變分不等式及 F 集合 $K(\varepsilon)$ 如下：

$$F(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 5x_1 + (1 + \varepsilon_1)x_1^2 + x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 10x_2 + (3 + \varepsilon_2)x_2^2 + 2x_3 \\ 10x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3 + (3 + \varepsilon_3)x_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.2-7)$$

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - (6 + \varepsilon_4) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2-8)$$

透過 KKT 條件求得變分不等式無微擾的解

$$x^* = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 705/4 \\ 177/4 \end{bmatrix} \quad (2.2-9)$$

計算 $F(x, \varepsilon)$ 的導數如下

$$\nabla_x F(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 5 + 2(1 + \varepsilon_1)x_1 & 1 & 3 \\ 5 & 10 + 2(3 + \varepsilon_2)x_2 & 2 \\ 20x_1 & 16x_2 & 4 + 2(3 + \varepsilon_3)x_3 \end{bmatrix} \quad (2.2-10)$$

討論式(2.2-3)、式(2.2-4)之條件，我們可以獲得下式

$$\nabla g_3(x^*)y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_3 \geq 0, \text{ 其中 } g_3(x^*) = x_3 = 0 \quad (2.2-11)$$

$$\nabla g_3(x^*)y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_3 = 0, \text{ 其中 } \lambda_3^* = 705/4 > 0 \quad (2.2-12)$$

$$\nabla g_4(x^*)y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_1 + y_2 + y_3 = 0, \text{ 其中 } \lambda_4^* = 177/4 > 0 \quad (2.2-13)$$

由上述三式可以推得 $y_1 + y_2 = 0$ 及 $y_3 = 0$ ，將其代入 $y^T \nabla F(x^*)y > 0$ 進行討論

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 1 & 3 \\ 5 & 13 & 0 \\ 90 & 24 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
& = 14y_1^2 + 6y_1y_2 + 93y_1y_3 + 13y_2^2 + 24y_2y_3 + 4y_3^2 \\
& = 14y_1^2 + 6y_1y_2 + 13y_2^2 \\
& = 3(y_1 + y_2)^2 + 11y_1^2 + 10y_2^2 > 0
\end{aligned} \tag{2.2-14}$$

因此，我們由定理 2.2.3 可以推得 x^* 為區間唯一解。

定理 2.2.4 (隱函數定理)

設 $VI(0)$ 滿足定理 2.2.3 中的條件而 $VI(0)$ 中 $F(x^*)$ 、 $g(x^*)$ 、 $h(x^*)$ 、 λ 、 μ 分別以 $F(x^*, 0)$ 、 $g(x^*, 0)$ 、 $h(x^*, 0)$ 、 λ^* 、 μ^* 取代，且當 $g_i(x^*, 0) = 0$ 時其梯度 $\nabla g_i(x^*, 0)$ 和 $\nabla h_i(x^*, 0)$ ， $i = 1, \dots, p$ ，為線性獨立，此外並設嚴格鬆弛互補條件，當 $g_i(x^*, 0) = 0$ 時，滿足 $\lambda_i^* > 0$ 。則可得到下列結果：

- (1) λ^* 和 μ^* 是唯一
- (2) 在 $\varepsilon = 0$ 的一鄰域中，存在一唯一的連續可微函數 $[x(0)^T, \lambda(0)^T, \mu(0)^T]$ ，其中 $x(\varepsilon)$ 是 $VI(\varepsilon)$ 的區域性唯一解， $\lambda(\varepsilon)$ 和 $\mu(\varepsilon)$ 為對應於 $x(\varepsilon)$ 的乘數 (multipliers)，滿足定理 2.2.3 的條件且 $[x(0)^T, \lambda(0)^T, \mu(0)^T] = [x^{*T}, \lambda^{*T}, \mu^{*T}]$
- (3) 在 $\varepsilon = 0$ 的鄰域中約束不等式 (binding inequalities) 不改變，嚴格互補鬆弛性成立且約束條件 (binding constraint) 的梯度在 $x(\varepsilon)$ 為線性獨立。

若 $\varepsilon = 0$ ， $(x, \lambda, \mu) = (x^*, \lambda^*, \mu^*)$ ，根據定理 2.2.1 我們可以得到：

$$F(x, 0) - \nabla g(x, 0)^T \lambda - \nabla h(x, 0)^T \mu = 0 \tag{2.2-15}$$

$$\lambda_i g_i(x, 0) = 0, i = 1, \dots, m \tag{2.2-16}$$

$$h_i(x, 0) = 0, i = 1, \dots, p \tag{2.2-17}$$

式 (2.2-15)、式 (2.2-16) 及式 (2.2-17) 對 $y = (x, \lambda, \mu)$ 和對 ε 的 Jacobian 矩陣分別以 J_ε^* 和 J_y^* 表示。由連鎖規則(chain rule)可得，式 (2.2-15)、式 (2.2-16) 及式 (2.2-17) 所求得的全導數(total derivatives)為

$$J_y^*(\varepsilon) \nabla_\varepsilon y(\varepsilon) + J_\varepsilon^*(\varepsilon) = 0 \tag{2.2-18}$$

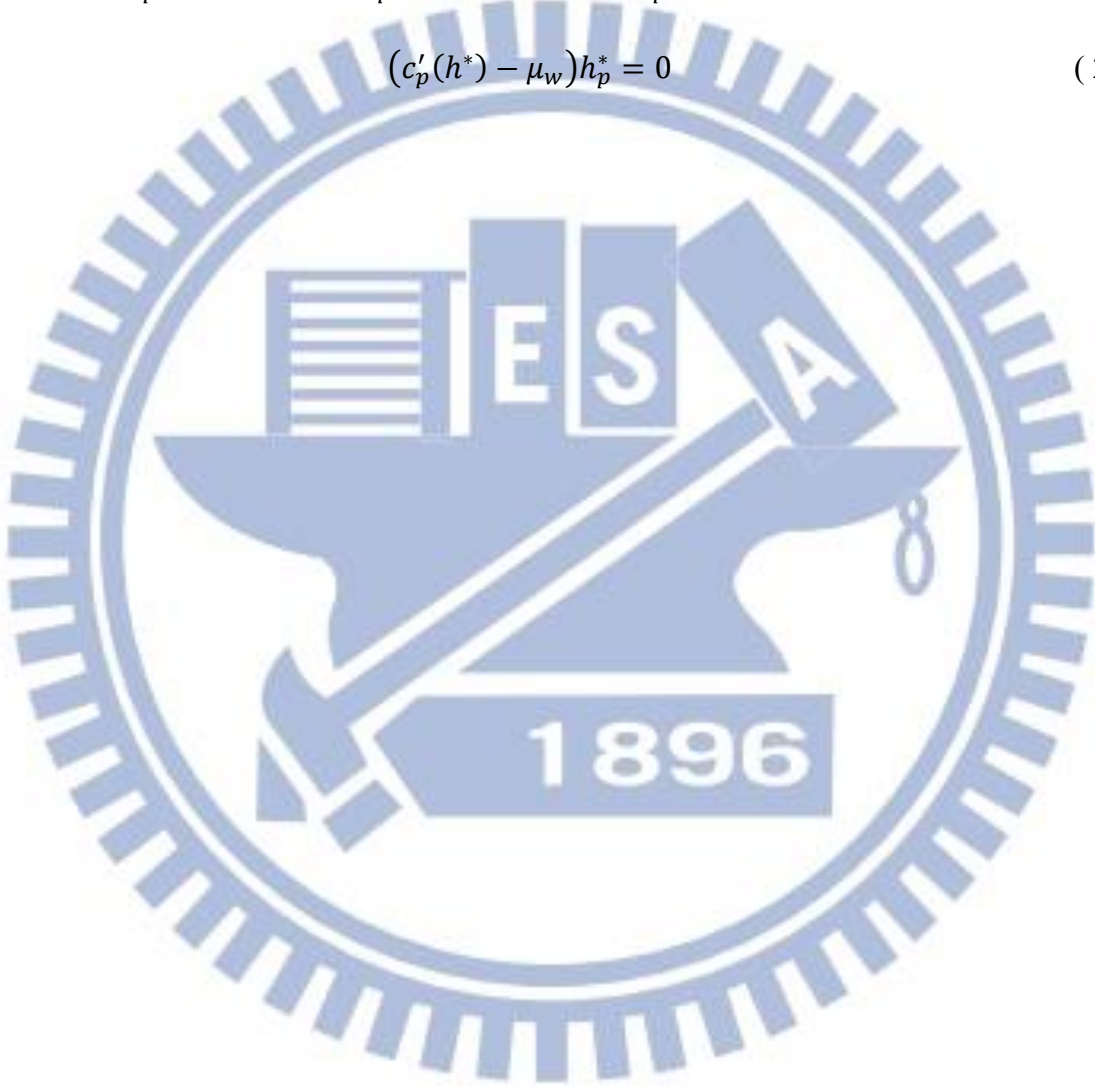
系理 2.2.1

若定理 2.2.4 的假設成立，即 J_y^* 存在且 (x^*, λ^*, μ^*) 對 ε 的導數為

$$\nabla_{\varepsilon} y(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \nabla_{\varepsilon} x^*(\varepsilon) \\ \nabla_{\varepsilon} \lambda^*(\varepsilon) \\ \nabla_{\varepsilon} \mu^*(\varepsilon) \end{bmatrix} = [J_y^*(\varepsilon)]^{-1} [-J_{\varepsilon}^*(\varepsilon)] \quad (2.2-19)$$

定義：(路網均衡互補條件) 假設路網均衡時之路徑流量 h^* 、路徑最小成本向量 μ ，若 $h_p^* > 0, \forall p \in P_w$ ，則 $c'_p(h^*) = \mu_w$ 且若 $h_p^* = 0, \forall p \in P_w$ ，則 $c'_p(h^*) \geq \mu_w$ ；亦可表達為下式

$$(c'_p(h^*) - \mu_w)h_p^* = 0 \quad (2.2-20)$$



2.3 均衡路網流量模式之敏感度分析

以下為引述 Tobin 與 Friesz(1988)建立之變分不等式問題，變分不等式問題的數學模式是求均衡路網流量一般化的模式，求得 $f^* \in \Omega$ ，使得下式成立：

$$c(f^*)(f - f^*) \geq 0, \forall f \in \Omega \quad (2.3-1)$$

其中 $\Omega = \{f | \Delta h = f^*, \Lambda h = T, h \geq 0\}$ 、 $c(f)$ 為嚴格單調函數

則均衡路網流量向量 f^* 是唯一的，微擾均衡路網流量可寫為下列變分不等式，求得 $f^* \in \Omega$ ，使得下式成立：

$$c(f_\varepsilon^*)(f - f_\varepsilon^*) \geq 0, \forall f \in \Omega \quad (2.3-2)$$

其中 $\Omega = \{f | \Delta h = f_\varepsilon^*, \Lambda h = T, h \geq 0\}$

由系理 2.2.1 之結果我們可直接獲得進行敏感度分析之資訊。一般之路網當中，路段的流量是唯一的，而路徑流量並非唯一，但敏感度資訊是分析路徑的變動狀況，故系理 2.2.1 之結果通常無法直接存在，因此我們將無法直接使用系理 2.2.1 之結果進行敏感度分析。為了避免路徑流量之非唯一性，Tobin 與 Friesz(1988)假設無微擾均衡路徑流量解為非退化極值點。他們所假設之非退化極值解 h^* 之要求必須要滿足路徑正流量之數量等於矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 的秩，而矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 的秩至多等於路段正流量之個數加上起訖點配對之個數。並以線性規劃方法透過不同的向量 $b \in R^{|h|}$ 求得一組非退化極值解 h^* 。

$$\min b^T h \quad s.t \quad h \in \Gamma^*(\varepsilon) \quad (2.3-3)$$

其中 $\Gamma^*(\varepsilon) = \{h | \Delta h = f^*, \Lambda h = T(\varepsilon), h \geq 0\}$

定義：(非退化解)若求得解之基本變數皆為正值，則此解即為非退化解。反之，該解則為退化解。在運輸路網當中，若路徑流量解之正流量個數等於矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 的秩，則該組路徑流量解則為非退化解。

令 h^* 是在 $\Omega(0)$ 中的一個非退化端點，所以 h^* 是在 $\varepsilon = 0$ 中的一組解。根據定理 2.2.1，系統存在一組解使得下式成立：

$$c'(h^*, 0) - \pi - \Lambda^T \mu = 0 \quad (2.3-4)$$

$$\pi^T h^* = 0 \quad (2.3-5)$$

$$\Lambda h^* - T(0) = 0 \quad (2.3-6)$$

$$\pi \geq 0 \quad (2.3-7)$$

因為我們限制了路網中對任一路徑的路段流量必須為正流量，使得 $c'_p(h^*, 0) = \mu_w$ 且 $\pi = 0$ 。而將 h^* 中為正流量的部份定義為 h^{0*} ，其相對的起訖路徑矩陣被定義為 Λ^0 。上述之系統可以簡

化為：

$$c'(h^{0*}, 0) - \Lambda^{0T} \mu = 0 \quad (2.3-8)$$

$$\Lambda^0 h^{0*} - T(0) = 0 \quad (2.3-9)$$

我們可以很容易的看出 Λ^{0T} 是線性獨立的，而且 μ 是唯一的。所以系統式(2.3-8)及式(2.3-9)可以滿足定理 2.2.4 的條件， h^{0*} 對 ε 的導數即可計算。上述系統在 $\varepsilon = 0$ 時，對 (h^0, μ) 的 Jacobian 矩陣、對 ε 的 Jacobian 矩陣分別為

$$\begin{bmatrix} J_{h^0 \mu^0}^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0) & -\Lambda^{0T} \\ \Lambda^0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3-10)$$

$$[J_\varepsilon^*(0)] = \begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon c^0(h^*(0), 0) \\ -\nabla_\varepsilon T(0) \end{bmatrix} \quad (2.3-11)$$

令

$$\begin{bmatrix} J_{h^0 \mu^0}^*(0) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (2.3-12)$$

式中

$$B_{11} = \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1} [I - \Lambda^{0T} [\Lambda^0 \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1} \Lambda^{0T}]^{-1} \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1}]$$

$$B_{12} = \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1} \Lambda^{0T} [\Lambda^0 \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1} \Lambda^{0T}]^{-1}$$

$$B_{21} = -[\Lambda^0 \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1} \Lambda^{0T}]^{-1} \Lambda^0 \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1}$$

$$B_{22} = -[\Lambda^0 \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0)^{-1} \Lambda^{0T}]^{-1}$$

並由隱函數定理得到可得

$$J_{y=(h^0 \mu^0)}^*(0) \nabla_\varepsilon y(0) + J_\varepsilon^*(0) = 0 \quad (2.3-13)$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon h^0(0) \\ \nabla_\varepsilon \mu^0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{h^0 \mu^0}^*(0) \end{bmatrix}^{-1} [-J_\varepsilon^*(0)]$$

$$\text{其中 } \begin{bmatrix} J_{h^0 \mu^0}^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{h^0} c^0(h^*(0), 0) & -\Lambda^{0T} \\ \Lambda^0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3-14)$$

$$[J_\varepsilon^*(0)] = \begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon c^0(h^*(0), 0) \\ -\nabla_\varepsilon T(0) \end{bmatrix}$$

$$\nabla_\varepsilon f^0(0) = \Delta^0 \nabla_\varepsilon h^0(0) \quad (2.3-15)$$

2.4 路網縮減法

Tobin 與 Friesz(1988)方法根據隱函數定理並且需要滿足區間唯一性，具體而言，我們需要透過被限制路網求解線性規劃得到一組路徑流量解 h^* ，而為了滿足非退化極值點之要求，由線性規劃法求得之路徑流量解需等於 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩，但即使我們限制路網使用者均衡問題盡可能滿足條件時許多路網問題仍然無法滿足前述條件，使得 TF 法可使用的路網受到侷限。Cho(1988)及 Cho、Smith 和 Friesz(2000)三位學者根據假如運輸成本些微變動時，則流量型態之改變應亦只是些微變動且與原流量近乎相等之觀點提出一個可行解之子集合，使其解非常接近原來的可行解集合，此新的可行解集合只包含路段變數在內，如此一來，可以避免 TF 法中所提及路徑正流量解需等於 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩之假設，可直接進行敏感度分析之推導。

最短距離方法首先假設已知一組路徑流量最佳解 h^* 與 $h(\varepsilon)$ 為微擾解，求解下式數學規劃問題：

$$\begin{aligned} \min_{h(\varepsilon)} \|h(\varepsilon) - h^*\|^2 &= (h(\varepsilon) - h^*)^T (h(\varepsilon) - h^*) \\ \text{s.t. } \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} h(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4-1)$$

其中， Δ_1 是將路段路徑矩陣 Δ 重新排列成 $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$ ，使得 $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix}$ 為滿秩(full row rank)之矩陣，而 f_1 則是相對應於 Δ_1 之流量，也就是

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

由上述我們可以推得必存在一矩陣 $[M_1 \ M_2]$ 使得

$$\Delta_2 = [M_1 \ M_2] \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} \quad (2.4-2)$$

同理我們可以推得

$$f_2 = \Delta_2 h(\varepsilon) = [M_1 \ M_2] \begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.4-3)$$

而因為 $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix}$ 為滿秩之矩陣，因此上述之數學規劃存在一唯一解

$$h(\varepsilon, f_1, h^*) = h^* + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 \Delta_1^T & \Delta_1 \Lambda^T \\ \Lambda \Delta_1^T & \Lambda \Lambda^T \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} h^* \right) \quad (2.4-4)$$

令

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \Delta_1^T & \Delta_1 \Lambda^T \\ \Lambda \Delta_1^T & \Lambda \Lambda^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4-5)$$

為了方便列式，我們簡化式(2.4-4)得

$$h(\varepsilon, f_1, h^*) = N_0 h^* + N_1 f_1 + N_2 T(\varepsilon) \quad (2.4-6)$$

其中

$$\begin{aligned} N_0 &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 \Delta_1^T & \Delta_1 \Lambda^T \\ \Lambda \Delta_1^T & \Lambda \Lambda^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} \\ N_1 &= \Delta_1^T M_{11} + \Lambda^T M_{21} \\ N_2 &= \Delta_1^T M_{12} + \Lambda^T M_{22} \end{aligned}$$

重新整理式(2.4-2)得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} &= \Delta_2 \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 \Delta_1^T & \Delta_1 \Lambda^T \\ \Lambda \Delta_1^T & \Lambda \Lambda^T \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \Delta_2 \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Lambda \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \Delta_2 \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4-7)$$

因此， $M_1 = \Delta_2 N_1$ 與 $M_2 = \Delta_2 N_2$ 。我們也可以式(2.4-3)重新寫成

$$f_2 = \Delta_2 N_1 f_1 + \Delta_2 N_2 T(\varepsilon) \quad (2.4-8)$$

令

$$B = [\Delta_2 N_1 - I] \quad (2.4-9)$$

使得

$$Bf + \Delta_2 N_2 T(\varepsilon) = 0 \quad (2.4-10)$$

最後可得可行解空間為

$$\Omega(\varepsilon) = \{f | \Delta_2 N_0 h^* + \Delta_2 N_1 f_1 + \Delta_2 N_2 T(\varepsilon) = f_2, f \geq 0\} \quad (2.4-11)$$

其解空間符合 Tobin 所提出之敏感度分析定理，因此，可以得到

$$\begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon f(0) \\ \nabla_\varepsilon \mu(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_f c(f(0), 0) & -B \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\nabla_\varepsilon c(f(0), 0) \\ -\Delta_2 N_2 \nabla T(0) \end{bmatrix} \quad (2.4-12)$$

2.5 高階敏感度分析

Cho 與 Huang(2014)提出均衡路網二階敏感度的一般形式，並將此敏感性資訊應用於二階泰勒展開式近似反應函數，此方法有效解決路網號誌控制問題，最後說明非線性近似演算法的二階敏感度計算和收斂速度，其收斂速度優於一階敏感度。其二階敏感度資訊如下：

定義 2.5.1 (Kronecker Product)

給定 $U \in R^{m \times n}$ 與 $V \in R^{p \times q}$ ，則 U 和 V 之 Kronecker Product 為

$$U \otimes V = \begin{bmatrix} u_{11}V & \cdots & u_{1n}V \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1}V & \cdots & u_{mn}V \end{bmatrix} \quad (2.5-1)$$

定義 2.5.2 (Vector operator)

給定 $U \in R^{m \times n}$ 且 U_j 為 U 的第 j 個行向量(column vector)，則定義 $vecU \in R^{mn \times 1}$ 如下

$$vecU = [U_1^T \ U_2^T \ \dots \ U_n^T]^T \quad (2.5-2)$$

定義 2.5.3 給定 U 為一個 $p \times q$ 實變數 s 矩陣的 $m \times n$ ，則 U 的導數為

$$D_s U = \frac{\partial vecU}{\partial (vecs)^T} \quad (2.5-3)$$

定理 2.5.1

給定 $U: S \rightarrow R^{m \times r}$ 與 $V: P \rightarrow R^{r \times n}$ 在 $R^{p \times q}$ 的開集 S 上是可微的，則 UV 在 S 上也是可微的且 Jacobian 矩陣為

$$D_s(UV) = \frac{\partial vecUV}{\partial (vecs)^T} = (V^T \otimes I_m) D_s U + (I_n \otimes U) D_s V \quad (2.5-4)$$

定理 2.5.2

給定 $f: S \rightarrow R^m$ 、 $S \in R^n$ 、 r 為 S 的內點及 $B(s_0, r)$ 為 S 上的開球，給定 s 為 R^n 中的一個點，其中 $\|s\| < r$ 使得 $s_0 + s \in B(s_0, r)$ ，若 f 在 s_0 上二階可微，則 f 在 $s_0 + s$ 上的二階泰勒展開式為

$$f(s_0 + s) = f(s_0) + D_s f(s - s_0) + \frac{1}{2} ((s - s_0)^T \otimes I_m) H_s f(s_0) (s - s_0) \quad (2.5-5)$$

推理 7. 均衡路網流量之二階敏感度為

$$\begin{bmatrix} H_s f \\ H_s \mu \end{bmatrix} = (V^T \otimes I_{\alpha \times \alpha_2}) D_s U + (I_k \otimes U) D_s V$$

其中， $U(f(s), s) = \begin{bmatrix} D_f t(f(s), s) & -M^T \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

$$V(f(s), s) = \begin{bmatrix} -D_s t(f(s), s) \\ \Delta_2 N_2 D_s T(s) \end{bmatrix}$$

第三章 路網均衡區間敏感度分析之路網縮減法

本研究因雙層路網設計問題中，因透過泰勒展開式以線性近似之方式求得使用者之反應函數，故需求得反應函數之一階導函數，因此將透過微擾參數在區間唯一解附近之擾動情形（即敏感度資訊）求得，故在本章將討論 Cho 等(2000)學者提出路網縮減法求解敏感度資訊之方法，而為了發展敏感度結果，該文獻中建立路段成本函數或旅次需求微擾參數均衡問題，並討論這些函數的條件，假設微擾均衡路段成本函數為區間嚴格單調且存在一個微擾路徑均衡流量滿足為正條件，則變分不等式微擾均衡的模式將可直接被應用在路段變數上。本章節 3.1 節至 3.4 節之方法引述自 Cho 等人(2000)。

3.1 微擾系統

假設流量成本函數與旅次需求向量會受到一些有限維度的參數 $\theta \in R^k$ 向量所影響，成本函數 c_0 與旅次需求向量 T_0 被參數值 θ_0 所影響，亦即 c_0 與 T_0 受到參數值而改變時會在參數值 θ_0 之鄰域 Θ 之間，則若對於每一個 $\theta \in \Theta$ 定義一個微擾向量 $\varepsilon = \theta - \theta_0$ ，建立一個微擾向量的集合 $D = \{\varepsilon \in R^k: \theta_0 + \varepsilon \in \Theta\}$ ，其中集合也包含無微擾向量 $0 \in D$ ，其對應到初始無微擾參數向量 θ_0 。

考慮初始微擾參數 θ_0 ，假設所有充分微小微擾都是可行的。為了更準確，假設對於每一個 $x \in R^n$ 與常數 $\delta > 0$ ，存在一個集合 $B(x) = \{y \in R^n: \|x - y\| < \delta\}$ 為 R^n 中的 x 鄰域，則現在假設 D 在 R^k 中包含一些零鄰域 $B(0)$ 。除此之外，對於微小微擾與其之連續性，故給定集合 D 是有界且封閉的集合。

定義 3.1.1 在 R^n 空間上，一個集合為緊緻集若且為若該集合為一有界之閉集

定義 3.1.2 每一個包含零域之緊緻集 $D \subseteq R^k$ 為容許的微擾定義域。

給任意微擾定義域 D ，其要求每一個 $\varepsilon \in D$ 也許會與獨立的路徑成本函數 $c(\cdot, \varepsilon)$ 與旅次需求向量 $T(\varepsilon)$ 有關聯，其中 $c_0 = c(\cdot, 0)$ 、 $T_0 = T(0)$ 。因此，對於每一個 $\varepsilon \in D$ 與 $f \in R^\alpha$ 給定微擾路徑流量集合為

$$H(f, \varepsilon) = \{h \in R_+^\rho: \Delta h = f, \Lambda h = T(\varepsilon)\} \quad (3.1-1)$$

並定義可行的路段流量集合

$$\Omega(\varepsilon) = \{f \in R^\alpha: H(f, \varepsilon) \neq \emptyset\} \quad (3.1-2)$$

其中， $H(f, 0) = H(f, T_0)$ 、 $\Omega(0) = T_0$

則透過 $c(\cdot, \varepsilon)$ 、 $T(\varepsilon)$ 定義均衡問題之均衡路段流量向量集合則可以由變分不等式問題求得一解集合如下

$$VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) = \{f \in \Omega(\varepsilon) : c(f, \varepsilon)^T(g - f) \geq 0, \forall g \in \Omega(\varepsilon)\} \quad (3.1-3)$$

因要討論的微擾問題在均衡路段流量向量上至少是區間唯一解，故定義一個微擾系統，在定義為擾系統問題之前，將先針對一些會用到之集合進行定義。

定義 3.1.3 給定 $F \subset R^n$ 、 $f \in R^n$ ，若 $B_r(f) \cap F - \{f\} \neq \emptyset, \forall r > 0$ ，則 f 被稱為 F 的極限點或匯聚點(cluster point)。

定義 3.1.4 給定 $F \subset R^n$ ， $F' = \{f | f \in R^n, f \text{ 為 } F \text{ 的極限點}\}$ 稱為匯聚點集(derived set)。

定義 3.1.5 $cl(F) = F \cup F'$ 稱為 F 的閉包(closure)

定義 3.1.6 對於任意微擾定義域 D 、連續函數 $c : R_+^\alpha \times D \rightarrow R_+^\alpha, T : D \rightarrow R_{++}^\omega$ 與開集 $F \subseteq R^\alpha$ ，有序集合 (D, F, T, c) 被稱為微擾系統若且為若區間唯一性條件滿足，對於所有微擾向量 $\varepsilon \in D$

$$|VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) \cap F| = 1 = |VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) \cap cl(F)| \quad (3.1-4)$$

從上述之區間唯一條件說明對於每個影響流量解的微擾向量 $\varepsilon \in D$ ，式(3.1-3)之變分不等式之解集合恰好有唯一解 $f(\varepsilon) \in \Omega(\varepsilon) \cap F$ 且也不存在其他解落在 $\Omega(\varepsilon) \cap cl(F)$ ，亦即解存在 $\Omega(\varepsilon) \cap F$ 且沒有其他解落在邊界上，若 $VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) - F \neq \emptyset$ ，則 $f(\varepsilon)$ 相對於開集 F 為區間唯一(locally unique)，且若 $VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) - F = \emptyset$ ，亦即流量集合之開集恰為變分不等式之解集合，則 $f(\varepsilon)$ 在 $\Omega(\varepsilon)$ 上為全域唯一(globally unique)。在所有情況上，對於集合 $F \subseteq R^\alpha$ 解向量 $f(\varepsilon)$ 定義為唯一均衡路段流量函數 $f : D \rightarrow F$ ，主要目標是了解這些函數的特性，驗證系統上微擾機制變動對於區間均衡路徑流量上的變化。

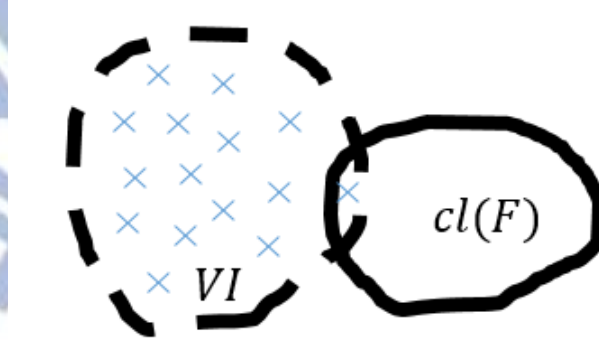


圖 3.1-1 變分不等式解集合之區間唯一性

定理 3.1.1 (路段流量之連續性)

對於每一個微擾系統 (D, F, T, c) ，其相關的均衡路段流量函數 $f: D \rightarrow F$ 是連續的。

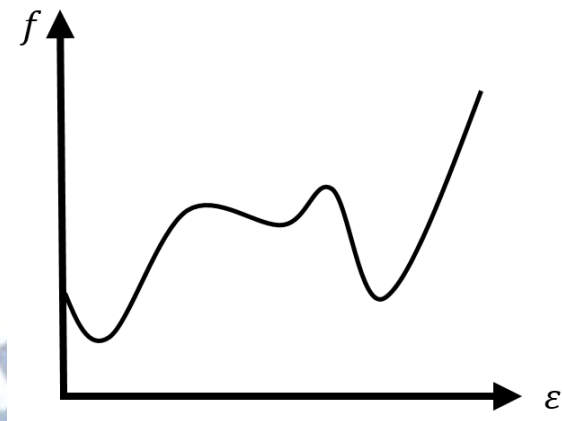


圖 3.1-2 微擾路段流量之連續性

微擾均衡路段流量的連續性是取決於 c 、 T 的連續性，特別是，這些連續性的特性是獨立於任何 c 的單調特性，如同 Dafermos & Nagurney(1984b)與 Dafermos(1986)在連續性定理上所舉的例子，這些結果可能被認為分析均衡路段流量中的微擾機制，但卻可能沒有產生任何流量改變的運作過程。因此，因此其方法主要的目標是為了放鬆條件以避免太強條件在微擾系統上。

3.2 縮減法

Dafermos & Nagurney(1984)指出若成本函數為嚴格單調，則其函數之微擾變化會使得均衡流量隨著成本變動，也就是說成本函數若是微小變動，則流量的型態也會是細微變動且與原始解差異不大，故若產生一個僅包含路段流量之可行解子集合，使得他與原始之可行解集合幾乎相同，亦即這個子集合僅包含路段變數而無路徑變數，因此，採用「最短距離法」從每一個均衡路段流量向量 $f(\varepsilon)$ 去求得唯一均衡路徑流量向量，並求得的解在無微擾鄰域的路段流量均衡解去建構變分不等式縮減法的解集合。

假設能夠縮減式(3.1-2)可行路段流量集合 $\Omega(\varepsilon)$ 為較小的集合 $S \subseteq \Omega(\varepsilon)$ 其中包含解 $f(\varepsilon)$ ，也就是說這個集合也落在 $VI(c(\cdot, \varepsilon), S)$ ，但 $f(\varepsilon)$ 可能並非此縮減問題的唯一解。為了維持解的唯一性，必須更進一步增加其他條件，故要求更強的條件在 $c(\cdot, \varepsilon)$ 上，微擾系統 (D, F, T, c) 必須滿足區間嚴格單調條件如下：

C1. 區間嚴格單調條件

對於所有 $\varepsilon \in B_s$ 存在一些零鄰域、 $B_s \subseteq D$ 使得 $c(\cdot, \varepsilon)$ 在 $\Omega(\varepsilon) \cap cl(F)$ 為嚴格單調。

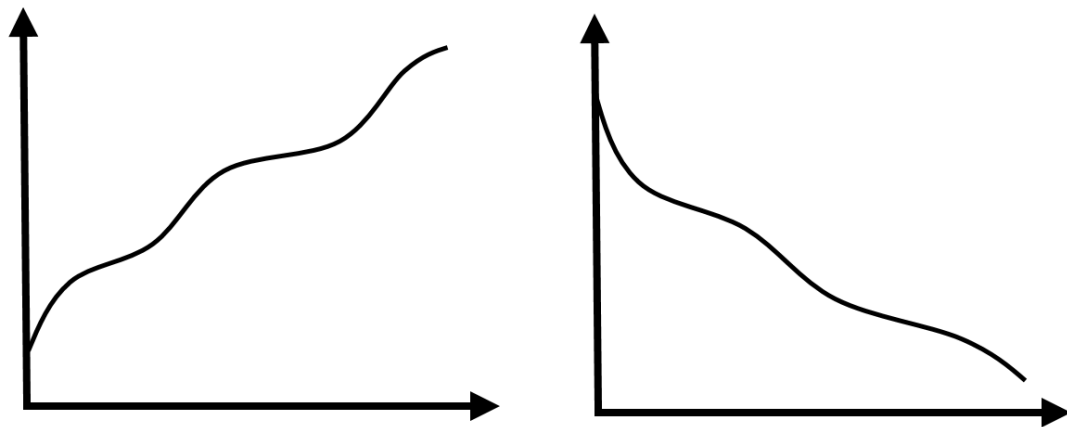


圖 3.2-1 函數嚴格單調性

引理 3.2.1

若 (D, F, T, c) 為一微擾系統滿足上述區間嚴格單調條件，則對於所有 $\varepsilon \in B_s$ 、 $S \subseteq R_+^a$ 且 $f(\varepsilon) \in S \subseteq R_+^a$ ，

$$VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) \cap F = \{f(\varepsilon)\} \quad (3.2-1)$$

必成立。

若 ε 充分趨近於零時，集合 $\Omega(\varepsilon)$ 能夠被縮減到較小的集合 $\Omega_0(\varepsilon)$ ，其中包含較低維度的路徑流量向量，式(2.1-4)提及使用者均衡時的路徑流量，在無微擾的情況下（ ε 等於零），當相同起訖中之路徑與所有路徑之成本比較，若該路徑之成本不為最小成本時，則這些路徑必為

零流量，且考慮微擾的情況下（ ε 趨近為零），這些路徑在所有使用者均衡時仍必須持續為零流量，式(2.1-2)對於每個路徑，均衡路徑成本在微擾機制下表示為 $c_p(f(\varepsilon), \varepsilon) = \Delta_p^T c(f(\varepsilon), \varepsilon)$ ，則對於旅次需求 $w \in W$ ，令

$$c_w(\varepsilon) = \min\{c_p(f(\varepsilon), \varepsilon) : p \in P_w\} \quad (3.2-2)$$

為最小路徑成本 P_w ，則最小成本路徑 P_w 的集合為

$$P_w(\varepsilon) = \{p \in P_w : c_p(f(\varepsilon), \varepsilon) = c_w(\varepsilon)\} \quad (3.2-3)$$

與對應到完整路網的最小成本路徑集合為

$$P(\varepsilon) = \bigcup_{w \in W} P_w(\varepsilon) \quad (3.2-4)$$

引理 3.2.2

對於任一微擾系統 (D, F, T, c) ，存在一個零鄰域 $B_0 \subseteq D$ 使得下式成立

$$P(\varepsilon) \subseteq P(0) \text{ 對於所有 } \varepsilon \in B_0 \quad (3.2-5)$$

接著為了要建立縮減法的路徑流量集合 $\Omega(\varepsilon)$ ，令 $\rho_0 = |P(0)| \leq \rho$ 、 Δ^0 與 Λ^0 分別為 Δ 與 Λ 刪除矩陣所有行(column)中對應到路徑 $p \in P - P(0)$ 之矩陣，則對於每一個 $\varepsilon \in D$ 與 $f \in \Omega(\varepsilon)$ 對應到式(3.1-1)，縮減法之微擾路徑流量集合為

$$H_0(f, \varepsilon) = \{h \in R_+^{\rho_0} : \Delta^0 h = f, \Lambda^0 h = T(\varepsilon)\} \quad (3.2-6)$$

對應到式(3.1-2)中 $\Omega(\varepsilon)$ 縮減後較小的路徑流量解集合為

$$\Omega_0(\varepsilon) = \{f \in R^\alpha : H_0(f, \varepsilon) \neq \emptyset\} \quad (3.2-7)$$

其中，對於所有 ε 充分趨近於零。

引理 3.2.3

對於任一微擾系統 (D, F, T, c) ，滿足區間嚴格單調條件，對於所有 $\varepsilon \in B$ 存在一個零鄰域 $B \subseteq D$ 使得

$$VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega_0(\varepsilon)) \cap F = \{f(\varepsilon)\} \quad (3.2-8)$$

式(3.2-3)中每個集合 $P_w(0)$ 在無微擾的情況下是非空集合，每一個路徑 $p \in P_w$ 若落在旅次需求 w 上，則對應到 Λ^0 的行向量值則為1，其中這個起訖路徑矩陣包含 w 個線性獨立的行向量，因此這個矩陣為滿秩(full row rank)矩陣，接著從 Δ^0 選擇列秩的集合定為 Δ_1^0 並結合 Λ^0 為一個滿秩矩陣 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 。在這裡會出現兩種情況，第一， Δ_1^0 為空集合，也就是說 Δ^0 中每一個列皆可以透過 Λ^0 所生成($\Delta^0 = \text{span}(\Lambda^0)$)，則會存在一個矩陣 M^0 使得 $\Delta^0 = M^0 \Lambda^0$ ，將此結果帶入式(3.2-6)替代 $H_0(f, \varepsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow M^0 T(\varepsilon) = f$ ，可推得式(3.2-7)僅剩下唯一的元素 $M^0 T(\varepsilon)$ ，又由引理 3.2.2 得 $f(\varepsilon) \in \Omega_0(\varepsilon)$ ，我們可得到

$$f(\varepsilon) = M^0 T(\varepsilon) \quad (3.2-9)$$

因此，對於這個情況下，均衡敏感度分析路段流量 $f(\varepsilon)$ 可以透過旅次需求 $T(\varepsilon)$ 表示。另外一種情況則是， Δ^0 不包含 Λ^0 之列生成，考慮到這種情況下，將 Δ^0 分割成式

$$\Delta^0 = \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{bmatrix} \quad (3.2-10)$$

並選擇最大之集合矩陣 Δ_1^0 使得 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 為一個滿秩矩陣，其中 α_1 為 Δ_1^0 之列個數，且定義 α_2 為 Δ^0 消除 Δ_1^0 之列剩餘 Δ_2^0 之列個數，故我們可以找到兩個矩陣 M_1 、 M_2 使得下式成立

$$\Delta_2^0 = M_1 \Delta_1^0 + M_2 \Lambda^0 \quad (3.2-11)$$

由上述之矩陣分割，這意味著如果我們將每個路段流量 $f \in \Omega_0(\varepsilon)$ 分割與式(3.2-10)相對應之流量 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ ，則我們可以根據式(3.2-6)及式(3.2-11)選擇任意路徑流量 $h \in H_0(f, \varepsilon)$ 使得流量 f_2 與 f_1 及 $T(\varepsilon)$ 之關係式如下

$$\begin{aligned} f_2 &= \Delta_2^0 h = M_1 \Delta_1^0 h + M_2 \Lambda^0 h \\ &= M_1 f_1 + M_2 T(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

上述提及之關係式，稱為流量守恆條件。我們現在考慮對於任一固定的 $\varepsilon \in D$ 、 $f_1 \in R^{\alpha_1}$ 及 $h_0 \in R^{\rho_0}$ ，定義最小距離問題：

$$\begin{aligned} \min \|h - h_0\|^2 &= (h - h_0)^T (h - h_0) \\ \text{s.t } h &\in R^{\rho_0} \end{aligned} \quad (3.2-13)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.2-14)$$

由於 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 為滿秩矩陣，故對於每一個選取的 (ε, f_1, h_0) 皆會有唯一解 $h(\varepsilon, f_1, h_0)$ 存在式(3.2-13)(3.2-14)之問題。接著針對最小距離問題進行求解，首先透過拉格朗日多項式：

$$\mathcal{L} = (h - h_0)^T (h - h_0) + \beta \left(\begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} h \right) \quad (3.2-15)$$

一階條件為零求最佳解，即 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2(h - h_0) - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \beta = 0 \quad (3.2-16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} h = 0 \quad (3.2-17)$$

在式(3.2-16)乘上 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 可得

$$2 \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} (h - h_0) = \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \beta \quad (3.2-18)$$

又因為 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 為滿秩(full row rank)，故存在，可求得 β 如下式

$$\begin{aligned}\beta &= 2 \left(\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} (h - h_0) \\ &= 2 \left(\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} h_0 \right)\end{aligned}\quad (3.2-19)$$

將求得之結果帶回(3.2-16)可得

$$h(\varepsilon, f_1, h_0) = h_0 + \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \Delta_1^{0T} & \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \\ \Lambda^0 \Delta_1^{0T} & \Lambda^0 \Lambda^{0T} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} f_1 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} h_0 \right) \quad (3.2-20)$$

為了簡化上式，令

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \Delta_1^{0T} & \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \\ \Lambda^0 \Delta_1^{0T} & \Lambda^0 \Lambda^{0T} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2-21)$$

其中

$$M_{11} = \left[\Delta_1^0 \Delta_1^{0T} - \Delta_1^0 \Lambda^{0T} (\Lambda^0 \Lambda^{0T})^{-1} \Lambda^0 \Delta_1^{0T} \right]^{-1} \quad (3.2-22)$$

$$M_{12} = - \left(\Delta_1^0 \Delta_1^{0T} \right)^{-1} \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \left[\Lambda^0 \Lambda^{0T} - \Lambda^0 \Delta_1^{0T} (\Delta_1^0 \Delta_1^{0T})^{-1} \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \right]^{-1} \quad (3.2-23)$$

$$M_{21} = - \left[\Lambda^0 \Lambda^{0T} - \Lambda^0 \Delta_1^{0T} (\Delta_1^0 \Delta_1^{0T})^{-1} \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \right]^{-1} \Lambda^0 \Delta_1^{0T} (\Delta_1^0 \Delta_1^{0T})^{-1} \quad (3.2-24)$$

$$M_{22} = \left[\Lambda^0 \Lambda^{0T} - \Lambda^0 \Delta_1^{0T} (\Delta_1^0 \Delta_1^{0T})^{-1} \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \right]^{-1} \quad (3.2-25)$$

為了簡化表示，我們將式(3.2-20)整理如下

$$\begin{aligned}h(\varepsilon, f_1, h_0) &= \left(I - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) h_0 \\ &\quad + \left(\Delta_1^{0T} M_{11} + \Lambda^{0T} M_{21} \right) f_1 + \left(\Delta_1^{0T} M_{12} + \Lambda^{0T} M_{22} \right) T(\varepsilon)\end{aligned}\quad (3.2-26)$$

令

$$N_0 = I - \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} \quad (3.2-27)$$

$$N_1 = \Delta_1^{0T} M_{11} + \Lambda^{0T} M_{21} \quad (3.2-28)$$

$$N_2 = \Delta_1^{0T} M_{12} + \Lambda^{0T} M_{22} \quad (3.2-29)$$

故可以將(3.2-26)簡化為下式

$$h(\varepsilon, f_1, h_0) = N_0 h_0 + N_1 f_1 + N_2 T(\varepsilon) \quad (3.2-30)$$

觀察滿秩矩陣 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 並透過式(3.2-11)及式(3.2-21)求解 M_1 、 M_2

$$\Delta_2^0 = M_1 \Delta_1^0 + M_2 \Lambda^0 = [M_1 \ M_2] \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$$

將上式兩邊同乘 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{aligned} \Delta_2^0 \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T &= [M_1 \ M_2] \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \\ \Rightarrow \Delta_2^0 \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T &= [M_1 \ M_2] \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \Delta_1^{0T} & \Delta_1^0 \Lambda^{0T} \\ \Lambda^0 \Delta_1^{0T} & \Lambda^0 \Lambda^{0T} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow [M_1 \ M_2] &= \Delta_2^0 \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \\ &= \Delta_2^0 \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此，矩陣 M_1 、 M_2 能夠被 Δ_2^0 所表示出來，且由式(3.2-28)、式(3.2-29)可推得矩陣 N_1 、 N_2 與 M_1 、 M_2 之關係為 $M_1 = \Delta_2^0 N_1$ ， $M_2 = \Delta_2^0 N_2$ ，我們可以將式(3.2-12)流量守恆條件表示如下式所示：

$$\Delta_2^0 N_1 f_1 - f_2 + \Delta_2^0 N_2 T(\varepsilon) = 0 \quad (3.2-31)$$

給出式(3.2-26)最短距離解，接著觀察若由式(3.2-12)定義 $f_2 \in R^{\alpha-\alpha_1}$ 、集合 $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ ，則馬上可以從限制式(3.2-14)與式(3.2-11)、式(3.2-12)做結合。

$$\Delta^0 h(\varepsilon, f_1, h_0) = f \quad (3.2-32)$$

$$\Lambda^0 h(\varepsilon, f_1, h_0) = T(\varepsilon) \quad (3.2-33)$$

另一方面而言，若我們現在將式(3.2-26)寫成非負條件如下

$$N_0 h_0 + N_1 f_1 + N_2 T(\varepsilon) \geq 0 \quad (3.2-34)$$

則可行路段流量集合可以被表示為

$$\Omega_\varepsilon(h_0) = \{f \in R_+^\alpha: (3.2-31) \text{ 及 } (3.2-34) \text{ 成立} \} \quad (3.2-35)$$

必須滿足 $\Omega_\varepsilon(h_0) \subseteq \Omega_0(\varepsilon)$ 。除此之外，因為均衡路段向量 $f(\varepsilon) = \begin{bmatrix} f_1(\varepsilon) \\ f_2(\varepsilon) \end{bmatrix}$ 滿足式(3.2-31)，

若 $N_0 h_0 + N_1 f_1 + N_2 T(\varepsilon) \geq 0$ 為真，則我們可得 $f(\varepsilon) \in \Omega_\varepsilon(h_0) \subseteq \Omega_0(\varepsilon)$ ，在變分不等式的集合 $\Omega_\varepsilon(h_0)$ 描述 $f(\varepsilon)$ 的特性。另外，由於式(3.2-31)及式(3.2-34)為路徑流量的自由變數，則將可以直接被允許直接使用前一小節之結果。

然而，最短距離問題通常不能保證非負解，其中一個可能的方向為透過嚴格的路徑流量 h 非負限制，但解無法容易地透過式(3.2-26)求得，事實上將需要關於限制非負約束條件的充分條件，以避免使集合 $\Omega_\varepsilon(h_0)$ 發生顯著的簡化。

3.3 區間正規微擾系統

為了要順利研究微擾發生時路徑流量對於微擾參數影響發生的變化，接著將在微擾系統 (D, F, T, c) 上增加一個正規條件，這個條件將確保在式 (3.2-13) 最短距離法中所求得的 h 存在，而且對於所有 ε 充分接近 0 時， $h(\varepsilon, f_1, h_0)$ 的恆正性與對於所有 $f \in \Omega_0(\varepsilon)$ 充分趨近於均衡路段流量向量 $f(\varepsilon) \in \Omega_0(\varepsilon)$ ，必須充分要求無微擾路網均衡問題存在至少一組均衡路段流量向量，其中該向量可在所有最小成本路徑上被使用，建構這個條件的主要原因係因微擾情形發生時可能發生流量降低，故須確保受到微擾後的流量不為負值或零，回顧式 (3.2-6) 結合引理 3.2.2，對於每一個 $\varepsilon \in B_0$ 在 $H_0(f, \varepsilon)$ 的向量有先前刪除在 $H(f, \varepsilon)$ 上由所有最短路徑 $p \in P(\varepsilon)$ 組成的均衡路徑流量向量，因此，若我們給定

$$H_+(\varepsilon) = H_0(f(\varepsilon), \varepsilon) \cap R_{++}^{\rho_0} \quad (3.3-1)$$

其定義為在 $H_0(f(\varepsilon), \varepsilon)$ 上正流量向量的集合，則區間恆正條件將能夠考慮為

C2. 區間恆正

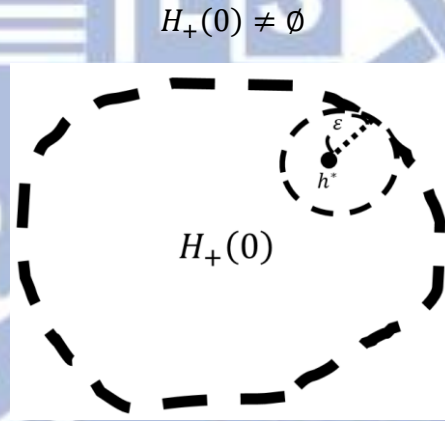


圖 3.3-1 均衡解集合恆正示意圖

從上圖可以看到滿足區間恆正之原因，係因考量若發生為擾情形時，仍須確保路徑流量解為非負值或零，故在原先取 $H_+(\varepsilon)$ 時需限制 $H_+(0)$ 為空集合，亦即流量集合需為區間恆正值，使得發生為擾情形時不得使流量為零。

定義 3.3.1 對於任意微擾定義域 D 、連續函數 $c: R_+^\alpha \times D \rightarrow R_+^\alpha$ 、 $T: D \rightarrow R_{++}^\omega$ 及開集合 $F \subseteq R^\alpha$ ，有序集合 (D, F, T, c) 被稱為微擾系統若且為若 (D, F, T, c) 滿足條件 C1、C2 且滿足下列之區間存在性條件

C3. 區間存在性

對於所有微擾向量 $\varepsilon \in D$ ， $VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega(\varepsilon)) \cap F \neq \emptyset$ 。

由引理 3.2.1，條件 C1 與 C3 暗示了區間唯一條件，因此，每一區間正規微擾系統 (D, F, T, c) 確實為一個定義 3.1.2 上之微擾系統。給定這一種微擾系統的類別，我們首先可以

證明對於每一個選擇的 $h_0 \in H_+(0)$ ，這個解是在式(3.2-13)、式(3.2-14)透過令 f_1 等於對於所有 ε 充分收斂於 0 時均衡路段流量向量 $f_1(\varepsilon)$ 為正值。

引理 3.3.1

對於每一個區間正規微擾系統 (D, F, T, c) 與向量 $h_0 \in H_+(0)$ ，存在一個零鄰域 $\varepsilon \subseteq D$ 使得對於所有 $\varepsilon \subseteq B$ ，則

$$h[\varepsilon, f_1(\varepsilon), h_0] \in R_{++}^{\rho_0} \quad (3.3-2)$$

這個解直接的結果，就式(3.2-35)縮減可行路段流量集合上我們有均衡路段流量的區間特性。

定理 3.3.1 (縮減定理)

對於每一個區間正規微擾系統 (D, F, T, c) 與選擇的 $h_0 \in H_+(0)$ ，存在一個零鄰域 $B_0 \subseteq D$ 使得對於所有 $\varepsilon \subseteq B$

$$VI(c(\cdot; \varepsilon), \Omega_\varepsilon(h_0)) \cap F = \{f(\varepsilon)\} \quad (3.3-3)$$

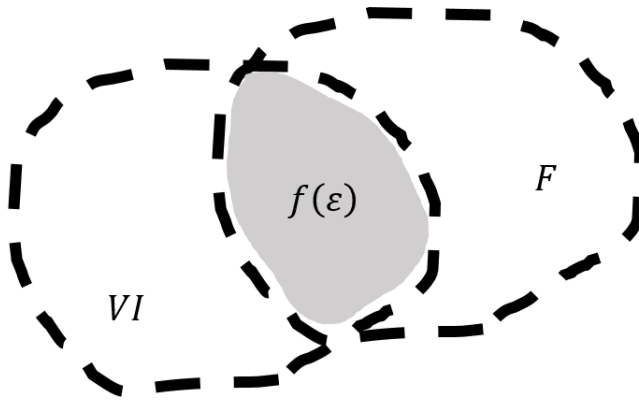


圖 3.3-2 路段流量解可行解集合

3.4 區間均衡路段流量敏感度分析函數

給定一個縮減路段流量特性的均衡路段流量函數 $f: D \rightarrow R_+^q$ 接近零，現在要分析在這個區域上區間特性的微擾路段流量，觀察區間恆正條件 C2，對於每一個 $p \in P(0)$ ，確保均衡路段流量的恆正，這仍然可能有一些均衡路段流量在 $f(0)$ 為零，然而，這些路段則可以在下數分析中被刪除。

引理 3.4.1

對每一個區間正規微擾系統 (D, F, T, c) ，存在一個零鄰域 $B \subseteq D$ ，使得對於所有 $\varepsilon \in B$ 與 $a \in A$ ，則

$$f_a(\varepsilon) = 0 \text{ 若且為若 } f_a(0) = 0 \quad (3.4-1)$$

也就是說從上述推理可知，路段流量為零的路段，其路段上無論是否會受到微擾參數影響，流量皆為零，為了區間敏感度分析，於此刪除流量為零的所有路段，並指將重點放在流量恆正的子集合 A_0

$$A_0 = \left\{ a \in A \mid \sum_{p \in P(0)} \Delta_{ap} > 0 \right\} \quad (3.4-2)$$

3.4.1 區間平滑微擾系統

為了利用縮減定理對零點附近的均衡路段流量函數進行分析，故使得微擾系統滿足區間可微性假設。為此，先定義以下符號，對於任意開集 $S \subseteq R^n$ 與可微函數 $G: S \rightarrow R^m$ ，給定一個 $m \times n$ 矩陣的偏微矩陣（也就是函數 G 的 Jacobian 矩陣）計算點 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in S$ 的偏導數如下

$$\nabla G(x)|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.4-3)$$

則 G 被定義為連續可微若且為若函數 $\nabla G: S \rightarrow R^m$ 為連續。相同的，對於任意 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的子集合 $y = (x_1, \dots, x_k)$ 、 $z = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ ，我們定義 G 對 y 的偏導數為

$$\nabla_y G(y_0, z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_k} \end{bmatrix} \quad (3.4-4)$$

定義 3.4.1 給定 $M \in R^{m \times m}$ 為正定矩陣若且為若對於所有 $u \in R^m$ 、 $u \neq 0$

$$u^T M u > 0 \quad (3.4-5)$$

定義 3.4.2 一個區間正規微擾系統 (D, F, T, c) 被稱為區間平滑若且為若存在一個零鄰域 $B(0) \subseteq D$ 與一個 $f(0)$ 鄰域 $F(0) \subseteq F \cap R_{++}^\alpha$ 使得被限制的函數 $c: F(0) \times B(0) \rightarrow R_+^\alpha$ 與 $T: B(0) \rightarrow R_{++}^\omega$ 是連續可微且區間正定的條件滿足。

C4 區間正定

$\nabla_f C[f(0), 0]$ 是正定矩陣

還要注意的是，雖然 C4 原則上只需要相對於可行解集合的正定性就可以放鬆，但對於可微系統的區間唯一解來說，這個條件幾乎總是可以滿足的。接下來從定理 2.1 和條件 C1 觀察，為了不失一般性我們可以假設對於所有 $\varepsilon \in B(0)$ 以下兩個條件都成立：

$$f(\varepsilon) \in F(0) \quad (3.4-6)$$

$$c(\cdot, \varepsilon) \text{ 在 } \Omega(\varepsilon) \cap F(0) \text{ 是嚴格單調} \quad (3.4-7)$$

除此之外，假如我們固定任意選擇 $h_0 \in H_+(0)$ ，則藉由引理 3.4.1 與定理 3.3.1，對於所有 $\varepsilon \in B(0)$ 也許可以假設下列兩個額外的條件成立

$$h[\varepsilon, f_1(\varepsilon), h_0] \in R_{++}^{\rho_0} \quad (3.4-8)$$

$$VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega_\varepsilon(h_0)) \cap F(0) = \{f(\varepsilon)\} \quad (3.4-9)$$

因此，特別地根據式 (3.4-9) 對於所有 $\varepsilon \in B(0)$ ， $f(\varepsilon)$ 有唯一元素的 $\Omega_\varepsilon(h_0) \cap F(0)$ 滿足

$$c[f(\varepsilon), \varepsilon]^T (f - f(\varepsilon)) \geq 0 \quad \text{對於所有 } f \in \Omega_\varepsilon(h_0) \quad (3.4-10)$$

另外，由式 (3.2-31)、(3.2-34) 及 (3.2-35)， $\Omega_\varepsilon(h_0)$ 被定義為所有 $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in R^\alpha$ 的集合滿足路徑流量解滿足非負限制式如下

$$N_0 h_0 + N_1 f_1 + N_2 T(\varepsilon) \geq 0 \quad (3.4-11)$$

$$f \geq 0 \quad (3.4-12)$$

與流量守恆限制式

$$Mf + \Delta_2^\circ N_2 T(\varepsilon) = 0 \quad (3.4-13)$$

其中

$$M = [\Delta_2^\circ N_1, -I] \quad (3.4-14)$$

3.4.2 可微的均衡路段流量函數

經過這些觀察，接著分析平滑微擾系統 (D, F, T, c) 的均衡路段流量函數 f 的微分性質，從原理上可以看出，對變分不等式問題微擾更一般的敏感度結果可以得出現在的結果。首先整理上述式(3.4-10)變分不等式 $VI(c(\cdot, \varepsilon), \Omega_\varepsilon(h_0))$ 的線性規劃與其解集合所滿足的非負限制式及流量首恆限制式如下

$$c[f(\varepsilon), \varepsilon]^T(f - f(\varepsilon)) \geq 0 \quad \forall f \in \Omega_\varepsilon(h_0) \quad (3.4-15)$$

$$N_0 h_0 + N_1 f_1 + N_2 T(\varepsilon) \geq 0 \quad (3.4-16)$$

$$Mf + \Delta_2^\circ N_2 T(\varepsilon) = 0 \quad (3.4-17)$$

其中

$$M = [\Delta_2^\circ N_1, -I] \quad (3.4-18)$$

因路段流量可行解為唯一解，透過隱函數定理可以得到

$$c[f(0), 0] - N_1^T \lambda - M^T \mu = 0 \quad (3.4-19)$$

$$\lambda^T (N_0 h_0 + N_1 f_1 + N_2 T(0)) = 0 \quad (3.4-20)$$

$$Mf + \Delta_2^\circ N_2 T(0) = 0 \quad (3.4-21)$$

在區間恆正條件當中提及 $H_+(0) \neq \emptyset$ ，也就是無微擾情形之路徑流量解恆正，故可知 λ 為零向量，可將上三式整理如下

$$c[f(0), 0] - M^T \mu = 0 \quad (3.4-22)$$

$$Mf + \Delta_2^\circ N_2 T(0) = 0 \quad (3.4-23)$$

其中

$$M = [\Delta_2^\circ N_1, -I] \quad (3.4-24)$$

現在令這個函數作為系統的乘數函數，對於每個區間平滑系統，乘數函數和路段流量函數在零鄰域處是連續可微的，考慮一個開集 $S = P(0) \times R^{\alpha_2} \times B(0) \subseteq R^{\alpha + \alpha_2 + k}$ 且給定函數 $J: S \rightarrow R^{\alpha + \alpha_2}$ 對於所有 $(f, \mu, \varepsilon) \in S$ ， $y = [f(\varepsilon)^T, \mu(\varepsilon)^T]^T$

$$J(y(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{bmatrix} c[f(\varepsilon), \varepsilon] - M^T \mu \\ Mf + \Delta_2^\circ N_2 T(\varepsilon_0) \end{bmatrix} \quad (3.4-25)$$

式(3.4-25)由鏈鎖規則(chain rule)可得上述三式之全導數(total derivatives)為

$$\nabla_{(f, \mu)} J(\varepsilon) \nabla_\varepsilon y(\varepsilon) + \nabla_\varepsilon J(\varepsilon) = 0 \quad (3.4-26)$$

接著從平滑系統的性質中得出 J 在所有 $(f_0, \mu_0, \varepsilon_0) \in S$ 上都是連續可微的，因此，對於每一個固定的 $(f_0, \mu_0, \varepsilon_0) \in S$ ，可以得到對 (f, μ) 的 Jacobian 矩陣如下：

$$\nabla_{(f, \mu)} J(f_0, \mu_0, \varepsilon_0) = \begin{bmatrix} \nabla_f c(f_0, \varepsilon_0) & -M^T \\ M & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4-27)$$

對 ε 的 Jacobian 矩陣如下：

$$\nabla_\varepsilon J(f_0, \mu_0, \varepsilon_0) = \begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon c(f_0, \varepsilon_0) \\ \Delta_2^\circ N_2 \nabla_\varepsilon T(\varepsilon_0) \end{bmatrix} \quad (3.4-28)$$

定理 3.4.1(可微定理)

對於任意區間正規微擾系統 (D, F, T, c) 存在一個零鄰域 $B_0 \subseteq B(0) \subseteq D$ 使得限制的乘數函數 $\mu: B_0 \rightarrow R^{\alpha_2}$ 與均衡路段流量函數 $f: B_0 \rightarrow R_+^\alpha$ 皆為連續可微，由式(3.4-26)可得

$$\nabla_\varepsilon y(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} \nabla f(0) \\ \nabla \mu(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_f c(f(0), 0) & -M^T \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\nabla_\varepsilon c(f(0), 0) \\ -\Delta_2^\circ N_2 \nabla_\varepsilon T(0) \end{bmatrix} \quad (3.4-29)$$

第四章 文獻中應用敏感度分析的檢視

在本章節中將會比較 Tobin(1986)、Tobin 與 Friesz(1988)(其方法本章節以 TF 法簡稱之)、Cho 等人(2000) (其方法本章節以 CSF 法簡稱之)這三篇敏感度分析方法之使用條件、其使用上之限制，而在應用 TF 法之文獻中有一些例子誤用了他們提出之敏感度分析方法，將這些不滿足之例子進行路網敏感度分析求得敏感度資訊，雖然這些例子引用 TF 法，但這些例子並未滿足 TF 法所假設之正規條件，本文將會在 4.2 節討論這些被提出之例子未滿足的條件，接著在 4.3 節將這些未滿足之例子應用 CSF 法進行求解。

4.1 敏感度分析方法之比較

在前述文獻回顧探討後，本小節將針對 Tobin(1986)、Tobin 與 Friesz(1988)、Cho 等人(2000)這三個敏感度分析方法進行比較，並說明其適用條件，首先，Tobin(1986)提出變分不等式之敏感度分析，在該文模式建構中提到若要對變分不等式之均衡解進行敏感度分析求得其敏感度資訊，則變分不等式必須滿足下述之四個條件：

- (a) 其均衡解存在
- (b) 其均衡解必須為區間唯一解
- (c) 其可行解之限制函數 g 、 h ，需滿足一階可微且相互線性獨立
- (d) 其限制函數 g 必須滿足嚴格互補鬆弛條件

一般的均衡路網當中，路段之流量均衡解是唯一的，路徑之流量均衡解並非唯一解，也就是說均衡路網之變分不等式不滿足上述條件中之條件(b)，因此，均衡路網之變分不等式不能進行敏感度分析。

Tobin 與 Friesz(1988)提出透過線性規劃法求得一組路徑流量均衡解，使得均衡路網之變分不等式也可以進行敏感度分析，該文中之均衡路網敏感度分析使用條件如下：

- (a) 路段成本函數嚴格單調（路段均衡唯一解存在 $\rightarrow$ 路徑均衡解存在）
- (b) 路徑流量解為非退化解（路徑均衡解滿足區間唯一性）
- (c) 成本函數滿足一階連續可微
- (d) 流量限制式滿足傳統嚴格互補條件

該方法求得一組路徑流量解，解決了路徑流量非唯一解之問題，使得均衡路網之路徑流量解滿足均衡解必須為區間唯一解之條件，可進行敏感度分析，但是大多數路網並沒有辦法順利求得非退化流量解，使得其方法受到局限。

Cho(1988)(2000)以最短距離法將路徑流量解空間轉換為路段流量解空間，在一般的均衡路網當中，路段之流量均衡解是唯一的，也就是說該方法避免了路徑流量均衡解不具唯一性的問題，使得更多均衡路網可以進行敏感度分析，其適用條件如下：

- (a) 路段成本函數嚴格單調
- (b) 無微擾均衡解恆正
- (c) 均衡解存在
- (d) 區間正定

該方法將路徑流量解空間轉換為路段流量解空間後，除了解決路徑流量均衡解不滿足唯一性外，也避免需求得非退化流量解之問題，且均衡路網中之路段流量均衡解為唯一解，使得一般的路網也可以順利的進行敏感度分析，這也是本研究選擇使用 CSF 法進行應用之因素。

4.2 應用 TF 法之文獻

以下所討論之路網文獻，其中舉出一些應用 TF 法之例子，雖然這些例子應用 TF 法進行路網敏感度分析，但這些例子並未滿足 TF 法之假設條件，本節將討論文獻提出的例子未滿足之條件。

例子 1 Patriksson(2004)

本文提出了一個五個點、兩個起訖需求之七個路段及六條路徑之路網(如圖 4.2-1)，該路網之起訖點(1,4)及(3,5)之起訖需求分別為 $T_{14} = 1 + \varepsilon_{14}$ 、 $T_{35} = 1 + \varepsilon_{35}$ 。其中路徑分別為：起訖點(1,4)之三條路徑分別為 $p_1 = \{1,3\}$ 、 $p_2 = \{1,7,4\}$ 、 $p_3 = \{2,4\}$ 、起訖點(3,5)之三條路徑分別為 $p_4 = \{5,2\}$ 、 $p_5 = \{5,1,7\}$ 、 $p_6 = \{6,7\}$ 。每一個路段的成本函數如下：

$$\begin{aligned}
 c_1(f_1) &= 10f_1 \\
 c_2(f_2) &= 0.5f_2 \\
 c_3(f_3) &= 3 + 10f_3 \\
 c_4(f_4) &= f_4 \\
 c_5(f_5) &= f_5 \\
 c_6(f_6) &= 2 + f_6 \\
 c_7(f_7) &= 1 + 10f_7
 \end{aligned}$$

從例子之敘述可以得 Δ 、 Λ 矩陣如下

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}([\Delta^T, \Lambda^T]) = 5$$

當微擾參數 $\varepsilon = 0$ 時，透過數學規劃法所求得之路網均衡之路徑流量解為 $h^*(0) = [0, 0, 1, 1, 0, 0]^T$ (亦即無微擾均衡流量解)，從上式矩陣觀察其路網矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩為5，其均衡路徑流量僅兩條路徑有流量通過，而TF法假設之非退化路徑流量解之正流量個數須等於矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩，因此其解並不滿足非退化解假設，另外在 Chung(2014)亦有針對相同例子進行說明，其觀察發現該例子之無微擾均衡流量不滿足嚴格互補條件，該組均衡流量解並不可微，無法直接應用於TF法。

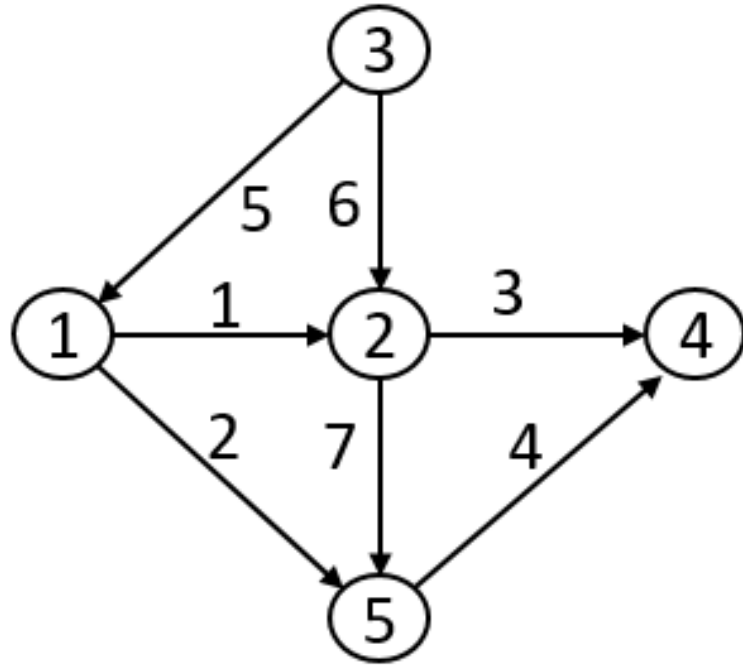


圖 4.2-1 路網示意圖

例子 2 Joseffson 和 Patriksson(2007)

本文提出了一個三個點、一個起訖需求之四個路段及四條路徑之路網(如圖 4.2-3)，該路網之起訖點(1,3)之起訖需求為 $T_{13} = 2$ 。其中路徑分別為：起訖點(1,3)之四條路徑分別為 $p_1 = \{1,3\}$ 、 $p_2 = \{1,4\}$ 、 $p_3 = \{2,3\}$ 與 $p_4 = \{2,4\}$ 。每一個路段的成本函數如下：

$$c_1(f_1) = f_1 + \varepsilon$$

$$c_2(f_2) = f_2$$

$$c_3(f_3) = f_3$$

$$c_4(f_4) = f_4$$

當微擾參數 $\varepsilon = 0$ 時，路網均衡之路段流量解為 $f^*(0) = [1,1,1,1]^T$ (亦即無微擾均衡流量解)，此解雖滿足傳統路網均衡互補條件，但在透過線性規劃求解之過程，路徑均衡流量最多僅可能有兩條路徑流量為正，我們觀察其路網矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩為 3，故其解為退化解，其解並不滿足非退化解假設，無法直接應用於 TF 法。

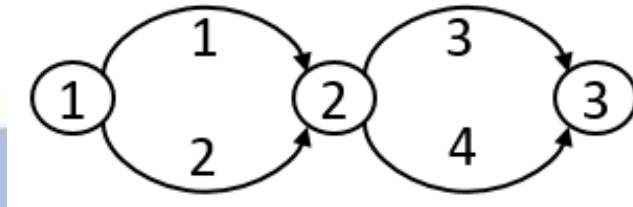


圖 4.2-2 路網示意圖

例子 3 Yang 和 Bell(2007)

本文例子中提出了一個三個點、一個起訖需求之四個路段及四條路徑之路網結構(路網結構同圖 4.2-3)，該路網之起訖點(1,3)之起訖需求為 $T_{13} = 2$ 。其中路徑分別為：起訖點(1,3)之路徑為 $p_1 = \{1,3\}$ 、 $p_2 = \{1,4\}$ 、 $p_3 = \{2,3\}$ 與 $p_4 = \{2,4\}$ ，其中流量 f_1 會受到 ε 影響、 f_2 會受到 ε 。每一個路段的成本函數如下：

$$c_1(f_1) = f_1 + 1$$

$$c_2(f_2) = f_2 + 1$$

$$c_3(f_3) = f_3 + 1$$

$$c_4(f_4) = f_4 + 1$$

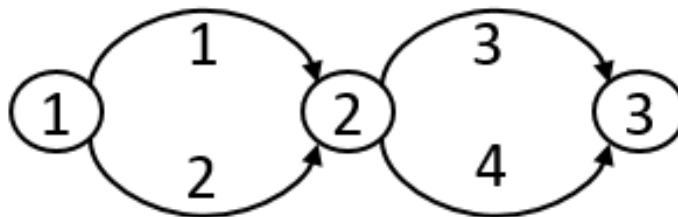


圖 4.2-3 路網示意圖

從例子之敘述可以得 Δ 、 Λ 矩陣如下

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\text{rank}([\Delta^T, \Lambda^T]) = 3$$

當微擾參數 $\varepsilon = 0$ 時，路網均衡之路段流量解為 $f^*(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ ，我們觀察其路網矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩為 3，若要滿足無微擾路徑流量均衡解之情況，則無法找到一組向量 b 使得式 (2.3-3) 之線性規劃求得一組**非退化路徑流量解** h^* ，故此路網無法直接應用於 TF 法上。



4.3 應用 CSF 法求解

以下所討論之路網例子，雖然這些例子應用 TF 法進行路網敏感性分析，但這些例子並未滿足 TF 法之假設條件，無法順利應用 TF 法進行敏感度分析求得敏感性資訊，在這裡將這些例子應用於 CSF 法上求解，CSF 方法放鬆了 TF 法之假設，因此這些例子也可以順利應用於 CFS 法上，順利求得敏感度資訊。

例子 1 Patriksson(2004)

在這個例子當中， $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩為 5，故根據 CSF 法，我們將路段路徑矩陣 Δ 分割成 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{bmatrix}$ ，使得 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 為一列滿秩矩陣。

$$\Delta_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(3.2-28)~式(3.2-29)可得

$$[N_1 \quad N_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & -0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0.25 & -0.5 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & -0.25 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(3.4-13)、式(3.4-14)可得

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^0 N_2 \nabla_{\varepsilon} T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

又從路段成本函數與無微擾路段流量解 $f(0) = (0, 2, 0, 1, 1, 0, 0)$ 可得

$$\nabla_f c(f(0), 0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

最後由式(3.4-29)可得

$$\nabla_{\varepsilon} f(0) = \begin{bmatrix} 0.0220 & -0.0533 \\ 0.8682 & 0.8199 \\ 0.1104 & 0.0857 \\ 0.8896 & -0.0857 \\ -0.1099 & 0.7666 \\ 0.1099 & 0.2334 \\ 0.0214 & 0.0943 \end{bmatrix}$$

例子 2 Joseffson 和 Patriksson(2007)

在這個例子當中 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩為 3，故根據 CSF 法，我們將路段路徑矩陣 Δ 分割成 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{bmatrix}$ ，使得 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 為一列滿秩矩陣。

$$\Delta_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(3.2-28)~式(3.2-29)可得

$$[N_1 \quad N_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

由式(3.4-13)、式(3.4-14)可得 M 及 $\Delta_2^0 N_2 \nabla_{\varepsilon} T(0)$ ，在這裡需注意因在路徑矩陣 Δ 重新排列的過程當中，其相對應的路段流量矩陣會被重新排列為 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ ，而在進行導數計算時，本研究依照該例子之流量 $f_1 \sim f_4$ 之順序進行微分，故得到之 M 與式(3.4-27)不同。

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^0 N_2 \nabla_{\varepsilon} T(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

又從路段成本函數與無微擾路段流量解 $f^*(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ 可得

$$\nabla_f c(f(0), 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後由式(3.4-29)可得

$$\nabla_{\varepsilon} f(0) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

例子 3 Yang 和 Bell(2007)

在這個例子當中 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩為 3，故根據 CSF 法，我們將路段路徑矩陣 Δ 分割成 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{bmatrix}$ ，使得 $\begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Lambda^0 \end{bmatrix}$ 為一列滿秩矩陣。

$$\Delta_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(3.2-28)~式(3.2-29)可得

$$[N_1 \quad N_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

由式(3.4-13)、式(3.4-14)可得 M 及 $\Delta_2^0 N_2 \nabla_{\varepsilon} T(0)$ ，在這裡需注意因在路徑矩陣 Δ 重新排列的過程當中，其相對應的路段流量矩陣會被重新排列為 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ ，而在進行導數計算時，本研究依照該例子之流量 $f_1 \sim f_4$ 之順序進行微分，故得到之 M 與式(3.4-27)不同。

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^0 N_2 \nabla_{\varepsilon} T(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

又從路段成本函數與無微擾路段流量解 $f^*(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ 可得

$$\nabla_f c(f(0), 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後由式(3.4-29)可得

$$\nabla_{\varepsilon} f(0) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.4 小結

本章節主要回顧 Tobin(1986)、Tobin 與 Friesz(1988)、Cho(1988)(2000)這三個敏感度分析方法進行比較，並回顧過去應用 TF 法(1988)進行路網敏感度分析求得敏感度資訊文獻中所提出之數值例子，說明這些應用 TF 法的例子及其未滿足之正規條件，使得路網敏感度分析結果無法順利求得，而上述所提及之例子多未滿足非退化流量解之條件，正流量路徑之個數非退化路徑流量解之正流量個數須等於矩陣 $[\Delta^T, \Lambda^T]$ 之秩，使這些例子無法順利應用而求得路網的敏感度資訊。

因此，Cho(1988)(2000) (CFS 法) 提出路網減縮法放鬆了非退化流量解之假設，其將路徑流量解集合轉換到路段流量解上避開了路徑流量解不存在唯一性的問題，讓許多路網可順利應用，在 4.3 節也將過去無法順利被應用於 TF 法之數值例子應用在 CSF 法上，亦將這些例子順利應用於 CFS 法上，求得路網之敏感度資訊。

而因考量 TF 法具嚴格限制非退化流量解之假設，故這也是在本文以 Cho(1988)(2000)敏感度資訊的方法應用於後文所要討論路網設計問題的原因，考量路網設計時僅路段流量均衡解具唯一性，透過 CSF 方法藉以避開路徑流量不具唯一性之問題。

第五章 敏感度分析應用於路網設計問題

回顧完敏感度分析資訊後，5.1 節先說明經濟學上賽局理論中的 Nash 均衡與 Stackelberg 賽局，並將其問題轉換為雙層路網設計問題，利用敏感度資訊之主要目的係用於近似用路人的反應函數，使得領導與跟隨者的雙層路網設計問題可以進行求解，雙層路網設計問題將會採用 Stackelberg 賽局之模式，另外並分析與 Cournot-Nash 模式解之差異。在求解雙層路網設計問題時，利用一階泰勒展開式來近似之反應函數，其一階導數值是進行路網的敏感度分析求得。

5.1 賽局觀點

賽局理論 (game theory) 其概念為對同一個賽局內每一位決策者間互動的分析，每一個不同的決策者其決策都可能會改變賽局中其他決策者之決策，使每一位決策者都能達到的其所預期之結果。在經濟學理論上，Cournot(1838)考慮兩家相同廠商的市場，且成本相同、產品無差異，對於每一家廠商而言另外一家廠商產量不變，其反應函數在表現一廠商在另外一家廠商的產量下所生產的利潤最大產量。但如同現實所知的當一家廠商正極大化自己方的報酬時，其對手廠商也同時正在極大化他自己的報酬。

Stackelberg(1934)質疑 Cournot 模式中另一家廠商產量固定之假設，故其考慮追隨者廠商假設另外一家廠商維持產量固定，領導者則考慮追隨者之產量最大化其利潤，將其以雙層路網設計進行解釋，道路使用者假設道路情況不變下去選擇其最短路徑，道路管理者在已知流量下去進行最佳化路網系統。Stackelberg 賽局為非對稱資訊之賽局，假設賽局中有兩個參賽者，其中一名被稱為領導者(Leader)的參賽者首先出招並且執行其策略，另一名參賽者則被稱為跟隨者(Follower)在相同賽局中之領導者所執行之策略下最佳化其利益。

Fisk(1984) 在文獻中指出號誌系統最佳化與使用者均衡路徑選擇行為屬於賽局理論當中之 Stackelberg 賽局，也就是說公部門扮演問題上層之領導者的角色控制號誌時制，並在了解路網中所有使用者路徑選擇行為反應下，進行整體路網號誌最佳化的，以達到系統最佳的目標，而路網中之使用者則扮演下層跟隨者的角色，在領導者給與之時制計畫下，選擇對其最佳之路徑，達到旅行成本最小的目標。

考慮以領導者 P_1 與追隨者 P_2 ，其中領導者已知追隨者 P_2 的反應為前提下，Stackelberg 模式如下：

$$\begin{aligned} & \max_{x_1} P_1(x_1, x_2) \\ & \text{s.t. } \max_{x_2} P_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.1-1)$$

5.2 雙層路網設計問題

本小節我們將 Stackelberg 模式轉換為雙層路網設計問題，當運輸規劃者想要根據使用者的反應，進行整體路網最佳化或號誌控制策略時，運輸規劃者則扮演領導者，而所有使用者則扮演追隨者。定義為一組含有主導者決策變數的向量

$$x_1 \in X_x \subseteq R_+^n \cup \{0\} \quad (5.2-1)$$

且定義追隨者的決策向量

$$x_2 \in X_2 \subseteq R_+^m \cup \{0\} \quad (5.2-2)$$

同時令

$x_2 = R(x_1)$ 之意義為在追隨者已知 x_1 時，追隨者之反應。

其中 $R: X_1 \subseteq R_+^n \cup \{0\} \rightarrow X_2$

則領導者之決策問題就是在考慮追隨者的反應下，尋求最佳解，模式如下：

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} P_1(x_1, x_2) \\ \text{s.t. } x_2 = R(x_1) \end{aligned} \quad (5.2-3)$$

為了可以將問題轉換到一般路網上，在這裡定義為一組含有領導者（政府）決策變數的向量

$$y \in Y \subseteq R_+^n \cup \{0\} \quad (5.2-4)$$

且定義追隨者(道路使用者)的決策向量

$$u \in \Omega \subseteq R_+^m \cup \{0\} \quad (5.2-5)$$

其中， $\Omega = \{f | \Delta h = f, \Lambda h = T, h \geq 0\}$

在一般路網設計問題中，可由領導者（政府）設定之號誌變數包括綠燈時間、週期長度或者是其他改變使得路網最佳之手段，假設目前領導者（政府）考量系統總成本最小下，則當路網內每一條道路 a 我們可以將 Stackelberg 模式領導者之目標函數定義為旅行成本 c_a ，且道路使用者之路徑選擇行為在既定領導者(政府)的手段下，假設每一位使用者皆服從 Wardrop 第一原則(Wardrop, 1952)時，雙層路網設計問題型式可表示為：

$$\min Z(f, y) = \sum_a c_a(f, y) f_a \quad (5.2-6)$$

$$\text{s.t } c(f, y)(u - f) \geq 0 \quad (5.2-7)$$

$$\forall u \in \Omega, \forall y \in Y \quad (5.2-8)$$

$$\Omega = \{f | \Delta h = f^*, \Lambda h = T, h \geq 0\}$$

因為 $c(f, y)$ 為嚴格單調函數，假設 $f(y)$ 是一個連續可微在每一個點 $y \geq 0$ 上，則對於每一個 $y \geq 0$ 存在一組唯一解 $f(y)$ ，因此可以改寫雙層路網設計問題如下

$$\min Z(f, y) = \sum_a c_a(f(y), y) f_a(y) \quad (5.2-9)$$

$$\text{s.t } c(f, y)(u - f) \geq 0 \quad (5.2-10)$$

$$\forall u \in \Omega, \forall y \in Y \quad (5.2-11)$$

$$\Omega = \{f | \Delta h = f^*, \Lambda h = T, h \geq 0\}$$

Allsop(1974)，Steenbrink(1974)都曾應用迭代優化指派的啟發式演算法(Iterative Optimization assignment, IOA)，這個演算法在給定初始固定流量 f 的情況下求解目標式 y ，接著利用求解出固定的 y 來求解下層路網流量 f ，直到其所求得之目標式 y 值收斂為止，因此，迭代優化指派(IOA)演算法在計算效率方面很有吸引力，其演算法過程如下：

Step 0 給定 $\varepsilon > 0$ 、 $k = 0$ 並給定初始 $f^{(0)}$ 之值

Step 1 求解雙層路網設計問題，代入 $f^{(k)}$ 並求得當下流量之最佳 $g^{(k)}$ 值

Step 2 將 $g^{(k)}$ 代入使用者均衡模式，求得 $f^{(k)}$ 值

Step 3 若 $\|g^{(k+1)} - g^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ，則停止迭代。反之，令 $k = k + 1$ 並返回 Step 1 繼續迭代過程。

根據 Allsop(1974)的概念，Maher 等(1975)進一步的探討號誌時制變化（上層規劃者決策變數改變）所產生的均衡路網流量之效果，發現路口延滯比路段行駛時間對於路網均衡狀態有更大的影響，而他們也發現不斷的透過現況之交通流量來調整號誌時制，將會使得路網之整體績效更加惡化。

另外，在經濟學上之概念此計算過程即為對於每一家廠商而言其假設另外一家廠商產量固定不變，求解時反應函數在表現一廠商在另外一家廠商的產量固定不變下所生產的利潤最大產量直到收斂，此模型為寡佔市場中之 Cournot 模型，如同 1950 年 Nash 提出的納許均衡

觀念，當每個參賽者所執行的策略都達到最佳解後，即達到均衡，也就是說收斂後所求得之 Cournot 解為一種 Nash 均衡解，亦即 IOA 演算法求得之解可能並非雙層路網設計問題之 Stackelberg 解，Fisk(1984)也曾以一路網例子說明解亦收斂至 Nash 解。

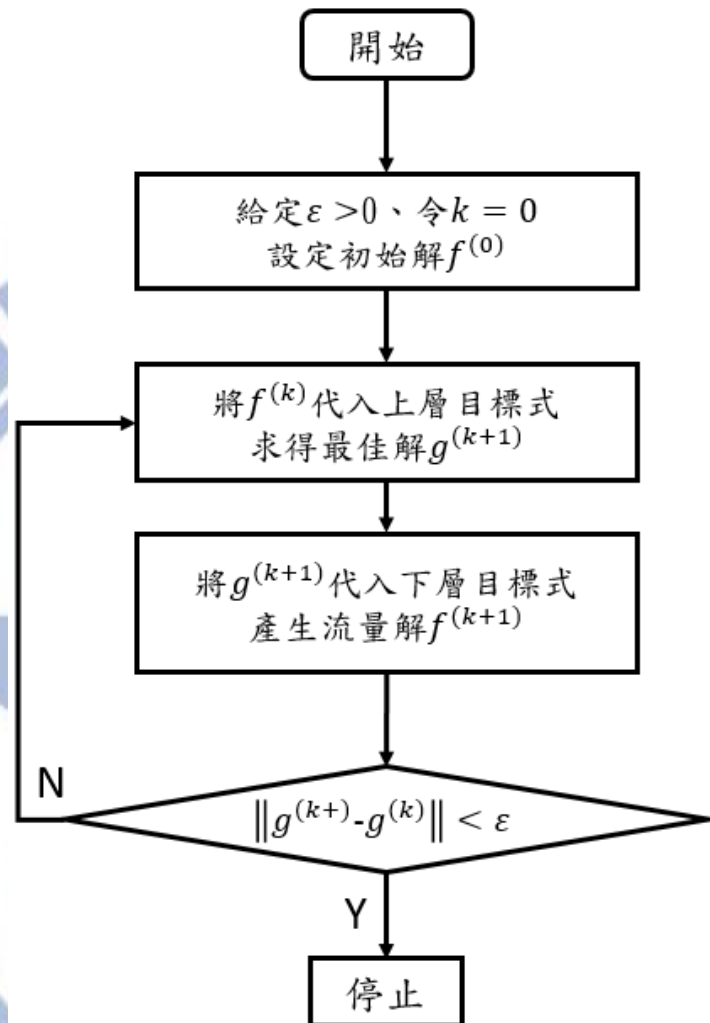


圖 5.2-1 IOA 求解流程圖

5.3 雙層路網設計問題線性近似求解

雙層路網設計問題是以均衡為限制式的數學規劃問題，對於 Stackelberg 賽局之求解無法求得用路人對系統目標式的反應函數，由 Cho(1988)與 Cho 與 Huang(2014)提出將之敏感度資訊應用於泰勒展開式求得一階敏感度資訊透過線性近似方法近似使用者之反應函數，解決無法求得用路人對系統目標式的反應函數之問題，再利用前述透過泰勒展開式近似之反應函數帶入上層領導者之目標式，最後透過迭代演算法來求得雙層路網設計問題之解。其線性近似迭代演算法如下所示：

Step 0 給定 $\varepsilon > 0$ 、 $k = 0$ 並初始化 $g^{(0)}$ 之值

Step 1 求解雙層路網設計問題，代入 $g^{(k)}$ 並產生 $f^{(k)}$ 值

Step 2 利用 Cho 等(2000)之路網敏感度方法計算敏感度資訊 $\nabla_g f^{(k)}$

Step 3 使用 $\nabla_g f^{(k)}$ 、泰勒展開式生成線性近似之 $f^{(k+1)}$ 可得下式

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \nabla_g f^{(k)}(g^{(k+1)} - g^{(k)})$$

由於 $f^{(k)}$ 、 $g^{(k)}$ 和 $\nabla_g f^{(k)}$ ，故我們可以寫成 $f^{(k+1)} = A + Bg^{(k+1)}$

Step 4 重新整理得系統目標式得

$$\begin{aligned} \min_g \sum_a t_a(A + Bg^{(k+1)}, g)(A + Bg^{(k+1)}, g) \\ \text{s.t } g \geq 0 \end{aligned}$$

Step 5 求解 Step 4 得最佳解 $g^{(k+1)}$ 。若 $\|g^{(k+1)} - g^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ，則停止迭代。反之，令 $k = k + 1$ 並返回 Step 1 繼續迭代過程。

Cho(1988)證明若雙層路網設計問題之線性近似演算法收斂，則問題的解會收斂到 critical point，但因為雙層路網設計問題的解集合為非凸集合，故無法保證其收斂性，因此，本研究在無法順利收斂求得解時，以 Armijo-like rule 求解 $g^{(k+1)}$ 將其求解過程中之 α^k 利用於尋找 $g^{(k+1)}$ 的求解方向及求解步幅使得解至少會收斂。

5.4 Armijo-like rule

本章節之方法論引述 Bertsekas(1982)書中第 76 頁。

考慮一個問題

$$\begin{aligned} \min Z(y) \\ \text{s.t } y \geq 0 \end{aligned} \quad (5.4-1)$$

其中 $Z: R^n \rightarrow R$ 為一連續可微函數

根據 KKT 必要條件，如果向量 $y^* \geq 0$ 滿足

$$\frac{\partial Z(y^*)}{\partial y^i} = 0 \text{ if } y^{*i} > 0, i = 1, \dots, n \quad (5.4-2)$$

$$\frac{\partial Z(y^*)}{\partial y^i} \geq 0 \text{ if } y^{*i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (5.4-3)$$

這些條件的等價關係為

$$y^* = [y^* - \alpha \nabla Z(y^*)]^+ \quad (5.4-4)$$

其中， $[\cdot]^+$ 定義為正值或正向投影， $\forall y$

$$[y]^+ = [\max\{0, y^i\}] \quad i = 1, \dots, n \quad (5.4-5)$$

$$y^{k+1} = [y^k - \alpha^k \nabla_y Z(y^k)]^+ \quad (5.4-6)$$

首先，選擇初始向量 $y^0 \geq 0$ 。然後在每次連續迭代中，透過以最大下降方向移動步幅 α^k 來確定向量 $y^{k+1} \geq 0$ 。因此，演算法有兩個主要方向：確定下降方向和確定步幅。

給定

$$w^k = |y^k - [y^k - \nabla Z(y^k)]^+| \quad (5.4-7)$$

與

$$\varepsilon^k = \min\{\varepsilon, w^k\} \quad (5.4-8)$$

其中， ε 為一個固定微小的正常數。

選擇固定常數 $\beta \in (1,0)$, $\sigma \in (0, 1/2)$ 並給定

$$I_k^+ = \{i | 0 \leq y_i^k \leq \varepsilon^k; \partial Z(y^k)/\partial y_i > 0\} \quad (5.4-9)$$

給定

$$P_k = \nabla Z(y^k) \quad (5.4-10)$$

$$y^k(\alpha) = [y^k - \alpha P_k]^+, \forall \alpha \geq 0 \quad (5.4-11)$$

$$\alpha^k = \beta^{m_k} \quad (5.4-12)$$

其中， m_k 為一個非負整數 m 使得式(5.4-13)成立

$$Z(y^k) - Z(y^k(\beta^m)) \geq \sigma \left\{ \beta^m \sum_{i \notin I_k^+} \frac{\partial Z(y^k)}{\partial y_i} P_k^i + \sum_{i \in I_k^+} \frac{\partial Z(y^k)}{\partial y_i} [y_i^k - y_i^k(\beta^m)] \right\} \quad (5.4-13)$$

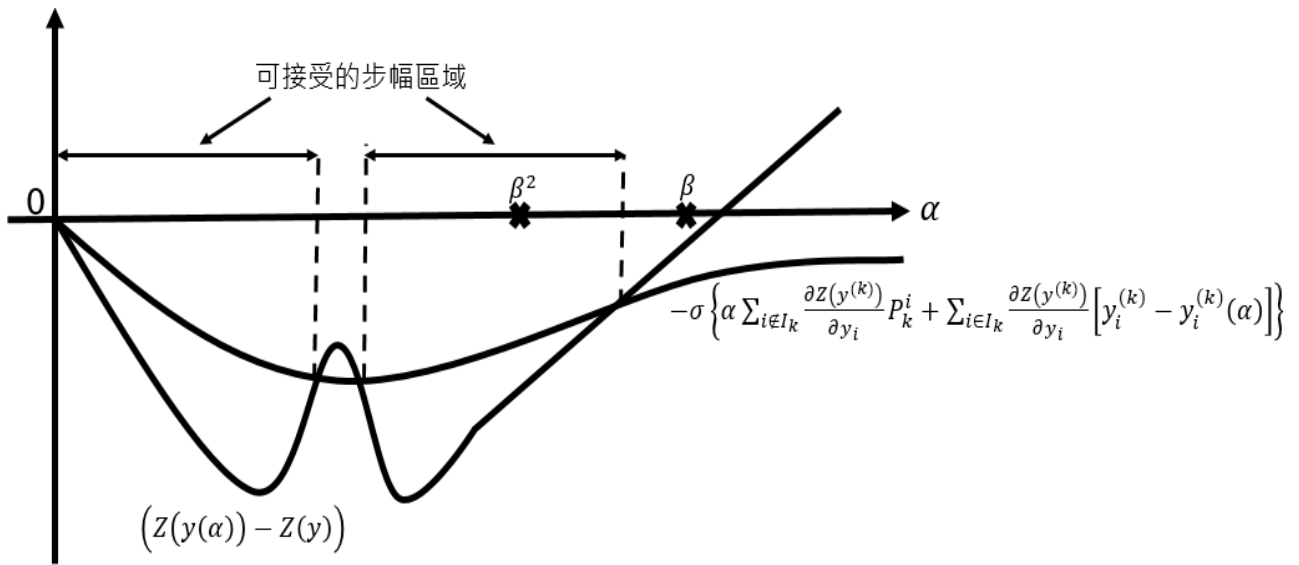


圖 5.4-1 Armijo-like rule



5.5 最陡下降法

最陡下降法(steepest descent method)是 1847 年由法國數學家 Cauchy 首先提出，以初始點梯度的反方向作為最小化方法下降方向的方法，該方法又被稱為最速下降法，其在每次迭代的求解過程中，沿最陡的方向決定求解之搜尋方向，每一步則沿著該點梯度的反方向求得最佳步長，直到其求得最佳解為止，其特點為每次皆朝著最陡的方向進行求解，企圖得到最大的下降幅度，其一般的演算法如下：

Step1 求解初始值

Step2 求得初始點的梯度反向

Step3 決定步長大小

Step4 判斷是否為最佳解，若非最佳解，則返回第一步。

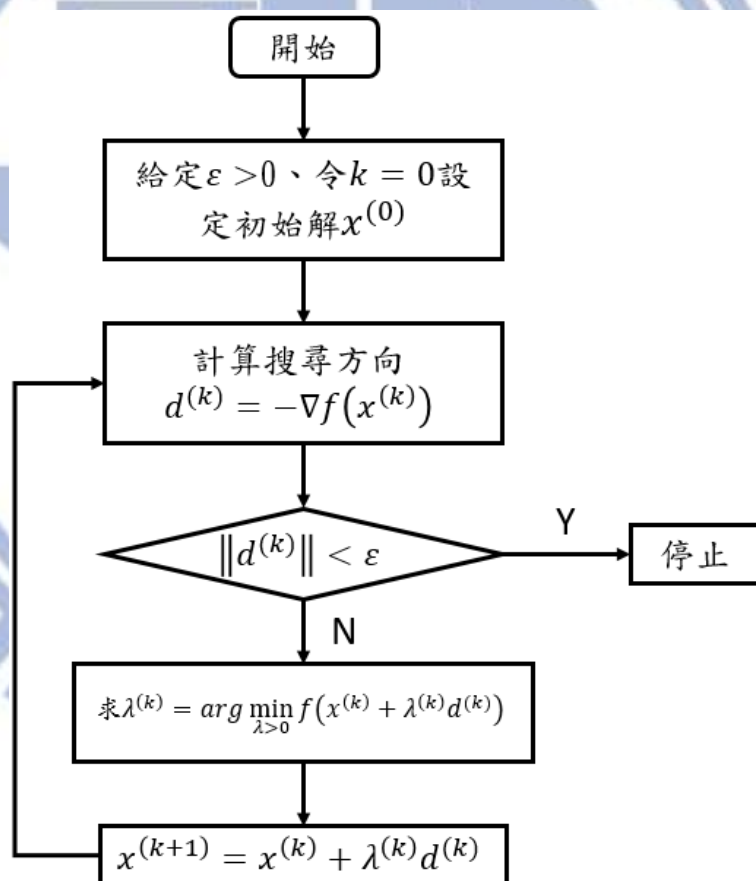


圖 5.5-1 最陡下降法流程圖

最陡下降法由 Cho(1988)將其應用於求解雙層路網設計問題，其在演算法求解系統目標式中以 Armijo-like rule 作為求解步幅，給定一組起始向量 $g^{(0)} \geq 0$ ，並求解下層路網產生 $f^{(0)}$ ，在每次的迭代求解過程中，朝最陡下降方向，透過 Armijo-like rule 計算移動大小為 α^k 之步幅來求解向量 $g^{(k)}$ 。故其求解演算法的特性就是決定下降方向與移動步幅大小，其中在求解雙層

路網設計問題(5.2-4)之最陡下降方向可透過敏感度分析求得，完整演算法如下：

Step 0 給定 $\varepsilon > 0$ 、 $k = 0$ 並初始化 $g^{(0)}$ 之值

Step 1 求解雙層路網設計問題，代入 $g^{(k)}$ 並透過使用者均衡產生 $f^{(k)}$ 值

Step 2 利用 Cho 等之路網敏感度方法計算敏感度資訊 $\nabla_g f^{(k)}$

Step 3 計算式(5.2-9)之 $\nabla Z(f^{(k)}, g^{(k)})$

Step 4 利用 Armijo-rule 計算由式(5.4-12)計算步幅大小

Step 5 計算 $g^{(k+1)}(\alpha) = [g^{(k)} - \alpha \nabla Z(g^{(k)})]^+$

Step 6 求解 Step 5 得最佳解 $g^{(k+1)}$ 。若 $\|g^{(k+1)} - g^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ，則停止迭代。反之，令 $k = k + 1$ 並返回 Step 1 繼續迭代過程。

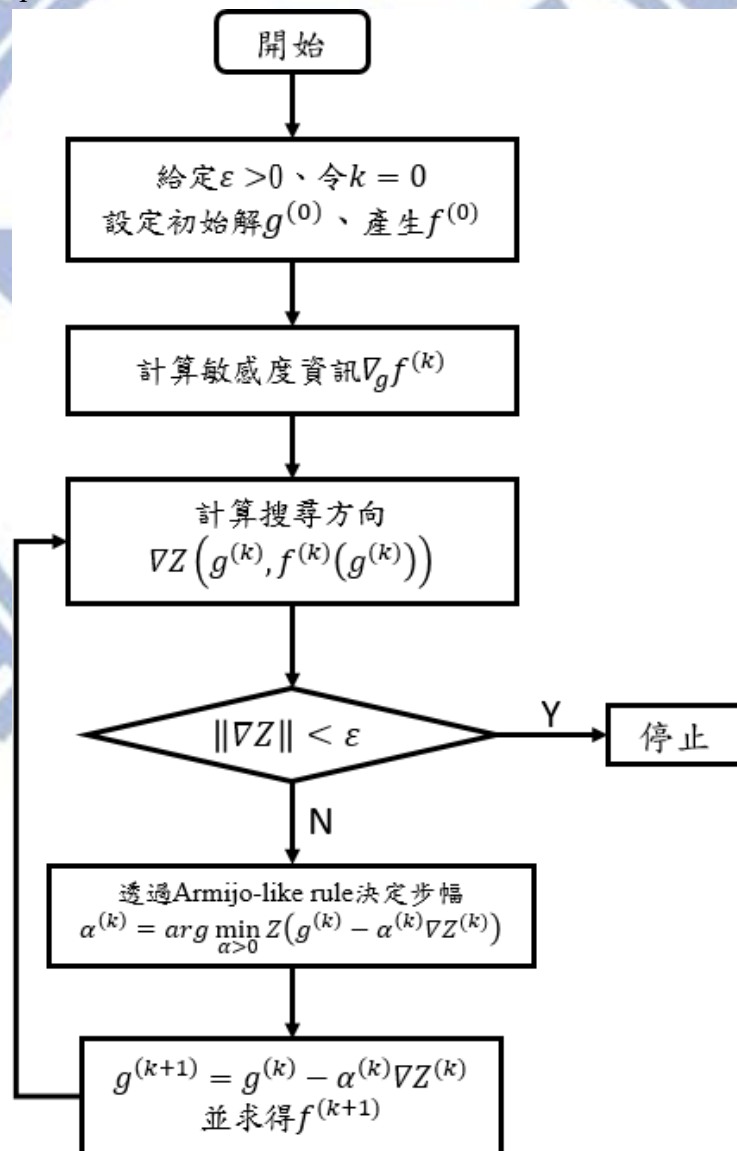


圖 5.5-2 最陡下降法求解雙層路網流程圖

5.6 應用 Armijo-like rule 求解線性近似演算法

前述討論雙層路網設計問題時，有提及文獻雖討論若線性近似法收斂時，解會收斂至 Critical point，但多未討論雙層路網設計線性近似演算法之求解過程收斂，演算法迭代求解過程在執行 Step 4 重新整理得系統目標式求解過程當中可能因解的非凸性而未收斂。在回顧雙層路網設計問題之線性近似迭代演算法與 Armijo-like rule 在下降方向和確定步幅之求解方法後，若求解過程無法收斂時，則可引入 Armijo-like rule 在求解方向和確定步幅之方法，將其應用於雙層路網設計問題線性近似求解演算法中，將求解線性近似演算法 Step 4 重新整理得系統目標式時，在目標式當中求解 $g^{(k+1)}$ 的過程當中將導入 Armijo-like rule 使得解至少會收斂。本研究在計算系統目標式時，以 Armijo-like rule 決定求解步幅 $\alpha^{(k)}$ (式(5.4-12))，若其步幅 $\alpha^{(k)}$ 滿足式(5.4-13)，則我們就令

$$g^{(k+1)} = [g^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla Z^{(k)}]^+ \quad (5.6-1)$$

若 $g^{(k+1)}$ 未收斂，則將 $g^{(k+1)}$ 帶回雙層路網設計問題計算敏感度資訊產生線性近似之反應函數，帶入系統目標式進行 Armijo-like rule 求解，重複迭代過程直到解收斂。

Step 0 給定 $\varepsilon > 0$ 、 $k = 0$ 並初始化 $g^{(0)}$ 之值

Step 1 求解雙層路網設計問題，代入 $g^{(k)}$ 並產生 $f^{(k)}$ 值

Step 2 利用 Cho 等之路網敏感度方法計算敏感度資訊 $\nabla_g f^{(k)}$

Step 3 使用 $\nabla_g f^{(k)}$ 、泰勒展開式生成線性近似之 $f^{(k+1)}$ 可得下式

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \nabla_g f^{(k)}(g^{(k+1)} - g^{(k)})$$

由於 $f^{(k)}$ 、 $g^{(k)}$ 和 $\nabla_g f^{(k)}$ ，故我們可以寫成 $f^{(k+1)} = A + Bg^{(k+1)}$

Step 4 重新整理得系統目標式得

$$\min_g Z(g^{(k+1)}) = \sum_a t_a(A + Bg^{(k+1)}, g^{(k+1)})(A + Bg^{(k+1)})$$

$$\text{s.t. } g^{(k+1)} \geq 0$$

Step 5 執行 Armijo-like rule 計算 $\alpha^{(k+1)}$ 求得 Step 4 得 $g^{(k+1)}$ 。

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla Z^{(k)}$$

Step 6 若 $\|g^{(k+1)} - g^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ，則停止迭代。反之，令 $k = k + 1$ 並返回 Step 1 繼續迭代過程。

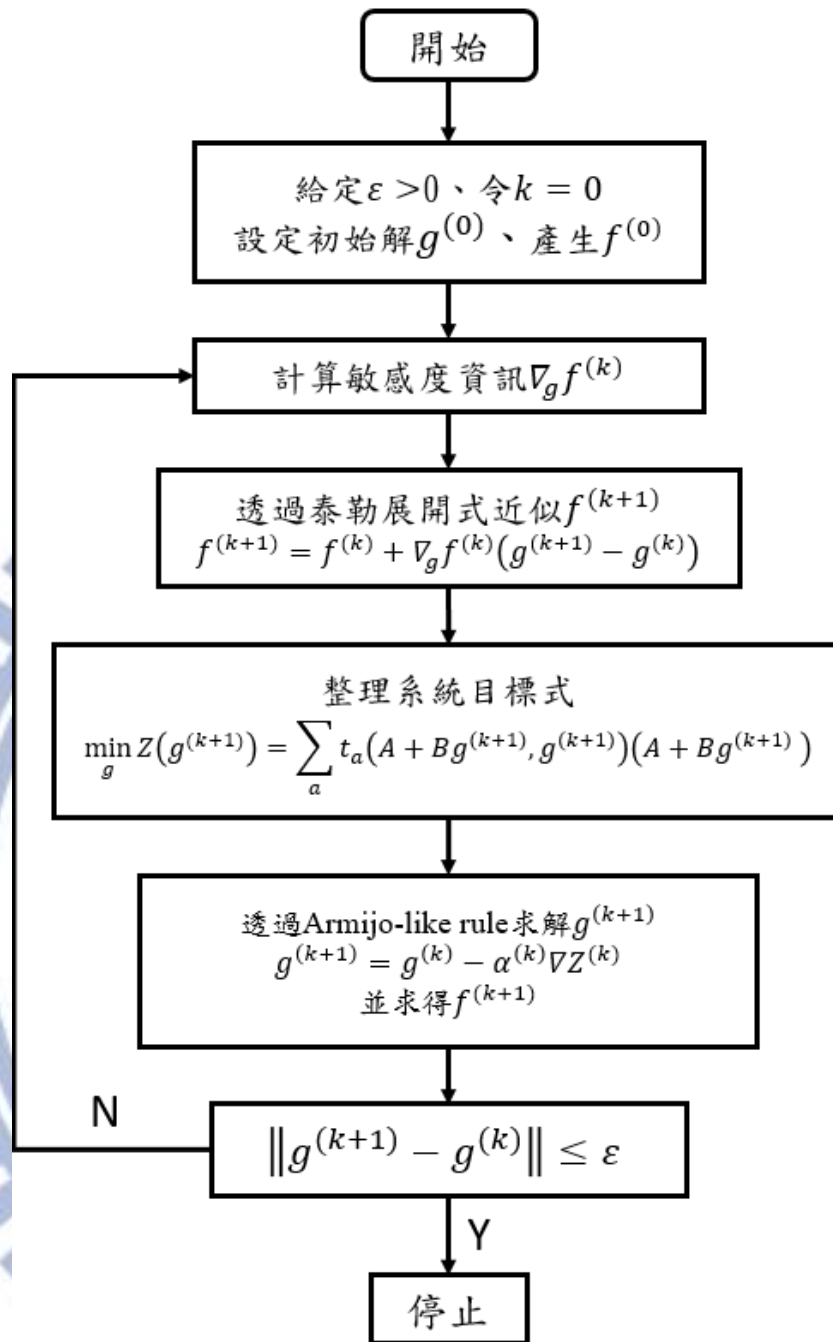


圖 5.6-1 應用 Armijo-like rule 求解線性近似演算法流程圖

第六章 數值例子

本節將不同演算法及文獻進行求解演算法說明之例子進行求解，針對不同例子求得之結果進行比較，6.1.1 節將會用 Fisk(1984)例子以 IOA、Linear Approximation、Decent 以及 Armijo-Linear Approximation(ALA)四種演算法求解和 Nash 與 Stackelberg 比較，6.1.2 節至 6.1.5 節則會以文獻提出之例子進行求解，並觀察 Linear Approximation 與文獻中所使用之求解演算法之結果差異。

本研究接下來所引述之求解方法名稱簡寫如下表所示：

縮寫	全名	來源
IOA	Iterative Optimization-Assignment algorithm	Allsop (1974)
H-J	Hooke-Jeeves algorithm	Abdulaal and LeBlanc (1979)
EDO	Equilibrium Decomposed Optimization	Suwansirikul et al. (1987)
SDAA	Sensitivity Descent algorithm with Armijo rule	Friesz et al. (1990)
SDAP	Sensitivity Descent algorithm – predetermined	
NSDAP	Normalized SDAP	
	SDAP1~3、NSDAP1~3 為求解步幅不同 1. $\alpha_k = \beta / (k + 1)$ 2. $\alpha_k = \beta / 2^k$ 3. $\alpha_k = \beta / (k + 1)^2$	
SA	Simulated Annealing algorithm	Friesz et al. (1992)
LA	Linear Approximation	Cho(1988), Cho and Lo(1999) Cho and Huang (2014)

6.1 數值例子

6.1.1 例子 – Fisk(1984)

路網幾何與例子 1 相同，本例子為 Fisk(1984)之例子，其路網之路段成本函數分別為

$$C_1 = \frac{f_1}{g_1} + 2, C_2 = 2f_2, C_3 = \frac{2f_3}{g_3}$$

其中 f 為雙層規劃下層之使用者均衡流量、 g 為上層領導者之綠燈時間，而交叉路口之綠燈時間限制為 $g_1 + g_3 = 20$ ，路口之綠燈時間為互相影響，故在計算敏感度時可以將 g_3 以 $20 - g_1$ 進行討論，，透過 Cho(1988)方法求得之敏感度分析過程如下：

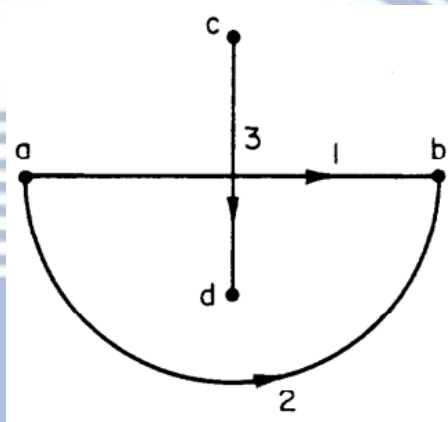


圖 6.1-1 Fisk 路網幾何圖

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \nabla f(g) \\ \nabla \mu(g) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nabla_f c(f(g), g) & -M^T \\ M & g \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\nabla_g c(f(g), g) \\ -\Delta_2^0 N_2 \nabla_g T(g) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{g_1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6f_3^2}{(20-g_1)^3} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{f_1}{g_1^2} \\ 0 \\ -\frac{6f_3^3}{(20-g_1)^4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{g_1}{g_1(2g_1+1)} & \frac{-g_1}{g_1(2g_1+1)} & 0 & \frac{-2g_1}{g_1(2g_1+1)} & 0 \\ \frac{-g_1}{g_1(2g_1+1)} & \frac{g_1}{g_1(2g_1+1)} & 0 & \frac{-1}{(2g_1+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{2g_1}{(2g_1+1)} & \frac{1}{(2g_1+1)} & 0 & \frac{2}{(2g_1+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-6f_3^2}{(20-g_1)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{f_1}{g_1^2} \\ 0 \\ -\frac{6f_3^3}{(20-g_1)^4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{f_1}{g_1(2g_1+1)} \\ -f_1 \\ \frac{g_1(2g_1+1)}{0} \\ -2f_1 \\ \frac{g_1(2g_1+1)}{-6f_3^3} \\ \frac{(20-g_1)^2}{(20-g_1)^2} \end{bmatrix}$$

敏感度資訊如下：

$$\nabla_g f(g) = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{g_1(2g_1+1)} \\ -f_1 \\ \frac{g_1(2g_1+1)}{0} \end{bmatrix} \quad (6.1-1)$$

接著將敏感性資訊結果代入線性近似迭代演算法、Decent 演算法以及本研究將 Armijo-like rule 應用到線性近似之方法等方法之結果所求得之解進行比較，其中亦針對收斂速度進行比較，另外也將求得之結果與包含 Nash 與 Stackelberg 解、迭代優化指派(IOA)演算法進行比較，比較結果如下表 6.1-1。

表 6.1-1 不同演算法間之結果比較表

	f_1	f_2	f_3	g_1	g_3	Z
NASH	8.4356	1.5644	10	7.4725	12.5275	47.2536
IOA	8.4355	1.5645	10	7.4725	12.5275	47.2538
Linear Approximation	8.4533	1.5467	10	7.7304	12.2696	47.2354
Decent	8.4536	1.5464	10	7.7358	12.2641	47.2357
ALA	8.4532	1.5468	10	7.7303	12.2697	47.2356
Stackelberg	8.4533	1.5467	10	7.7306	12.2694	47.2354

6.1.2 例子 – Suwansirikul (1987)

本例子引述 Suwansirikul 等人(1987)研究中提出例子求得解並加入 Linear Approximation 進行比較，並以不同起訖旅次觀察解之變化，其路網幾何之圖形、路段成本函數及旅次需求如下圖、表所示

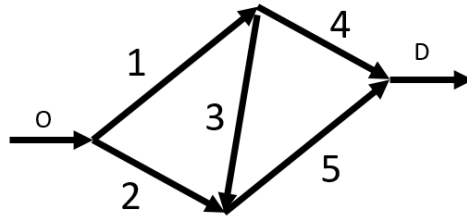


圖 6.1-2 路網圖

表 6.1-2 路網資訊

$C_a(f_a, y_a) = A_a + B_a \left(\frac{f_a}{(K_a + y_a)} \right)^4 \quad Z(y) = \sum_a C_a(f_a, y_a) f_a + 1.5 d_a y_a^2$				
路段 a	A_a	B_a	K_a	d_a
1	4.0	0.60	40.0	2.0
2	6.0	0.90	40.0	2.0
3	2.0	0.30	60.0	1.0
4	5.0	0.75	40.0	2.0
5	3.0	0.45	40.0	2.0

表 6.1-3 求解結果

flow		Minos	H-J	EDO	LA
100	y_1	1.34	1.25	1.31	1.35
	y_2	1.21	1.20	1.19	1.22
	y_3	0.00	0.00	0.00	0.00
	y_4	0.97	0.95	0.94	0.95
	y_5	1.10	0.10	1.06	1.08
	Z	1200.58	1200.61	1200.64	1200.58
150	y_1	6.05	5.95	5.98	6.00
	y_2	5.47	5.65	5.52	5.51
	y_3	0.00	0.00	0.00	0.00
	y_4	4.64	4.60	4.61	4.68
	y_5	5.27	5.20	5.27	5.23
	Z	3156.21	3156.38	3156.24	3156.23
*EDO : Equilibrium decomposed algorithm. *H-J : Hooke-Jeeves algorithm. *LA : Linear Approximation					

表 6.1-4 求解結果

		Minos	H-J	EDO	LA
200	y_1	12.98	13.00	12.86	12.93
	y_2	11.73	11.75	12.02	11.75
	y_3	0.00	0.00	0.02	0.00
	y_4	10.34	10.25	10.33	10.34
	y_5	11.74	11.75	11.77	11.74
	Z	7086.12	7086.21	7086.45	7086.13
300	y_1	28.45	28.44	28.11	28.41
	y_2	25.73	25.75	26.03	25.62
	y_3	0.00	0.00	0.01	0.00
	y_4	23.40	23.44	23.39	23.46
	y_5	26.57	26.56	26.58	26.51
	Z	21209.90	21210.91	21210.54	21210.01
*EDO : Equilibrium decomposed algorithm. *H-J : Hooke-Jeeves algorithm. *LA : Linear Approximation					

上述共有四個起訖旅次不同例子之結果，由上表可以看出若旅次需求從 100 新增到 300 之過程，所有方法的解幾乎一致相同，每個路段所求得之解無明顯之差異。

6.1.3 例子 - Tan et al.(1979)

路網幾何之圖形、路段成本函數及旅次需求如下圖、表所示

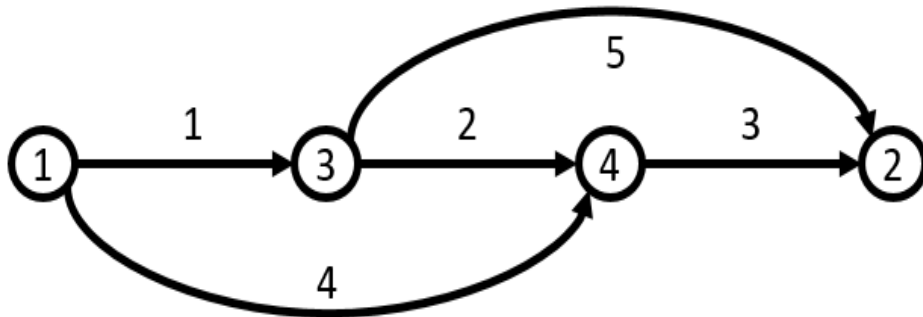


圖 6.1-3 路網圖

(example in Tan et al.(1979))

$$C_1 = 15 + 2f_1$$

$$C_2 = 10 + f_2 + w$$

$$C_3 = 15 + 2f_3$$

$$C_4 = 50 + f_4$$

$$C_5 = 50 + f_5$$

$$T_{12} = 10$$

$$\text{系統目標式：} Z(w) = \sum_a C_a f_a$$

透過 LA、ALA 與 IOA 求解結果如下表所示：

表 6.1-5 求解結果比較

	H-J	EDO	LA	ALA	IOA
初始值	10	0	30	30	
w	20	22.9	25	19.74	0
系統目標值 Z	800.00	800.00	799.99	800.00	840.00
*EDO : Equilibrium decomposed algorithm. *H-J : Hooke-Jeeves algorithm. *LA : Linear Approximation *ALA : Armijo Linear Approximation *IOA : Iterative Optimization-Assignment algorithm					

6.1.4 例子 - Harker 與 Friesz(1984)

本例子以 Harker 與 Friesz(1984)研究中提出之例子進行比較，並以不同起訖旅次進行求解，其路網幾何之圖形、路段成本函數及旅次需求如下圖、表所示

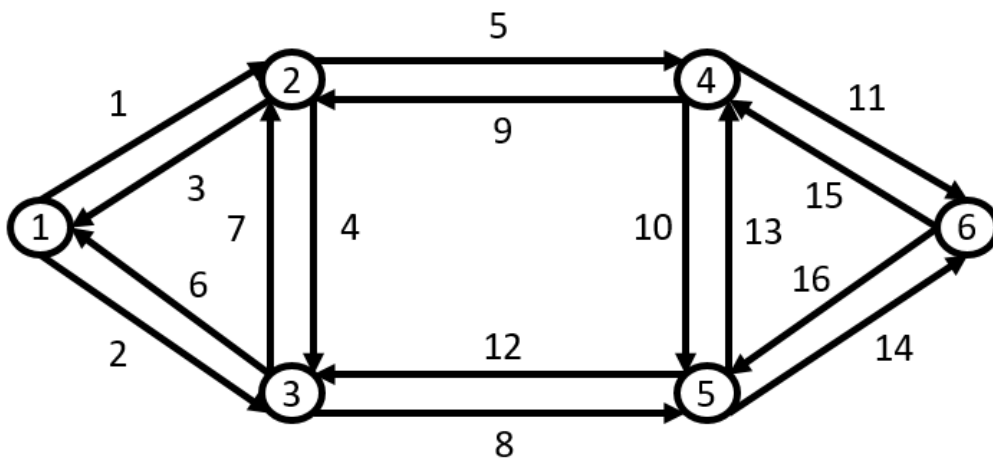


圖 6.1-4 路網圖

表 6.1-6 路網資訊

$C_a(f_a, y_a) = A_a + B_a \left(f_a / (K_a + y_a) \right)^4$ $Z(y) = \sum_a C_a(f_a, y_a) f_a + d_a y_a$				
路段 a	A_a	B_a	K_a	d_a
1	1.0	10.0	3.0	2.0
2	2.0	5.0	10.0	3.0
3	3.0	3.0	9.0	5.0
4	4.0	20.0	4.0	4.0
5	5.0	50.0	3.0	9.0
6	2.0	20.0	2.0	1.0
7	1.0	10.0	1.0	4.0
8	1.0	1.0	10.0	3.0
9	2.0	8.0	45.0	2.0
10	3.0	3.0	3.0	5.0
11	9.0	2.0	2.0	6.0
12	4.0	10.0	6.0	8.0
13	4.0	25.0	44.0	5.0
14	2.0	33.0	20.0	3.0
15	5.0	5.0	1.0	6.0
16	6.0	1.0	4.5	1.0

表 6.1-7 求解結果比較

Case 1 $T_{16} = 2.5 \cdot T_{61} = 5$													
	MINOS	H-J	EDO	SDAA	GEDO	SDAP1	SDAP2	SDAP3	NSDAP1	NSDAP2	NSDAP3	LA	IOA
y_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.22	0.36	0.49	0.85	0.87	0.00	0.00
y_2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.54	0.54	0.00	0.00
y_3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.21	0.00	0.00
y_5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_6	5.00	0.30	1.84	2.32	0.00	1.12	1.13	1.17	2.01	1.31	1.30	0.00	0.00
y_7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.53	0.54	0.00	0.00
y_9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.22	0.36	0.49	0.85	0.86	0.00	0.00
y_{10}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{11}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{12}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{13}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{14}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.53	0.54	0.00	0.00
y_{15}	1.33	0.10	0.02	1.33	0.00	0.00	0.00	0.00	1.40	0.05	0.02	0.00	4.44
y_{16}	0.00	0.30	1.84	0.78	0.75	1.19	1.13	1.16	1.07	1.26	1.27	1.06	0.00
Z	92.10	90.10	92.41	96.52	90.58	92.92	92.30	92.96	99.30	102.05	102.13	90.42	100.25
*EDO : Equilibrium decomposed algorithm. *H-J : Hooke-Jeeves algorithm. *SDAA : Sensitivity Descent algorithm with Armijo rule *SDAP : Sensitivity Descent algorithm – predetermined *NSDAP : Normalized SDAP *SA : Simulated Annealing algorithm *LA : Linear Approximation *IOA : Iterative Optimization-Assignment algorithm													

表 6.1-8 求解結果比較

Case 2 $T_{16} = 5$ 、 $T_{61} = 10$														
	MINOS	H-J	EDO	SDAA	GEDO	SDAP1	SDAP2	SDAP3	NSDAP1	NSDAP2	NSDAP3	SA	LA	IOA
y_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.60	0.51	2.48	2.78	2.73	0.00	0.00	0.00
y_2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.42	1.82	1.75	0.00	0.00	0.00
y_3	0.00	1.20	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.35	0.34	0.00	0.00	0.00
y_4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.56	0.46	0.00	0.00	0.00
y_5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_6	6.58	3.00	6.26	4.97	5.00	4.85	4.75	4.76	4.62	4.61	4.60	3.16	8.00	6.95
y_7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.56	0.46	0.00	0.00	0.00
y_8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.26	1.70	1.62	0.00	0.00	0.00
y_9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.59	0.51	2.48	2.78	2.73	0.00	0.00	0.00
y_{10}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{11}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{12}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{13}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{14}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.30	1.73	1.66	0.00	0.00	0.00
y_{15}	7.01	3.00	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.66	0.55	0.00	0.00	5.66
y_{16}	0.22	2.80	6.26	6.69	5.00	6.48	6.24	6.20	5.25	4.83	4.95	6.72	7.35	1.79
Z	211.25	215.08	201.84	199.84	202.30	199.94	202.50	202.21	224.43	235.51	233.56	198.10	200.89	210.86
*EDO : Equilibrium decomposed algorithm. *H-J : Hooke-Jeeves algorithm. *SDAA : Sensitivity Descent algorithm with Armijo rule *SDAP : Sensitivity Descent algorithm – predetermined *NSDAP : Normalized SDAP *SA : Simulated Annealing algorithm *LA : Linear Approximation *IOA : Iterative Optimization-Assignment algorithm														

表 6.1-9 求解結果比較

	Case 3 $T_{16} = 10$ 、 $T_{61} = 20$													
	MINOS	H-J	EDO	SDAA	GEDO	SDAP1	SDAP2	SDAP3	NSDAP1	NSDAP2	NSDAP3	SA	LA	IOA
y_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.04	0.00	3.27	4.99	4.89	0.00	0.00	0.00
y_2	4.61	5.40	4.88	4.61	4.62	4.63	4.66	4.62	5.06	5.43	5.48	0.00	4.61	4.55
y_3	9.86	8.18	8.59	9.79	6.24	7.80	8.46	7.42	7.09	6.66	6.72	10.17	9.07	10.65
y_4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_6	7.71	8.10	7.48	8.39	15.63	12.72	14.24	13.75	13.42	13.49	13.39	5.78	9.63	6.43
y_7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
y_8	0.59	0.90	0.85	0.59	0.60	0.65	0.59	0.64	1.89	3.29	3.25	0.00	0.59	0.59
y_9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.20	0.11	3.37	5.03	4.95	0.00	0.00	0.00
y_{10}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{11}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{12}	0.00	0.00	0.00	0.00	3.76	1.81	4.18	2.19	2.60	2.90	2.96	0.00	0.00	0.00
y_{13}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y_{14}	1.32	3.90	1.54	1.43	1.62	1.85	1.69	1.84	3.51	4.56	4.56	0.00	1.32	1.32
y_{15}	19.14	8.10	0.26	0.00	14.99	16.96	15.88	16.70	16.20	16.13	15.87	0.00	2.15	19.36
y_{16}	0.85	8.40	12.52	18.38	5.01	6.21	6.85	6.66	7.52	8.45	8.34	17.28	17.7	0.78
Z	557.14	557.22	540.74	523.45	566.61	563.64	570.46	565.02	581.23	593.29	592.71	528.50	531.20	556.61
*EDO : Equilibrium decomposed algorithm. *H-J : Hooke-Jeeves algorithm. *SDAA : Sensitivity Descent algorithm with Armijo rule *SDAP : Sensitivity Descent algorithm – predetermined *NSDAP : Normalized SDAP *SA : Simulated Annealing algorithm *LA : Linear Approximation *IOA : Iterative Optimization-Assignment algorithm														

6.1.5 例子 - Sioux Falls city

這個例子為一個位於 South Dakota 的 Sioux Falls 城市之實際路網，其有 76 個路段和 24 個節點。在這 76 個路段當中有 10 個是需改善之路段（為路網圖中虛線所框起來之路段），這個路網在尖峰小時共有 552 組起訖旅次的交通需求流量，在本例子中也會與 H-J、EDO 與 SA 進行比較，並觀察解之差異。

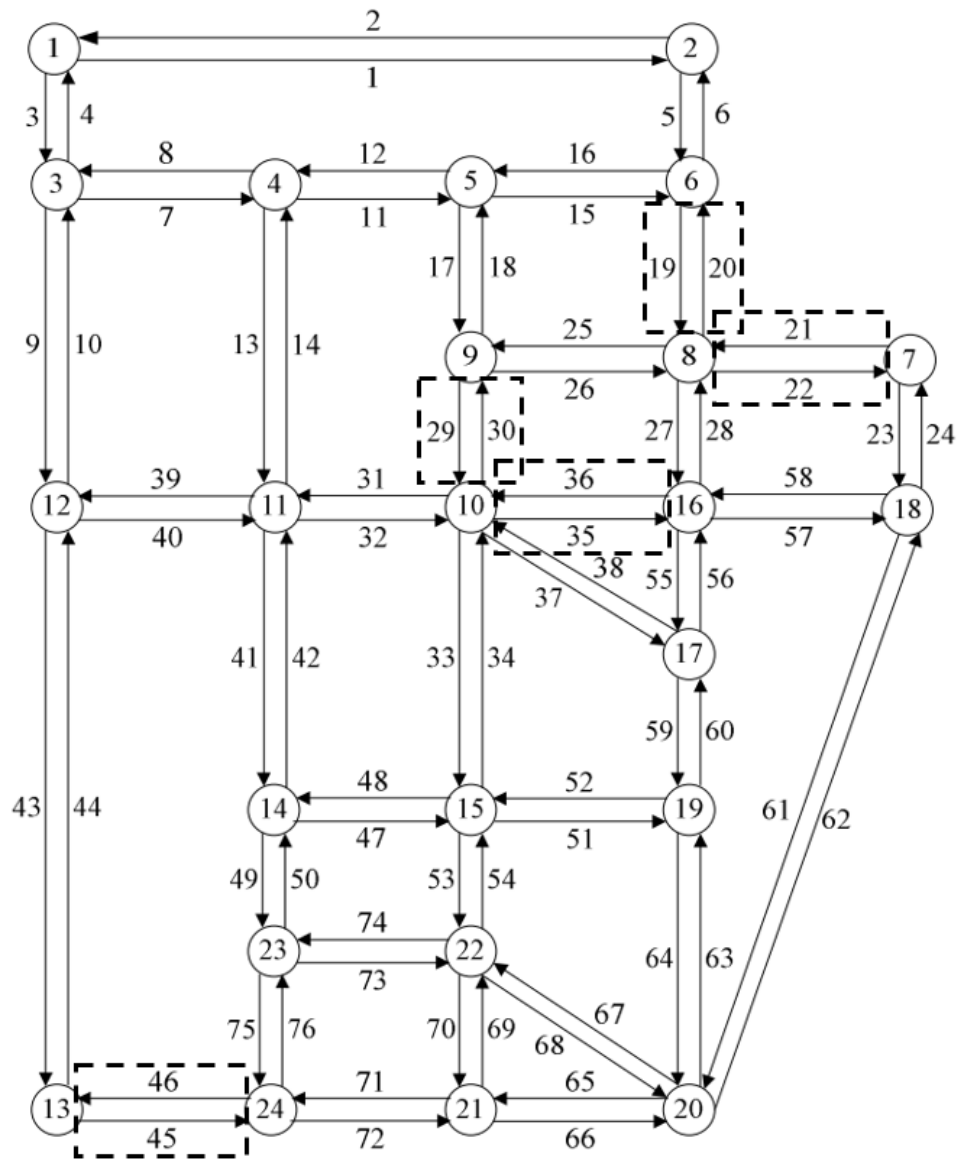


圖 6.1-5 Sioux Falls 城市路網圖

表 6.1-10 Sioux Falls 城市起訖旅次

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	0.11	0.11	0.55	0.22	0.33	0.55	0.88	0.55	1.43	0.55	0.22	0.55	0.33	0.55	0.55	0.44	0.11	0.33	0.33	0.11	0.44	0.33	0.11
2	0.11	0	0.11	0.22	0.11	0.44	0.22	0.44	0.22	0.66	0.22	0.11	0.33	0.11	0.11	0.44	0.22	0.00	0.11	0.11	0.00	0.11	0.00	0.00
3	0.11	0.11	0	0.22	0.11	0.33	0.11	0.22	0.11	0.33	0.33	0.22	0.11	0.11	0.11	0.22	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.11	0.00
4	0.55	0.22	0.22	0	0.55	0.44	0.44	0.77	0.77	1.32	1.54	0.66	0.66	0.55	0.55	0.88	0.55	0.11	0.22	0.33	0.22	0.44	0.55	0.22
5	0.22	0.11	0.11	0.55	0	0.22	0.22	0.55	0.88	1.10	0.55	0.22	0.22	0.11	0.22	0.55	0.22	0.00	0.11	0.11	0.11	0.22	0.11	0.00
6	0.33	0.44	0.33	0.44	0.22	0	0.44	0.88	0.44	0.88	0.44	0.22	0.22	0.11	0.22	0.99	0.55	0.11	0.22	0.33	0.11	0.22	0.11	0.11
7	0.55	0.22	0.11	0.44	0.22	0.44	0	1.10	0.66	2.09	0.55	0.77	0.44	0.22	0.55	1.54	1.10	0.22	0.44	0.55	0.22	0.55	0.22	0.11
8	0.88	0.44	0.22	0.77	0.55	0.88	1.10	0	0.88	1.76	0.88	0.66	0.66	0.44	0.66	2.42	1.54	0.33	0.77	0.99	0.44	0.55	0.33	0.22
9	0.55	0.22	0.11	0.77	0.88	0.44	0.66	0.88	0	3.08	1.54	0.66	0.66	0.66	0.99	1.54	0.99	0.22	0.44	0.66	0.33	0.77	0.55	0.22
10	1.43	0.66	0.33	1.32	1.10	0.88	2.09	1.76	3.08	0	4.40	2.20	2.09	2.31	4.40	4.84	4.29	0.77	1.98	2.75	1.32	2.86	1.98	0.88
11	0.55	0.22	0.33	1.65	0.55	0.44	0.55	0.88	1.54	4.29	0	1.54	1.10	1.76	1.54	1.54	1.10	0.11	0.44	0.66	0.44	1.21	1.43	0.66
12	0.22	0.11	0.22	0.66	0.22	0.22	0.77	0.66	0.66	2.20	1.54	0	1.43	0.77	0.77	0.77	0.66	0.22	0.33	0.44	0.33	0.77	0.77	0.55
13	0.55	0.33	0.11	0.66	0.22	0.22	0.44	0.66	0.66	2.09	1.10	1.43	0	0.66	0.77	0.66	0.55	0.11	0.33	0.66	0.66	1.43	0.88	0.88
14	0.33	0.11	0.11	0.55	0.11	0.11	0.22	0.44	0.66	2.31	1.76	0.77	0.66	0	1.43	0.77	0.77	0.11	0.33	0.55	0.44	1.32	1.21	0.44
15	0.55	0.11	0.11	0.55	0.22	0.22	0.55	0.66	1.10	4.40	1.54	0.77	0.77	1.43	0	1.32	1.65	0.22	0.88	1.21	0.88	2.86	1.10	0.44
16	0.55	0.44	0.22	0.88	0.55	0.99	1.54	2.42	1.64	4.84	1.54	0.77	0.66	0.77	1.32	0	3.08	0.55	1.43	1.76	0.66	1.32	0.55	0.33
17	0.44	0.22	0.11	0.55	0.22	0.55	1.10	1.54	0.99	4.29	1.10	0.66	0.55	0.77	1.65	3.08	0	0.66	1.87	1.87	0.66	1.87	0.66	0.33
18	0.11	0.00	0.00	0.11	0.00	0.11	0.22	0.33	0.22	0.77	0.22	0.22	0.11	0.11	0.22	0.55	0.66	0	0.33	0.44	0.11	0.33	0.11	0.00
19	0.33	0.11	0.00	0.22	0.11	0.22	0.44	0.77	0.44	1.98	0.44	0.33	0.33	0.33	0.88	1.43	1.87	0.33	0	1.32	0.44	1.32	0.33	0.11
20	0.33	0.11	0.00	0.33	0.11	0.33	0.55	0.99	0.66	2.75	0.66	0.55	0.66	0.55	1.21	1.76	1.87	0.44	1.32	0	1.32	2.64	0.77	0.44
21	0.11	0.00	0.00	0.22	0.11	0.11	0.22	0.44	0.33	1.32	0.44	0.33	0.66	0.44	0.88	0.66	0.66	0.11	0.44	1.32	0	1.98	0.77	0.55
22	0.44	0.11	0.11	0.44	0.22	0.22	0.55	0.55	0.77	2.86	1.21	0.77	1.43	1.32	2.86	1.32	1.87	0.33	1.32	2.64	1.98	0	2.31	1.21
23	0.33	0.00	0.11	0.55	0.11	0.11	0.22	0.33	0.55	1.98	1.43	0.77	0.88	1.21	1.10	0.55	0.66	0.11	0.33	0.77	0.77	2.31	0	0.77
24	0.11	0.00	0.00	0.22	0.00	0.11	0.11	0.22	0.22	0.88	0.66	0.55	0.77	0.44	0.44	0.33	0.33	0.00	0.11	0.44	0.55	1.21	0.77	0

表 6.1-11 Sioux Falls 城市路網資訊

$C_a(f_a, y_a) = A_a + B_a \left(\frac{f_a}{(K_a + y_a)} \right)^4 \quad Z(y) = \sum_a C_a(f_a, y_a) f_a + 0.001 d_a y_a^2$									
路段a	A_a (hours)	B_a (hours)	K_a (thousand vehicles)	d_a (thousand dollars)	路段a	A_a (hours)	B_a (hours)	K_a (thousand vehicles)	d_a (thousand dollars)
1 與 3	0.06	0.0090	25.9002		33 與 36	0.06	0.0090	4.9088	
2 與 5	0.04	0.0060	23.4035		34 與 40	0.04	0.0060	4.8765	
4 與 14	0.05	0.0075	4.9582		37 與 38	0.03	0.0045	25.9002	
6 與 8	0.04	0.0060	17.1105		39 與 74	0.04	0.0060	5.0913	34.00
7 與 35	0.04	0.0060	23.4035		41 與 44	0.05	0.0075	5.1275	
9 與 11	0.02	0.0030	17.7828		42 與 71	0.04	0.0060	4.9248	
10 與 31	0.06	0.0090	4.9088		45 與 57	0.04	0.0060	15.6508	
12 與 15	0.04	0.0060	4.9480		46 與 67	0.04	0.0060	10.3150	
13 與 23	0.05	0.0075	10.0000		49 與 52	0.02	0.0030	5.2299	
16 與 19	0.02	0.0030	4.8986	26.00	50 與 55	0.03	0.0045	19.6799	
17 與 20	0.03	0.0045	7.8418	40.00	53 與 58	0.02	0.0030	4.8240	
18 與 54	0.02	0.0030	23.4035		56 與 60	0.04	0.0060	23.4035	
21 與 24	0.10	0.0150	5.0502		59 與 61	0.04	0.0060	5.0026	
22 與 47	0.05	0.0075	5.0458		62 與 64	0.06	0.0090	5.0599	
25 與 26	0.03	0.0045	13.9158	25.00	63 與 68	0.05	0.0075	5.0757	
27 與 32	0.05	0.0075	10.0000		65 與 69	0.02	0.0030	5.2299	
28 與 43	0.06	0.0090	13.5120		66 與 75	0.03	0.0045	4.8854	
29 與 48	0.05	0.0075	5.1335	48.00	70 與 72	0.04	0.0060	5.0000	
30 與 51	0.08	0.0120	4.9935		73 與 76	0.02	0.0030	5.0785	

表 6.1-12 Sioux Falls 求解比較

	H-J	EDO	GEDO	SDAP1	SDAP2	SDAP3	NSDAP1	NSDAP2	NSDAP3	SA	LA
y_{16}	3.8	4.59	5.0	5.55	6.17	6.16	5.14	7.49	6.28	5.38	5.25
y_{17}	3.6	1.52	1.5	2.26	3.06	3.14	1.66	5.08	3.45	2.26	1.40
y_{19}	3.8	5.45	5.0	5.55	6.17	6.18	5.12	7.50	6.31	5.50	5.28
y_{20}	2.4	2.33	1.5	2.25	3.08	3.14	1.61	5.07	3.45	2.01	1.37
y_{25}	2.8	1.27	2.5	4.53	5.81	5.72	2.86	7.45	5.89	2.64	2.76
y_{26}	1.4	2.33	2.5	4.56	5.82	5.74	2.86	7.46	5.90	2.47	2.81
y_{29}	3.2	0.41	4.5	4.74	4.59	4.82	4.72	5.73	5.08	4.54	4.64
y_{39}	4.0	4.59	3.5	4.52	4.86	4.93	4.40	6.31	5.15	4.45	4.37
y_{48}	4.0	2.71	4.5	4.82	4.66	4.86	4.74	5.77	5.10	4.21	4.70
y_{74}	4.0	2.71	4.0	4.51	4.81	4.90	4.37	6.23	5.14	4.67	4.35
Z	81.77	83.08	84.14	83.79	84.49	84.06	83.08	87.08	86.21	80.87	81.30

*EDO : Equilibrium decomposed algorithm.

*H-J : Hooke-Jeeves algorithm.

*SDAA : Sensitivity Descent algorithm with Armijo rule

*SDAP : Sensitivity Descent algorithm – predetermined

*NSDAP : Normalized SDAP

*SA : Simulated Annealing algorithm

*LA : Linear Approximation

6.2 小結

本章節利用 Cho(1988)提出之方法求得敏感度資訊應用於路網設計問題，利用敏感度資訊之主要目的係考量在一般的情況尚無法得知用路人的反應函數，Cho(1988)透過一階泰勒展開式以線性方式近似之，使得領導與跟隨者的雙層路網設計問題可以被透過線性近似方式求解。

從 6.1.3 節開始我們引述文獻中例子以及其提出方法求得之解並加入 Linear Approximation 方求解進行觀察，從 6.1.3 節可以觀察出在小路網時，無論 MINOS、H-J、EDO 或加入 LA 後解求得之最佳解幾乎相同一致，各路段之解亦較無明顯差異，但若路網增加到 16 條路段後，不同方法所求得之解差異隨著旅次需求增加明顯增大。MINOS 為非線性規劃之套裝軟體，但因過去受限於電腦記憶體容量問題，在輸入路網資訊有其上限，無法執行太大路網之運算，故在後續已較少人使用。H-J 演算法在求解上可求得區域最佳解，Suwansirikul(1987)提到 6.1.5 節之例子為多個區域解，其將 EDO 所求得之解做為 H-J 之起始值會產生不同之最佳解，Huang 與 Zhou (2009)提到 H-J 具有很強的區間搜尋能力，但全域解收斂能力較差，且其結果會受到初始值之選取所影響，從表 6.1-7~表 6.1-9 可看出，H-J 可能求得與其他演算法相較之下較佳的解，亦有可能做出比 IOA 較差之解，EDO 在演算法中雖考量了下層目標式對上層之影響，但因下層之反應函數不容易求得，其在做隱微分時假設隱函數中下層反應函數對上層變數之導數影響不大時可直接忽略，故從表中觀察可發現需求量不大時求得之解較無影響，但需求增加時求得之解則較差，在 Sioux Falls 例子中其解劣於 H-J 求得之解。

而 Friesz 等人(1990)提出 SDAP1、SDAP2、SDAP3、NSDAP1、NSDAP2 與 NSDAP3 等方法進行求解，這些方法之差異在於求解過程之步幅不同，但在需求增加時解甚至有可能比 IOA 解還不佳，另外該文獻使用 Tobin 與 Friesz(1988)敏感度分析方法計算敏感度資訊，其也指出 16 個路段之路網可能遭遇 Jacobian 為奇異矩陣之問題，使得初始解可能為不可微分點之情形發生，而本研究以 Cho 等人(2000)敏感度分析方法求解敏感度資訊則無此問題，並利用 LA 方法求解上述結果，觀察解之結果除了較 SA 差外，其餘求得之解均較佳。

第七章 結論與建議

7.1 結論

1. 本研究針對 Tobin(1986)、Tobin 與 Friesz(1988)、Cho(1988)這三篇敏感度分析方法之使用條件、其使用上之限制進行比較。
2. 過去有一些文獻提出例子指出 Tobin 與 Friesz(1988)敏感度分析方法有誤，實際上這些例子未滿足 Tobin 與 Friesz 方法之條件，本研究說明這些例子未滿足之條件，並以 Cho 等人(2000)之敏感度分析方法順利應用在這些未滿足 Tobin 與 Friesz 條件的例子。
3. Friesz 等人(1990)發現使用 Tobin 與 Friesz(1988)敏感度分析方法求解 16 個路段（本文之例子 5）之路網時可能遭遇 Jacobian 為奇異矩陣(Singular matrix)之問題，使得初始解可能為不可微分點之情形發生，本研究以 Cho 等人(2000)敏感度分析方法求解敏感度資訊則無初始解可能為不可微分點之問題。
4. 本研究應用 Cho 等人(2000)敏感度分析於線性近似法(LA)並將其應用於求解具有 76 個路段與 552 起訖旅次之 Sioux Falls 城市路網，觀察解之結果除了較 SA 差外，其餘求得之解均較佳。
5. SA 雖有較強全域求解之能力，但若解全域最佳解離其目前區域最佳解較遠時，其仍可能有機率選擇當下之區域解，另外，其為啟發式演算法，雖透過機率可求得較佳之解，但在求解過程下層之反應模式無從而知，而本研究應用之 LA 則近似下層之反應函數，可以在求解過程中觀察反應函數之影響因素，如敏感度資訊對流量解之影響或上層決策變數對於流量之影響變化。

7.2 建議

1. 本研究以 LA 進行求解時，雖求得之解較 SA 差，但若全域最佳解離其目前區域最佳解較遠時，其仍有機率選擇當下之解，故建議未來在發展路網設計求解問題時，仍可往求得反應函數為方向。
2. 本研究在遭遇 LA 無法收斂之情形，以 Armijo 做為求解方法，但在觀察 LA 可收斂之例子，以 Armijo 求得之解之精確度較不佳，建議未來可持續觀察 LA 求解之收斂性，解決其可能無法收斂之問題。
3. 本研究以變分不等式敏感度分析以線性近似法求解雙層路網設計問題，且問題為 Stackelberg 賽局問題，未來可應用到經濟領域，用以了解市場上不同廠商之敏感度。

參考文獻

1. Abdulaal and L.J. LeBlanc(1979) “Continuous Equilibrium Network Design Models” *Transportation Research* 19-32
2. Allsop, R.E. (1974) “Some possibilities for using traffic control to influence trip distribution and route choice,” in *Transportation and Traffic Theory*, pp. 345–373, Elsevier, New York, NY, USA.
3. Cho, H-J, and S-C Lo (1999), “Solving Bilevel Network Design Problem Using Linear Reaction Function without Nondegeneracy Assumption” *Transportation Research Record*, No. 1667, pp96-106.
4. Cho, H.J., T.E. Smith and T.L. Friesz, (2000), A Reduction Method For Local Sensitivity Analyses of Network Equilibrium Arc Flows, *Transportation Research B*, 34, 31-51.
5. Cho, H.J. and Y.H. Huang., (2014) Solving Signal Control Problems with Second-Order Sensitivity Information of Equilibrium Network Flows. *Journal of Applied Mathematics*
6. Chiou, S-W. , (2004) Bi-level programming for the continuous transport network design problem. *Transportation Research Part B*,39(4), 361-383
7. Chiou, S-W. (1999) Optimization of area traffic control for equilibrium network flows. *Transportation Science*, 33(3), 279-289.
8. Chung, Byung Do & Hsun-Jung Cho & Terry L. Friesz & Henh Huang & Tao Yao,(2014) Sensitivity Analysis of User Equilibrium Flows Revisited, *Network and Spatial Economics*, Vol. 14, pp183-207.
9. Dafermos, S. C. (1980) Traffic Equilibria and Variational Inequalities, *Transportation Science*, Vol 14, pp. 42-54.
10. Dafermos, S.C. and A. Nagurney, (1984) “Sensitivity analysis for the general spatial economic equilibrium problem,” *Operations Research* 32, 1069-1086.
11. Dafermos, S.C., A. Nagurney, (1984) “Sensitivity analysis for the asymmetric network equilibrium problem,” *Mathematical Programming* 28, 174-184.
12. Dafermos S.C. and A. Nagurney, (1984) On some traffic equilibrium theory paradoxes. *Transportation Research*. 18B, 101-110.
13. Bertsekas, D. P. (1982) *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. ACADEMIC PRESS, London.
14. Fisk, C. S., (1984) Game Theory and Transportation System Modeling. *Transportation Research*, 18B, 302-314.
15. Friesz, T.L., (1985) Transportation network equilibrium, design, and aggregation: key developments and research opportunities, *Transportation Research* 19A 413-427.
16. Friesz, T. L. and P.T. Harker (1985) “Properties of the iterative optimization equilibrium algorithm” *Civil Engineering System* 2, 142-154.
17. Friesz, T.L. Tobin, R.L. Cho, H-J. and Metha, N.J. (1990), “Sensitivity Analysis Based Heuristic Algorithms for Mathematical Programming with Variational Inequality Constraints”, *Mathematical programming*, 486, pp.265-284.

18. Friesz, T.L., H-J Cho, N.J. Metha and R.L. Tobin. (1990) "A simulated annealing approach to the network design problem with variational inequality constraints." *Transportation Science* 26 (1), 18–26.
19. Huang, H-J and Y-Q Zhou (2009) "Hybrid artificial fish swarm algorithm based on mutation operator." *Computer Engineering and Application*. 45(33).
20. Hwang, M-C and H-J Cho (2016) "The Classical Braess Paradox Problem Revisited: A Generalized Inverse Method on Non-Unique Path Flow Cases" *Network and Spatial Economics*, Vol. 16, pp605-622.
21. Josefsson, M and M. Patriksson (2007) "Sensitivity analysis of separable traffic equilibrium equilibria with application to bilevel optimization in network design." *Transportation Research Part B* 41:4–31
22. Kinderlehrer, D. and G. Stampacchia (1980) *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New Work.
23. Lu, S (2008) Sensitivity of static traffic user equilibria with perturbations in arc cost function and travel demand. *Transportation Science* 42:105–123
24. LeBlanc, L.J.(1975) "An algorithm for the discrete network design problem" *Transportation Science*, 183-199
25. Marcotte, P.(1981) "Design optimal d'un reseau de transport en presence d'effets de congestion." Ph.D. Dissertation, CRT, Universitt de Montreal.
26. Murchland, J. D.,(1970) Short communication: Braess's paradox of traffic flow, *Transportation Research* 4 (1970) 391-394.
27. Nash, J.F. (1951), "Non-cooperative games," *Annual Math.* 45, 286-295
28. Patriksson, M and R. Rockafellar (2003) Sensitivity analysis of aggregated variational inequality problems with application to traffic equilibria. *Transportation Science* 37:56–68
29. Patriksson, M (2004) Sensitivity analysis of traffic equilibria. *Transportation Science* 38:258–281
30. Qiu, Y. and T. Magnanti (1989) Sensitivity analysis for variational inequalities defined on polyhedral sets. *Math Oper Res* 14:410–432
31. Smith, M. J. (1979), "The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria," *Transportation Research* 13B, 295-304.
32. Stackelberg, H. (1934) *Marktform und Gleichgewicht*. Julius Springer, Vienna.
33. Steinberg, R. and W. I. Zangwill (1983) "The prevalence of Braess' paradox." *Transport. Science* 17, 3, 301--318.
34. Steinberg, R., and R. E. Stone (1988) "The prevalence of paradoxes in transportation equilibrium problems." *Transport. Science*. 22, 4, 231--241.
35. Suwansirikul, C., T.L. Friesz and R.L. Tobin. (1987) "Equilibrium decomposed optimization: a heuristic for continuous equilibrium network design problem." *Transportation Science* 21, 254–263.
36. Tobin, R. L.(1986), Sensitivity Analysis for Variational Inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications* 48, 191-204.

37. Tobin, R. L. and T. L. Freisz, (1988) Sensitivity Analysis for Equilibrium Network Flow. *Transportation Science*, 22(4), 242-250.
38. Wardrop, J. G. (1952) "Some theoretical aspects of road traffic research," *Proc. Inst. Civil Engineers*, Part II 1, 325-378.
39. Yang, H (1997) Sensitivity analysis for the elastic-demand network equilibrium problem with applications. *Transportation Research Part B* 31:55–70
40. Yang, Hai, M. G. H. Bell (1998) A Capacity Paradox in Network Design and How to Avoid It [J]. *Transpn.Res.*32A, 539 -545.
41. Yang, H. and M. G. H. Bell, (2001) Transport bi-level programming problems: recent methodological advances, *Transportation Research* 35B 1-4.
42. Yang, H. and M. G. H. Bell (2005), Sensitivity analysis of network traffic equilibria revisited :the corrected approach, WP-HKUST-YH-2005-04-30
43. Yang H. and M. G. H. Bell (2007) Sensitivity analysis of network traffic equilibria revisited: the corrected approach. In: Heydecker BG (ed) *Mathematics in transport*. Elsevier, Netherlands, pp 373–395
44. Yen, N.D.(1995), "Lipschitz continuity of solutions of variational inequalities with a parametric polyhedral constraint," *Mathematics of Operations Research*, 695–708.
45. Zukhovitshii, S., R. Poliak and M. Primak (1973) Concave multiperson games: numerical methods. *Matekon* 11-30.
46. 卓訓榮(1991),「以廣義反矩陣方法探討均衡路網流量的敏感性分析」, 運輸計畫季刊, 第二十卷, 第一期, 頁 1~頁 14。
47. 卓訓榮(1992),「最短距離與廣義反矩陣敏感性分析方法之比較」, 運輸計畫季刊, 第二十一卷, 第一期, 頁 23-頁 24。
48. 卓訓榮(1994),「均衡路網流量之敏感度分析與路段、路徑空間轉換模式之探討」, 國科會研究報告, 國立交通大學。
49. 卓訓榮, 李治輝(1995),「靜態路網交通量指派模式與求解法之回顧」, 運輸計畫季刊, 第二十四卷, 第三期, 頁 283-頁 298。
50. 卓訓榮, 羅仕京(1999),「以廣義反矩陣之特性來推導路徑非負流量之研究」, 運輸學刊, 第十一卷, 第二期, 39-48 頁, 1999 年